UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ORIGINES ALGÉBRIQUE ET GÉOMÉTRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES ET LEUR EXTENSION AUX QUATERNIONS; FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE.

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

LUC POITRAS

AOÛT 2007

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mes co-directeurs, Messieurs Louis Charbonneau et Denis Tanguay, pour leurs généreux commentaires critiques et leur lecture minutieuse des versions successives du présent mémoire. Et en particulier Monsieur Charbonneau pour m'avoir rendu possible l'accès à certains corpus historiques.

Je remercie également les autres membres du jury, Gilbert Labelle et Stéphane Cyr, pour leurs commentaires critiques et encouragements.

J'aimerais aussi en ces pages témoigner de ma reconnaissance à Monsieur Alexandre Feimer, qui enseigna au Mont-Saint-Louis de 1964 à 1982 et que j'ai eu la chance d'avoir comme professeur alors que j'étais jeune étudiant (au Mont-Saint-Louis), pour sa passion contagieuse des mathématiques et la rigueur intellectuelle dont il faisait preuve dans son enseignement de la géométrie.

Le temps disponible d'un individu étant hélas une ressource finie, je tiens à remercier mes enfants, Gabrielle V. Poitras et Catherine P. Voyer, ainsi que ma conjointe, Carole Martin, pour leur patience et leur soutien.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

Figure

RÉSUMÉ

La première partie de ce mémoire relève les principaux problèmes de nature algébrique et géométrique qu'ont dû résoudre les mathématiciens avant d'accepter l'existence des nombres complexes; l'une des conséquences de cet exercice est de proposer l'esquisse d'une approche plus adéquate à l'enseignement des nombres complexes au collégial.
La deuxième partie présente l'approche géométrique des quaternions, tel que formulée par leur inventeur (Hamilton), puis démontre leurs principales propriétés géométriques dans le contexte de l'algèbre linéaire.
Dans la troisième partie, l'axiomatisation de l'intuition géométrique est abordée dans le contexte des fondements proposés par Hilbert en regard des géométries non euclidiennes.

Mots-clefs:
Histoire des nombres complexes; quaternions; fondements de la géométrie.

Rapportons ici les moyens par lesquels notre entendement peut s'élever à la connaissance sans crainte de se tromper. Or il en existe deux, l'intuition et la déduction. Par intuition j'entends non le témoignage variable des sens, ni le jugement trompeur de l'imagination naturellement désordonnée, mais la conception d'un esprit attentif, si distincte et si claire qu'il ne lui reste aucun doute sur ce qu'il comprend [...]. C'est ainsi que chacun peut voir intuitivement qu'il existe, qu'il pense, qu'un triangle est terminé par trois lignes, ni plus ni moins, qu'un globe n'a qu'une surface, et tant d'autres choses [...].
On peut dire que les premières propositions, dérivées immédiatement des principes, peuvent être, suivant la manière de les considérer, connues tantôt par intuition, tantôt par déduction; tandis que les principes eux-mêmes ne sont connus que par intuition, et les conséquences éloignées que par déduction.

René Descartes, *Les règles pour la direction de l'esprit* (1629, Règle troisième).

[Boyle] m'a confirmé dans cette volonté qui fut pour moi depuis longtemps, comme j'ai connu, de traiter par les démonstrations Géométriques la Science relative à la pensée.

Gottfried Wilhelm Leibniz, *4^e lettre à Maître Oldenburg* (1675, p. 11).

Les deux dernières décennies ont vu la montée et la chute de plusieurs idéologies pseudo-scientifiques de l'apprentissage des mathématiques. Des spécialistes ont soutenu les pires absurdités: par exemple, que l'on devait d'abord enseigner des choses abstraites parce que, dans le monde moderne, l'abstrait précède le concret, la théorie précède la pratique! C'est ainsi que l'on a voulu enseigner les géométries finies avant la géométrie, la théorie des groupes avant l'apprentissage des nombres, la topologie avant l'analyse, la logique formelle avant la géométrie analytique. On a voulu d'abord enseigner la synthèse de connaissances que le pauvre étudiant ne possédait pas au préalable! On appelait ça des mathématiques modernes et si personne n'y comprenait rien on en imputait la faute à une incapacité d'adaptation rapide au modernisme! [...] Ceux qui croient que la rigueur exige l'élimination des figures (À bas Euclide!) devront changer d'avis. La géométrie des figures, faisant appel à l'expérience (ou l'intuition) visuelle, est un outil merveilleux de compréhension et de calcul.

André Joyal (*in* Labelle, ca. 1975, préface)

Presqu'invariablement, le remplacement du langage algébrique par le langage géométrique apporte des simplifications considérables et fait apparaître des propriétés insoupçonnées lorsqu'elles sont enfouies sous un fatras de calculs.

Jean Dieudonné, *Pour l'honneur de l'esprit humain* (1987, p. 179)

INTRODUCTION

L'apprentissage des mathématiques est, pour l'élève, une activité teintée d'une importance subjective particulière, puisqu'elles entretiennent un rapport à la vérité.

> Faire des mathématiques ne consiste pas seulement à recevoir, apprendre et émettre des messages de mathématiques corrects et pertinents (appropriés).
>
> Énoncer un théorème, ce n'est pas communiquer une information, c'est toujours affirmer que ce que l'on dit est vrai dans un certain système, c'est se déclarer prêt à soutenir cette opinion, en donner une démonstration.
>
> Il ne s'agit donc pas seulement pour l'enfant de « savoir » des mathématiques mais de les utiliser en tant que raisons d'accepter ou de rejeter une proposition (un théorème), une stratégie, un modèle, ce qui exige une attitude de preuve. [...]
>
> En mathématique le « pourquoi » ne peut pas être appris seulement par référence à l'autorité de l'adulte. La vérité ne peut pas être la conformité à la règle, à la convention sociale comme le « beau » ou le « bon ». Elle exige une adhésion, une conviction personnelle, une intériorisation qui par essence ne peut être reçue d'autrui sans perdre justement sa valeur. [...]
>
> Le passage de la pensée naturelle à l'usage d'une pensée logique comme celle qui régit les raisonnements mathématiques s'accompagne de la construction, du rejet, de la reprise de différents moyens de preuve: rhétoriques, pragmatiques, sémantiques ou syntaxiques.
>
> (Brousseau, 1998, p. 39, 40)

Enseignée à l'enfant dès son plus jeune âge, de pair avec l'apprentissage de sa langue, la mathématique est constitutive de la formation de sa rationalité. Ce passage à une pensée logique n'est donc possible que dans la mesure où pré-existe une « pensée naturelle » indépendante de la théorie ou du modèle mathématiques analysés. Cette pensée méta-mathématique permettra de concevoir des liens entre différents modèles, de convertir les observations entre différents registres sémiotiques, entre différentes disciplines, entre différentes cultures. Il s'ensuit que si les modèles mathématiques sont présentés par les enseignants comme allant de soi, sur le mode de l'évidence, plutôt que reposant sur un choix théorique fécond issu d'une mise en situation didactique, alors cet enseignement risque de heurter la pensée naturelle de l'étudiant en usurpant à l'intuition de celui-ci son articulation originale et nécessaire. Combien d'étudiants 'décrocheront' alors de l'école en contestant cet impératif institutionnel, par manque de « conviction personnelle », et refuseront ce conformisme idéologique au nom de la liberté de pensée, avant que leurs études les aient amenés à découvrir les remises en question que les mathématiciens ont eux-mêmes historiquement tracées en inventant de nouveaux modèles à l'encontre de la tradition?

L'histoire de l'art nous montre, à travers l'évolution de la perception de la perspective, le conformisme aux codes de la représentation picturale propre à chaque époque; pensons au violent rejet qu'a subi le cubisme voilà à peine un siècle! L'histoire de l'astronomie, des modèles géocentriques jusqu'aux modèles relativistes, fourmille de situations où les physiciens ont dû se confronter aux croyances institutionnalisées, quelquefois même au péril de leur vie. De même, l'anthropologie s'est heurtée, et se heurte toujours, aux modèles anthropocentriques des croyances religieuses pour faire valoir son savoir scientifique; n'oublions pas qu'aux États-Unis, pays qui domine actuellement la planète sur les plans technologique et militaire, plusieurs lobbies influents cherchent à imposer dans les écoles l'enseignement du créationnisme ou du « dessein intelligent » à l'encontre de l'enseignement du darwinisme! Tandis que la déconfessionnalisation des écoles au Québec n'est que toute récente et reste encore à faire dans le secteur privé! Ces remises en question des idées reçues (et les résistances auxquelles elles ont donné lieu) sont généralement connues des gens instruits; mais elles le sont beaucoup moins en ce qui a trait à l'histoire des idées mathématiques.

À titre d'enseignant au collégial pendant quelque vingt-cinq années, nous avons pu observer la résistance toute particulière de la part des étudiants à admettre l'existence des nombres complexes. Cette résistance, on s'en doute, apparaît dès que l'on pose l'existence d'un nombre i tel que $i^2=-1$ ou, pis encore, lorsqu'on le définit par $i=\sqrt{-1}$. Une telle affirmation contredit en effet le savoir que l'étudiant a accumulé au sujet des nombres réels et heurte ainsi d'emblée l'intuition du nombre qu'il a développée au fil des ans.

Afin de mieux cerner la nature de cet obstacle épistémologique[1], nous avons cherché à identifier les principaux concepts qui ont amené les mathématiciens à, non seulement 'découvrir' les nombres complexes, mais aussi à accepter leur 'existence'. Nous sommes conscients que la mise en situation didactique n'a pas à reproduire les conditions historiques dans lesquelles se sont inventés les différents objets mathématiques; mais connaître la façon par laquelle d'éminents mathématiciens ont réussi, à leur époque, à franchir ces obstacles ne pourra qu'instruire notre réflexion relative à une approche des nombres complexes qui soit mieux adaptée à un enseignement de niveau collégial.

> Le travail du professeur est dans une certaine mesure inverse du chercheur, il doit produire une *recontextualisation* et une *repersonnalisation* des connaissances. Elles vont devenir la connaissance d'un élève, c'est-à-dire une réponse assez naturelle, à des conditions relativement particulières, conditions indispensables pour qu'elles aient un sens pour lui. (Brousseau, 1998, p. 50)

Dans le premier chapitre du présent mémoire, nous avons donc questionné la nature du nombre, soit l'intuition que les mathématiciens en ont eue, dans le but de cerner celle du nombre complexe. Quels y étaient les rôles respectifs des représentations algébrique et géométrique tout au long de ce cheminement historique? Dans quel contexte mathématique les nombres complexes sont-ils apparus? Leur formulation

[1] Nous pensons ici à la notion d'*obstacle épistémologique* telle que l'a exposée Gaston Bachelard (1934 et 1938).

actuelle relève-t-elle seulement d'une approche formelle, symbolique? Comment les mathématiciens en sont-ils arrivés à finalement reconnaître l'existence des nombres complexes? Nous conclurons ce chapitre en proposant une approche des nombres complexes dans l'enseignement au collégial, directement influencée par la réponse à ces questions, qui serait à même d'éviter l'obstacle épistémologique évoqué ci-dessus.

Dans le chapitre suivant, nous poursuivons le questionnement de Hamilton: alors que les rotations des vecteurs du plan peuvent s'exprimer par l'application des nombres complexes, comment pourrait-on concevoir une extension de ceux-ci — soit les quaternions — qui corresponde aux rotations dans l'espace géométrique? Nous résumerons la dernière présentation qu'en a faite l'inventeur des quaternions, puis nous montrerons comment ils peuvent être enseignés dans le cadre d'un cours d'algèbre linéaire et géométrie vectorielle.

Nous aurons observé, au cours de ces deux chapitres, comment la géométrie euclidienne a historiquement fourni une légitimité aux algorithmes algébriques et, en particulier, à l'existence des nombres complexes et des quaternions par la représentation intuitive qu'elle en offre. Nous nous demanderons, au dernier chapitre, ce sur quoi se fonde la légitimité de la géométrie euclidienne: l'axiomatique qui lui est propre doit-elle nécessairement fonder toute géométrie? La géométrie euclidienne est-elle le seul modèle qui puisse correspondre à notre intuition du 'réel'? Nous examinerons les fondements de la géométrie euclidienne et, en particulier, l'indépendance de l'axiome des parallèles (le *postulatum*) relativement aux autres axiomes, puis comparerons son axiomatique à celle de la géométrie hyperbolique.

Pour le volet historique de cette recherche, nous avons étudié certains des documents rédigés par les auteurs suivants: Platon, Viète, Bombelli, Girard, Descartes, Newton, Leibniz, Legendre, Argand, Hamilton, Hilbert et Poincaré. Pour plusieurs d'entre eux, nous dépendions des traductions françaises ou anglaises de l'original latin, grec, français ancien ou allemand. (Il y a même un cas, celui de Girard, où n'avons pu trouver que la traduction anglaise de l'original français!) Pour nous guider sur ce terrain historique, nous nous sommes largement inspirés des travaux des historiens Kline, Katz, Boyer et Flament.

Lors de ce survol historique de l'invention des nombres complexes, des quaternions et des géométries non euclidiennes, nous avons accompagné plusieurs des corpus historiques présentés de nos propres ajouts mathématiques; en particulier, tous les développements mathématiques inspirés des indications de Descartes dans sa *Géométrie* sont de nous (et clairement indiqués comme tels). De même, tout le développement mathématique de la section 2.2 (où la rotation d'un vecteur dans l'espace est calculée à l'aide de la géométrie vectorielle et exprimée sous forme équivalente à l'aide des quaternions) est de nous, notre seul guide ayant alors été d'obtenir la même équation finale $R_\theta(v) = Q\ v\ Q^{-1}$ que celle obtenue par Dieudonné (1968, p. 203) selon un cheminement formel tout autre.

Finalement, veuillez prendre note que nous avons choisi d'utiliser les notations mathématiques actuelles, sauf pour illustrer certains cas bien précis, dans le but de faciliter la lisibilité et de suivre plus aisément le développement historique d'un même objet mathématique dont la conception aurait été jalonnée à l'aide de diverses notations.

CHAPITRE I

LES NOMBRES COMPLEXES

1.1 Antiquité et Moyen-Âge

Nous chercherons en un premier temps à retracer les grands pas de l'histoire qui ont amené les mathématiciens à inventer les nombres complexes; c'est pourquoi nous nous intéresserons particulièrement au développement de la notion de nombre et à sa relation intime avec la représentation géométrique qui la sous-tendra, sans oublier l'apport de la trigonométrie dans la représentation des nombres complexes.

L'axiomatique propre à l'algèbre, que nous connaissons de nos jours, n'existait évidemment pas comme telle dans l'Antiquité. De même, les symboles algébriques que nous utilisons pour codifier les équations ne prendront leur forme définitive qu'au courant des XVII^e et XVIII^e siècles. Les règles utilisées par l'arithmétique de l'Antiquité étaient alors justifiées par référence au modèle géométrique.

En particulier, lorsque les nombres représentaient des longueurs de segments rectilignes, la *somme* correspondait à la longueur du segment résultant de l'adjonction sur une même droite de segments contigus et le *produit* à l'aire du

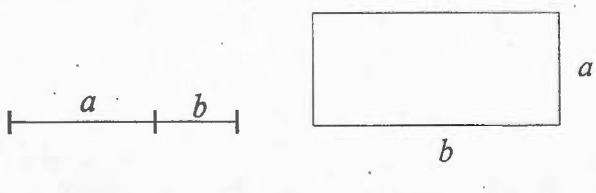

Figure 1.1: La somme $a+b$ et le produit ab

rectangle ayant ces segments comme côtés. Précisons que la géométrie, que les anciens Babyloniens ont peu développée, n'était pas étudiée pour elle-même mais pour résoudre des problèmes pratiques, le plus souvent des problèmes d'arpentage. De plus, avant la civilisation Grecque, les figures géométriques apparaissent toujours liées à l'objet matériel dont elles empruntaient la forme; ainsi, le contexte de la notion de rectangle est toujours, chez les Égyptiens, celui des limites d'un terrain. Il semble néanmoins que les Babyloniens et les Égyptiens d'alors aient pensé le nombre d'une façon plus abstraite, plus détachée des objets physiques (Kline, 1972, p. 29).

Ce sont, parmi les documents qui nous sont parvenus, surtout ceux des Anciens Babyloniens (période du roi Hammurabi, circa -1730, région de la Mésopotamie) qui contiennent plusieurs problèmes portant sur la résolution de l'équation quadratique. On n'utilisait alors ni variables ni paramètres, quoique certains symboles sumériens en désuétude pouvaient à l'occasion servir à représenter les inconnues: ce sont plutôt plusieurs exemples qui montraient l'algorithme à suivre[2]. Il est vraisemblable que, dans les problèmes couramment de la forme

$$x+y=a \text{ et } xy=b,$$

le scribe ait cherché à résoudre une relation entre l'aire et le périmètre d'un rectangle.

Voici l'algorithme suivi dans l'une des tablettes retrouvées (YBC 4663).

Le scribe calculait la moitié du nombre donné a, élevait le quotient obtenu au carré, en soustrayait l'autre nombre donné b, puis extrayait la racine carrée de la différence obtenue: $\sqrt{(a/2)^2-b}$. Ensuite, il ajoutait ou soustrayait la racine obtenue à $a/2$ pour obtenir les valeurs cherchées

$$x=(a/2)+\sqrt{(a/2)^2-b} \quad \text{et} \quad y=(a/2)-\sqrt{(a/2)^2-b}.$$

Une lecture approfondie de cette tablette laisse penser que le scribe avait en tête un

---

2 Tout comme le faisait le papyrus égyptien rédigé par le scribe Ahmes, environ en −1600, et découvert en 1858 par l'antiquaire écossais Henry Rhind.

processus géométrique (Katz, 1993, p. 32). Ainsi, pour déterminer les longueurs x, y des côtés d'un rectangle de demi-périmètre a et d'aire b donnés, donc tels que $x+y=a$ et $xy=b$, le calcul effectué par le scribe aurait pu s'appuyer sur la méthode géométrique suivante (fig. 1.2).

Soit $x \geq y > 0$; puisque $\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=x$ et $\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}=y$, on construit le rectangle de côtés $x=\frac{a}{2}+\frac{x-y}{2}$ et $y=\frac{a}{2}-\frac{x-y}{2}$ d'où, en comparant les aires du rectangle de côtés x, y et du carré de côtés $a/2$, il résulte que $b=xy=\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2>0$. Cette complétion du carré permet ainsi de déterminer la longueur $\frac{x-y}{2}=\sqrt{(a/2)^2-b}$, d'où

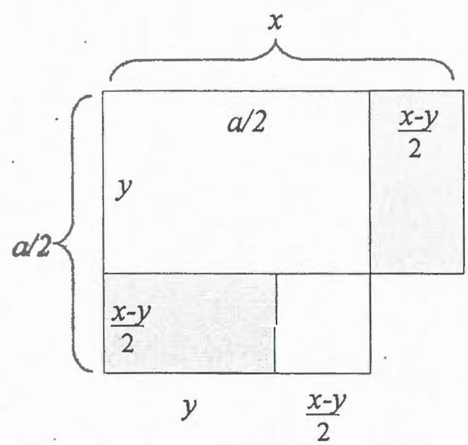

Figure 1.2: Complétion du carré

$$x=(a/2)+\sqrt{(a/2)^2-b} \quad \text{et} \quad y=(a/2)-\sqrt{(a/2)^2-b}.$$

Cette méthode équivaut, algébriquement, à résoudre l'équation $x^2-2ax+b=0$ lorsque les constantes a, b et le discriminant sont positifs; il suffit en effet de substituer $y=2a-x$ dans l'équation $xy=b$. Pour résoudre cette équation, les cours d'algèbre élémentaire actuels utilisent la méthode dite de la complétion du carré $x^2-2ax+b=0 \Leftrightarrow (x-a)^2=a^2-b$, sans toutefois nécessairement référer au modèle géométrique qui en est à l'origine. Remarquons que cette méthode géométrique comporte sa propre délimitation des cas possibles: on ne peut en effet compléter l'aire (positive) b du rectangle de côtés de longueurs (positives) x, y jusqu'à celle du carré de côtés de longueur (positive) a que dans la mesure où $a^2 - b$ est positif[3].

Sous la période Assyrienne (ca. -VII[e] s), l'astronomie babylonienne commencera à inclure une description mathématique des phénomènes et une compilation systématique des données obtenues par l'observation (de sorte à établir un calendrier des activités agraires et des célébrations religieuses). C'est dans ce contexte que l'astronomie babylonienne divisera le cercle en 360 degrés; leur numération est positionnelle, en base sexagésimale (Kline, 1972, p. 12-13).

Mais en ce qui concerne une argumentation explicite fondée sur des inférences logiques, les documents les plus anciens que nous connaissons aujourd'hui où l'on en trouve la trace datent de l'Antiquité grecque[4]. Alors qu'on attribue au mathématicien, physicien, astronome, géographe et philosophe grec Thalès de Milet (ca. -624 – -547) certains énoncés mathématiques généraux, il n'est toutefois pas certain que ceux-ci aient été appuyés sur une telle argumentation logique explicite. Néanmoins, dès le -IV[e] siècle, les Grecs reconnaîtront Thalès comme l'initiateur de la tradition mathématique et plus généralement de l'entreprise scientifique, en particulier de la recherche de lois gouvernant les phénomènes physiques (Katz, 1993, p. 44; Kline, 1972, p. 28; Dieudonné, 1987, p. 46). Il est généralement admis que les théorèmes énoncés par le philosophe, mathématicien et astronome[5] grec Pythagore (ca. -580 – -490), qui aurait reçu l'enseignement de Thalès, comportaient des démonstrations à proprement parler. Pythagore, qui fonda son École à Crotone au sud de l'Italie, considère les entités mathématiques, et en particulier les figures géométriques, comme des abstractions propres à l'esprit, distinguées en cela des objets physiques, sans toutefois en être détachées; de plus, le nombre est pensé comme l'essence ou la

---

[3] Les cas où $a^2 - b < 0$ étaient exclus car pour $x, y \in \mathbb{R}$, le maximum atteint par $b = xy$, lorsque $x + y = 2a$, est a^2.

[4] Les sources de la Grèce Antique auxquelles nous avons accès proviennent des codices Grecs Byzantins, des traductions Arabes et de versions latines basées sur ces dernières (Kline, 1972, p. 24).

[5] Pythagore aurait enseigné la sphéricité de la Terre et du Soleil.

structure de l'univers, comme son ultime composant matériel. Il semble en effet que l'École Pythagoricienne des -VI[e] et -V[e] siècles conçoivent les nombres comme des points ou petites sphères géométriques (Kline, 1972, p. 29). On retrouve aussi cette représentation géométrique des nombres avec les nombres *triangulaires*, *carrés* et autres nombres dits *polygonaux* (dont la preuve de certaines propriétés arithmétiques sera conduite à l'aide de figures géométriques). Ainsi, les nombres de la suite 1, 3,

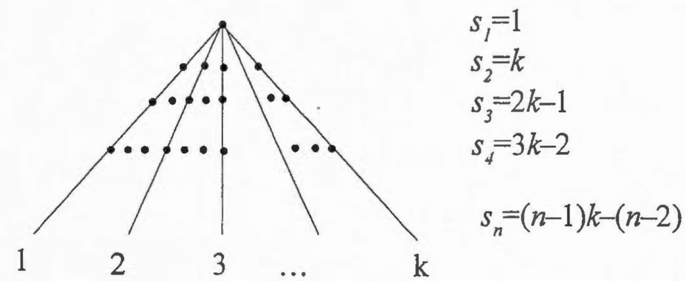

Figure 1.3: Nombres polygonaux à k+1 côtés

6, 10, 15, ... seront dits triangulaires, ceux de la suite 1, 4, 9, 16, 25, ... seront dits carrés, etc. Plus précisément, on peut représenter la suite S_n des nombres polygonaux à k+1 'côtés' comme à la figure 1.3, où

$$S_1=1 \quad \text{et} \quad S_n=S_{n-1}+s_n \quad \text{avec} \quad s_n=(n-1)k-n+2\,.$$

On obtient ainsi la suite n des nombres naturels (k=1), la suite $n(n+1)/2$ des nombres triangulaires (k=2), la suite n^2 des nombres carrés (k=3), la suite $n(3\text{n}-1)/2$ des nombres pentagonaux (k=4) et, en général, la suite $S_n=n[(k-1)(n-1)+2]/2$ des nombres polygonaux à k+1 'côtés'.

La propriété que l'on nomme aujourd'hui *théorème de Pythagore* aurait toutefois été bien connue des Anciens Babyloniens et des Chinois. Ainsi, une tablette de nombres Babylonienne datant de -1700 (tablette de Plimpton 322) contient une liste de nombres vérifiant cette propriété. On retrouve plus explicitement cette propriété dans le neuvième chapitre du texte chinois *Zhoubi suanjing*, texte écrit vers le début de la dynastie des Han (ca. -200), mais dont on admet généralement qu'il reprend des découvertes déjà connues en Chine depuis le début de la dynastie des Zhou (ca.

-1000). Le quatorzième problème de ce chapitre (Katz, 1993, p. 29-30) donne en effet un algorithme permettant de générer les triplets vérifiant le théorème dit de Pythagore $a^2+b^2=c^2$: dans notre notation, ceci revient aux formules $a=xy$, $b=(x^2-y^2)/2$ et $c=(x^2+y^2)/2$. On y retrouve aussi une illustration géométrique de cette propriété par la construction d'un carré basé sur l'itération d'un triangle-rectangle de côtés mesurant 3, 4 et 5 unités. Le commentaire qui accompagne cette construction comporte les étapes cruciales de ce que serait une preuve plus générale; étant donné l'importance ultérieure du théorème de Pythagore, voici donc la preuve que ce commentaire ancien inspire.

Soit un carré de côtés mesurant $a+b$, où $a \geq b$. On construit à l'intérieur de ce carré quatre rectangles de côtés a et b dont on trace les diagonales (voir fig. 1.4). Ces diagonales ont donc la même longueur, nommée c, et forment les côtés d'un carré. (Nous verrons qu'une conséquence bien connue du 5[e] postulat d'Euclide est que la somme des angles aigus d'un triangle-rectangle est 90°; ceci équivaut à affirmer l'existence du rectangle et que les deux triangles-rectangles qui le subdivisent sont congruents). Il en résulte que l'aire du grand carré est égale à la somme des aires du carré de côtés c et des quatre triangles-rectangles extérieurs de côtés a, b. Donc

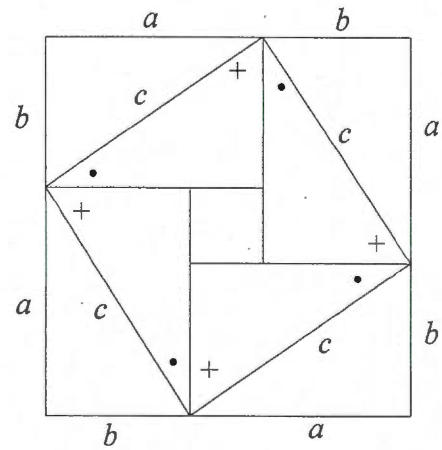

Figure 1.4: Théorème de Pythagore

$$(a+b)^2=c^2+4ab/2, \text{ c.-à-d. } a^2+b^2=c^2.$$

Une des conséquences majeures dudit théorème de Pythagore fut la découverte des grandeurs irrationnelles (les ratios incommensurables, alors dits 'inexpressibles'), que l'on attribue au pythagoricien Hippasus de Métaponte (-V[e] siècle). Cette preuve, qui nous fut rapportée par Aristote, constitue le premier exemple connu à ce jour d'un raisonnement par l'absurde[6]. En voici la démarche.

Soit un triangle-rectangle isocèle et supposons que l'hypoténuse puisse être mesurée par une même unité que l'un de ses côtés. En prenant la plus grande unité de mesure possible, et en nommant q le nombre entier d'unités de son côté et p celui de son hypoténuse, il s'ensuit que p et q ne peuvent être tous deux des entiers pairs (sinon on aurait pu doubler cette unité de mesure). Or, par le théorème de Pythagore, on a $p^2=2q^2$; p^2 serait donc pair, d'où p aussi: soit $p = 2k$ pour un certain entier k. Il s'ensuit que $q^2=2k^2$: q^2 serait donc pair, d'où q aussi; ceci contredit donc l'hypothèse d'existence de cette commune unité de mesure. Il s'ensuit que le ratio p/q de l'hypoténuse (du triangle-rectangle isocèle) par son côté est incommensurable.

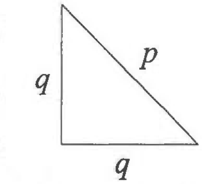

Figure 1.5: Ratio incommensurable p/q

Or cette découverte allait à l'encontre de la philosophie pythagoricienne selon laquelle toutes les longueurs peuvent être mesurées à l'aide d'une « commune mesure »; autrement dit, il y aurait des grandeurs qui ne sont pas rationnelles. Ainsi, c'est grâce au raisonnement déductif comme méthode de preuve, ce sur quoi les Grecs sont reconnus comme les premiers à avoir insisté, que les mathématiciens ont pu remettre en question une thèse philosophique ayant trait aux mathématiques. Et c'est grâce à la géométrie que l'existence de grandeurs non rationnelles devra être tenue pour nécessaire.

Alors que l'arithmétique et la géométrie se révèlent être indispensables dans la conduite des affaires courantes (commerce, mesures agraires, navigation, ...), leur connaissance sera aussi considérée par le philosophe grec Platon (-428 – -347) comme fondamentale dans la formation intellectuelle du chef d'État idéal et du

[6] Cette méthode de preuve s'avérera être un outil essentiel de la logique mathématique. « Certains y voient même le véritable acte de naissance des mathématiques; c'est aussi le premier exemple d'une affirmation d'*impossibilité* » (Dieudonné, 1987, p. 47).

philosophe; disciple de Socrate, il écrit, dans son ouvrage *La République*, que cette formation devrait inclure les cinq disciplines suivantes: l'arithmétique, la géométrie plane, la géométrie des solides, l'astronomie et la musique (l'harmonie).

> L'art du calcul et [...] l'arithmétique [...] paraissent [...] capables de conduire à la vérité [...]; quant au philosophe qui doit s'attacher à l'Être en se dégageant du devenir, il doit [...] les apprendre, ou alors il ne deviendra jamais expert dans l'art du raisonnement. [...] Il serait dès lors approprié [...] de se porter vers l'art du calcul et de s'y appliquer [...] dans le but d'atteindre la contemplation de la nature des nombres par l'intellection elle-même [...], en ayant pour finalité [...] cette conversion naturelle de l'âme, qui se dégage du devenir et se tourne vers la vérité et vers l'Être. [...]
> Cet art force [l'âme] à dialoguer au sujet des nombres eux-mêmes, en n'acceptant en aucun cas, si on dialogue avec elle, de faire intervenir des nombres attachés à des corps visibles ou tangibles. [...]
> Il faut [...] qu'on étudie la géométrie en vue de la connaissance de ce qui est toujours, et non de ce qui se produit à un moment donné puis se corrompt. [...] Elle serait dès lors capable [...] de tirer l'âme vers la vérité.
>
> (Platon, *La république*, VII, passages 525 a,b,c et 527 b)

Platon affirme que les concepts mathématiques sont indépendants de l'expérience et ont leur réalité propre (Kline, 1972, p.46). Ce qui, d'après le biographe Plutarque (ca. 47–125), l'amena à condamner l'illustration mécanique des constructions géométriques employée par l'astronome et philosophe grec Eudoxe de Cnide (-406 – -355) et le mathématicien, astronome, homme d'État et général grec Archytas de Tarente (-430 – -348). Plus généralement, cette répudiation aurait eu pour effet de faire négliger le développement des sciences expérimentales pendant la période Grecque classique.

En ce qui concerne plus particulièrement la notion de nombre, le platonicien Théétète d'Athènes (ca.-415 – -368) étend celle-ci en y incluant les 'quantités' irrationnelles, dans la mesure toutefois où celles-ci s'obtiennent par une construction géométrique, en particulier à l'aide du théorème de Pythagore. Nous verrons que cette attitude dirions-nous de 'méfiance' face à leur nécessaire existence perdurera pendant deux millénaires.

Cette idée d'inférence logique, grâce à laquelle l'existence de certains objets se déduit de certains autres dont on accepte *a priori* l'existence, sera généralisée par l'illustre étudiant de Platon à l'Académie, le philosophe grec Aristote (-384 – -322), qui fonda à Athènes une école philosophique et scientifique: le Lycée. Son œuvre *Organon* a dominé l'histoire de la logique pendant plus d'un millénaire! En particulier, Aristote y fait la distinction entre les postulats (nous dirions axiomes propres à un modèle) et les vérités universelles (axiomes logiques de portée générale). Ainsi, seuls certains objets peuvent être postulés exister (par exemple, en géométrie: les lignes, les surfaces,...), l'existence des autres devant être inférée par syllogismes. La quête du savoir reposerait alors sur une démonstration logique s'appuyant sur des axiomes vrais; reste à déterminer la véracité de tels axiomes: peut-on l'induire de l'observation de maints exemples perçus par nos sens?

Le chef militaire grec Alexandre le Grand, ex-étudiant[7] d'Aristote, conquit l'Égypte en -332 et la Mésopotamie en -330, ce qui entraîna un déplacement des principaux centres de mathématiques grecs vers la ville d'Alexandrie, en Égypte. Par suite, la culture grecque dominera la région jusqu'au VII^e^ siècle.

Le mathématicien grec Euclide (-III^e^ siècle), qui a probablement étudié à l'Académie de Platon puis enseigné à Alexandrie, a écrit le chef-d'œuvre *Éléments*, synthèse en treize livres de plusieurs sources, probablement grecques, babyloniennes et égyptiennes; ce fut le texte scientifique le plus publié et traduit de l'histoire, et enseigné jusqu'à nos jours. Les *Éléments* portent sur la géométrie et la théorie des nombres et des proportions entre les grandeurs. Pour la partie concernant la géométrie, les postulats énoncés par Euclide présupposent l'existence d'objets introduits par vingt-trois définitions (quoique ceux-ci apparaissent souvent comme

---

[7] « Trois années suffirent à Aristote pour enseigner à Alexandre ce qu'il avait à savoir de la géométrie, de la géographie, de la morale, du droit, de la physique, de la médecine, de l'histoire et de la philosophie » (Druon, 1960, p. 79).

termes primitifs[8]): points, lignes (courbes et droites), surfaces (courbes et planes), cercles, parallèles, angles (curvilignes et rectilignes), angle droit et leurs inter-relations; en particulier, rappelons la formulation de deux importantes définitions pour la suite de notre recherche, soit les définitions 10 et 23:

> Lorsque deux droites se rencontrent en formant deux angles adjacents égaux, on dit qu'elles sont perpendiculaires et que les angles ainsi formés sont droits.
>
> Deux droites parallèles sont des droites qui, situées dans un même plan et prolongées indéfiniment, n'ont aucun point en commun.

Les déductions seront menées par des constructions selon des *notions communes*[9]. Les trois premiers postulats concernent la construction (à l'aide d'une règle et d'un compas) des droites, de leur prolongement continu et du cercle; le quatrième énonce l'égalité de tous les angles droits et le cinquième est le postulat des parallèles, que la tradition a depuis nommé *postulat d'Euclide* ainsi que *postulatum*:

> Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits (Euclide, *Les éléments; in* Voelke, 2005, p. 13).

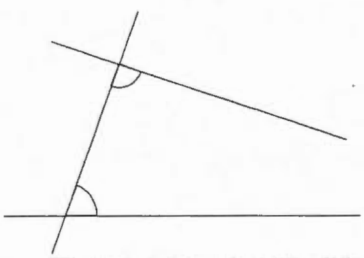

Figure 1.6: Postulat d'Euclide

Plusieurs générations de mathématiciens ont depuis cherché, en vain, à démontrer ce cinquième postulat sur la base des autres axiomes, jusqu'à ce que Lobatchevski et Bolyai inventent la géométrie hyperbolique au XIX[e] siècle (voir chapitre III).

---

[8] Soit des termes non définis techniquement même si suggestifs (Trudeau, 1987, p. 30, p. 97).

[9] Selon l'édition de T. L. Heath, ces notions communes sont: 1) Des choses égales à une même chose sont égales entre elles 2) Si des égaux sont ajoutés à des égaux, les totalités sont égales 3) Si des égaux sont soustraits à des égaux, les restes sont égaux 4) Des choses qui coïncident l'une à l'autre sont égales entre elles 5) Le tout est plus grand que la partie. Cette quatrième notion, qui fut peut-être ajoutée au texte original d'Euclide, devrait plutôt apparaître parmi les postulats, puisqu'elle a une portée géométrique; elle fonde le principe de superposition des figures géométriques (M. Kline, 1972, p. 59-60).

Contrairement à la tradition qui a suivi, selon laquelle ces postulats relèveraient de 'l'évidence' (par exemple chez Adrien-Marie Legendre au XVIII[e] siècle), Euclide a partagé la distinction opérée par Aristote entre *postulats* et *notions communes*, en ce que la vérité des *postulats* n'a pas à être démontrée, mais testée par l'adéquation de leurs conséquences à la 'réalité'.

La construction géométrique sert alors de preuve à des énoncés qu'aujourd'hui nous reconnaissons d'emblée comme algébriques. Ainsi, l'énoncé $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ se lit comme suit à la proposition 4 du livre II :

> Si un segment de droite est découpé arbitrairement en deux segments, le carré du tout est égal aux carrés reposant sur ces segments et au double du rectangle les ayant pour côtés.

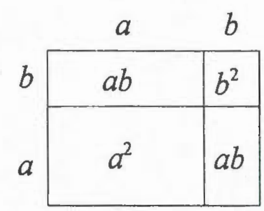

Figure 1.7: Carré d'une somme

Il est remarquable que cette illustation géométrique serve encore souvent, de nos jours, à convaincre l'étudiant en difficultés d'apprentissage de la justesse de cette identité algébrique et qu'elle marque suffisamment sa compréhension de sorte à déconstruire la fausse simplification $(a+b)^2=a^2+b^2$.

Le livre V des *Éléments* porte sur la théorie des proportions entre *ratios* de 'grandeurs', que celles-ci soient commensurables ou non, pouvant tout autant désigner des longueurs que des aires, des mesures de poids, etc. La preuve des propositions qu'on y retrouve ici n'est en général plus géométrique (sauf à titre d'illustration) mais verbale, argumentée sur la base des *notions communes.* Ces propositions énoncent ce que nous qualifierions aujourd'hui de propriétés arithmétiques portant sur l'égalité de quotients; or ces ratios (ou rapports) de grandeurs sur l'égalité desquels portent les proportions ne sont pas pensés par Euclide et les Grecs de cette époque comme des nombres, comme des quotients — en particulier, le rapport entre deux nombres entiers n'est pas pensé comme un nombre (rationnel). Seule la proportion est ici en jeu (Kline, 1972, p. 68-73).

À la proposition 13 du livre VI, Euclide illustre comment déterminer la moyenne proportionnelle entre deux segments de droite; d'un point-de-vue algébrique, ceci revient à déterminer la racine carrée (positive) du produit de deux nombres positifs. Il est remarquable que cette illustration soit reprise telle quelle par Descartes dans sa *Géométrie*, soit presque deux millénaires plus tard (voir section 1.3)! Voici comment cette proposition découle de la proposition 4 portant sur la proportion entre les côtés homologues des triangles semblables (Kline, 1972, p. 74).

Soient deux nombres positifs a et b ; on construit le diamètre CD subdivisé en H de sorte que $m(\mathrm{DH})=a$ et $m(\mathrm{HC})=b$. Soit HE la perpendiculaire au diamètre qui intercepte le cercle au point E et $m(\mathrm{HE})=x$. On sait que l'angle E du triangle DEC est droit, donc $\sphericalangle$HDE ≡ $\sphericalangle$HEC et $\sphericalangle$HCE ≡ $\sphericalangle$HED; d'où, par similitude des triangles-rectangles ΔDHE et ΔEHC, on a les proportions $\frac{x}{a}=\frac{b}{x}$, donc $x=\sqrt{ab}$.

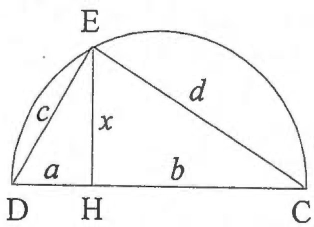

Figure 1.8: Racine carrée d'un produit

Les livres VII, VIII et IX portent sur la théorie des nombres (entiers positifs), le livre X tente de classifier les irrationnels, soient les grandeurs incommensurables à d'autres grandeurs, les irrationnels considérés étant ceux qui correspondent à des constructions géométriques. Les livres XI, XII et XIII portent sur la géométrie des solides.

Une autre approche de l'algèbre et de la géométrie est celle de l'astronome et mathématicien grec Hipparque de Nicée (ca. -180 – -125), reconnu comme le fondateur de la trigonométrie. Servant à résoudre des problèmes d'astronomie, elle sera d'emblée une trigonométrie sphérique, accessoirement plane. Celle-ci portera principalement sur le calcul de longueur de la corde supportant un arc de cercle; on lui doit, en particulier, la formule équivalente à $\sin(\alpha/2)$. Reconnu aussi comme fondateur de l'astronomie de position (système de coordonnées basées sur l'équateur céleste), Hipparque établit des tables précises du mouvement de la Lune et du Soleil et découvrit la précession des équinoxes. On lui doit incidemment la division du degré en minutes et secondes. Le mathématicien grec Menelaüs d'Alexandrie (fin du Ier siècle) démontrera, dans son ouvrage *Sphœrica*, maints théorèmes de la trigonométrie sphérique, en particulier ce que nous nommons aujourd'hui la loi des sinus dans un triangle sphérique. L'astronome, mathématicien et géographe égyptien Claudius Ptolémée (Alexandrie, ca. 90–168), dans son *Almageste* (ou *Grande Syntaxe*) prolongeant les travaux de Hipparque et de Menelaüs, espère même fonder l'astronomie sur la base de l'arithmétique et de la géométrie. Ptolémée démontrera entre autres des formules équivalentes à ce que nous notons $\sin(\alpha \pm \beta)$ et $\cos(\alpha \pm \beta)$. Il est le premier à dresser une table trigonométrique de pas 1/2 degré. Les théorèmes démontrés par Ptolémée ne relèvent pas d'une approche systématique de la trigonométrie sphérique mais sont introduits pour résoudre des problèmes d'astronomie[10].

Jusqu'alors, la logique des opérations arithmétiques était justifiée par des algorithmes géométriques. Le mathématicien grec Nicomaque de Gerasa (fin du Ier s.) a écrit le livre d'arithmétique, *Introductio Arithmetica*, qui est actuellement reconnu comme le premier livre où la théorie des nombres est traitée indépendamment de la géométrie (Katz, 1993, p. 158; Kline, 1972, p. 135). Toutefois, il consiste surtout en un préambule à la compréhension des philosophies de Pythagore et Platon plutôt qu'en un développement de la théorie des nombres (Boyer, 1968, p. 200-201). Il s'inscrit dans la tradition pythagoricienne en maintenant que l'arithmétique est mère de la géométrie, de la musique et de l'astronomie, donc essentielle à toutes les sciences.

---

[10] Son modèle géocentrique de l'Univers dominera l'astronomie jusqu'à ce que soit adopté le modèle héliocentrique présenté par Nicolas Copernic (1473–1543). C'est en combinant les observations de Ptolémée et de Copernic que le mathématicien et astronome allemand Erasmus Reinhold (1511–1553) assigna à l'année une longueur de 365 jours 5h 55m 58s, détermination qui fut adoptée pour la réforme du calendrier grégorien (Luminet, 2006, p. 371).

Explorant plus avant cette avenue, le mathématicien grec Diophante (de l'école d'Alexandrie, ca. 325–410) développera, dans son ouvrage *L'arithmétique*, une arithmétique émancipée de son interprétation géométrique en étudiant, par exemple, les puissances supérieures à 3 (qui ne représenteraient donc pas, sous cette forme, une longueur, une aire ou un volume); l'exécution des opérations y est strictement arithmétique, sans justification géométrique.

Ainsi, pour résoudre une équation qui, dans notre notation, serait de la forme $Ax^3+Bx^2+Cx+D^2=y^2$, il effectue la substitution $y=\frac{C}{2D}x+D$, ce qui lui permettra d'obtenir l'équation simplifiée $\left(Ax+B-\frac{C^2}{4D^2}\right)x^2=0$.

Diophante est considéré comme le premier à introduire un symbole pour désigner l'inconnue d'une équation; toutefois, les constantes des équations qu'il analyse sont toujours des nombres donnés (et non des paramètres). Contrairement à Euclide, il considère que le ratio de deux nombres entiers est un nombre (rationnel). Il ne considérera que les racines rationnelles positives des équations quadratiques analysées, le cas échéant (Kline, 1972, p. 141-143).

La dislocation de l'Empire romain en Empire d'Occident et d'Orient résulta, en 476, en l'effondrement de sa partie occidentale, tandis que sa partie orientale sera à l'origine du futur Empire Byzantin. Celui-ci verra par la suite son territoire être amputé, en particulier de l'Égypte en 639–642, sous l'invasion des armées Islamiques. Les violents affrontements entre partisans des religions polythéiste, chrétienne et musulmane expliquent en partie les entraves à la libre circulation des idées, en particulier de la pensée mathématique issue des Grecs. Ce n'est qu'après un siècle de conquêtes militaires que les conditions favorables à une reprise de la vie culturelle réapparaîtront peu à peu dans le monde arabe.

Le mathématicien et astronome Mohammed ibn-Musa al-Khwãrizmi (ca. 850) fut un des membres de la « Maison de la sagesse », établie à Bagdad sous le califat d'Al-

Mamum (809–833). Cette institution encouragea la traduction des grandes œuvres, en particulier grecques et indiennes. Les mathématiciens arabes d'alors adopteront l'attitude indienne consistant à considérer comme nombres autant les irrationnels que les rationnels; toutefois, ils rejetteront l'existence des nombres négatifs. Son livre *Kitãb al-jam 'wal tafriq bi hisab al-Hind* (*Livre sur l'addition et la soustraction d'après la méthode des Indiens*) aida à répandre la numération indienne, d'où nous vient notre numération dite arabe. Son traité *Al-kitab al-Muhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabalah*, dont le mot *al-jabr* est à l'origine du mot 'algèbre', se voulait un manuel pratique aidant à résoudre les problèmes arithmétiques rencontrés lors des calculs d'héritage, d'évaluation foncière et autres situations auxquelles étaient couramment confrontés ses contemporains. Malgré cet aspect pratique, al-Khwãrizmi a toutefois senti le besoin de soutenir ses algorithmes algébriques par des arguments géométriques (Katz, 1993, p. 229).

Voici comment al-Khwãrizmi résout l'équation

$$x^2+2ax=p \text{ , où } a, p>0.$$

L'aire totale A du carré de côtés $a+x$ (figure 1.9) étant $A=x^2+2ax+a^2$, alors $A=p+a^2$; la solution positive (la seule envisagée) est donc $x=\sqrt{p+a^2}-a$.

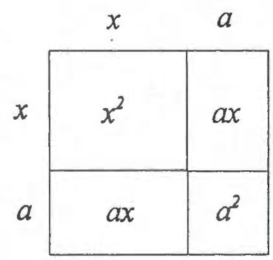

Figure 1.9
Méthode d'al-Khwãrizmi

Dans son texte *Algèbre* (ca. 1079), le mathématicien, astronome, poète et philosophe Umar al-Khayyãmĩ (Ispahan, ca. 1048–1123) proposa une construction géométrique à l'aide de coniques (Kline, 1972, p. 74; Katz, 1993, p. 224) pour résoudre l'équation

$$x^3+px=q \text{, où } p, q>0.$$

Cette équation nous intéresse d'autant plus que son analyse sera à l'origine de la découverte par Cardano des nombres complexes. En voici une représentation géométrique actualisée dans le plan cartésien (fig. 1.10).

Soit la parabole d'équation $x^2=\sqrt{p}\,y$ et le cercle d'équation $x^2+y^2=\frac{q}{p}x$. Leurs deux

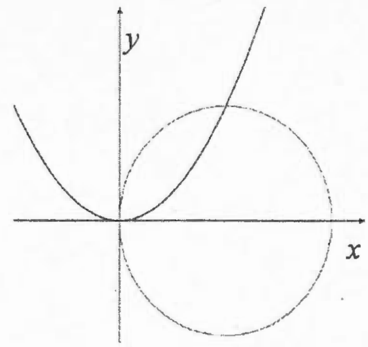

Figure 1.10: Méthode d'al-Khayyami (représentation cartésienne)

points d'intersection vérifient donc l'équation $x^4 + px^2 = qx$. Ce qui est équivalent à

$$x = 0 \text{ ou } x^3 + px = q.$$

L'abscisse x du point d'intersection qui n'est pas à l'origine est donc une solution réelle de cette équation cubique.

Le *Traité sur le quadrilatère* de l'homme d'État, mathématicien et astronome persan Nasīr al-Dīn al-Tūsī (1201–1274) sera le premier exposé systématique de trigonométrie comme branche particulière des mathématiques indépendante de l'astronomie à laquelle elle était jusqu'alors asservie; on y retrouve l'équivalent des six 'fonctions' trigonométriques et des règles servant à résoudre les triangles plats et sphériques, en particulier la loi des sinus pour les triangles plats (Katz, 1993, p. 259). Ce développement de la trigonométrie comme discipline indépendante de l'astronomie ne fut repris en Europe que deux siècles plus tard par l'astronome et mathématicien allemand Johann Müller (1436–1476), aussi nommé Regiomontanus; son ouvrage *De triangulis omnimodis* est un relevé systématique des méthodes de résolution de triangles[11].

Même si certains des algorithmes algébriques, comme ceux de Diophante, ont été inventés indépendamment de la géométrie, nous avons pu observer, jusqu'ici, que leur légitimité demeure généralement tributaire de la géométrie. Voyons maintenant comment , sous l'impulsion de l'algèbre, ces deux types de représentation entreront en conflit.

---

[11] Il fit construire à Nuremberg le premier observatoire astronomique d'Europe et y publia de très nombreuses tables astronomiques; ce qui l'amena à signaler les invraisemblances du système de Ptolémée. Son élève Domenico Maria di Novara eût pour élève, assistant et collaborateur Nicolas Copernic, de 1496 à 1500; celui-ci utilisa les observations de l'astronome et mathématicien Johann Werner (1468-1522), disciple de Regiomontanus. De plus, l'*Épitomé* de Regiomontanus aurait influencé Copernic (Luminet, 2006, p. 369-372-376).

1.2 Cardano, Bombelli, Ferrari

La demande d'exactitude accrue pour le savoir astronomique, découlant de l'exploration maritime du XVI^e, incitera à la création de tables trigonométriques plus exactes et au développement des techniques de résolution des équations. Les mathématiciens européens hériteront de l'intérêt des Indiens et des Arabes pour une algèbre basée sur l'arithmétique plutôt que sur la géométrie. Le nombre zéro et les irrationnels étaient alors utilisés dans les calculs, même si certains mathématiciens ne percevaient pas encore les irrationnels comme de 'vrais' nombres. Le commentaire suivant du mathématicien allemand Michael Stifel (1487–1567), dans son texte majeur *Arithmetica Integra*, nous éclaire sur l'état d'esprit de l'époque.

> Since, in proving geometrical figures, when rational numbers fail us irrational numbers take their place and prove exactly those things which rational numbers could not prove ... we are moved and compelled to assert that they truly are numbers, compelled that is, by the results which follow from their use – results which we perceive to be real, certain, and constant. On the other hand, other considerations compel us to deny that irrational numbers are numbers at all. To wit, when we seek to subject them to numeration [decimal representation] ... we find that they flee away perpetually, so that no one of them can be apprehended precisely in itself.... Now that cannot be called a true number which is of such a nature that it lacks precision.... Therefore, just as an infinite number is not a number, so an irrational number is not a true number, but lies hidden in a kind of cloud of infinity. (Stifel; *in* Kline, 1972, p. 251)

Les 'nombres' irrationnels ne sont alors acceptés par les sceptiques que lorsqu'ils représentent des grandeurs géométriques, telles celles obtenues par Eudoxe de Cnide. De plus, la plupart des mathématiciens du XVI^e siècle n'acceptaient pas l'existence des nombres négatifs, encore moins celle de solutions négatives aux équations: on les nommait alors solutions 'absurdes', 'impossibles', 'fictives', 'fausses'. D'ailleurs on retrouvera, même au XVII^e siècle, l'argument suivant à l'encontre de l'acceptation de l'existence des nombres négatifs, amené par le théologien, logicien et mathématicien

Antoine Arnauld (1612–1694): accepter l'identité $\frac{-1}{1}=\frac{1}{-1}$ reviendrait à accepter que le nombre inférieur (–1) est au supérieur (1) dans la même proportion que le supérieur l'est à l'inférieur!

Pourtant, le mathématicien Nicolas Chuquet (1445–1500), auteur du plus ancien traité d'algèbre écrit par un Français, *Le Triparty en la science des nombres* (1484), semblait n'éprouver aucune réticence à traiter les nombres négatifs:

> Qui adiouste ung moins ung autre nombre ou qui dicellui le soustrayt laddition se diminue et la soustraction croit ainsi comme qui adiouste moins 4 avec 10 l'addicion monte de 6. Et qui de 10 en soustrait moins 4 il reste 14. Et quand lon dit moins 4 cest comme si une personne n'avoit rien et quel deust encore 4. (Chuquet ; *in* Flament, 2003, p. 13)

Mais hélas, son manuscrit ne fut imprimé qu'en 1880...

En ce début du XVI^{e} siècle, donc, Geronimo Cardano (Italie, 1501–1576), connu aussi sous le nom de Jérôme Cardan, bachelier-ès-arts, devint recteur de la célèbre université de Padoue (fondée au XIIIe s.) avant 25 ans[12] et docteur en médecine l'année suivante. Philosophe, médecin, mathématicien et astrologue[13], Geronimo

---

12 Selon Lucas-Dubreton, Cardano fut sans doute choisi à ce poste pour sa compétence en mathématiques et en comptabilité, car ses fonctions y étaient surtout administratives.

13 Voici l'éclairage qu'apporte l'historien Lucas-Dubreton (Lucas-Dubreton, 1954) sur cette époque. « Tout au contraire [de Leonardo da Vinci], la majorité des savants de ce temps [XVIe s.], qu'ils s'appliquent aux mathématiques, à la jurisprudence, à la médecine, à l'étude des langues, ont tous à des degrés divers un côté de prophète, de magicien, et Cardan est le type accompli de cette sorte d'hommes; c'est même l'étrange confusion chez lui de la rigueur scientifique et la fantasmagorie qui donne à sa vie un intérêt presque tragique »(p. 46-47). « Cardan croira fermement que les lignes de la main et des doigts sont révélatrices, qu'elles sont en rapport avec les planètes »(p. 53). « Vinci, lui, ne voit dans la physiognomonie et la chiromancie que des chimères sans fondement scientifique »(p. 48). Vers la fin de sa vie, Henri Cornelieus Agrippa (Cologne 1486 - Grenoble 1535), docteur en droit et médecine, écrira: « Les signes, images, figures de l'astrologie n'ont été portés au ciel que par des fables grâce auxquelles les astrologues vivent, trompent et gagnent de l'argent, alors que les poètes inventeurs de ces fables-là jeûnent et meurent de faim. » Les dénonciations qu'il rédigera des différentes formes de prophétie et magie, en feront une des lumières de la Renaissance qui naît (p. 65). Philippe Aurélien Théophraste Bombast von Hohenheim (1494-1541), qui se fit nommer Paracelse, « découvre l'intoxication par les voies respiratoires, soutient que l'air contient un venin et recommande l'aération des chambres des malades; il décrit l'hystérie dont les symptômes viennent du cerveau et s'élève contre l'opinion que le diable est pour quelque chose dans l'idiotie, la mélancolie, l'épilepsie » (p. 72).

Cardano utilisera, avec son étudiant Ludovico Ferrari (1522–1565), un procédé de calcul pour résoudre les équations des 2^e, 3^e et 4^e degrés (à coefficients réels), que l'on nommera par la suite les *formules de Cardan.* Ils ont reconnu au professeur de mathématiques italien Scipione del Ferro (ca. 1465–1526) l'inspiration de ce procédé de résolution et au professeur de sciences italien Niccolo Fontana Tartaglia (ca.1500–1557) l'invention de la formule pour l'équation du 3^e degré.

Cardano commençait par réduire l'équation générale du 3^e degré $y^3+ay^2+by+c=0$ sous la forme $x^3+px+q=0$ en posant $y=x-a/3$, d'où $p=b-a^2/3$ et $q=c+2a^3/27-ab/3$. Remarquons toutefois que le procédé utilisé par Cardano ne portait pas sur une équation de forme $f(x)=0$, puisqu'à l'époque on ne pose l'adéquation qu'entre quantités strictement positives; de même, la tradition ne considérait que les équations dont les coefficients p et q étaient positifs. Cardano traitait donc séparément les trois cas suivants : $x^3+px=q$, $x^3=px+q$ et $x^3+q=px$, sans analyser le cas $x^3+px+q=0$ (puisque celui-ci n'admet aucune solution positive).

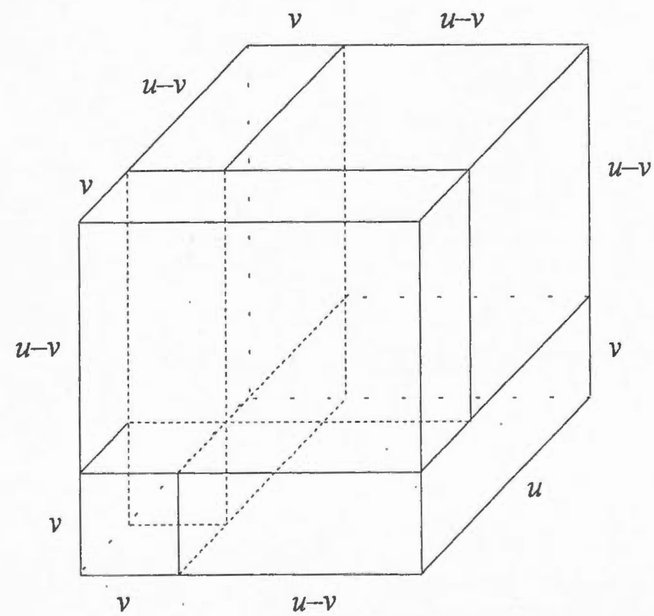

Figure 1.11: $(u-v)^3+3uv(u-v)=u^3-v^3$

Pour résoudre l'équation $x^3+px=q$, où $p,q>0$, Cardano utilise l'identité $(u-v)^3+3uv(u-v)=u^3-v^3$ basée sur l'étude du cube de côté v situé à l'intérieur du cube de côté u (fig. 1.11); il suffit alors de poser $x=u-v$ et $p=3uv$ pour que l'équation à résoudre devienne $u^3-v^3=q$. Ce qui, après la substitution $v=p/(3u)$, revient à résoudre l'équation quadratique en u^3 : $u^6-qu^3-(p/3)^3=0$; les deux solutions de cette dernière équation sont $u^3=q/2\pm\sqrt{(q/2)^2+(p/3)^3}$. Et puisque les coefficients p, q sont positifs, le radical deuxième ci-dessus est réel. Finalement, puisque $v^3=u^3-q$ et $x=u-v$, la valeur obtenue pour x est la même, quel que soit le signe retenu devant le radical ci-dessus. Le nombre réel x ainsi déterminé s'exprime donc sous la forme

$$x=\sqrt[3]{q/2+\sqrt{(q/2)^2+(p/3)^3}}-\sqrt[3]{-q/2+\sqrt{(q/2)^2+(p/3)^3}}.$$

Pour résoudre l'équation $x^3=px+q$, où $p,q>0$, Cardano utilisait le procédé équivalant à l'identité $(u+v)^3=3uv(u+v)+u^3+v^3$; il suffit de poser $x=u+v$ et $p=3uv$ pour que l'équation à résoudre devienne $u^3+v^3=q$. Ce qui, après la substitution $v=p/(3u)$, revient à résoudre $u^6-qu^3+(p/3)^3=0$. Les deux solutions de cette équation quadratique sont $u^3=q/2\pm\sqrt{(q/2)^2-(p/3)^3}$. Finalement, puisque $v^3=q-u^3$ et $x=u+v$, alors on a

$$x=\sqrt[3]{q/2+\sqrt{(q/2)^2-(p/3)^3}}+\sqrt[3]{q/2-\sqrt{(q/2)^2-(p/3)^3}}.$$

Si $(q/2)^2\geq(p/3)^3$, alors cette solution de l'équation est positive. Mais si $(q/2)^2<(p/3)^3$, alors u n'est pas un nombre réel et Cardano ne sait pas comment calculer de façon générale de telles racines cubiques; or, les trois racines de $x^3=px+q$ sont pourtant réelles et comprises dans l'intervalle $\left[-2\sqrt{p/3},2\sqrt{p/3}\right]$, comme nous le verrons ci-dessous (section 1.3).

Par un argument semblable, Cardano obtient, pour l'équation $x^3+q=px$ où p, $q>0$, la valeur

$$x=\sqrt[3]{-q/2-\sqrt{(q/2)^2-(p/3)^3}}+\sqrt[3]{-q/2+\sqrt{(q/2)^2-(p/3)^3}}.$$

À propos de ces radicaux deuxièmes de nombres négatifs, Cardano écrira:

> Il [l'auteur] invite le lecteur à faire un effort d'imagination pour sortir du monde réel et créer dans sa pensée une entité toute idéale, qu'il appellera encore *carré* et à laquelle il attribuera l'aire négative –15. Le côté de ce *carré* imaginaire aura justement pour longueur $\sqrt{-15}$. (Cardan, *Ars Magna*; *in* Flament, 2003, p. 22)

On voit donc un écart se creuser entre les conséquences algébriques qu'engendre le développement de la théorie des équations et l'interprétation géométrique qui jusqu'alors fondait l'algèbre, ainsi qu'une nouvelle attitude éclore face aux procédés algébriques acceptables. Aucune représentation géométrique du « monde réel » ne correspond en effet à un carré d'aire négative et l'abus de notation $\sqrt{-1}$ ne correspond à aucun nombre (réel). Toutefois, un tel artifice permettra de résoudre certaines équations. Ainsi, en 1572, l'ingénieur italien Raffaele Bombelli (ca.1526–1573), qui a co-traduit cinq des sept livres de Diophante, publie son unique ouvrage, *L'Algebra*, dans lequel il observe que si l'on exprime les solutions de l'équation $x^3 = px + q$ sous la forme

$$x=\sqrt[3]{q/2+\sqrt{(q/2)^2-(p/3)^3}}+\sqrt[3]{q/2-\sqrt{(q/2)^2-(p/3)^3}}$$

pour des radicaux deuxièmes non réels, alors interviennent les racines troisièmes de nombres que nous nommons aujourd'hui complexes conjugués; Bombelli aura alors l'intuition que leurs racines seraient elles-mêmes conjuguées, donc leur somme réelle.

> Cette sorte de racine carrée contient dans son algorithme de calcul, des opérations différentes des autres et a un nom différent, parce que, quand le cube du tiers du nombre de Tants est supérieur au carré de la moitié de la Constante[14], la racine carrée de leur différence ne peut s'appeler ni plus ni moins, c'est pourquoi je l'appellerai *plus que moins* [*piu di meno*] quand celle-ci devra être ajoutée et, quand elle devra être ôtée, je l'appellerai *moins que moins*. (Bombelli, 1572, p. 26)

---

14 Lire $(p/3)^3 > (q/2)^2$ dans l'équation $x^3 = px + q$.

Pour effectuer ses calculs, il énonce dans le Livre Premier de son *Algèbre* les huit règles de multiplication des signes de ± 1 avec $\pm i$, de même que de $\pm i$ avec $\pm i$ (lorsque traduites dans notre notation moderne); toutefois, il s'agit pour Bombelli de règles d'opérations sur des signes plutôt que sur des nombres (Flament, 2003, p. 26; Katz, 1993, p. 336). D'ailleurs, Bombelli précise aussitôt:

> On doit avertir que de telles sortes de racines liées ne peuvent intervenir sans que le binôme ne soit accompagné de son résidu [son expression conjuguée], comme cela serait pour R.c.(2.p.dm.R.q.2) dont le résidu sera R.c.(2.m.dm.R.q.2) [$\sqrt[3]{2+\sqrt{-2}}$ et $\sqrt[3]{2-\sqrt{-2}}$ respectivement]; pour de telles sortes de R.c., il ne m'est jusqu'à présent encore jamais arrivé d'avoir à travailler sur l'une sans l'autre. (Bombelli, 1572, p. 27)

En effet, ce que nous concevons aujourd'hui sous la forme de *nombre* complexe est plutôt pensé, par Bombelli, comme la notation d'un *procédé* « sophistiqué » permettant de calculer la solution réelle de l'équation étudiée. Quant aux solutions négatives, Bombelli les exclut d'emblée de toute considération.

La méthode suivie par Bombelli dans l'*Algebra* pour calculer les racines cubiques présentes dans les formules de Cardano porte sur des exemples numériques; son commentaire permet de la généraliser comme suit. Les formules de Cardan étant de la forme[15] $x=\sqrt[3]{A+Bi}+\sqrt[3]{A-Bi}$, soit $a+bi=\sqrt[3]{A+Bi}$: d'où

$$A+Bi=(a+bi)^3=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i\,;$$

donc $A=a^3-3ab^2$ et $B=3a^2b-b^3$; or $(a-bi)^3=(a^3-3ab^2)-(3a^2b-b^3)i=A-Bi$, donc $a-bi=\sqrt[3]{A-Bi}$ et $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=\sqrt[3]{A^2+B^2}$.

Pour chaque entier positif a , où $a^2<\sqrt[3]{A^2+B^2}$ et $a^3>A$, et chaque valeur positive de b correspondante $b=\sqrt{\sqrt[3]{A^2+B^2}-a^2}$, Bombelli vérifiera si les conditions

[15] Le symbole i pour désigner $\sqrt{-1}$ ne sera introduit par Euler qu'en 1777 et publié en 1794, puis adopté par Gauss qui en répandit l'usage dès 1801. Nous anticipons son utilisation dans le seul but d'alléger la lisibilité du texte.

$A=a^3-3ab^2$ et $B=3a^2b-b^3$ sont satisfaites. Lorsqu'un tel entier a n'existe pas, « c'est beaucoup plus fatigant » car alors « on cherche à tâtons à trouver » ce nombre réel a (Bombelli, 1572, p. 28-30).

Bombelli ne dispose donc pas de méthode générale pour déterminer les racines troisièmes du nombre complexe $A+Bi$. Mais lorsqu'il obtient des valeurs satisfaisantes pour a et b, il sait en déduire la solution réelle

$$x=\sqrt[3]{A+Bi}+\sqrt[3]{A-Bi}=(a+bi)+(a-bi)=2a \ .$$

Ainsi par exemple, la solution de l'équation $x^3=15x+4$ donnée par la formule de Cardan est $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$, notée par Bombelli

R.c.(2.p.dm.R.q.121) p.R.c.(2.m.dm.R.q.121)

et qu'il nomme la « chose ». En suivant la méthode exposée ci-dessus, il trouve $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1}$ et son conjugué $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2-\sqrt{-1}$ qu'il nomme son résidu, notés 2.p.dm.R.q.1 et 2.m.dm.R.q.1, respectivement; d'où $x=4$:

> Bien que ce mode de résolution soit, à vrai dire, plutôt sophistiqué, toutefois, dans les opérations, on peut s'en servir sans aucune difficulté. [...] la racine de R.c.(2.p.dm.R.q.121) sera 2.p.dm.R.q.1 qui, ajoutée à son résidu 2.m.dm.R.q.1 donne 4, qui est la valeur de la chose. (Bombelli, *L'Algebra*, p. 293, *in* Flament, 2003, p. 27)

Quant à l'équation du 4[e] degré $x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, Ludovico Ferrari (1522–1565), élève de Cardano, la résout d'une façon équivalente à la suivante: en ajoutant $(bx/2)^2$ aux deux membres de l'équation, alors il obtient

$$\left(x^2+bx/2\right)^2=\left(b^2/4-c\right)x^2-dx-e \ ;$$

puis, en ajoutant $\left(x^2+bx/2\right)y+y^2/4$ à chaque membre, il obtient

$$\left(x^2+bx/2+y/2\right)^2=\left(b^2/4-c+y\right)x^2+\left(by/2-d\right)x+\left(y^2/4-e\right).$$

Pour que le membre de droite soit un carré parfait en x, il suffit de choisir y de sorte que le discriminant soit nul: $y^3-cy^2+(bd-4e)y+(4ce-d^2-b^2e)=0$. On obtient alors deux équations quadratiques en x à résoudre:

$$2x^2+bx+y=\pm\left(x+\frac{by-2d}{b^2-4c+4y}\right)\sqrt{b^2-4c+4y},$$

donnant les racines de l'équation initiale.

Comme l'a démontré depuis le mathématicien français Évariste Galois (1811–1832), il est impossible de résoudre par radicaux les équations générales de degré supérieur à quatre (Kline, 1972, p. 754; Mac Lane et Birkhoff, 1971, t. 2, p. 285-328).

Ainsi, afin de résoudre certaines équations, Cardano, Bombelli et Ferrari ont-ils inventé des procédés algébriques « sophistiqués » utilisant des expressions, tel que $\sqrt{-1}$, qui n'étaient pas reconnues en tant que nombres ni grandeurs et n'étaient supportées par aucune représentation géométrique usuelle! La seule justification de ces procédés est qu'ils permettaient néanmoins de trouver certaines racines réelles aux équations analysées. On mesure l'audace de cette démarche lorsqu'on se rappelle que pendant des siècles, les algorithmes algébriques étaient le plus souvent supportés par une représentation géométrique! Le XVII[e] siècle apportera une représentation géométrique des équations analysées par Cardano et une généralisation de la théorie des équations.

1.3 Viète, Girard, Descartes

Dans son *Canon Mathematicus* (1579), le mathématicien français François Viète (1540–1603), aussi conseiller des rois Henri III et Henri IV, introduit certains résultats de trigonométrie, notamment la formule pour $\tan(\alpha+\beta)$, l'ensemble des identités trigonométriques portant sur les triangles sphériques droits et la loi du cosinus des angles dans un triangle sphérique quelconque. Dans son œuvre posthume *Sectiones Angulares* (1615), Viète développera l'expression de $\sin(n\alpha)$ et $\cos(n\alpha)$, où n est un nombre naturel, sous forme de sommations de puissances de $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ (Kline, 1972, p. 239-240; Boyer, 1968, p. 339-340), établissant ainsi un lien qui s'avérera fécond entre la trigonométrie et la théorie des nombres, la trigonométrie étant souvent jusqu'alors, comme nous l'avons déjà noté, une branche isolée du reste des mathématiques. Mais c'est surtout à titre de fondateur de l'algèbre littérale[16] que Viète est reconnu.

> Dans la Zéthèse, on examine conjointement données et inconnues sans faire de distinctions entre elles jusqu'à ce qu'on ait trouvé une relation qui caractérise les unes quand les autres sont connues. Ainsi Viète représente-t-il de la même manière par des lettres les nombres donnés et les nombres inconnus (innovation attribuée souvent à tort à Descartes) et il les combine jusqu'à obtenir l'équation du problème. (Lebesgue, 1958, p. 10, 13-14)

Dans son traité *In Artem Analyticam Isagoge* publié en 1591, Viète définit en quoi consiste « l'art analytique » qu'il propose:

> C'est par la *zététique* que l'on pose une équation ou proportion entre un terme à trouver et des termes donnés, par la *poristique* que la validité d'un théorème proposé est vérifiée à l'aide d'une équation ou proportion, et par

[16] Viète adoptera les symboles + et – introduits en 1489 par le maître de conférences allemand de Leipzig Johann Widmann et utilisera des symboles différents pour désigner les paramètres (consonnes) et les inconnues (voyelles), mais conservera une notation aujourd'hui périmée pour désigner les multiplications, les puissances et l'égalité (qu'il notera 'aequalis' puis ~). Le symbole d'égalité = introduit en 1557 par le médecin anglais Robert Recorde (1510-1558) ne sera utilisé couramment qu'à la fin du XVII[e] siècle.

l'*exégétique* que la valeur du terme inconnu dans une équation ou proportion donnée est déterminée. C'est pourquoi l'*art analytique* dans son ensemble, reprenant à son compte ces trois méthodes, pourra être nommé la science de la découverte véritable en mathématiques.[traduction libre] (Viète; *in* Katz, 1993, p. 339)

Viète étendra le domaine d'application des méthodes algébriques:

> L'arithmétique traitait des entiers et des combinaisons d'entiers telles que les fractions; elle ne constituait cependant pas une science fermée: l'extraction des racines donne en effet des nombres irrationnels. Les Grecs, s'étant refusés à les considérer comme nombres, bien que la géométrie obligeait à le faire (existence de la diagonale d'un carré de côté donné par exemple), ils en firent l'objet d'une sorte de nouvelle arithmétique, l'arithmétique des grandeurs, et cela sans bien s'en rendre compte. Viète resta fidèle à la conception grecque, mais il explicita qu'il s'agissait d'un calcul. [...]. Or comme on avait toujours admis le caractère universel des mathématiques, on crut que, par exemple, les conséquences précédentes [commutativité, distributivité] appartenaient aussi à tout ce qui ressemblait à la multiplication, à tout ce qu'on croirait pouvoir dire être une multiplication [...]; ici il permit à Viète, partant des propriétés qu'il admettait implicitement, de faire correctement quelques démonstrations, très peu nombreuses d'ailleurs. Et ainsi il opère à peu près comme dans une algèbre moderne [...]. C'est ainsi que Viète assoit son calcul des grandeurs, calcul parallèle au calcul sur les nombres [...].
>
> Pour tous, ce qui apparaît comme un progrès tangible, pratique et non plus philosophique, c'est la possibilité d'appliquer les mêmes calculs aux nombres et aux grandeurs, c'est-à-dire, puisque les grandeurs considérées étaient géométriques, d'appliquer l'algèbre à la géométrie. (Lebesgue, 1958, p. 13-14)

Dans son traité posthume *De aequationum recognitione et emendatione*, publié en 1615, Viète reprend l'analyse de l'équation

$$x^3 = px + q$$

en traitant différemment les deux cas : $\left(\frac{q}{2}\right)^2 > \left(\frac{p}{3}\right)^3$ et $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3$.

Le premier cas est traité au théorème II du chapitre VI (Viète, 1615, p. 14) sous la forme de l'équation $x^3 - 3B^2x = D^3$: dans ce cas, donc, on a $D^6 > 4B^6$. L'analyse de

Viète se fonde alors, selon Katz (1993, p. 342-343), sur la même formule que Cardano, à savoir: $(u+v)^3=3uv(u+v)+(u^3+v^3)$; en posant $x=u+v$ et $p=3uv$, il suffit donc de substituer $x=u+\frac{p}{3u}$ dans l'équation initiale pour obtenir, comme nous l'avons vu avec Cardano: $u^3=q/2\pm\sqrt{(q/2)^2-(p/3)^3}$, où $\left(\frac{q}{2}\right)^2>\left(\frac{p}{3}\right)^3$. Finalement, puisque $q=u^3+v^3$, alors $x=\sqrt[3]{q/2+\sqrt{(q/2)^2-(p/3)^3}}+\sqrt[3]{q/2-\sqrt{(q/2)^2-(p/3)^3}}$.

Le deuxième cas, $\left(\frac{q}{2}\right)^2<\left(\frac{p}{3}\right)^3$, de l'équation $x^3=px+q$ est traité par Viète dans une variante au théorème III du chapitre VI (Viète, 1615, p. 17) sous la forme de l'équation $x^3-3b^2x=b^2d$: dans ce cas, donc, on a $b>d/2$.

Il suffit de poser, écrit-il, que dans un triangle-rectangle d'hypoténuse b et d'angle aigu 3θ, le côté adjacent à cet angle est $d/2$ (ce qui est possible puisque $b>d/2$); alors, dans le triangle-rectangle d'hypoténuse b et d'angle aigu θ, le côté adjacent à cet angle sera $x/2$.

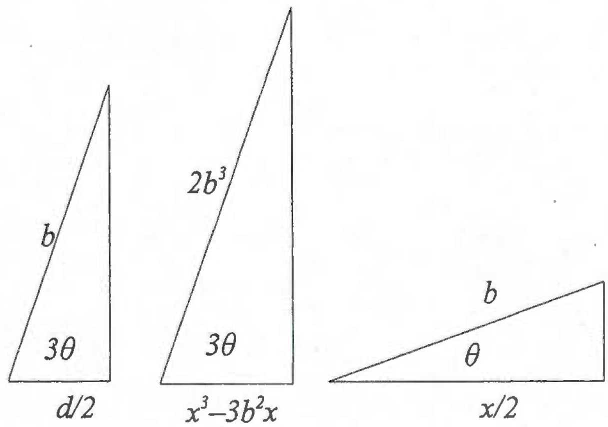

Figure 1.12: Résolution de $x^3-3b^2x=b^2d$

Viète utilise en effet l'identité[17] trigonométrique $4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)=\cos(3\theta)$: d'où

$$8b^3\cos^3(\theta)-6b^3\cos(\theta)=2b^3\cos(3\theta)\ ,$$

$$(2b\cos(\theta))^3-3b^2(2b\cos(\theta))=2b^3\cos(3\theta)\ .$$

[17] En effet, $\cos(3\theta) = \cos(2\theta)\cos(\theta)-\sin(2\theta)\sin(\theta) = (2\cos^2(\theta)-1)\cos(\theta) - 2\sin^2(\theta)\cos(\theta) = 4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)$.

Puisque $b>d/2$, soit $\cos(3\theta)=\frac{d}{2b}$, c'est-à-dire $2b^3\cos(3\theta)=b^2d$; alors l'équation $x^3-3b^2x=b^2d$ implique que $x^3-3b^2x=2b^3\cos(3\theta)$. À l'aide de l'identité trigonométrique précédente, on voit donc que $x=2b\cos(\theta)$ est une solution de $x^3-3b^2x=b^2d$.

Viète innove donc en ajoutant la trigonométrie aux méthodes de résolution des équations qui, nous l'avons vu avec Cardano, Bombelli et Ferrari, n'utilisaient alors que les radicaux. La méthode de Viète permet ainsi de déterminer une racine réelle de l'équation, les tables trigonométriques ayant alors déjà atteint une certaine précision, alors que les formules de Cardan introduisaient une expression comportant un radical alors « impossible » à calculer.

On remarque que Viète n'analyse ici que la racine correspondant à l'angle aigu θ. Montrons à quel point Viète était proche, selon notre perspective actuelle, d'une résolution générale de cette équation. Si nous reformulons l'équation sous sa forme plus générale $x^3=px+q$, où p, q > 0, il suffit d'effectuer la substitution $x=y/m$ pour que l'équation devienne $y^3=pm^2y+m^3q$. Par analogie avec la même formule $\cos^3(\theta)=3/4\cos(\theta)+1/4\cos(3\theta)$, il suffit de poser: $pm^2=3/4$, donc $m=\pm 1/2\sqrt{3/p}$, $\cos(3\theta)=4\mathrm{m}^3q$ et $\cos(\theta)=y$. Cette substitution n'est valide que si $-1\leq 4\mathrm{m}^3q\leq 1$, c.-à-d. $-1\leq\frac{3\mathrm{q}}{2\mathrm{p}}\sqrt{\frac{3}{p}}\leq 1$, d'où $0\leq\frac{27q^2}{4p^3}\leq 1$, donc $\left(\frac{q}{2}\right)^2\leq\left(\frac{p}{3}\right)^3$; ce qui est précisément le cas où Cardano et Bombelli rencontraient la racine deuxième d'un nombre négatif, soit $\sqrt{(q/2)^2-(p/3)^3}$. Il s'ensuit que

$$3\theta=2k\pi+\arccos(4m^3q)\text{, où } k\in\{0, 1, 2\},$$

$$y=\cos\left(\frac{2k}{3}\pi+\frac{1}{3}\arccos(4m^3q)\right),$$

$$x=\frac{1}{m}\cos\left(\frac{2k}{3}\pi+\frac{1}{3}\arccos(4m^3q)\right).$$

Puisque

$$-\cos\left(\tfrac{2k}{3}\pi+\tfrac{1}{3}\arccos(-z)\right)=\cos\left(\tfrac{3-2k}{3}\pi-\tfrac{1}{3}\arccos(-z)\right)=\cos\left(\tfrac{2-2k}{3}\pi+\tfrac{1}{3}\arccos(z)\right),$$

alors l'ensemble des valeurs engendrées par $\cos(\frac{2k}{3}\pi+\frac{1}{3}\arccos(z))$ est le même ensemble que celui engendré par $-\cos\left(\frac{2k}{3}\pi+\frac{1}{3}\arccos(-z)\right)$ lorsque $k\in\{0\,,1,2\}$.

Ainsi, pour $m=\pm 1/2\sqrt{3/p}$, les solutions de $x^3=px+q$, lorsque $(q/2)^2\leq(p/3)^3$, sont réelles et sont données par la formule:

$$x = 2\sqrt{\tfrac{p}{3}}\cos\left(\tfrac{2k}{3}\pi+\tfrac{1}{3}\arccos\left(\tfrac{3q}{2p}\sqrt{\tfrac{3}{p}}\right)\right),\text{ où } k\in\{0, 1, 2\}.$$

Ces trois solutions sont donc comprises dans l'intervalle $\left[-2\sqrt{p/3}, 2\sqrt{p/3}\right]$.

Revenons maintenant à Viète. Pour résoudre l'équation du quatrième degré

$$x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0,$$

il effectue la substitution $x=t-b/4$ (Kline, 1972, p. 269); l'équation à résoudre devient

$$t^4+pt^2+qt+r=0,$$

où

$$p=c-\tfrac{3}{8}b^2,\ q=\tfrac{1}{8}b^3+d-\tfrac{1}{2}bc \text{ et } r=\tfrac{1}{16}b^{2c}-\tfrac{3}{256}b^4-\tfrac{1}{4}bd+e.$$

Ensuite, en ajoutant $2t^2y^2+y^4$ à chaque membre de l'équation, on obtient

$$\left(t^2+y^2\right)^2=(2y^2-p)t^2-qt+(y^4-r).$$

Il suffit ensuite, comme dans la méthode de Ferrari, de poser nul le discriminant du membre de droite, ce qui revient à résoudre l'équation cubique en y^2 suivante:

$$8y^6-4py^4-8ry^2+(4pr-q^2)=0.$$

Les 4 valeurs de t cherchées seront donc $t=\pm\sqrt{-y^2\pm\left(t-\frac{q}{4y^2-2p}\right)\sqrt{2y^2-p}}$.

Mais malgré tous ces calculs avancés pour l'époque, Viète rejette pourtant jusqu'à l'existence même des nombres négatifs, suivant en cela une certaine tradition[18]. Le mathématicien, astronome et géographe anglais Thomas Harriot (1560–1621), disciple de Viète, introduisit les symboles $<$ et $>$ pour désigner les relations d'ordre strict. Lorsqu'il résolvait une équation, un des membres pouvait, transitoirement, être égal au nombre 0. Mais Harriot refusait que les racines d'une équation puissent être négatives et déclarait même impossible l'existence des quantités négatives. Déterminer la racine troisième de ce que nous nommons nombre complexe est déclaré « impossibilem reducere », sa partie imaginaire étant « inexplicable » (Harriot; *in* Flament, 2003, p. 33-34). Tandis que le mathématicien, ingénieur militaire et physicien flamand Simon Stevin (1548–1620), dit aussi Simon de Bruges, utilisa des constantes négatives pour les équations et en accepta les racines négatives; il considérait aussi que les irrationnels sont de 'vrais' nombres.

À l'instar de Harriot, le français Albert Girard (1595–1632) utilisait le signe '–' pour l'opération de soustraction et pour dénoter les nombres négatifs. En 1629, dans son *Invention nouvelle en algèbre*, il énonce les relations entre les racines et les coefficients d'une équation, acceptant l'existence des racines négatives au même titre que les racines positives. À cet égard, il fait remarquer (Girard, 1629, p. 142) que là où Viète n'envisageait dans son livre *De aequationum recognitione* que deux solutions à l'équation $124x - x^3 = 240$, soient 2 et 10, il en observe une troisième, soit –12. Et voici la justification, géométrique, qu'il donne à l'utilisation des nombres négatifs:

> La solution par moins s'explique en Géométrie en rétrogradant et le moins recule, là où le + avance. (Girard, 1629, p. 145; *in* Flament, 2003, p. 38)

Girard semble être le premier à formuler un énoncé très proche du théorème

---

[18] Tradition qui se poursuivra entre autres avec le savant Blaise Pascal (1623 à 1662) et le logicien des mathématiques Augustus De Morgan (1806-1871) (Kline, 1972, p. 593).

fondamental de l'algèbre:

> Toutes les équations d'algèbre reçoivent autant de solutions que la dénomination de la plus haute quantité le demonstre, excepté les incomplettes: et la première faction des solutions est esgale au nombre du premier meslé, la seconde faction des mesmes, est esgale au nombre du deuxième meslé; la troisième au troisiesme, et toujours ainsi, tellement que la derniere faction est esgale à la fermeture, et ce selon les signes qui se peuvent remarquer en l'ordre alternatif. (Girard, 1629, p.139, théorème II; *in* Flament, 2003, p. 36)

Voici un exemple de traitement des équations 'incomplètes' que donne Girard (1629, p. 140) et qui nous éclaire sur le sens à attribuer à cet énoncé. Pour résoudre l'équation 'incomplète' $x^3=167x-26$, Girard la complète en $x^3=0x^2+167x-26$ puis regroupe les termes selon la parité de leur puissance (l'ordre alternatif), obtenant $x^3-167x=0x^2-26$: selon cette méthode, ce que Girard nomme les *factions* des solutions seront les coefficients obtenus à partir du degré inférieur au degré de cette équation: 0, –167, –26. La somme des trois solutions doit donc[19] être égale à 0, la somme de leurs produits deux à deux égal à –167, leur produit égal à –26. Ayant trouvé (mais comment? — là est la question!) que l'une des solutions est –13, la somme des deux autres solutions est donc 13 et leur produit 2; ce sont donc les factions de l'équation du second degré $x^2+2=13x$, donc de l'équation $x^2=13x-2$ dont les solutions sont ensuite données par Girard. Comme dernier exemple de ce théorème que, dit-il, il est nécessaire de toujours garder en mémoire, Girard donne:

> Si 1(4) est esgal à 4 (1) – 3 , alors les quatre factions seront 0, 0, 4, 3, & partant les quatre solutions seront: 1, 1, $-1+\sqrt{-2}$, $-1-\sqrt{-2}$. (Notez que le produit des deux derniers est 3).[20] (Girard, 1629, p.141; *in* Flament, 2003, p. 37)

---

[19] Le regroupement des puissances de l'inconnue selon leur parité pour déterminer les factions tient en ceci: soit $p(x)=x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, alors $a_2=-(x_1+x_2+x_3)$, $a_1=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ et $a_0=-x_1x_2x_3$. .

[20] L'équation décrite se lit $x^4=4x-3$.

Non seulement donc Girard accepte-t-il l'existence de solutions négatives, il justifie comme suit l'usage des solutions 'enveloppées':

> Ainsi qu'on peut donner trois noms aux solutions, veu qu'il y en a qui sont plus que rien; d'autres moins que rien; & d'autres enveloppées, comme celles qui ont des √–, comme √-3, ou autres nombres semblables. [...]
> On pourroit dire à quoy sert ces solutions qui sont impossibles, je respond pour trois choses, pour la certitude de la reigle generale, & qu'il n'y a point d'autres solutions, & pour son utilité. (Girard, 1629, p.141-142; *in* Flament, 2003, p. 38)

Ainsi, Girard conçoit une relation entre les zéros d'un polynôme et sa factorisation, entre le degré d'un polynôme et le nombre de ses zéros (compte tenu des multiplicités). De plus, il accepte de considérer comme zéros du polynôme ces nombres « enveloppés » et leurs conjugués, même s'il ne sait à quoi correspondent ces « solutions impossibles ». La généralité de la représentation algébrique qu'il avance suffit alors à justifier leur présence non seulement en cours de calcul, comme pouvait le faire Bombelli, mais à titre de solutions. Ce qui est radicalement nouveau.

Son compatriote, le philosophe et savant français René Descartes (1596–1650), pensait les nombres irrationnels comme des nombres abstraits permettant de représenter la « continuité » des grandeurs (Kline, 1972, p. 252). Quant aux nombres négatifs, il les qualifiait de « moindres que rien » et nommait « fausses » la valeur absolue des racines négatives d'une équation et « vraies » ses racines positives; toutefois, il acceptait les racines négatives parce qu'en effectuant une substitution adéquate à l'inconnue, cela lui permettait de transformer ces racines en racines positives de l'équation ainsi transformée. Les différentes astuces pour effectuer de telles transformations sont abordées dans le troisième livre de *La Géométrie*, publié en 1637; on y retrouve aussi un énoncé proche du théorème fondamental de l'algèbre:

> Sachez donc qu'en chaque équation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut-il y avoir de diverses racines, c'est-à-dire de valeurs de cette quantité. (Descartes, 1637, p. 55)

Cet énoncé n'est toutefois pas démontré dans la *Géométrie*; il s'agit plutôt d'une conjecture illustrée par quelques exemples portant sur sa réciproque, à savoir que le produit de n facteurs linéaires engendre un polynôme de degré n. C'est aussi dans ce texte que Descartes énonce ce que nous nommons depuis la *règle des signes de Descartes*:

> On connoît aussi de ceci combien il peut y avoir de vraies racines et combien de fausses en chaque équation: à savoir il y en peut avoir autant de vraies que les signes + et – s'y trouvent de fois être changés, et autant de fausses qu'il s'y trouve de fois deux signes + ou deux signes – qui s'entre-suivent. (Descartes, 1637, p. 57)

La convention actuelle de noter les inconnues par les dernières lettres de l'alphabet (z, y, x,...) et les constantes par les autres nous vient de Descartes. On lui doit l'appellation 'd'imaginaires' aux racines deuxièmes des nombres réels négatifs, en ce qu'elles ne sont pas réelles mais qu'on peut les imaginer :

> Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires, c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit dans chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celles qu'on imagine. (Descartes, 1637, p. 63)

Dès le Livre Premier de *La Géométrie*, Descartes montre « comment le calcul d'arithmétique se rapporte aux opérations de géométrie ». Ainsi la multiplication et la division peuvent-elles se représenter à l'aide des proportions et du théorème de Thalès. Pour multiplier deux nombres positifs représentés par les longueurs des segments BC et BD, il suffit de tracer le segment BA mesurant l'unité puis de mener un segment DE parallèle à AC. Par les proportions des triangles semblables, on a

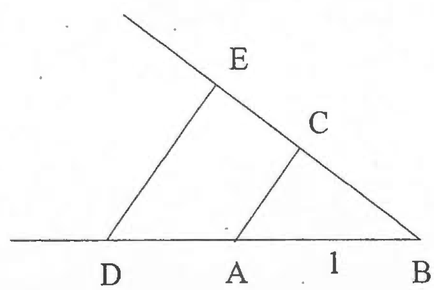

Figure 1.13
Produit de nombres réels positifs

$$\frac{m(BC)}{m(BA)}=\frac{m(BE)}{m(BD)}\ ;$$

donc $m(BE)=m(BC)\cdot m(BD)$.

Quant à la division de $m(BE)$ par $m(BD)$, elle est donnée par $m(BC)$.

Le produit de deux longueurs n'est donc plus représenté par une aire mais par une autre longueur de segment. Descartes se libère ainsi des contraintes posées par Viète sur les 'dimensions' des nombres réunis dans un même calcul en faisant remarquer (p. 3) que l'on peut, lorsque l'unité est déterminée, ramener deux expressions numériques à la 'dimension requise' en les multipliant ou divisant par un nombre suffisant d'unités; Descartes n'a donc aucune réticence à considérer l'expression $\sqrt[3]{a^2b^2-b}$ puisque par l'identité $a^2b^2-b = a^2b^2/1-1^2b$, chacun des termes est « maintenant de dimension 3 ».

De même, Descartes représente géométriquement l'extraction de la racine carrée positive à l'aide des propriétés du cercle, d'une façon semblable à celle d'Euclide (voir section 1.1). En effet, pour déterminer la racine carrée positive d'un nombre positif a représenté par la longueur du segment GH, on prolonge ce segment du segment unitaire GF; le milieu K du segment FH est le centre d'un demi-cercle de diamètre FH. Par G, on mène une perpendiculaire qui intersecte ce demi-cercle en I. Descartes conclut alors que $m(GI)=\sqrt{a}$.

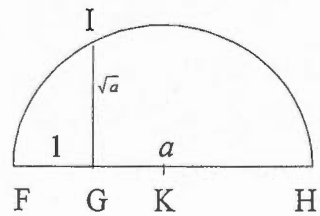

Figure 1.14
Extraction de racine deuxième

Descartes résout (p. 5) les équations du second degré $z^2=az+b^2$ et $z^2=-az+b^2$, où $a>0$, par la construction d'un cercle et d'une sécante au cercle (fig. 1.15). Pour chaque équation, l'unique solution envisagée par Descartes est la solution positive qui correspond à la longueur d'un segment de droite: pour la première équation, la solution est $z=a/2+\sqrt{(a/2)^2+b^2}$; et pour la deuxième, $z=-a/2+\sqrt{(a/2)^2+b^2}$.

Ces solutions sont représentées respectivement par les segments MO et MP de la figure 1.15. Soit en effet le triangle-rectangle NLM de côtés NL mesurant $a/2$ et LM mesurant b. Le segment MN intersecte en P le cercle de centre N et rayon $a/2$; et le prolongement de MN intersecte le cercle en O. Par Pythagore, on a $m(MN)=\sqrt{(a/2)^2+b^2}$; donc

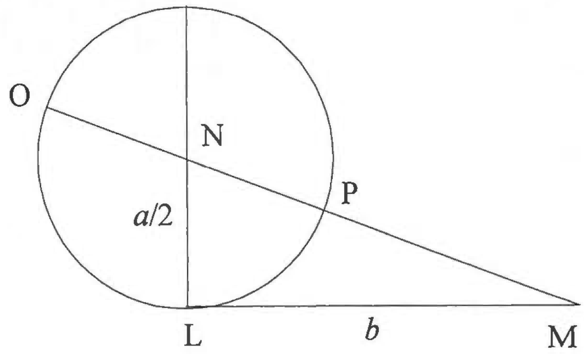

Figure 1.15
Résolution de l'équation $z^2=\pm az+b^2$

$$m(MO)=a/2+\sqrt{(a/2)^2+b^2} \quad \text{et} \quad m(MP)=-a/2+\sqrt{(a/2)^2+b^2}.$$

En ce qui concerne l'équation $z^2=a\,z-b^2$, où $a>0$, la seule résolution envisagée par Descartes est lorsque $b\leq a/2$. Les solutions $z=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}$ et $z=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}$ sont alors positives et correspondent respectivement aux longueurs des deux segments de droite MQ et MR (fig. 1.16).

Soit en effet m(NL)=$a/2$ et N le centre d'un cercle de rayon $a/2$. On mène le segment ML tangent au cercle, mesurant b. Puisque $b\leq a/2$, la droite en M parallèle au segment NL intersecte le cercle en deux points Q et R (confondus si $b=a/2$). On forme le rectangle NLMS; les triangles-rectangles NSR et NSQ sont donc congruents: nommons x = m(QS) = m(SR). Par Pythagore, il s'ensuit que $x=\sqrt{(a/2)^2-b^2}$. Donc $m(MQ)=a/2-\sqrt{(a/2)^2-b^2}$ et $m(MR)=a/2+\sqrt{(a/2)^2-b^2}$.

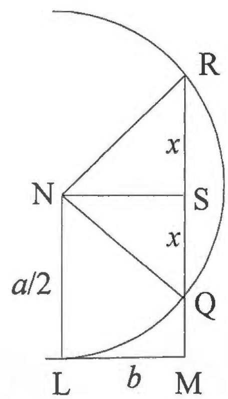

Figure 1.16
Résolution de l'équation
$z^2=az-b^2$

La représentation géométrique utilisée exclut donc d'emblée le cas où $b>a/2$ (ainsi que le cas où $a<0$) pour l'équation $z^2=az-b^2$. Descartes écrit à ce sujet :

> Et si le cercle, qui ayant son centre au point N, passe par le point L, ne coupe ni ne touche la ligne droite MQR, il n'y a aucune racine en l'équation, de façon qu'on peut assurer que la construction du problème proposé est impossible. (Descartes, 1637, p. 6-7)

Après avoir rappelé les formules de Cardan pour résoudre les différents cas d'équations du troisième degré, Descartes propose une représentation géométrique des racines réelles positives correspondant aux cas qui font problème: la solution positive $x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2-(\frac{p}{3})^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2-(\frac{p}{3})^3}}$ de l'équation $x^3=px+q$ (où p, $q>0$) lorsque $(\frac{q}{2})^2<(\frac{p}{3})^3$ et les deux solutions positives $z=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2-(\frac{p}{3})^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2-(\frac{p}{3})^3}}$ de l'équation $z^3=pz-q$ (où p, $q>0$) lorsque $(\frac{q}{2})^2<(\frac{p}{3})^3$.

Descartes ne fait qu'indiquer (1637, p. 398 et suiv.) cette correspondance; nous démontrons ci-dessous ces affirmations. Commençons par chercher les solutions réelles positives de la troisième équation $z^3=pz-q$, où p, $q>0$, lorsque $(\frac{q}{2})^2<(\frac{p}{3})^3$.

Soit la trisection de l'angle au centre $\measuredangle NOP$, inférieur à l'angle plat, par les angles congruents $\measuredangle NOQ \equiv \measuredangle QOT \equiv \measuredangle TOP$ et soit le segment QS parallèle à TO. Le point S est donc situé sur le segment NR (voir fig. 1.17). Soit les longueurs $b=m(NP)$, $z=m(NQ)$ et $a=m(ON)$; donc $a=m(OQ)=m(OT)=m(OP)$. Évidemment, $b<2a$. On a $m(NQ)=m(QT)=m(TP)=z$ puisque les cordes NQ, QT et TP sont soutenues par des angles au centre congruents. Le triangle ΔNOP est isocèle, donc $\measuredangle ONR \equiv \measuredangle OPM$. Les triangles ΔONR et ΔOPM sont donc congruents et $m(NR)=m(MP)$; le triangle ΔROM est donc isocèle et semblable aux triangles ΔQOT et ΔNOQ. Ce qui implique les congruences suivantes:

$$\measuredangle NQO \equiv \measuredangle ORM \equiv \measuredangle SRQ \quad \text{et} \quad \measuredangle QSR \equiv \measuredangle TMP \equiv \measuredangle OMR \equiv \measuredangle ORM \equiv \measuredangle SRQ.$$

Les triangles ΔQNR, ΔSQR sont donc isocèles et semblables, d'où

$m(NR) = m(NQ) = z$, donc

$$\frac{m(NO)}{m(NQ)}=\frac{m(NQ)}{m(QR)}=\frac{m(QR)}{m(SR)}.$$

Ainsi, on en déduit les proportions

$$m(QR)=\frac{(m(NQ))^2}{m(NO)}=\frac{z^2}{a}$$

et $$m(SR)=\frac{(m(QR))^2}{m(NQ)}=\frac{z^3}{a^2}.$$

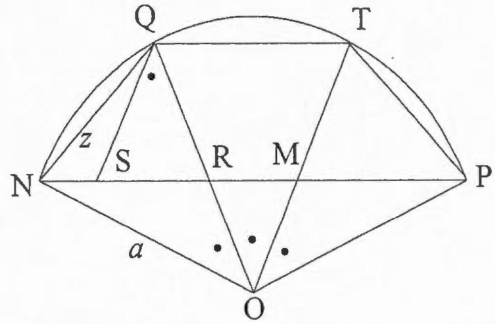

Figure 1.17: Résolution de $z^3 = pz - q$

Il s'ensuit que $m(RM)=m(SM)-m(SR)=m(QT)-m(SR)=z-\frac{z^3}{a^2}$. Or, puisque $m(NP)=m(NR)+m(RM)+m(MP)$, on a donc $b=3z-\frac{z^3}{a^2}$, c.-à-d. $z^3=3a^2z-a^2b$.

En particulier, pour $a=\sqrt{\frac{p}{3}}$ et $b=\frac{3q}{p}$, on retrouve l'équation $z^3=pz-q$; la condition géométrique $0 < b < 2a$ équivaut ici à $\left(\frac{q}{2}\right)^2<\left(\frac{p}{3}\right)^3$ où $p, q>0$.

Soit *NV* le tiers de l'arc de cercle *NVP*, $x = m(NV)$, $\alpha = ∢NOQ$ et $\beta = ∢NOV$; donc $\beta=2\pi/3-\alpha$. D'où $\frac{x}{2a} = \sin(\beta/2) = \sin(\pi/3-\alpha/2)$, c.-à-d.

$$\frac{x}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\alpha/2)-\frac{1}{2}\sin(\alpha/2) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\left(\frac{z}{2a}\right)^2}-\frac{z}{4a};$$

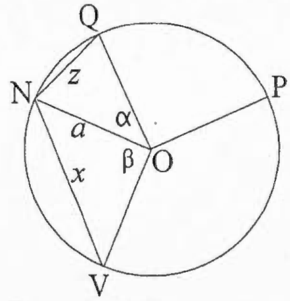

Figure 1.18: L'autre solution positive de $z^3=pz-q$

donc $x=\sqrt{3}\sqrt{a^2-(z/2)^2}-z/2=\sqrt{p-3(z/2)^2}-z/2$: c'est l'autre solution positive de l'équation $z^3=3a^2z-a^2b$. On vérifie en effet aisément que $x^3-3a^2x=z^3-3a^2z$. Il s'ensuit que, réciproquement, $z=\sqrt{3}\sqrt{a^2-(x/2)^2}-x/2$, puisque cette expression est évidemment aussi une solution de l'équation précédente et qu'elle est positive: en effet, on observe que dans le triangle de la figure 1.18, on a

$\tan(\beta/2)=\dfrac{x/2}{\sqrt{a^2-(x/2)^2}}<\sqrt{3}=\tan(\pi/3)$. De plus, $y=-\sqrt{3}\sqrt{a^2-(z/2)^2}-z/2=-(x+z)$ est la solution négative. On vérifie en effet aisément que $y^3-3a^2y=z^3-3a^2z$.

Ainsi par exemple, pour $z^3=6z-4$, on a $p=6$ et $q=4$, donc $a=\sqrt{2}$, $b=2$ et $b<2a$. Il s'ensuit que $(\frac{q}{2})^2-(\frac{p}{3})^3=-4$; les solutions proposées par la formule de Cardano sont alors

$$z=u+v=\sqrt[3]{-2-\sqrt{-4}}+\sqrt[3]{-2+\sqrt{-4}},$$

où $\sqrt[3]{-2+\sqrt{-4}}=2\left(\sqrt[3]{-2-\sqrt{-4}}\right)^{-1}$ car $v=p/(3u)$. Puisque $|u|^2=\left|\sqrt[3]{-2-2\sqrt{-1}}\right|^2=2$, on a que $v=2/u=2\bar{u}/|u|^2=\bar{u}$: les paires de racines cubiques u_k et v_k sont donc conjuguées ; avec $u_k=\sqrt{2}\cos(\frac{5}{12}\pi+\frac{2k}{3}\pi)$, où $k\in\{0, 1, 2\}$, on a donc :

$u_1=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i\right)$ et $v_1=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})i\right)$, d'où $z_1=u_1+v_1=-1+\sqrt{3}$,
$u_2=\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i\right)$ et $v_2=\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{3}-(1-\sqrt{3})i\right)$, d'où $z_2=u_2+v_2=-1-\sqrt{3}$,
$u_3=1-i$ et $v_3=1+i$, d'où $z_3=u_3+v_3=2$.

On vérifie aisément que si $x = 2$, alors $z=\sqrt{p-3(x/2)^2}-x/2=-1+\sqrt{3}$, ce qui correspond respectivement aux longueurs des cordes m(NV) et m(NQ), tandis que $y=-(x+z)=-1-\sqrt{3}$ est la solution négative prévue.

En appliquant la méthode de résolution de Viète généralisée (présentée ci-dessus) à l'équation $z^3=6z-4$, où $p = 6$ et $q = -4$, on obtient en effet, pour $k\in\{0,1,2\}$, les solutions $z_k=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{2k}{3}\pi+\frac{1}{4}\pi\right)$; d'où $z_0=2$, $z_1=-1-\sqrt{3}$ et $z_2=-1+\sqrt{3}$.

En ce qui concerne l'équation $t^3 = pt + q$ (où $p,q > 0$) lorsque $(\frac{q}{2})^2 \leq (\frac{p}{3})^3$, la solution positive $t = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{3})^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{3})^3}}$ est représentée (voir fig. 1.18) par la somme des longueurs des cordes: $t = m(NQ) + m(NV) = z + x = -y$, où y est la solution négative de l'équation $y^3 = py - q$; en effet, on a alors $t^3 - pt = -y^3 + py = q$.

Descartes oppose en ces termes sa résolution géométrique de l'équation $z^3 = pz - q$ par trisection de l'angle aux règles de Cardan:

> Au reste, il est à remarquer que cette façon d'exprimer la valeur des racines par le rapport qu'elles ont aux côtés de certains cubes dont il n'y a que le contenu qu'on connoisse, n'est en rien plus intelligible ni plus simple que de les exprimer par le rapport qu'elles ont aux subtendues de certains arcs ou portions de cercles dont le triple est donné; en sorte que toutes celles des équations cubiques qui ne peuvent être exprimées par les règles de Cardan, le peuvent être autant ou plus clairement par la façon ici proposée. (Descartes, 1637, p. 78)

Ainsi, pour les solutions réelles des équations du troisième degré qui correspondent aux cas des radicaux 'irréductibles' présents dans les formules algébriques avancées par Cardano et explorées par Bombelli, Descartes a présenté une illustration géométrique qui supporte le procédé trigonométrique de trisection de l'angle proposé par Viète. Mais par ailleurs, les travaux de Viète et de Descartes élaborent des méthodes algébriques qui généralisent les constructions géométriques et formulent leurs propres problématiques. Ainsi par exemple, les équations du quatrième degré abordées par Viète et Descartes n'ont-elles plus d'équivalent nécessaire en termes d'aire ou de volume; de même les énoncés algébriques de Descartes (règle des signes, substitutions de variables, quasi-théorème fondamental de l'algèbre, etc.) portent avant tout sur un contenu algébrique, indépendant de son interprétation géométrique éventuelle. Descartes semble en effet concevoir l'algèbre comme un puissant outil de raisonnement:

> Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connoître la longueur de quelques lignes droites pour les construire. Et comme toute l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations [...], ainsi n'a-t-on autre chose à faire en géométrie touchant les lignes qu'on cherche pour les préparer à être connues [...]. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'arithmétique en la géométrie, afin de me rendre plus intelligible.[...]
> Ainsi, voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis, sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusques à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons, ce qui se nomme une équation; car les termes de l'une de ces deux façons sont égaux à ceux de l'autre.
>
> (Descartes, 1637, p. 1-2-3)

Cette extension de méthodes qu'apporte la géométrie analytique permet aussi l'introduction de nouveaux objets géométriques, obtenus par des procédés de construction jusqu'alors inédits.

> Les anciens ont fort bien remarqué qu'entre les problèmes de géométrie, les uns sont plans, les autres solides et les autres linéaires [...]. Mais je m'étonne de ce qu'ils n'ont point outre cela distingué divers degrés entre ces lignes plus composées, et je ne saurois comprendre pourquoi ils les ont nommées mécaniques plutôt que géométriques. Car de dire que c'ait été à cause qu'il est besoin de se servir de quelque machine pour les décrire, il faudroit rejeter par même raison les cercles et les lignes droites, vu qu'on ne les décrit sur le papier qu'avec un compas et une règle, qu'on peut aussi nommer des machines. Ce n'est pas non plus à cause que les instruments qui servent à les tracer, étant plus composés que la règle et le compas, ne peuvent être si justes; car il faudroit pour cette raison les rejeter des mécaniques, où la justesse des ouvrages qui sortent de la main est désirée, plutôt que de la géométrie, où c'est seulement la justesse du raisonnement qu'on recherche, et qui peut sans doute être aussi parfaite touchant ces lignes que touchant les autres.[...] mais il est, ce me semble, très clair que, prenant comme on fait pour géométrique ce qui est précis et exact, et pour mécanique ce qui ne l'est pas, et considérant la géométrie comme une science qui enseigne généralement à connoitre les mesures de tous les corps, on n'en doit pas plutôt exclure les lignes les plus composées que les plus simples, pourvu qu'on les puisse imaginer être décrites par un mouvement continu, ou

> par plusieurs qui s'entre-suivent, car par ce moyen on peut toujours avoir une connaisance exacte de leur mesure. (Descartes, 1637, p. 15-16)

La géométrie analytique avec laquelle nous sommes maintenant si familiers a en effet transformé notre intuition des objets géométriques. Pensons à toutes ces courbes et surfaces représentées dans l'espace géométrique des coordonnées et qui ne ne sont plus définies par une propriété géométrique de lieu comme l'étaient les polygones, coniques, polyèdres et quadriques, mais désormais générées par des fonctions symboliquement exprimées dans le langage algébrique. On ne peut manquer, en lisant ce passage de Descartes, de penser à ces courbes qui seront, trois siècles plus tard, engendrées 'mécaniquement' par les ordinateurs dont les calculs, justement, 's'entre-suivent'!

Nous avons vu comment Descartes a représenté géométriquement les solutions positives des équations du troisième degré par trisection de l'angle et comment Viète a pu les calculer par le cosinus obtenu de la trisection de l'angle. Mais le problème d'extraction de la racine troisième d'une expression comportant une « racine imaginaire », tel que Bombelli en a commencé l'exploration dans les formules de Cardan, subsiste. C'est avec l'invention du calcul différentiel et le développement des fonctions en séries que ce problème sera repris à la fin du XVIII^e siècle.

1.4 Newton, Leibniz, Euler

Dans son traité *Universal Arithmetick*, le mathématicien et physicien Isaac Newton (1642–1727) introduit la section portant sur la résolution des questions géométriques en ces termes:

> Geometrical Questions may be reduced sometimes to Equations with as much Ease, and by the same Laws, as those we have proposed concerning abstracted Quantities. [...]
> But in Geometrical Affairs, which more frequently occur, they so much depend on the various Positions and complex Relations of Lines, that they require some farther Invention and Artifice to bring them into Algebraick Terms. And though it is difficult to prescribe any Thing in these Sorts of Cases, and every Person's own Genius ought to be his Guide in these Operations; yet I will endeavour to show the Way to Learners. You are to know therefore, that Questions about the same Lines, related after any definite Manner to one another, may be variously proposed, by making different Quantities the *Quæsita* or Things sought, from different *Data* or Things given. But of what *Data* or *Quæsita* soever the Question be proposed, its Solution will follow the same Way by an Analytick Series, without any other Variation of Circumstance besides the feigned Species of Lines, or the Names by which we are used to distinguish the given Quantities from those sought. (Newton, 1728, p. 87)

Ainsi, Newton entend réduire la résolution des divers problèmes géométriques à l'étude des équations et séries qui les représentent; et tout comme Viète, il traitera les quantités inconnues de la même façon que les connues:

> And hence it is that Analysts order us to make no Difference between the given and sought Quantities. For since the same Computation agrees to any Case of the given and sought Quantities, it is convenient that they should be conceived and compared without any Difference, that we may the more rightly judge of the Methods of computing them. (Newton, 1728, p. 88)

Après avoir rappelé qu'il est utile à 'l'analyste' de ne pas ignorer certains théorèmes d'Euclide, Newton oppose à la géométrie 'synthétique' d'Euclide la simplicité de l'algèbre:

> Moreover, all the Difficulties of Problems may be reduced to the sole Composition of Lines out of Parts, and the Similarity of Triangles; so that there is no Occasion to make use of other Theorems; because they may all be resolved into these two, and consequently into the Solutions that may be drawn from them. [...]
>
> The Analyst may observe several Theorems of this Nature in his Practice, and reserve them for his use; but let him use them sparingly, if he can, with equal Facility, or not much more Difficulty, deduce the Solution from more simple Principles of Computation. (Newton, 1728, p. 90-91)

Dans la théorie des équations que Newton élabore dans ce traité, il démontrera par un raisonnement strictement algébrique la formule bien connue donnant les zéros d'un polynôme quadratique:

> So also having $xx=ax-bb$, add on each Side $-ax+\frac{1}{4}aa$, and there comes out $xx-ax+\frac{1}{4}aa=\frac{1}{4}aa-bb$, and extracting the Root on each Side $x-\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$, or $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$. (Newton, 1728, p. 59)

Formule qu'il généralise au paragraphe suivant à une équation équivalente à $x^2=px+q$, avec toutefois une notation alourdie par le fait qu'il considère les paramètres comme positifs, suivant en cela la tradition. Plus loin dans son traité, Newton précise qu'il y a deux sortes de racines possibles: les positives et les négatives; les autres sont impossibles.

> For every possible Root, wether it be Affirmative or Negative, if multiplied by it self, produces an Affirmative Square; therefore that will be an impossible one which is to produce a Negative Square. By the same Argument you may conclude, that the Equation $x^3-4xx+7x-6=0$, has one real Root, which is 2, and two impossible ones $1+\sqrt{-2}$ and $1-\sqrt{-2}$. For any of these, 2, $1+\sqrt{-2}$, $1-\sqrt{-2}$ being writ in the Equation for *x*, will make all its Terms destroy one another; but $1+\sqrt{-2}$, and $1-\sqrt{-2}$, are impossible Numbers, because they suppose the Extraction of the Square Root out of the Negative Number –2. (Newton, 1728, p. 192-193)

Newton illustre aussitôt son rejet des « racines impossibles » par le lieu géométrique suivant: si l'on forme une équation représentant l'intersection d'une droite et d'un cercle, et que la distance de la droite au centre du cercle est plus grande que le rayon du cercle, alors les racines de cette équation seront impossibles. Cette remarque n'est pas sans rappeler celle de Descartes à propos des solutions de l'équation $z^2 = a\,z - b^2$ (voir ci-dessus, p. 41).

Newton ne semble pas s'être davantage attardé à l'étude des nombres complexes. Toutefois, il contribuera indirectement à l'éclaircissement de leur nature par l'invention du calcul différentiel et intégral et l'étude des différences finies. Ces conceptions lui permettront en effet d'inventer le développement en séries des fonctions analytiques, en particulier des fonctions trigonométriques sinus et cosinus et de la fonction exponentielle, et de démontrer la formule dite du binôme de Newton.

Le 13 juin 1676, dans une première lettre adressée[21] au mathématicien, conseiller politique et philosophe allemand Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), Newton énonce un théorème qui lui permet de calculer les puissances rationnelles du binôme:

> Mais les Extractions de Racines sont beaucoup plus abrégées au moyen de ce *Théorème*:
> $(P+PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + etc.$
> [...] je prends *A* pour le premier terme $P^{m/n}$, *B* pour le second $\frac{m}{n}AQ$, et ainsi de suite.
>
> (Newton, *in* Leibnitz, *Correspondance*, p.14)

En posant $r = \frac{m}{n}$, $a=P$ et $b=PQ$, le théorème s'énonce donc:

$$(a+b)^r = a^r + ra^r(b/a) + r\frac{r-1}{2}a^r(b/a)^2 + r\frac{r-1}{2}\frac{r-2}{3}a^r(b/a)^3 + r\frac{r-1}{2}\frac{r-2}{3}\frac{r-3}{4}a^r(b/a)^4 + \dots$$

$$(a+b)^r = a^r + ra^{r-1}b + r\frac{r-1}{2}a^{r-2}b^2 + r\frac{r-1}{2}\frac{r-2}{3}a^{r-3}b^3 + r\frac{r-1}{2}\frac{r-2}{3}\frac{r-3}{4}a^{r-4}b^4 + \dots$$

---

21 Cette lettre est adressée à Maître Henri Oldenburg (secrétaire multilingue de la Royal Society à Londres) à qui il demande de la communiquer à Leibniz (*in* Leibniz, *Correspondance*, p. 14).

ce qui, en posant $\binom{r}{0}=1$ et $\binom{r}{k+1}=\binom{r}{k}\frac{r-k}{k+1}$, donc $\binom{r}{k}=\frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}\cdot\frac{r-2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{r-k+1}{k}$,

s'exprime par la forme usuelle du *binôme de Newton*: $(a+b)^r=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}a^{r-k}b^k$.

Dans le cas où $r\in\mathbb{N}$, les termes de rang supérieur à $r+1$ s'annulent; le binôme s'exprime alors par $(a+b)^r=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}a^{r-k}b^k$, où le symbole $\binom{r}{k}$ désigne donc, dans ce cas particulier, la combinaison $\binom{r}{k}=\frac{r!}{(r-k)!k!}$.

À la demande de Leibniz, Newton explique[22] son théorème dans la seconde lettre[23] qu'il lui adresse le 24 octobre 1676 par l'intermédiaire de Oldenburg. Grâce au calcul (des fluxions) qu'il invente, Newton sait que sur l'intervalle [0, x], l'aire A sous les courbes $y=(1-x^2)^0$, $y=(1-x^2)^1$, $y=(1-x^2)^2$, $y=(1-x^2)^3$, $y=(1-x^2)^4$ est respectivement $A=x$, $A=x-\frac{1}{3}x^3$, $A=x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5$, $A=x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$, $A=x-\frac{4}{3}x^3+\frac{6}{5}x^5-\frac{4}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9$. Pour déterminer l'aire A sous les courbes de puissances intermédiaires $y=(1-x^2)^{1/2}$, $y=(1-x^2)^{3/2}$, $y=(1-x^2)^{5/2}$, $y=(1-x^2)^{7/2}$, Newton observe que les coefficients du deuxième terme en x^3 pour l'aire des puissances entières sont successivement: $-\frac{0}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{3}{3},-\frac{4}{3}$; par interpolation linéaire, écrit-il, on obtient respectivement les coefficients $-\frac{1/2}{3},-\frac{3/2}{3},-\frac{5/2}{3},-\frac{7/2}{3}$ pour l'aire des puissances intermédiaires. Ensuite, il écrit avoir trouvé que si l'on pose le numérateur

---

22 Selon Kline (1972, p. 273, 438), Newton n'a jamais donné de preuve de la formule du binôme qui porte son nom (dans les cas des exposants fractionnaires). Toutefois, James Gregory (1638 à 1675) l'a déduite de la formule d'interpolation dite de Gregory-Newton portant sur les différences finies. C'est de cette dernière formule que Brook Taylor déduira la formule d'expansion qui porte son nom.

23 Traduit en français du latin *in* (Leibnitz, *Correspondance*, p. 34-36) et traduit en anglais *in* (Newton, 1737, préface, p. 31-32).

de ce second coefficient être égal à m, alors les autres coefficients s'obtiennent successivement par la formule $\frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \ldots$. Ainsi par exemple, l'aire A sous la courbe circulaire $y=(1-x^2)^{1/2}$ dans l'intervalle $[0, x]$ serait

$$A = x - \frac{1/2}{3}x^3 - \frac{1/8}{5}x^5 - \frac{1/16}{7}x^7 - \frac{5/128}{9}x^9 - \ldots .$$

Finalement, il conclut que s'il développait la fonction elle-même plutôt que son aire, il obtiendrait le développement énoncé par le théorème ci-dessus, soit dans notre notation,

$$(1-x^2)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-x^2)^k \text{ , où } \binom{r}{0} = 1 \text{ et } \binom{r}{k} = \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r-2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{r-k+1}{k} .$$

Newton poursuit ainsi sa seconde lettre à Leibniz :

> Et ainsi s'est fait connaître à moi la réduction générale des radicaux dans des séries infinies au moyen de la règle que j'ai posée au début de la première lettre, avant que je sache extraire les racines.
>
> Mais, celle-ci étant connue, l'autre n'a pu longtemps se cacher. En effet pour expérimenter ces opérations, j'ai multiplié $1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6$ etc. par soi; et on voit $1-xx$, les termes restants à l'infini s'évanouissant par continuation de la série. Et ainsi $1-\frac{1}{3}xx-\frac{1}{9}x^4-\frac{5}{81}x^6$ etc. multipliée deux fois par soi, a produit encore $1-xx$. Ce qui, afin que la démonstration de ces Conclusions fût certaine, m'a conduit ainsi par la main à tenter d'après le renversement, si ces séries qu'on a établies ainsi être les racines de la quantité $1-xx$, ne pourraient être tirées de là selon la coutume Arithmétique. Et la chose réussit bien. La forme de l'opération dans les racines carrées était celle-ci:

$$\begin{array}{l|l}
1-xx & \underline{1-\frac{1}{2}xx-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6\,etc.} \\
\underline{1\quad} & \\
0-xx & \\
\quad\underline{-xx+\frac{1}{4}x^4} & \\
\qquad\quad -\frac{1}{4}x^4 & \\
\qquad\underline{-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^6+\frac{1}{64}x^8} & \\
\qquad\qquad -\frac{1}{8}x^6-\frac{1}{64}x^8 &
\end{array}$$

(*in* Leibnitz, *Correspondance*, p. 35-36)

Cette dernière méthode d'extraction des racines est illustrée dans la section *Of Extraction of Roots* de son texte *Universal Arithmetick* (Newton, 1728, p. 32-36) par quelques exemples simples (carrés parfaits de binôme, etc.). On retrouve le même type de calcul que ci-dessus dans l'introduction à son *Treatise* (Newton, 1737, p. 38), lorsqu'il développe la racine carrée de a^2+x^2 par la série

$$(a^2+x^2)^{1/2}=a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}+\frac{7x^{10}}{256a^9}-\frac{21x^{12}}{1024a^{11}}\ \&c.$$ [24]

Dans la première lettre qu'il envoie à Newton (27 août 1676) par l'intermédiaire de Oldenburg, voici ce que Leibniz écrit à propos des nombres complexes conjugués:

> Je penserais en vain espérer, bien plus de chercher, l'enlèvement des quantités Imaginaires dans les expressions des racines réelles. Et en effet celles-ci ne nuisent en aucun mode ou aux calculs ou aux constructions, et les quantités sont vraies et réelles si elles sont conjuguées entre soi, à cause des destructions des virtuelles. Ce que j'ai saisi par beaucoup d'exemples élégants et d'arguments.
>
> Par exemple: $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$. En effet bien que la racine ne soit extraite ni du Binome $\sqrt{1+\sqrt{-3}}$ ni du Binome $\sqrt{1-\sqrt{-3}}$, et donc que l'imaginaire $\sqrt{-3}$ ne soit pas ainsi détruite, pourtant elle est à supposer être virtuellement détruite, ce qui apparaîtrait dans l'acte si l'Extraction pouvait être faite. Pourtant par une autre voie[25] cette somme est trouvée être $\sqrt{6}$. D'où dans les Binomes Cubiques où une réalité de ce mode des formules (lorsque alors l'extraction de chaque Binome ne peut être faite) ne peut être

---

[24] La formule du binôme pour un exposant réel r quelconque se démontre aisément à l'aide du calcul différentiel. Soit en effet $y=(1+x)^r$ dont le développement en série serait $y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$; alors $x=0\Rightarrow y=1\Rightarrow a_0=1$ et $(1+x)y'=ry$. En développant les termes de cette dernière équation, on obtient

$$\begin{array}{lllllllll} y' & = & a_1 & +2a_2x & +3a_3x^2 & +4a_4x^3 & +\ldots & +(k+1)a_{k+1}x^k & +\ldots \\ xy' & = & & a_1x & +2a_2x^2 & +3a_3x^3 & +\ldots & +ka_kx^k & +\ldots \\ ry & = & r & +ra_1x & +ra_2x^2 & +ra_3x^3 & +\ldots & +ra_kx^k & +\ldots \end{array}$$

d'où $a_1=r,\ a_2=a_1\frac{r-1}{2}=\frac{r(r-1)}{2},\ a_3=a_2\frac{r-2}{3}=\frac{r(r-1)(r-2)}{3!},\ \ldots,\ a_{k+1}=a_k\frac{r-k}{k+1}=\frac{r(r-1)\ldots(r-k)}{(k+1)!},\ \ldots$

Par le critère de d'Alembert, on sait que cette série converge lorsque $|x|<1$.

[25] Le procédé auquel Leibniz renvoie est le suivant. Soit $c=\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}$, où $a,\ b>0$. Alors $c^2=2a+2b$. Ici, $a=1$, $b=2$.

> montrée à l'oeil, pourtant c'est compris par la pensée. C'est pourquoi en vain Descartes eut d'autres expressions de Cardan pour particulières. Si quelqu'un pouvait trouver la quadrature du cercle et de ses parties, d'après l'hyperbole donnée et la quadrature de ses parties, celui-ci pourrait les enlever; par contre ces imaginaires ne seraient pas introduites dans la quadrature elle-même par ce mode. (Leibnitz, *Correspondance*, p. 31)

Plus généralement, cette méthode d'élimination de la partie imaginaire[26], basée sur le développement dudit binôme de Newton, permet en effet d'éliminer la partie purement imaginaire de la somme des mêmes puissances de nombres conjugués; car en supposant que les séries suivantes sont convergentes,

de $(a+bi)^n=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n}{r}a^{n-r}(bi)^r$ et $(a-bi)^n=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n}{r}a^{n-r}(-bi)^r$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}(a+bi)^n+(a-bi)^n &= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n}{r}a^{n-r}(bi)^r(1+(-1)^r)\\ &= 2\sum_{m=0}^{\infty}\binom{n}{2m}a^{n-2m}(-b^2)^m\,.\end{aligned}$$

Mais un chemin plus fructueux dans ce calcul des « racines imaginaires » sera obtenu par les fonctions transcendantes. En 1706, Leibniz et Jean Bernouilli (1667–1748), qui introduisit la méthode d'intégration par fractions partielles (Kline, 1972, p. 407), étendent le calcul intégral aux nombres imaginaires et font l'observation suivante [27] :

puisque $\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right)$, alors on obtient, en intégrant membre à membre,

$$\arctan(x)+K=\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{x-i}{x+i}\right)\,.$$

Puis en posant $x=0$, il s'ensuit que $K=\frac{1}{2i}\ln(-1)$.

---

[26] Cette méthode sera reprise par F. Nicole en 1738 (Flament, 2003, p. 52).

[27] Flament, p. 62 : l'édition 2003 contient, à travers ses pages, de multiples coquilles; nous les avons corrigées.

L'importance de cette observation viendra de ce qu'en posant $\arctan(x)=\frac{y}{2}$, donc

$\tan(\frac{y}{2})=x$, il s'ensuit que $yi+\ln(-1)=\ln\left(\frac{x-i}{x+i}\right)$, d'où $yi+\ln(-1)=\ln\left(\frac{(x-i)^2}{x^2+1}\right)$.

Puisque $x^2+1=\sec^2(y/2)$, il vient:

$$\begin{aligned} yi+\ln(-1)&=\ln\left(\sin^2(y/2)-2i\sin(y/2)\cos(y/2)-\cos^2(y/2)\right)\\ &=\ln\left(-(\cos(y)+i\sin(y))\right)\\ &=\ln(-1)+\ln\left(\cos(y)+i\sin(y)\right)\\ yi&=\ln\left(\cos(y)+i\sin(y)\right), \end{aligned}$$

ce dernier résultat ayant été publié par Roger Cotes en 1714. Il s'ensuit que

$$e^{yi}=\cos(y)+i\sin(y) \ ,$$

cette dernière identité résultant de la définition du logarithme lorsque celui-ci sera défini comme fonction réciproque de l'exponentielle.[28]

Une autre approche pour déduire cette identité est d'utiliser les développements en série des fonctions suivantes, obtenues indépendamment (Kline, 1972, p. 438) par Newton et Leibniz:

$$\sin(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad \cos(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} \quad \text{et} \quad e^x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Le mathématicien suisse Leonhard Euler[29] (1707–1783) en déduisit, dans son ouvrage *Introductio in Analysum infinitorum* publié en 1748, la formule obtenue par Cotes

$$e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta), \text{ où } i^2=-1.$$

---

28 « L'étude de la fonction logarithmique subit par ailleurs une transformation capitale. Trois méthodes étaient jusqualors utilisées, la méthode ancienne de comparaison des progressions arithmétiques et géométriques, l'emploi des développements en série et la définition comme primitive. L'étude de la fonction exponentielle par Wallis, Newton et J. Bernouilli montra que la fonction logarithmique est l'inverse de cette nouvelle fonction dont les propriétés étaient particulièrement simples. » Taton, R., *Histoire Générale des Sciences*, t.II. p. 450 (*in* Flament, 2003, p. 83).

29 « Son œuvre est la plus vaste de l'histoire des sciences, et s'étend à tous les sujets scientifiques et techniques. Avec Lagrange, il a dominé les mathématiques du XVIII^e siècle par la variété et la richesse de ses découvertes » (Dieudonné, 1987, p. 271).

Il s'ensuit, évidemment, que $e^{i\pi}=-1$ et $i=e^{i\pi/2}$, d'où $i^i=e^{-\pi/2}$. Euler en déduit directement la formule

$$(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\text{, où } n\in\mathbb{R}\text{,}$$

que Abraham de Moivre (1667–1754) avait découverte en 1707 pour $n\in\mathbb{N}$.

Le problème du calcul de la racine cubique d'un nombre complexe est donc enfin résolu, en ce que

$$\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{3}\right)\right)^3=\cos(\theta)+i\sin(\theta)\text{, où } k\in\{0, 1, 2\}\text{.}$$

Ainsi, de $z=r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ où $r\in\mathbb{R}^+$, il s'ensuit que $\ln(z)=\ln(r)+i(\theta+2k\pi)$, où $k\in\mathbb{Z}$. Dans une lettre qu'il adressait à d'Alembert le 19 août 1747, Euler écrit que, suivant son « sentiment »:

$$\ln(-1)=i(2k+1)\pi\text{, } \ln(1)=i2k\pi\text{, } \ln(i)=i(\tfrac{1}{2}+2k)\pi \text{ et } \ln(-i)=i(\tfrac{3}{2}+2k)\pi\text{,}$$

où $k\in\mathbb{Z}$ (Flament, 2003, p. 92-93). Ce qui répondait à l'argument suivant du mathématicien suisse Jean Bernoulli: puisque $0=\ln(1)=\ln((-1)^2)=2\ln(-1)$, alors $\ln(-1)=0$, cet argument présumant donc que le logarithme d'un nombre réel positif est unique, plutôt qu'une fonction multiforme.

Toutefois, Euler considère les nombres complexes comme des « nombres impossibles » quoique utiles; ainsi note-t-il dans ses *Éléments d'Algèbre* (dont la première des nombreuses éditions remonte à 1767):

> Or puisque tous les nombres qu'il est possible de s'imaginer sont ou plus grands ou plus petits que 0, ou sont 0 même, il est clair qu'on ne peut pas même compter la racine quarrée d'un nombre négatif parmi les nombres possibles, et il faut donc dire que c'est une quantité impossible. C'est de cette façon que nous sommes conduits à l'idée de nombres qui par leur nature sont

> impossibles. On nomme ordinairement ces nombres des quantités imaginaires, parce qu'elles existent purement dans l'imagination. (note 143)
>
> Il nous reste enfin à lever le doute qu'on pourrait avoir sur l'utilité des nombres dont nous venons de parler; car, en effet, ces nombres étant impossibles, il ne serait pas étonnant qu'on les crût tout à fait inutiles et l'objet seulement d'une vaine spéculation. On se tromperait cependant, le calcul des imaginaires est de la plus grande importance; souvent il se présente des questions, desquelles on ne saurait dire sur-le-champ si elles renferment quelque chose de réel et de possible ou non. Or quand la solution d'une pareille question nous conduit à des nombres imaginaires, nous sommes certains que ce qu'on demande est impossible. (note 151)
>
> (Euler, *Éléments d'algèbre*; *in* Flament, 2003, p. 88)

En ce qui concerne la théorie des équations, Euler est le premier mathématicien, dès 1732, à donner une résolution algébrique complète de l'équation du troisième degré en montrant que celle-ci contient trois racines, compte tenu des multiplicités (Kline, 1972, p. 267)[30]. Ainsi, pour résoudre l'équation $x^3=px+q$ où $p, q \in \mathbb{R}$, Euler commence par effectuer la même substitution que Cardano: $x=t+p/(3t)$, d'où l'équation résultante $t^6-qt^3+(p/3)^3=0$, cette équation quadratique en t^3 ayant pour racines $t^3=q/2\pm\sqrt{(q/2)^2-(p/3)^3}$. Mais Euler sait que si ω est l'une des deux racines cubiques non réelles de l'unité, par exemple $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}\ i}{2}$, alors l'autre est $\bar{\omega}$; de plus, on a ici $\bar{\omega}=\omega^{-1}$. Or, puisque $(1t)^3=(\omega t)^3=(\bar{\omega} t)^3=t^3$, il s'ensuit que si t est l'une des racines cubiques de $q/2\pm\sqrt{(q/2)^2-(p/3)^3}$, alors ωt et $\bar{\omega} t$ forment ses autres racines cubiques.

Si $(q/2)^2-(p/3)^3\geq 0$, soit u la racine cubique réelle $u=\sqrt[3]{q/2+\sqrt{(q/2)^2-(p/3)^3}}$. En posant $v=p/(3u)$, on obtient donc, après simplification, le nombre réel

---

30 Cette méthode sera elle-même reprise par Lagrange en 1770 dans ses *Réflexions sur la théorie algébrique des équations* (Katz, 1993, p. 558).

$v=\sqrt[3]{q/2-\sqrt{(q/2)^2-(p/3)^3}}$; on a alors $\frac{p}{3\,\omega u}=\bar{\omega} v$ et $\frac{p}{3\,\bar{\omega} u}=\omega v$. Les solutions de $x^3+px=q$, lorsque $(q/2)^2-(p/3)^3\geq 0$, sont donc

$$x_1=u+v\,,\ x_2=\omega u+\bar{\omega} v \text{ et } x_3=\bar{\omega} u+\omega v=\overline{x_2}\,,$$

où $x_1\in\mathbb{R}$ et où $x_2, x_3\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ lorsque $(q/2)^2-(p/3)^3>0$.

Si $(q/2)^2-(p/3)^3<0$, soit alors u l'une des racines cubiques (non réelles) de $q/2+\sqrt{(q/2)^2-(p/3)^3}$; en posant $v=p/(3u)$, on obtient $v=\bar{u}$, $\frac{p}{3\omega u}=\bar{\omega}\bar{u}$ et $\frac{p}{3\bar{\omega} u}=\omega\bar{u}$. Les solutions de $x^3+px=q$, lorsque $(q/2)^2-(p/3)^3<0$, sont donc les nombres réels

$$x_1=u+\bar{u}=2\Re(u)\ ,\ x_2=\omega u+\bar{\omega}\bar{u}=2\Re(\omega u) \text{ et } x_3=\bar{\omega}u+\omega\bar{u}=2\Re(\bar{\omega}u)\,,$$

où $\Re(z)$ désigne la partie réelle du nombre complexe z. Dans ce dernier cas, on a donc $p>0$ et les racines obtenues sont précisément les nombres réels

$$x_{k+1} = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{2k}{3}\pi+\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}}\right)\right),\text{ où } k\in\{0,\,1,\,2\},$$

car $u^3=\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{p}{3})^3-(\frac{q}{2})^2}\,i \Rightarrow \|u\|=\sqrt{\frac{p}{3}}$, $\frac{\Re(u^3)}{\|u^3\|}=\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}}$, $\omega=\cos(\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{2\pi}{3})$ et $\bar{\omega}=\cos(\frac{4\pi}{3})+i\sin(\frac{4\pi}{3})$.

Euler obtient donc ici la formule généralisée issue du cas particulier obtenu par Viète (voir ci-dessus, p. 33-34).

Dans une lettre adressée à Nicolas Bernouilli en 1742, Euler affirma, sans démonstration générale toutefois, que tout polynôme à coefficients réels se décompose en facteurs linéaires et facteurs quadratiques irréductibles à coefficients réels; Euler fit aussi remarquer, dans une lettre adressée la même année à Goldbach, que les racines complexes non réelles se présentent alors par paires de conjuguées (Kline, 1972, p. 597-598).

Non seulement les 'nombres' complexes s'avèrent-ils désormais nécessaires dans la théorie des équations, leur présence permet aussi de tisser des liens essentiels entre fonctions transcendantes. Même si, pour Newton, Leibniz et Euler, les 'nombres' complexes demeurent encore des « nombres impossibles », la notion de nombre s'est considérablement modifiée sous leur influence, l'existence des nombres irrationnels algébriques et transcendants devenant incontournable. De plus, les fonctions trigonométriques, et plus généralement transcendantes, font dès lors partie du langage mathématique courant alors que la notion même de fonction s'est étendue au développement en séries (infinies) grâce à l'invention du calcul différentiel et intégral. Ainsi, ne serait-ce que grâce à la célèbre identité $e^{i\pi}=-1$ d'Euler, le statut des « nombres complexes » constitue une énigme qu'il devient urgent d'élucider. Nous verrons dans la section suivante que l'invention de leur représentation géométrique lèvera les dernières entraves à la reconnaissance de leur existence en tant que 'nombre'.

1.5 Wessel, Argand, Gauss, Cauchy

Il était généralement accepté que l'on pouvait représenter les nombres réels par les points d'une droite. En 1685, le mathématicien britannique John Wallis (1616–1703), titulaire de la chaire de géométrie à Oxford et fondateur de l'académie royale de Londres, proposera le procédé suivant dans son traité *Algebra* : pour chaque nombre $a+b\sqrt{-1}$, on effectue, à partir de l'origine de l'axe des réels, un déplacement mesurant une distance $|a|$ dans le sens positif ou négatif de l'axe selon le signe de a ; puis à partir du point ainsi marqué, on trace un segment de droite, dans une direction perpendiculaire à l'axe des réels, mesurant $|b|$ unités, dans un sens tenant compte du signe positif ou négatif de b (Kline, 1972, p. 595). Précisons que, contrairement à ce qui nous est aujourd'hui si familier, cette représentation graphique ne comportait pas d'axe perpendiculaire (l'axe des y) à la droite des réels (l'axe des x). Voici ce que Wallis écrit à Leibniz le 22 juillet 1698, à propos de l'existence de ces nombres:

> Mais dis-je, qui montrera la valeur de la racine $\sqrt{-b^2}$ ou $b\sqrt{-1}$, en tant qu'elle est imaginaire et impossible? Entièrement dis-je. Et même le Quarré $-b^2$ lui-même est non moins imaginaire et impossible (en parlant rigoureusement). Et certes toute quantité entièrement *négative* (ou qu'elle soit une Ligne, un Plan, un Solide, ou quelque autre chose) est pareillement imaginaire et impossible. Certes il est impossible qu'existe quelque chose qui soit *moins que rien*. Mais en quel sens quelqu'un voudrait-il que soit imaginé un carré négatif ? ; $\sqrt{-b^2}$ doit être pareillement imaginé, côté imaginaire de ce carré imaginaire. Et certes $\sqrt{-b^2}$ multiplié par $\sqrt{-b^2}$ fait non moins $-b^2$ que $\sqrt{+b^2}$ multiplié par $\sqrt{+b^2}$ fait $+b^2$.
>
> (Wallis; *in* Leibniz, *Correspondance*, p. 99-100)

Le 10 mars 1797, le norvégien Caspar Wessel (1745–1818), arpenteur attaché à la triangulation et à la cartographie de l'Académie royale du Danemark, présente à l'Académie des Sciences du Danemark un mémoire[31] proposant la première

---

[31] publié par l'Académie en traduction française en 1897 sous le titre *Essai sur la représentation analytique de la direction.* Cet ouvrage de Wessel aura en effet été oublié pendant près d'un siècle, jusqu'à ce que le mathématicien danois C. Juel en fasse un compte-rendu en 1895.

représentation géométrique satisfaisante des nombres complexes, ceux-ci étant représentés comme des segments de droite orientés dans un « plan complexe » défini comme suit (le nombre i étant alors noté ϵ).

> Désignons par +1 l'unité positive, par $+\epsilon$ une autre unité [de même longueur que la première] perpendiculaire à la première et ayant la même origine: alors l'angle de direction de +1 sera égal à 0°, celui de –1 à 180°, celui de $+\epsilon$ à 90° et celui de $-\epsilon$ à –90° ou 270°. [...]
> Le segment de droite représenté par $\cos(v) + \epsilon \sin(v)$ est un rayon de cercle dont la longueur est égale à 1 et dont la déviation par rapport à cos(0°) est égal à l'angle v. Il s'ensuit que $r\cos(v) + r\,\epsilon\,\sin(v)$ désigne un segment de droite dont la longueur est égale à r et dont l'angle de déviation est v.
> (Wessel; *in* Flament, 2003, p. 128-131)

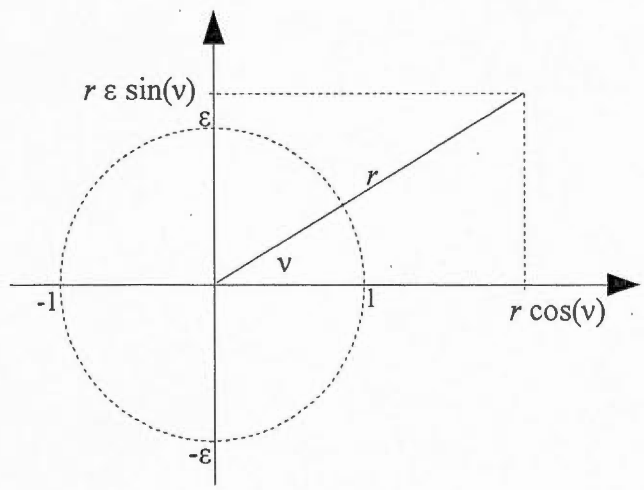

Figure 1.19: Le « plan complexe » de Wessel

Il s'ensuit que (Wessel; *in* Flament, 2003, p.131):

$$r\left(\cos(v)+\epsilon\sin(v)\right)=(r\cos(v))+\epsilon(r\sin(v))\,.$$

Voici comment Wessel définit l'opération d'addition sur ces segments.

> Partant de deux segments, on les combine en faisant partir l'un du point où l'autre se termine; on joint par un nouveau segment les deux bouts de la ligne brisée ainsi obtenue; ce nouveau segment s'appelle alors la somme des segments donnés. [...]
> De même, quand l'un des côtés d'un triangle va de a à b le second de b à c, on doit appeler le troisième, qui va de a à c, la somme des deux autres, et le

désigner par $ab+bc$, en sorte que ac et $ab+bc$ ont la même signification, ou que $ac=ab+bc=-ba+bc$, si ba signifie le segment opposé à ab.

(Wessel; *in* Flament, 2003, p. 121-122)

Nous y reconnaissons l'addition usuelle des vecteurs géométriques telle qu'exprimée par la loi dite de Chasles: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, ainsi que la règle $-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}$.[32]

Et voici comment Wessel définit l'opération de multiplication sur ces segments.

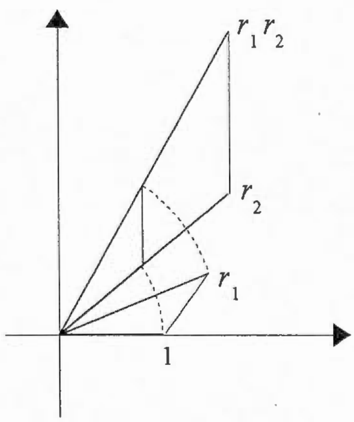

Figure 1.20: Produit de segments dans le « plan complexe » de Wessel

Le produit de deux segments de droite doit, sous tous les rapports, être formé avec l'un des facteurs de la même manière que l'autre facteur est formé avec le segment positif ou absolu qu'on a pris égal à 1 ; c'est-à-dire que :

1) les facteurs doivent avoir une direction telle qu'ils puissent être placés dans le même plan que l'unité positive;

2) quant à la longueur, le produit doit être à l'un des facteurs comme l'autre l'est à l'unité;

3) en ce qui concerne la direction du produit, si l'on fait partir de la même origine l'unité positive, les facteurs et le produit, celui-ci doit être dans le plan de l'unité et des facteurs, et doit dévier de l'un des facteurs d'autant de degrés et dans le même sens que l'autre facteur dévie de l'unité, en sorte que l'angle de direction du produit ou sa déviation par rapport à l'unité positive soit égale à la somme des angles de direction des facteurs. (Wessel; *in* Flament, 2003, p. 125)

Wessel obtiendra donc les identités (*in* Flament, 2003, p. 131-132):

$$\left(A\left(\cos(\nu)+\epsilon\sin(\nu)\right)\right)\cdot\left(C\left(\cos(\mu)+\epsilon\sin(\mu)\right)\right)=AC\left(\cos(\nu+\mu)+\epsilon\sin(\nu+\mu)\right),$$

$$(a+\epsilon b)(c+\epsilon d)=(ac-bd)+\epsilon(ad+bc) \text{ et } \epsilon^2=\epsilon\cdot\epsilon=-1 .$$

---

[32] La notion de vecteurs serait connue depuis fort longtemps dans divers contextes d'application: ainsi, Aristote savait que la force résultant de deux forces orientées est un vecteur de mêmes grandeur et orientation que la diagonale du parallélogramme dont les côtés sont des vecteurs de mêmes grandeur et orientation que ces forces et dont l'origine est commune à celles-ci. Galilée formulera cette loi explicitement (Kline, 1972, p. 776).

Hélas, cette conception visionnaire des nombres complexes ne fut rendue publique, rappelons-le, qu'en 1897, soit un siècle après sa rédaction. Entre-temps, le suisse Jean-Robert Argand (1768–1822), probablement teneur de livres à Paris, publie en 1806 une brochure intitulée *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, qui ne fut porté à la connaissance de la communauté mathématicienne que sept ans plus tard grâce à une note de J.-F. Français, insérée en 1813 dans les *Annales de Gergonne*[33]. Argand commence, dans son *Essai*, par traiter de l'existence des nombres négatifs. Il considère l'exemple du compte monétaire où les quantités positives et négatives représenteront respectivement des valeurs actives et passives (à la manière de Nicolas Chuquet, au XV[e] siècle); de même, l'exemple de la balance à deux plateaux ayant chacun leur propre gradation permettra d'illustrer que les quantités négatives en grammes marquées dans la direction vers le bas du déplacement de l'un des plateaux correspondent aux quantités positives dans la direction opposée de l'autre, donc égales en valeur absolue. Argand utilise ensuite l'analogie avec ces notions de direction et de valeur absolue pour construire une représentation géométrique par laquelle il pourrait résoudre le problème de l'existence de la moyenne proportionnelle géométrique x de la proportion $\frac{-1}{x} = \frac{x}{1}$.

> Mais, puisqu'on a trouvé plus haut que la quantité négative, imaginaire lorsque la numération était appliquée à de certaines espèces de grandeurs, devenait réelle lorsque l'on combinait d'une certaine manière l'idée de *grandeur absolue* avec l'idée de *direction*, ne serait-il pas possible d'obtenir le même succès relativement à la quantité dont il s'agit, quantité réputée imaginaire par l'impossibilité où l'on est de lui assigner une place dans l'échelle des quantités positives ou négatives?
>
> En y réfléchissant, il a paru qu'on parviendrait à ce but si l'on pouvait trouver un genre de grandeurs auquel pût s'allier l'idée de direction, de manière que, étant adoptées deux directions opposées, l'une pour les valeurs positives, l'autre pour les valeurs négatives, il en existât une troisième telle,

---

33 J.-F. Français y mentionnait une lettre de Adrien-Marie Legendre où celui-ci évoquait l'idée d'un auteur qui lui était jusqu'alors méconnu: Argand.

> que la direction positive fût à celle dont il s'agit comme celle-ci est à la direction négative.
>
> Or, si l'on prend un point fixe K et qu'on adopte pour unité positive la ligne KA considérée comme ayant sa direction de K en A, ce qu'on pourra désigner par $\overline{KA}$, pour distinguer cette quantité de la ligne KA dans laquelle on ne considère ici que la grandeur absolue, l'unité négative sera $\overline{KI}$, le trait supérieur ayant la même destination que celui qui est placé sur $\overline{KA}$, et la condition à laquelle il s'agit de satisfaire sera remplie par la ligne KE, perpendiculaire aux précédentes et considérée comme ayant sa direction de K en E, et qu'on exprimera également par $\overline{KE}$. En effet, la direction de $\overline{KA}$ est, à l'égard de la direction de $\overline{KE}$, ce que cette dernière est à l'égard de la direction de $\overline{KI}$. De plus, on voit que cette même condition est aussi bien remplie par $\overline{KN}$ que par $\overline{KE}$, ces deux dernières quantités étant entre elles comme +1 et –1, ainsi que cela doit être. Elles sont donc ce qu'on exprime ordinairement par $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$. (Argand, 1797, p. 6-7).

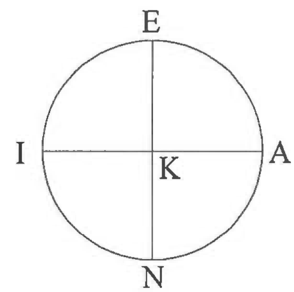

Figure 1.21: « Lignes dirigées » d'Argand

Pour que les « lignes dirigées » (ou « lignes en direction ») $\overline{KE}$ et $\overline{KN}$ soient une représentation graphique des deux solutions de l'équation $x^2=-1$, Argand définira l'opération de multiplication de ces « lignes dirigées » comme suit:

> Ainsi, pour construire le produit de deux rayons dirigés, il faut prendre, à partir de l'origine des arcs, la somme des deux arcs qui appartiennent à ces rayons, et l'extrémité de l'arc-somme déterminera la position du rayon-produit [...]
> Si les facteurs ne sont pas des unités, on pourra les mettre sous la forme $m.\ \overline{KB}$, $n.\ \overline{KC}$,..., m, n, ... étant des coefficients ou lignes primes positives; et le produit sera $(m\,n...)(\overline{KB}\,.\,\overline{KC}\ ...) = (mn...)\ \overline{KP}$.
> Or le produit de la ligne prime positive ($m\ n$...) par le rayon $\overline{KP}$ n'est autre chose que cette même ligne tirée dans la direction de ce rayon.
>
> (Argand, 1797, p.21)

Ce qui donnera lieu, à la page 26, à l'identité déjà connue sous le nom de *formule de De Moivre*: $\cos(na)+i\sin(na)=(\cos(a)+i\sin(a))^n$ et par suite, à plusieurs autres identités trigonométriques ainsi qu'au développement en série des fonctions trigonométriques. Réciproquement, voici comment Argand construit graphiquement (fig. 1.22) les trois racines $x=\overline{KP}$ de l'équation $x^3=\overline{KB}$ lorsque la « ligne dirigée » $\overline{KA}$, à l'origine des arcs, mesure l'unité.

> S'il s'agit, par exemple, de construire deux moyennes, $\overline{KP}$ et $\overline{KQ}$, entre $\overline{KA}$ et $\overline{KB}$, ce qui doit donner lieu aux trois rapports $\overline{KA} : \overline{KP} :: \overline{KP} : \overline{KQ} :: \overline{KQ} : \overline{KB}$, il faut qu'on ait angle $\overline{AKP}$ = angle $\overline{PKQ}$ = angle $\overline{QKB}$, le trait supérieur indiquant que ces angles sont en position homologue sur les bases *AK*, *PK*, *QK*. Or on peut y parvenir de trois manières, savoir, en divisant en trois parties égales: 1° l'angle *AKB*; 2° l'angle *AKB*, plus une circonférence; 3° l'angle *AKB*, plus deux circonférences, ce qui donnera les trois constructions représentées par les figures [suivantes]. (Argand, 1797, p.8-9)

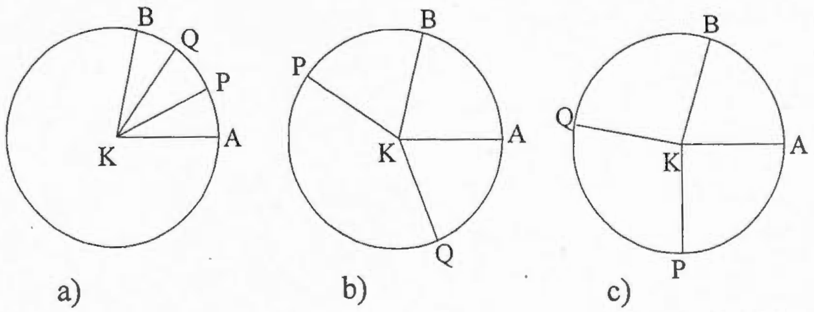

Figure 1.22: Les trois « moyennes proportionnelles géométriques » du 3e degré

Ce qui signifie, plus généralement, que les racines $n^{\text{ièmes}}$: $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ du nombre complexe $z=r\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)$ sont de la forme

$$z_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right),\quad k\in\{0,1,\ldots,n-1\}\ .$$

Finalement, remarquons que Argand, contrairement à Wessel, libère ces lignes brisées de tout point fixe *K* (Flament, 2003, p. 174):

> Observons maintenant que, pour l'existence des relations qui viennent d'être établies entre les quantités $\overline{KA}$, $\overline{KB}$, $\overline{KC}$,..., il n'est pas nécessaire que le départ de la direction, qui constitue une partie de l'essence de ces quantités, soit fixé à un point unique *K* [...].

En conséquence de ces réflexions, on pourra généraliser le sens des expressions de la forme $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{KP}$,..., et toute expression pareille désignera, par la suite, une ligne d'une certaine longueur, parallèle à une certaine direction, prise dans un sens déterminé entre les deux sens opposés que présente cette direction, et dont l'origine est à un point quelconque, ces lignes pouvant elles-mêmes être l'expression des grandeurs d'une autre espèce. [...]

En rapportant aux dénominations d'usage les diverses espèces de lignes en direction qui s'engendrent d'une unité primitive $\overline{KA}$, on voit que toute ligne parallèle à la direction primitive est exprimée par un nombre réel, que celles qui lui sont perpendiculaires sont exprimées par des nombres imaginaires ou de la forme $\pm\sqrt{-1}$, et, enfin, que celles qui sont tracées dans une direction autre que les deux précédentes appartiennent à la forme $\pm a \pm b\sqrt{-1}$, qui se compose d'une partie réelle et d'une partie imaginaire. (Argand, 1797, p. 9-12)

En 1799, l'astronome, mathématicien et physicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777–1855) donne la première preuve rigoureuse du théorème fondamental de l'algèbre, à savoir que tout polynôme à coefficients réels (ou complexes) possède au moins un zéro complexe; un polynôme de degré n admet donc exactement n zéros complexes, compte tenu des multiplicités — c'est la preuve du théorème que Girard avait pour ainsi dire énoncé en 1629. En 1831, Gauss conçoit les nombres $a+bi$, que nous nommons depuis les *nombres complexes*, comme les points du plan complexe et non plus comme des « segments orientés » ou « lignes dirigées ».

De même qu'on peut se représenter le domaine entier de toutes les quantités réelles au moyen d'une ligne droite indéfinie, de même on peut se figurer le domaine entier de toutes les quantités, les quantités réelles et imaginaires, au moyen d'un plan indéfini où tout point, déterminé par son abscisse a et son ordonnée b, représente pour ainsi dire la quantité $a+bi$.

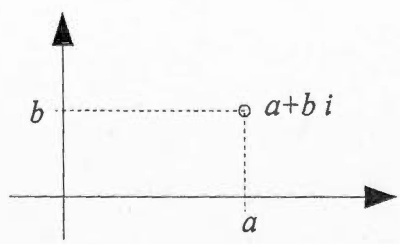

Figure 1.23: Le plan complexe représenté par Gauss

Par cette représentation géométrique, on a la signification intuitive des nombres complexes complètement établie et

> rien de plus n'est nécessaire pour admettre ces quantités dans le domaine de l'arithmétique.[34] (Gauss; *in* Colette, 1979, p. 182; *in* Kline, 1972, p. 63)

C'est grâce au prestige et à l'autorité de Gauss que dès 1831, cette représentation géométrique des nombres complexes sera largement diffusée en Allemagne et que leur existence sera peu à peu acceptée par les mathématiciens de l'Europe continentale; en effet: « voir, c'est croire! ».

En France, c'est vers 1814 que le mathématicien Augustin-Louis Cauchy[35] (1789–1857) fonda la théorie des fonctions d'une variable complexe. On lui doit aussi la formulation moderne de la dérivation à l'aide du concept de limite; en particulier, il pense les infinitésimaux comme variables dépendantes plutôt que, comme le pensait entre autres Newton, un nombre infime mais fixe. Malgré l'importance qu'il accorde aux « nombres complexes » dans ses travaux, le statut qu'il leur accorde en 1821 dans son *Analyse algébrique*[36] est mitigé.

> En analyse, on appelle *expression symbolique* ou *symbole* toute combinaison de signes algébriques qui ne signifie rien par elle-même, ou à laquelle on attribue une valeur différente de celle qu'elle doit naturellement avoir. On nomme de même *équations symboliques* toutes celles qui, prises à la lettre et interprétées d'après les conventions généralement établies, sont inexactes, ou n'ont pas de sens, mais desquelles on peut déduire des résultats exacts en modifiant et altérant, selon des règles fixes, ou ces équations elles-mêmes ou les symboles qu'elles renferment. [...] Parmi les expressions ou équations

---

[34] « But in this geometrical representation one finds the "*intuitive meaning of complex numbers completely established and more is not needed to admit these quantities into the domain of arithmetic*" » (*in* Kline, 1972 p. 631). La traduction proposée par Colette de ce passage fait contresens: « Selon Gauss, la représentation géométrique révèle "la signification intuitive des nombres complexes complètement établis et de plus il n'est pas nécessaire d'admettre ces quantités dans le domaine de l'arithmétique" » (*in* Colette, 1979, p. 182).

[35] « Le plus prolifique des mathématiciens après Euler » (Dieudonné, 1987, p. 271).

[36] Ce texte (qui constitue la première partie de son *Cours d'analyse*) fut très célèbre non seulement en France mais fut aussi « la base de l'étude mathématique en Allemagne » (Dahan-Dalmedico et Peiffer, 1986, p. 39).

> symboliques dont la considération est de quelque importance en analyse, on doit surtout distinguer celles que l'on a nommées *imaginaires*.
>
> (Cauchy, 1821; *in* Flament, 2003, p. 287)

Ce n'est que 33 ans plus tard, avec la publication en 1847 de son *Mémoire sur les quantités géométriques*, que son attitude à l'égard de l'existence des « nombres complexes » sera modifiée, grâce à une représentation géométrique faisant l'économie du symbole $\sqrt{-1}$ et utilisant plutôt le symbole neutre i. Nous y reconnaissons non seulement les conceptions de Wessel mais aussi la représentation géométrique actuelle du plan complexe:

> Dans mon *Analyse algébrique* publiée en 1821 je m'étais contenté de faire voir qu'on peut rendre rigoureuse la théorie des expressions et des équations imaginaires, en considérant ces expressions et ces équations comme *symboliques*. Mais, après de nouvelles et mûres réflexions, le meilleur parti à prendre me paraît être d'abandonner entièrement l'usage du signe $\sqrt{-1}$, et de remplacer la théorie des expressions imaginaires par la théorie des quantités que j'appellerai *géométriques* [...].
>
> Menons, dans un plan fixe, et par un point fixe O pris pour *origine* ou *pôle*, un axe polaire OX. Soit d'ailleurs r la distance de l'origine O à un autre point A du plan fixe, et p l'angle polaire, positif ou négatif, décrit par un rayon mobile, qui en tournant autour de l'origine O dans un sens ou dans l'autre, passe de la position OX à la position OA.
>
> Nous appellerons *quantité géométrique*, et nous désignerons par la notation r_p le rayon vecteur OA dirigé de O vers A. La longueur de ce rayon, représenté par la lettre r, sera nommé la *valeur numérique* ou le *module* de la quantité géométrique r_p ; l'angle p, qui indique la direction du rayon vecteur OA sera l'*argument* ou l'*azimuth* de cette même quantité. [...]
>
> Pour plus de généralité, on pourra désigner encore, sous le nom de *quantité géométrique*, et à l'aide de la notation r_p une longueur r mesurée dans le plan fixe donné, à partir d'un point quelconque, mais dans une direction qui forme avec l'axe OX, ou avec un axe parallèle, l'angle polaire p. Alors le point à partir duquel se mesurera la longueur r, et le point auquel elle aboutira, seront l'*origine* et l'*extrémité* de cette longueur. [...]
>
> Pour obtenir la *somme* de plusieurs quantité géométriques, il suffit de porter, l'une après l'autre, les diverses longueurs qu'elles représentent, dans les directions indiquées par les divers arguments, en prenant pour origine de chaque longueur nouvelle l'extrémité de la longueur précédente, puis de joindre l'origine de la première longueur à l'extrémité de la dernière, par une droite qui représentera en grandeur et en direction la somme cherchée. [...]

> Le *produit* de plusieurs quantités géométriques [...] sera une nouvelle quantité géométrique qui aura pour module le produit de leur module, et pour argument la somme de leur argument. (Cauchy, 1847; *in* Flament, 2003, p. 307-312)

Cauchy publiera par la suite plusieurs mémoires portant sur les quantités géométriques, dont un portant « sur la réduction d'une quantité géométrique quelconque à la forme $x+y\,i$ ». À travers la diffusion de ses écrits mathématiques en France et ailleurs, Cauchy, dès 1847, contribuera donc lui aussi, grâce à son prestige et son autorité, à l'acceptation de l'existence des nombres complexes par leur représentation géométrique.

Ce survol de l'histoire du nombre nous a donc montré les résistances qu'ont éprouvées les plus éminents mathématiciens de l'histoire à accepter l'existence des nombres irrationnels, puis des nombres négatifs et, finalement, des nombres complexes. L'existence des « grandeurs incommensurables » fut découverte par la déduction d'un théorème de géométrie (le théorème de Pythagore), tandis que la nécessité des nombres complexes est apparue dans le contexte algébrique des résolutions d'équations. Mais l'existence des nombres complexes ne fut acceptée que lorsque leur représentation géométrique fut découverte. Ainsi, même si l'algèbre a peu à peu développé ses propres méthodes, fondées sur une déduction respectant certaines propriétés et ayant de moins en moins à être légitimées par la géométrie, il reste que l'objet dont traite en premier lieu l'algèbre, le nombre, se devait de recevoir une représentation géométrique pour que son existence soit reconnue.

Du moins, en Europe continentale; car à l'époque où Gauss et Cauchy formulaient une interprétation géométrique définitive des nombres complexes, le Royaume-Uni était absorbé dans le développement d'une autre approche de l'algèbre et des nombres complexes.

1.6 De Morgan, Hamilton

Alors que la communauté mathématique de l'Europe continentale sera de plus en plus persuadée de l'existence des nombres complexes grâce à leur représentation géométrique, les mathématiciens d'Angleterre auront une démarche qui relève plutôt d'une abstraction de l'algèbre. L'*Analytical Society* fut fondée[37] au Trinity College, à Cambridge (GB), par l'algébriste George Peacock (1791–1858), l'astronome John Herschel (1792–1871) et « l'ingénieur en calcul » Charles Babbage (1791–1858), futur inventeur du premier ordinateur. En 1830, Peacock publia son *Treatise on Algebra*, où sont introduites les propriétés que nous nommons aujourd'hui les propriétés de corps commutatif (associativité, commutativité, neutre, inverse, distributivité), ouvrant sur ce qu'il nommera *symbolical algebra*:

> All the results of arithmetical algebra which are deduced by the application of its rules, and which are general in form though particular in value, are results likewise of symbolical algebra, where they are general in value as in form . (Peacock; *in* Boyer, 1968, p. 622)

Allant au-delà de l'arithmétique, le mathématicien écossais Duncan F. Gregory (1813–1844), fondateur du Cambridge Mathematical Journal, définit l'algèbre symbolique ainsi dans *On the Real Nature of Symbolical Algebra* (1840):

> The light then in which I would consider symbolical algebra is that it is the science which treats of the combination of operations defined not by their nature, that is, by what they are or what they do, but by the laws of combination to which they are subject. [...] It is true that these laws have been in many cases suggested (as Mr. Peacock has aptly termed it) by the laws of the known operations of number, but the step which is taken from arithmetical to symbolical algebra is that, leaving out of view the nature of

[37] L'Angleterre s'est isolée du reste du continent par son chauvinisme dans la polémique portant sur la notation en calcul différentiel: celle, britannique, de Newton: le pointisme $\dot{x}$, et celle, continentale, de Leibniz: le *d*-isme d*x*/d*t* . Le but immédiat de l'Analytical Society était une réforme de la notation dans l'enseignement du calcul, soit remplacer la notation fluxionnelle (de Newton) par la notation différentielle (de Leibniz) (Mankiewicz, 2000, p. 134).

> the operations which the symbols we use represent, we suppose the existence of classes of unknown operations subject to the same laws. We are thus able to prove certain relations between the different classes of operations, which, when expressed between the symbols, are called algebraical theorems. (Gregory; *in* Kline , 1972, p. 774)

De même, le mathématicien et logicien anglais Augustus De Morgan (1806–1871), qui aida à fonder la British Association for the Advancement of Science (1831) et enseigna à la University College of the University of London, généralise la portée des symboles algébriques dans son *Trigonometry and Double algebra,* paru en 1830:

> With one exception [le symbole =], no word or sign of arithmetic or algebra has one atom of meaning throughout this chapter, the object of which is symbols and their laws of combination, giving a symbolic algebra which may hereafter become the grammar of a hundred distinct significant algebras. (De Morgan; *in* Boyer, 1968, p. 623)

« L'algèbre double », ici évoquée dans le titre du texte de De Morgan, est ce que l'on nomme aujourd'hui le corps des nombres complexes, « l'algèbre simple » étant celle du corps des nombres réels. Même si De Morgan, Gregory et Peacock ont l'intention de généraliser les règles algébriques, ils croient cependant que les propriétés que nous désignons aujourd'hui comme celles de corps commutatif s'étendent à toutes les structures algébriques[38], suivant en cela la tradition arithmétique prévalant jusqu'alors. Malgré cette étude de l'algèbre 'double', De Morgan est, dans son texte *Difficulties of Mathematics* publié en 1831, plus circonspect en ce qui concerne les solutions possibles:

> The imaginary expression $\sqrt{-a}$ and the negative expression $-b$ have this resemblance, that either of them occurring as the solution of a problem indicates some inconsistency or absurdity. As far as real meaning is concerned, both are equally imaginary, since $0-b$ is as inconceivable as $\sqrt{-a}$. (De Morgan; *in* Kline, 1972 p. 593)

[38] On sait maintenant que la propriété de commutativité est invalide pour certaines opérations qui n'étaient pas alors encore inventées, par exemple pour le produit matriciel, le produit vectoriel, la composition fonctionnelle ainsi que pour le produit des quaternions que nous aborderons au chapitre suivant.

Toutefois, De Morgan reconnaît l'utilité des nombres complexes:

> We have shown the symbol $\sqrt{-a}$ to be void of meaning, or rather self-contradictory and absurd. Nevertheless, by means of such symbols, a part of algebra is established which is of great utility. (De Morgan; *in* Kline, 1972, p.596)

Le mathématicien et physicien Sir William Rowan Hamilton (1805–1865) s'élèvera contre cette approche purement formaliste de l'algèbre. Alors qu'il était encore étudiant au Trinity College de Dublin (Irlande), Hamilton fut nommé, à l'âge de 22 ans, *Royal Astronomer of Ireland, Director of the Dunsink Observatory* et *Professor of Astronomy*. La même année (1827), il présenta à la Irish Academy un mémoire sur les rayons optiques, dans lequel il s'exprimait sur l'un de ses thèmes favoris, à savoir que l'espace et le temps sont connectés indissolublement l'un à l'autre. Comme nous le verrons ci-dessous, Hamilton envisagera la géométrie comme la Science de l'Espace et l'algèbre comme la Science du Temps. Puis, l'invention des quaternions lui permettra de 'combiner' l'espace et le temps. En 1835, Hamilton fera lecture à la Royal Irish Academy de sa *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples*, précédé d'un *Essay on Algebra as the Science of Pure Time*. Son propos, comme il le précise dans l'introduction, vise à clarifier les assises théoriques de l'algèbre, de façon à enrayer les confusions de la pensée, les erreurs de raisonnement ou les raisonnements obscurs qui pourraient l'assombrir.[39] Hamilton oppose, d'une part, le sentiment de certitude intuitive qu'on éprouve à l'égard des axiomes de la géométrie euclidienne au doute que, d'autre part, ressentent plusieurs personnes face à l'algèbre, lorsqu'elles ont l'impression qu'on leur demande d'admettre des principes qui heurtent l'intuition:

> No candid and intelligent person can doubt the truth of the chief properties of *Parallel Lines*, as set forth by Euclid in his Elements, two thousand years ago; though he may well desire to see them treated in a clearer and better

[39] « The imperfections sought to be removed, are confusions of thought, and obscurities or errors of reasoning » (Hamilton, 1835, p. 2).

> method. The doctrine involves no obscurity nor confusion of thought, and leaves in the mind no reasonable ground for doubt, although ingenuity may usefully be exercised in improving the plan of the argument. But it requires no peculiar scepticism to doubt, or even to disbelieve, the doctrine of Negatives and Imaginaries, when set forth (as it has commonly been) with principles like these: that *a greater magnitude may be subtracted from a less*, and that the remainder is *less than nothing*; that *two negative numbers*, or numbers denoting magnitudes each less than nothing, may be *multiplied* the one by the other, and that the product will be a *positive* number, or a number denoting a magnitude greater than nothing; and that although the *square* of a number, or the product obtained by multiplying that number by itself, is therefore *always positive*, whether the number be positive or negative, yet that numbers, called *imaginary*, can be found or conceived or determined, and operated on by all the rules of positive and negative numbers, as if they were subject to those rules, *although they have negative squares*, and must therefore be supposed to be themselves neither positive nor negative, nor yet null numbers, so that the magnitudes which they are supposed to denote can neither be greater than nothing, nor less than nothing, nor even equal to nothing. It must be hard to found a Science on such grounds as these, though the forms of logic may build up from them a symmetrical system of expressions, and a practical art may be learned of rightly applying useful rules which seem to depend upon them. (Hamilton, 1835, p. 2-3)

Si l'algèbre persiste à user de principes qui heurtent ainsi l'intuition et la logique des gens, ceci aura comme effet d'enlever à l'algèbre son statut de Science et de la confiner à un rôle utilitaire (« les formules permettent de résoudre des équations même si elles comportent des objets absurdes ») ou formel (« les preuves sont impeccables mais les règles qui les guident sont arbitraires »). Hamilton poursuit:

> So useful are those rules, so symmetrical those expressions, and yet so unsatisfactory those principles from which they are supposed to be derived, that a growing tendency may be perceived to the rejection of that view which regarded Algebra as a Science, in some sense analogous to Geometry, and to the adoption of one or other of those two different views, which regard Algebra as an Art, or as a Language: as a System of Rules, or else as a System of Expressions, but not as a System of Truths, or Results having any other validity than what they may derive from their practical usefulness, or their logical or philological coherence. Opinions thus are tending to substitute for the Theoretical question,—"Is a Theorem of Algebra true?" the Practical question,—"Can it be applied as an Instrument, to do or to discover something else, in some research which is not Algebraical?" or else the

> Philological question,—"Does its expression harmonise, according to the Laws of Language, with other Algebraical expressions?". [40] (Hamilton, 1835, p. 3)

On voit que Hamilton se distingue de l'approche formelle (ou 'philologique') de Peacock, Gregory et De Morgan et vise plutôt à munir l'algèbre d'un statut de Science comparable à la géométrie euclidienne, fondée sur des principes intuitifs desquels procédera la déduction:

> A SCIENCE of Algebra: a Science properly so called: strict, pure and independent; deduced by valid reasonings from its own intuitive principles[41]; and thus not less an object of prior contemplation than Geometry, nor less distinct, in its own essence, from the Rules which it may teach or use, and from the Signs by which it may express its meaning. (Hamilton, 1835, p. 3)

Dans une lettre à son ami J. T. Graves en date du 11 juin 1835, Hamilton souligne la nécessité de ces assises intuitives:

> I know that with all our personal and intellectual tie we belong to opposite poles in Algebra; since you, like Peacock, seem to consider Algebra as a "system of Signs and of their combinations", somewhat analogous to syllogisms expressed in letters; [...] I habitually desire to find or make in Algebra a system of demonstrations resting at least on intuitions. (Hamilton; *in* Flament, 2003, p. 365)

Pour contrer cette 'tendance' qu'il pressent à ne pas reconnaître l'Algèbre comme Science, Hamilton propose l'intuition du Temps comme fondement de l'algèbre, par analogie avec l'Espace comme fondement de la géométrie. Les explications qu'il donne peuvent se résumer ainsi (Hamilton, 1835, p. 4-5) :

---

[40] Précisons que Hamilton débute son texte en distinguant trois approches de l'algèbre: « The Study of Algebra may be pursued in three very different schools, the Practical, the Philological, or the Theoretical, according as Algebra itself is accounted an Instrument, or a Language, or a Contemplation; according as ease of operation, or symmetry of expression, or clearness of thought, (the *agere*, the *fari*, or the *sapere*,) is eminently prized and sought for. The Practical person seeks a Rule which he may apply, the Philological person seeks a Formula which he may write, the Theoretical person seeks a Theorem on which he may meditate. »

[41] On notera que cette conception de l'intuition et de la déduction est celle qu'évoquait Descartes dans ses *Règles pour la direction de l'esprit* (voir page préliminaire à l'introduction).

- Alors que la géométrie observe des objets fixes, par exemple la tangente à un cercle, la méthode newtonienne analyse la tangente en un point d'une courbe comme la droite vers laquelle *tendent* les sécantes passant par ce point et un point variable qui s'en *approche*. La notion de limite en jeu est donc intuitivement perçue, par Hamilton, comme relevant du mouvement, d'un *processus de génération,* d'une *progression continue*. Or, pour Hamilton, là où il y a variations et progression, il y a du temps; c'est pourquoi il qualifie d'attitude philologique le fait que Lagrange, réservant ce lien pour les cas particuliers liés à la vélocité, rejette tout lien nécessaire entre la dérivée et le temps.

- Selon Hamilton, l'intuition de l'Ordre dans le Temps est ancrée plus profondément en nous que celle de l'Ordre dans l'Espace. Étant donné la vérité intuitive de cet ordre et sa clarté, une science mathématique pourrait donc s'appuyer sur cet ordre et être aussi pure et démonstrative que la géométrie.

- Lorsque cette Science Mathématique du Temps sera suffisamment développée et se démarquera de la chronologie événementielle et de la dynamique des lois de causalité, on devrait alors découvrir qu'elle est co-extensive et identique à l'Algèbre, en autant que celle-ci est une science.

Par ce changement de décor, Hamilton espère contourner l'incrédulité suscitée par les nombres complexes:

> The author acknowledges with pleasure that he agrees with M. Cauchy, in considering every (so-called) Imaginary Equation as a symbolic representation of two separate Real equations: but he differs from that excellent mathematician in his method generally, and especially in not introducing the sign $\sqrt{-1}$ until he has provided for it, by his Theory of Couples, a possible and real meaning, as a symbol of the couple (0, 1). (Hamilton, 1835, p. 6)

Remarquons que cet article de Hamilton est antérieur à l'écrit de Cauchy sur les quantités géométriques paru en 1847. On reconnaît d'ailleurs ici la terminologie que Cauchy utilisait dans son célèbre *Cours d'Analyse* publié en 1821 (voir ci-dessus, p.

66). On sait que la résistance à l'existence des nombres complexes s'est peu à peu réduite sur le continent européen grâce à la conception du plan complexe que Gauss diffusa dès 1831; pourtant, même si Hamilton, comme on le voit, avait une culture mathématique continentale, il semble que cette diffusion ne l'avait pas encore rejoint. La polémique entre Newton et Leibniz, concernant la primauté de la découverte du calcul différentiel, peut-elle expliquer en partie ce détour théorique, entrepris par Hamilton? Celui-ci écrit en effet, dans cette introduction à l'Algèbre comme Science du Temps:

> And, generally, the revolution which Newton made in the higher parts of both pure and applied Algebra, was founded mainly on the notion of *fluxion*, which involves the notion of *Time*. (Hamilton, 1835, p. 4)

Quoi qu'il en soit, Hamilton définit la notion de couple de moments comme suit :

> When we have imagined any one moment of time A_1, which we may call a primary moment, we may again imagine a moment of time A_2, and may call this a secondary moment, without regarding whether it follows, or coincides with, or precedes the primary, in the common progression of time; we may also speak of this primary and this secondary moment as forming a couple of moments, or a moment-couple, which may be denoted thus, (A_1, A_2). (Hamilton, 1835, p. 87)

Hamilton définit ensuite la comparaison ou différence entre ces couples de moments comme un *pas complexe* (ou couple de pas)[42] entre les moments primaires d'une part et les moments secondaires d'autre part; ce qui le conduira à définir de façon similaire l'opération d'addition des pas complexes: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$. Ensuite (p. 90-91), il définira le multiple de ces pas complexes par ce que nous appellerions aujourd'hui la multiplication d'un couple par un scalaire; ce scalaire sera nommé le *ratio* de ces pas complexes: $a(c,d)=(ac,ad)$.

---

[42] « We may conceive a couple of steps in the progression of time, from moment to moment respectively, or a single complex step which we may call a step-couple from one moment-couple to another, serving to generate (synthetically) one of these moment-couples from the other » (p. 87).

Hamilton identifiera (p. 91-95) ensuite ce *ratio* au couple $a=(a,0)$, nommé *pur nombre-couple primaire*, ce qui lui permettra d'étendre cette multiplication par un scalaire comme cas particulier de la multiplication entre pas complexes: $(a,0)(c,d)=(ac,ad)$. Il lui reste donc à définir la multiplication des *purs couples-nombre secondaires* entre eux; en préservant les propriétés de distributivité, le problème de définition revient (p. 92) à ceci:

$$(a,b)(c,d)=[(a,0)+(0,b)][(c,0)+(0,d)]=(ac,ad+bc)+(0,b)(0,d).$$

En faisant valoir que le couple issu du produit $(x,y)=(0,b)(0,d)$ devrait satisfaire une certaine proportion avec b et d, il pose $x=f_1bd, y=f_2bd$; puis (p. 94), s'appuyant sur la simplicité algébrique qui s'en dégagerait, il pose $f_1=-1$ et $f_2=0$. Il s'ensuit que $(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$. D'où les résultats suivants[43]:

$$(0,1)^2=(-1,0)=-1 \ ; \ (0,1)^3=-(0,1) \ ; \ (0,1)^4=(1,0)=1 .$$

C'est ainsi que Hamilton en arrive, après avoir reconstruit les lois des exposants, à écrire l'identité $(0,1)=\sqrt{(-1,0)}=\sqrt{-1}$. Résultat qu'il commente en ces termes:

> In the theory of single numbers, the symbol $\sqrt{-1}$ is absurd, and denotes an impossible extraction, or a merely imaginary number; but in the theory of couples, the same symbol $\sqrt{-1}$ is significant, and denotes a possible extraction, or a real couple, namely (as we have just now seen) the principal square-root of the couple (−1, 0). In the latter theory, therefore, though not in the former, this sign $\sqrt{-1}$ may properly be employed; and we may write, if we choose, for any couple (a_1,a_2) whatever, $(a_1,a_2)=a_1+a_2\sqrt{-1}$. (Hamilton, 1835, p. 107)

Il est remarquable que Hamilton soit arrivé par un cheminement strictement algébrique à des formules fort semblables à celles que le danois Wessel obtint de façon géométrique (mais qui ne furent diffusées en une langue autre que danoise qu'en 1897). Toutefois, la représentation géométrique de Wessel et Argand convainc

---

43 Nous avons corrigé les coquilles présentes dans (Hamilton, 1835, p. 98)

plus l'intuition, pourtant visée par Hamilton, que cette approche fort singulière relevant d'une Science du Temps à inventer! D'ailleurs, cette identification de l'algèbre à la Science du Temps est loin d'avoir fait l'unanimité. Et Hamilton remettra lui-même en question sa propre séparation entre l'algèbre et la géométrie, alors qu'il commentera sa première présentation des quaternions, livrée dans *Lecture on Quaternions* (1853):

> [...] in the mathematical quaternion is involved a peculiar synthesis, or combination, of the conception of space and time [...]. Time is said to have only *one dimension*, and space to have *three dimensions* [...]. The mathematical *quaternion* partakes of both elements; in technical language it may be said to be « time plus space » or « space plus time »: and in this sense it has, or at least it involves a reference to four dimensions. (Hamilton; *in* Flament, 2003, p. 427)

De plus, comme nous le verrons au chapitre suivant, la dernière présentation que donnera Hamilton des quaternions ne fera plus aucune référence à la notion de temps, les 4 composantes ne désignant alors que des données géométriques: longueur et angles.

C'est donc plutôt la représentation géométrique, telle que propagée par Gauss et Cauchy, qui donnera une interprétation des nombres complexes relevant, comme le souhaitait Hamilton, de « principes intuitifs » sur lesquels l'algèbre pourra s'appuyer.

Mais par ailleurs, l'algèbre symbolique mise de l'avant par Gregory et De Morgan, que Hamilton qualifiait de « philologique » étant donné son manque de signification sémantique, ouvrira l'horizon à de nouvelles structures algébriques. Comme nous le verrons au chapitre suivant, Hamilton en bénéficiera lorsqu'il inventera les quaternions, ceux-ci reposant sur une structure algébrique qui bousculait la tradition arithmétique, celle que nous nommons aujourd'hui *corps non commutatif de dimension 4*.

1.7 Enseigner les nombres complexes au collégial

L'enseignement des nombres complexes proposé dans les manuels scolaires[44] suit le plus souvent une approche algébrique menée selon l'une ou l'autre des deux méthodes suivantes, supportée par une représentation géométrique subséquente ou concourante.

L'une d'elles commence par introduire la notion d'extension algébrique de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels à l'ensemble $\mathbb{Q}(\sqrt{c})$ des nombres de la forme $a+b\sqrt{c}$, où $a, b, c \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{c} \notin \mathbb{Q}$; on opère alors sur ces nombres selon les propriétés de corps commutatif des nombres réels pour démontrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{c})$ est lui-même un corps commutatif. Puis, par analogie, on prolonge l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres de la forme $a+b\ i$, où $i=\sqrt{-1}$; on opère ensuite sur ces nombres en préservant les propriétés de corps commutatif. La difficulté principale éprouvée par les étudiants est ici d'accepter l'existence d'un nombre tel que $\sqrt{-1}$; une telle approche heurte en effet l'intuition que l'étudiant a jusqu'alors développée de la notion de nombre, sans lui fournir de support autre qu'une analogie avec la notion d'extension algébrique introduite à cette fin. Comme nous l'avons observé dans le premier chapitre, cette réticence est toute légitime puisqu'elle fut historiquement partagée par maints mathématiciens, parmi lesquels on retrouve les plus éminents.

---

44 Pendant près de vingt-cinq ans, les nombres complexes ont été abordés dans les cégeps du Québec dans le cadre du cours nommé *Compléments de mathématiques*, de sigle MAT 101; depuis une quinzaine d'années, l'équivalent de ce cours (ou ce qu'il en reste) ne se retrouve plus que dans certains cégeps, sous les appellations *Méthodes de preuve* ou *Mathématiques pour les sciences*, doté d'un sigle fluctuant selon diverses réformes: MAT 100, MAT AEA, MAT 123... Les manuels scolaires utilisés pour l'enseignement des nombres complexes ont souvent pris la forme de notes de cours rédigées par un ou plusieurs professeurs d'un même collège, édités par les imprimeries des collèges concernés ou par de petites maisons d'édition à compte d'auteur. Deux livres édités par des maisons reconnues furent toutefois largement utilisés à l'époque du cours MAT 101: le livre de Germain Beaudoin, *Complément de mathématiques. Math 101,* Québec, Les Presses de l'Université Laval, 1979; et celui de l'Équipe Mathécrit, *Ateliers 101. Complément de mathématiques*, Outremont, Modulo Éditeur Ltée, 1980. Les nombres complexes sont maintenant abordés, dans certains cégeps, dans le cadre d'un premier cours d'*Algèbre linéaire et géométrie vectorielle*; mais le plus souvent, leur enseignement est différé à l'université.

L'autre méthode algébrique que l'on retrouve couramment est l'introduction formelle de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes par la définition des opérations d'addition et de multiplication sur ses éléments:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$
$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

On peut alors vérifier que cet ensemble satisfait les propriétés de corps commutatif et que l'on a l'identité $(0+1i)^2=-1+0i$, soit $i^2=-1$. Toutefois, les étudiants demeurent le plus souvent sceptiques face à l'arbitraire d'une telle définition formelle de l'opération de multiplication et de l'ensemble de nombres qui en dépend. On se rappellera la critique que formulait Hamilton à propos de l'approche formelle (ou 'philologique') de certains algébristes.

C'est donc ainsi qu'à l'instar de mes collègues j'ai enseigné les nombres complexes dans divers cégeps de la grande région de Montréal pendant une quinzaine d'années (lorsque j'obtenais la prestation du cours *Compléments de mathématiques* ou ses équivalents). C'est après avoir pris connaissance d'un fascicule de Gilbert Labelle[45] que, pendant les années 2002 à 2005 au Collège Ahuntsic, j'ai introduit dans ce cours les nombres complexes selon une approche strictement géométrique et dont seront brossées les grandes lignes ci-dessous. Sans avoir fait quelque étude comparative systématique que ce soit, j'ai néanmoins pu observer qu'en adoptant cette approche la résistance des étudiants à l'existence des nombres complexes s'est grandement estompée. Comme le lecteur le constatera, cette approche s'inspire de la représentation à laquelle étaient parvenus Wessel, Argand, Gauss et Cauchy, et s'accompagne de la notation avancée par Hamilton. Nous la présentons aussi en guise de synthèse du présent chapitre.

---

[45] Ce fascicule de G. Labelle (ca. 1975) est le premier fascicule à avoir jamais été publié par l'Association Mathématique du Québec; il semble, hélas, qu'il n'y en ait eu aucune réédition.

Dans le *plan complexe*, on identifie les points de coordonnées cartésiennes (x, y) à ce que l'on nomme les nombres complexes z, que l'on note $z = x+y\,i$. Cette identification,

$$z = x+y\,i = (x, y),$$

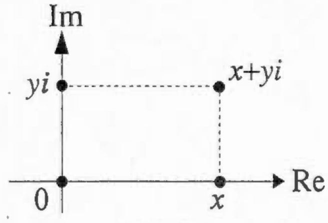

Figure 1.24: Plan complexe

s'accompagne des abréviations:

$$x = x+0\,i = (x, 0) \quad \text{et} \quad y\,i = 0+y\,i = (0, y)$$

pour désigner, respectivement, les points de l'axe horizontal, dit *axe réel*, et les points de l'axe vertical, dit *axe imaginaire*. De même, on utilise l'abréviation

$$i = 0+1i = (0, 1).$$

En nommant $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, on observe dès maintenant que les nombres réels x sont identifiés aux points $(x, 0)$ du plan complexe, puisque $x = x+0\,i = (x, 0)$. Donc $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

La somme des nombres complexes $z_1 = (a, b) = a+bi$ et $z_2 = (c, d) = c+di$ est définie, comme celle des vecteurs géométriques du plan cartésien (voir fig. 1.25), par

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d),$$

c'est-à-dire

$$(a + b\,i) + (c + d\,i) = (a+c) + (b+d)\,i.$$

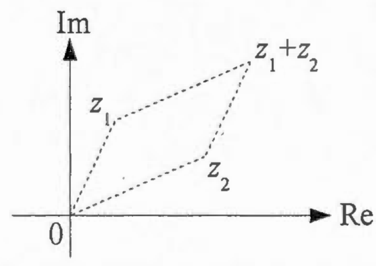

Figure 1.25:
La somme des nombres complexes

L'addition des nombres complexes prolonge donc l'addition des nombres réels, puisque $a + c = (a, 0) + (c, 0) = (a+c, 0+0) = (a+c, 0) = a + c$.

Pour définir aisément le produit des nombres complexes, nous exprimons les coordonnées cartésiennes sous leur formes polaire et trigonométrique.

On voit (fig. 1.26) que pour chaque nombre complexe non nul $z=x+yi=(x, y)$, il existe un unique angle d'inclinaison $\theta \in [0,2\pi[$ orienté de l'axe positif des réels vers le segment Oz et un unique nombre réel $r>0$ représentant la distance entre les points 0 et z. La forme polaire de z sera $z=<r,\theta>$. Dans le cas dégénéré où $z=0$, alors $r=0$ et θ est quelconque. La norme de z sera $\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}$ et son argument $\theta=\arg(z)$.

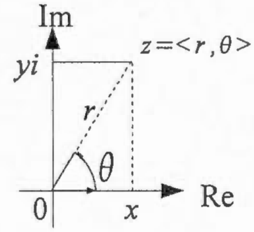

Figure 1.26: Norme et argument d'un nombre comlexe

De plus, on a que $x=r\cos(\theta)$ et $y=r\sin(\theta)$; donc $z=x+yi=r\cos(\theta)+\sin(\theta)i$, ce que l'on abrège par la forme trigonométrique $z=r\,\mathrm{cis}(\theta)$. Bref,

$$z=x+yi=(x, y)=<r,\theta>=r\,\mathrm{cis}(\theta).$$

On définit maintenant la multiplication des nombres complexes comme suit:
si $z_1=r_1\mathrm{cis}(\theta_1)$ et $z_2=r_2\mathrm{cis}(\theta_2)$, alors $z_1 \cdot z_2=(r_1r_2)\mathrm{cis}(\theta_1+\theta_2)$.

Autrement dit, le module de $z_1 \cdot z_2$ est le produit des modules:

$$\|z_1 \cdot z_2\|=r_1r_2=\|z_1\|\,\|z_2\|$$

et l'argument de $z_1 \cdot z_2$ est la somme des arguments:

$$\arg(z_1 \cdot z_2)=\theta_1+\theta_2=\arg(z_1)+\arg(z_2).$$

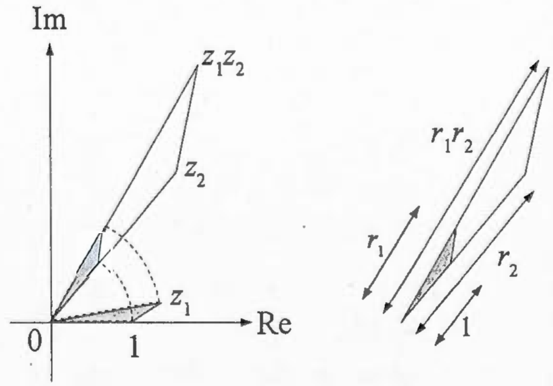

Figure 1.27: Produit de nombres complexes et similitude des triangles.

En effet, construisons le triangle (hachuré dans la fig.1.27) dont les sommets sont 0, 1 et z_1. Ensuite, on le fait tourner autour de l'origine d'un angle θ_2: le côté qui joignait les points 0 et 1 repose maintenant sur la droite passant par les points 0 et z_2 (ou son prolongement). Ensuite, on prolonge le côté qui provenait du côté qui joignait les points 0 et z_1. À partir du point z_2, on trace un segment de droite de sorte à former un triangle semblable à celui obtenu par rotation; la similitude des triangles entraîne que le segment obtenu est de longueur $r = r_1 r_2$.

Ainsi, si l'on souhaite faire tourner le nombre complexe $z = r\,\mathrm{cis}(\theta)$ d'un angle ϕ autour de l'origine du système d'axes, il suffit alors de le multiplier par le nombre complexe $u = \mathrm{cis}(\phi)$ situé sur le cercle unitaire: en effet, $u\,z = r\,\mathrm{cis}(\theta+\phi)$.

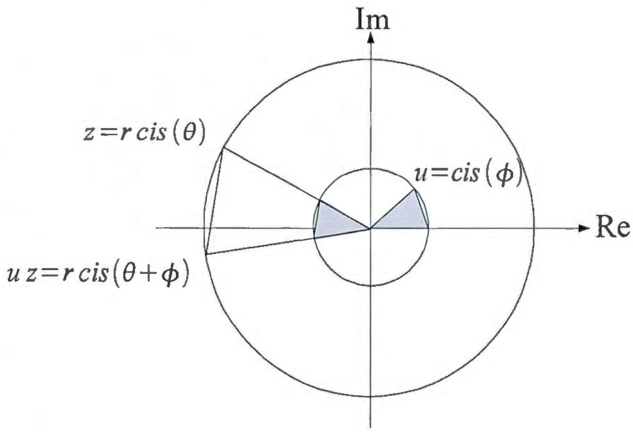

Figure 1.28: Rotation dans le plan complexe

La méthode géométrique pour déterminer l'inverse z^{-1} du nombre complexe non nul z s'en déduit aisément comme suit.

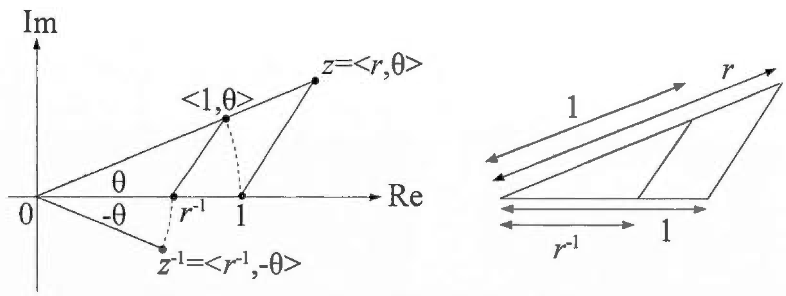

Figure 1.29: Inverse d'un nombre complexe

On forme le triangle de sommets 0, 1 et z , où $z = \langle r, \theta \rangle$. On effectue une rotation

θ du nombre 1 : on obtient alors le nombre <1, θ> situé sur le segment joignant l'origine O à z (ou sur son prolongement). Puis on mène par ce point <1, θ> un segment de droite parallèle à celui joignant les points 1 et z, de sorte à former un triangle semblable au précédent. On obtient alors, par similitude des triangles, le 3e sommet r^{-1} du triangle. Puis on fait tourner ce sommet autour de l'origine O d'un angle $-\theta$: on obtient alors le point $<r^{-1}, -\theta>$. Or on a le produit

$$<r^{-1}, -\theta>\cdot<r, \theta> \ = \ <r^{-1}r, -\theta+\theta> = \ <1, 0> = 1\,\mathrm{cis}(0) = 1\,,$$

donc $z^{-1}=<r^{-1}, -\theta>$.

On déduit immédiatement par induction, de la définition du produit et de l'inverse, la formule de De Moivre (*cf.* p. 63) pour tout $n\in\mathbb{Z}$:

$$(<r, \theta>)^n = <r^n, n\theta>\,.$$

Réciproquement, on démontre que pour tout $r>0$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$w^n=<r, \theta> \ \Rightarrow \ w=<\sqrt[n]{r}, \frac{\theta+2k\pi}{n}>\text{, où } k\in\{0, 1, \ldots, n-1\}\,.$$

De sorte à combiner aisément l'addition et la multiplication, on démontre, en utilisant les identités trigonométriques d'une somme d'angles, que

$$(a, b)\cdot(c, d)=(ac-bd,\ ad+bc)\ ,$$
$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i\ .$$

Le produit de nombres complexes prolonge donc le produit des nombres réels. En effet, on a $ac=(a\ ,\ 0)\cdot(c\ ,\ 0)=(ac-0\ ,\ a0+0c)=(ac\ ,\ 0)=ac$.

Il devient aisé de vérifier que l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes est un corps commutatif.

Introduites de cette façon, les principales propriétés des nombres complexes auront été supportées par une représentation géométrique continuelle. L'étudiant aura donc déjà exploré graphiquement et algébriquement des problèmes portant sur des sommes, puissances et racines de nombres complexes; bref, il en a aura acquis une intuition géométrique. Il est maintenant en mesure d'observer ce qui aurait pu l'être depuis l'introduction de la multiplication des nombres complexes, à savoir que:

$$i^2 = <1, \pi/2> \cdot <1, \pi/2> = <1, \pi> = 1\,\mathrm{cis}(\pi) = -1 + 0i = -1 \ .$$

Alors que cette identité a de quoi surprendre l'étudiant et bousculer les connaissances algébriques qu'il avait acquises jusqu'alors, il n'est toutefois pas en position de déni face à cette observation, disposant d'une représentation graphique maintes fois explorée. L'ancrage de ce nouveau résultat dans son intuition géométrique permet en effet à l'étudiant d'affronter avec succès la remise en question des généralisations algébriques abusives en jeu.

On sera ensuite en mesure d'aborder avec lui la théorie des équations polynomiales (après avoir défini la notion de conjugué) et de l'introduire aux fractals, dont la représentation géométrique, fascinante, ne peut que le motiver davantage à accepter l'existence des nombres complexes.

De sorte à vérifier, étayer ou relativiser ces observations personnelles tirées de mon expérience d'enseignant, il pourrait donc être judicieux de mener une expérimentation permettant de comparer l'acquisition et la compréhension des nombres complexes par les étudiants, selon que l'enseignement suivi procède d'une approche algébrique ou géométrique.

CHAPITRE II

LES QUATERNIONS

Le développement de l'algèbre linéaire a permis de remplacer la définition que Sir William R. Hamilton proposa initialement des quaternions, par une formulation basée sur des notions plus générales qui ont l'avantage de pouvoir être étendues à des espaces vectoriels de dimension quelconque. C'est pourquoi nous limiterons notre présentation de la construction qu'en a proposée Hamilton, dans son œuvre posthume *Elements of Quaternions*, aux seuls aspects[46] qui permettront de dégager la formulation actuelle des quaternions. Par la suite, nous démontrerons les propriétés géométriques fondamentales des quaternions à l'aide des notions de l'algèbre linéaire actuelle. Comme en témoignent ses *Elements*, Hamilton définit les quaternions, ainsi que les vecteurs, par une représentation géométrique qui servira de fondement aux preuves des propriétés algébriques qui suivront; précisons toutefois que ce texte de quelque 600 pages comporte 75 figures géométriques sur lesquelles reposent des centaines, voire des milliers, d'identités algébriques.

Le lecteur trouvera aussi, en appendice, une simulation du traitement des difficultés algébriques auxquelles fut confronté Hamilton dans sa recherche des quaternions, simulation inspirée de la démarche qui l'a guidé dans sa théorie des « fonctions conjuguées » (et que nous avons décrite à la section 1.6).

---

[46] Présentés dans le premier chapitre du livre II, p. 107-249.

2.1 L'approche hamiltonienne des quaternions

Hamilton terminait sa communication *Theory of Conjugate Fonctions* à la Royal Irish Academy (1837) en ces termes:

> The author hopes to publish hereafter many other applications of this view; especially to Equations and Integrals, and to a Theory of Triplets and Sets of Moments, Steps, and Numbers, which includes this Theory of Couples.

Il a cherché pendant des années à étendre les notions de rotation dans le plan complexe aux rotations de vecteurs géométriques (l'espace vectoriel géométrique étant de dimension 3). Or, dans son œuvre posthume *Elements of Quaternions*, Hamilton définit cette notion de « quotient géométrique » entre deux vecteurs α et β de directions quelconques, noté $\frac{\beta}{\alpha}$ et $\beta:\alpha$ (lorsque α est un vecteur non nul), non pas par un triplet mais bien par un quadruplet:

> Of these four elements, *one* serves to determine the *relative length* of the two lines compared; and the other *three* are in general necessary, in order to determine *fully* their *relative direction*. Again, of these latter elements, *one* represents the mutual *inclination*, or *elongation*, of the two lines; or the *magnitude* (or quantity) of the *angle* between them ; while the *two others* serve to determinate the direction of the *axis*, perpendicular to their common *plane*, round which a *rotation* through that angle is to be performed, in a *sense* previously selected as the *positive* one [...]. And *no more than four* numerical *elements* are necessary, for our present purpose : because the *relative length* of two lines is not changed, when their two lengths are altered *proportionally*, nor is their *relative direction* changed, when the *angle* which they form is merely *turned* about, *in its own plane*.
>
> (Hamilton, 1866, p. 112; les italiques sont de Hamilton)

Hamilton donne par la suite (p. 113-114) une illustration des deux angles nécessaires pour déterminer l'orientation du plan de rotation de ces vecteurs; cette orientation sera relative à un plan générique contenant un vecteur géométrique déjà identifié. L'un de ces angles est l'angle aigu orienté de ce vecteur vers la droite d'intersection de ces plans, l'autre est l'angle orienté de la direction normale au plan générique vers la direction normale à ce plan de rotation. Le quadruplet formé par ce quotient géométrique est ce que Hamilton nommera le *quaternion* q ; celui-ci sera noté $q=\frac{\beta}{\alpha}$ et $q=\frac{OB}{OA}$ lorsque $\alpha=OA$ et $\beta=OB$. De cette notion de quotient géométrique s'ensuit la notion de quaternion comme facteur d'un vecteur dans le produit $\beta=q\alpha$.

Deux triangles ΔAOB et ΔCOD seront dits être en rapport de *similitude directe* lorsqu'ils sont semblables, situés sur des plans parallèles et tels que l'orientation (positive ou négative) de l'angle $\angle AOB$ est identique à celle de l'angle $\angle COD$; on écrira alors $\Delta AOB \propto \Delta COD$. L'égalité entre quaternions sera définie par:

$$\frac{OB}{OA}=\frac{OD}{OC} \iff \Delta AOB \propto \Delta COD .$$

Deux quaternions étant dits *coplanaires* si les triangles respectifs qu'ils désignent sont situés sur des plans parallèles, deux quaternions égaux sont donc nécessairement coplanaires.

Lorsque $q=\frac{OB}{OA}$, l'*angle du quaternion* q , noté $\angle q$, est l'angle entre les vecteurs OA et OB. Lorsque le triangle ΔAOB n'est pas dégénéré, l'angle $\angle q$ sera un angle strictement positif et inférieur à deux droits; dans ce cas, l'*axe du quaternion* q, noté Ax.q, sera le vecteur unitaire perpendiculaire au plan du triangle ΔAOB et orienté de sorte que le sens de la rotation de OA vers OB apparaisse dans le sens direct (de la main droite). Lorsque le vecteur OB est un multiple du vecteur OA, l'axe Ax.q et le plan auquel appartient ce triangle dégénéré sont indéterminés (p. 120). Si $OB=xOA$, alors $\angle q=0$ radians si $x>0$ et $\angle q=\pi$ radian si $x<0$; dans ce cas-limite, q est dit être un *quaternion scalaire* et sera identifié au scalaire $q=x$. En particulier, si $OB=OA$, alors $q=1$. Finalement, le quaternion nul est le quaternion scalaire nul 0, dont l'angle

$\angle 0$ est indéterminé.

Lorsque le triangle $\Delta AOB'$ est obtenu par réflexion de ΔAOB, l'axe de symétrie étant leur côté commun AO et les points A, O, B, B' étant donc tous coplanaires, le quaternion $Kq = \frac{OB'}{OA}$ sera dit le *quaternion conjugué* de $q = \frac{OB}{OA}$ (p. 123-129). On voit que l'angle du conjugué est $\angle \mathrm{K}\, q = \angle\, q$ et que son axe de rotation est $\mathrm{Ax.K}\, q = -\mathrm{Ax}.\, q$.

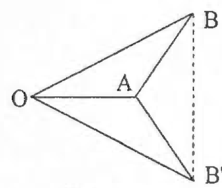

Figure 2.1: Conjugué d'un quaternion

La somme et le produit de quaternions sont, en un premier temps (p.109), définis comme suit:

$$\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma+\beta}{\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}\frac{\alpha}{\beta},$$

où $\gamma+\beta$ désigne l'addition vectorielle. On voit que ces quaternions contiennent alors explicitement un vecteur commun α.

En particulier, le quaternion nul 0 est *neutre pour l'addition* et l'*opposé* (p. 122-126) du quaternion $q = \frac{\beta}{\alpha}$ est le quaternion $-q = \frac{-\beta}{\alpha}$, car $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{\beta-\beta}{\alpha} = 0$; $-q$ est donc coplanaire à q , d'angle $\angle -q = \pi - \angle q$ et d'axe $\mathrm{Ax}. -q = -\mathrm{Ax}.\, q$.

Le quaternion 1 est *neutre pour la multiplication* et si q n'est pas nul, son *inverse* ou *réciproque* (p. 116-123) sera le quaternion $\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{\beta}$, car $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\beta} = 1$; on voit que $\frac{1}{q}$ est un quaternion coplanaire à q, d'angle $\angle \frac{1}{q} = \angle\, q$ et d'axe $\mathrm{Ax}. \frac{1}{q} = -\mathrm{Ax}.\, q$.

Par suite de la définition de conjugué et de l'addition, il vient (p. 176):

$$\mathrm{K}(q+q') = \mathrm{K}q + \mathrm{K}q' .$$

On remarquera (p. 119) que si x est un scalaire non nul et $q=\frac{\beta}{\alpha}$, alors

$$xq=\frac{x\beta}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=\frac{x\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{x^{-1}\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x^{-1}\alpha}=q\,x\,.$$

Les opérations d'addition et de multiplication entre quaternions sont généralisées (p. 116) à l'aide de triangles semblables intermédiaires, de sorte à retrouver un vecteur commun. Ainsi, pour effectuer la somme et le produit des quaternions $\frac{OB}{OA}$ et $\frac{OD}{OC}$, soit OE un vecteur commun aux plans des triangles ΔCOD et ΔAOB ; il existe alors des sommets F, G et H tels que l'on ait

$$\Delta AOB \propto \Delta EOF,\ \Delta COD \propto \Delta EOG \text{ et } \Delta HOE \propto \Delta AOB,$$

ce qui donne lieu aux égalités suivantes entre quaternions:

$$\frac{OG}{OE}=\frac{OD}{OC} \text{ et } \frac{OE}{OH}=\frac{OB}{OA}=\frac{OF}{OE}\,.$$

D'où le calcul suivant de la somme et du produit des quaternions $\frac{OB}{OA}$ et $\frac{OD}{OC}$:

$$\frac{OD}{OC}+\frac{OB}{OA}=\frac{OG}{OE}+\frac{OF}{OE}=\frac{OG+OF}{OE} \text{ et } \frac{OD}{OC}\cdot\frac{OB}{OA}=\frac{OG}{OE}\cdot\frac{OE}{OH}=\frac{OG}{OH}\,.$$

Puisque pour chaque couple de quaternions existe un vecteur qui leur est commun, trois quaternions quelconques peuvent donc être exprimés sous la forme $\frac{\delta}{\gamma}$, $\frac{\gamma}{\beta}$ et $\frac{\beta}{\alpha}$; d'où (p. 160) l'associativité de la multiplication des quaternions:

$$\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\beta}\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\delta}{\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\delta}{\alpha}=\frac{\delta}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\delta}{\gamma}\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\,.$$

Et puisque l'addition des quaternions repose, essentiellement, sur l'addition des vecteurs, alors elle est commutative: $q+q'=q'+q$. Hamilton montrera aussi que l'addition (p. 207) et la multiplication (p. 219) des quaternions sont associatives. Observons plutôt dans le détail comment sont démontrées les propriétés remarquables suivantes.

Si le triangle ΔAOB est isocèle, les côtés OA et OB étant de même longueur, le quaternion $q=\frac{OB}{OA}$ sera alors dit *quotient radial*, les segments OA et OB étant alors perçus comme les rayons d'une sphère centrée au point O. Si de plus $\angle q=\pi/2$ radians, alors q sera dit *quotient radial droit* et alors on a $\mathrm{K}q=-q$. En notant $q^2=qq$, la définition du produit entraîne l'important résultat suivant (p. 132-136):

si q est un quotient radial droit, alors $q^2=-1$.

En effet, soit le triangle-rectangle isocèle ΔAOB, où $\angle AOB = \pi/2$ radians, et soit le triangle $\Delta BOA'$ tel que $\Delta BOA' \propto \Delta AOB$. Alors $OA'=-OA$, donc

$$q^2=\frac{OA'}{OB}\frac{OB}{OA}=\frac{OA'}{OA}=-1 .$$

Inversement,

si $q^2=-1$, alors q est un quotient radial droit.

En effet, si $q=\frac{OB}{OA}$, soit OC tel que $\frac{OC}{OB}=\frac{OB}{OA}$; alors $q^2=\frac{OC}{OA}$. Puisque $q^2=-1$, alors il faut $OC=-OA$; or puisque $\Delta AOB \propto \Delta BOC$, on doit avoir $\angle$AOB = $\pi/2$ radians.

Hamilton rencontre donc ici, sous une forme différente, le même résultat algébrique, soit $q^2=-1$, que celui rencontré tout au long de l'histoire des nombres complexes. Son approche géométrique est comparable à celle que Wessel et Argand ont inaugurée, en ce que changer le sens d'un vecteur géométrique revient en effet à le faire tourner successivement de deux droits dans un même plan.

Une autre propriété remarquable est la **non commutativité du produit** de quaternions (p. 146-149). Soit en effet le triangle sphérique ABC de la sphère unitaire de centre O et les quotients radiaux $q=\frac{OB}{OA}$ et $q'=\frac{OC}{OB}$; il s'ensuit que $q'q=\frac{OC}{OA}$. Prolongeons, sur les grands cercles qui les supportent, les arcs AB et CB de sorte que BA' et BC' soient des arcs de même longueur que AB et CB respectivement (voir fig.

2.2); le triangle sphérique $A'BC'$ est donc congruent au triangle sphérique ABC. De plus, on a $q=\frac{OA'}{OB}$ et $q'=\frac{OB}{OC'}$; d'où le produit $qq'=\frac{OA'}{OC'}$. Les points O, A, C, A', C' n'étant pas, en général, coplanaires, il s'ensuit que les produits qq' et $q'q$ ne sont pas nécessairement égaux. Le produit des quaternions n'est donc pas commutatif.

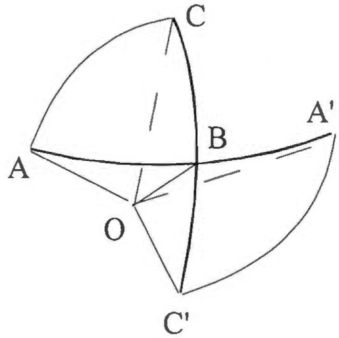

Figure 2.2: Produit de quaternions

Mais si, en particulier, q et q' sont des quotients radiaux droits, alors leurs produits qq' et $q'q$ sont coplanaires, les points A, C étant respectivement opposés aux points A', C' sur un même grand cercle (de centre O). Puisque l'angle de rotation de OC' vers OA' est alors de même grandeur mais de sens opposé à celui de OA vers OC, on peut donc conclure que

$$q^2=-1 \text{ et } (q')^2=-1 \Rightarrow q'q=\mathrm{K}(qq').$$

Si, de plus, les axes de rotation de q et q' sont perpendiculaires entre eux, alors leurs produits $q\,q'$ et $q'\,q$ sont eux-mêmes des quotients radiaux droits, donc

$$q^2=-1 \text{ et } (q')^2=-1 \text{ et } \mathrm{Ax}.q \perp \mathrm{Ax}.q \Rightarrow q'\cdot q=-q\cdot q'.$$

Si, par ailleurs, les quotients radiaux $q=\frac{OB}{OA}$ et $q'=\frac{OC}{OA}$ sont coplanaires, alors $q'q=qq'$. Soit en effet un cercle de rayon O et dont l'arc passe successivement par les points A, B, C, D de sorte que $\frac{OD}{OC}=\frac{OB}{OA}$. Alors $\frac{OD}{OB}=\frac{OC}{OA}$, d'où

$$q'q=\frac{OD}{OB}\frac{OB}{OA}=\frac{OD}{OA}=\frac{OD}{OC}\frac{OC}{OA}=qq'.$$

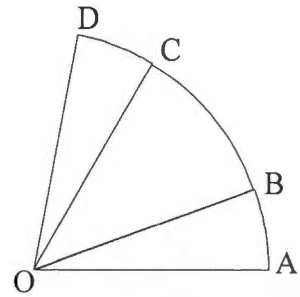

Figure 2.3: Quaternions coplanaires

Le fait qu'une opération de multiplication puisse être non commutative, ce avec quoi nous sommes aujourd'hui familiers (par exemple le produit matriciel et le produit vectoriel), allait à l'encontre du principe dit de permanence[47] des structures algébriques connues jusqu'à cette époque. Autrement dit, les seules opérations binaires étudiées jusqu'alors et assimilables à un produit étaient commutatives.

Hamilton construit ensuite (p. 157) un repère orthonormé d'axes OI, OJ, OK, où

$$i=\frac{OK}{OJ} \text{ et } \mathrm{Ax}.i=OI, \quad j=\frac{OI}{OK} \text{ et } \mathrm{Ax}.j=OJ, \quad k=\frac{OJ}{OI} \text{ et } \mathrm{Ax}.k=OK.$$

Puisque les quaternions i, j, k sont des quotients radiaux droits, il suit de ce qui précède que

$$i^2=-1,\ j^2=-1 \text{ et } k^2=-1.$$

Pour effectuer les calculs suivants, soit $OI'=-OI$, $OJ'=-OJ$ et $OK'=-OK$; alors on a aussi $i=\frac{OJ}{OK'}$ et $j=\frac{OK'}{OI}$, donc $ij=k$. De même, on obtient les identités $jk=i$ et $ki=j$. Il suit des observations précédentes que

$$ji=-ij=-k\ ,\ kj=-jk=-i\ ,\ ik=-ki=-j \text{ et } ijk=-1.$$

Hamilton entreprend ensuite de démontrer (p. 160-242) que tout quaternion q peut s'exprimer sous la forme $q=w+xi+yj+zk$, où w, x, y, z sont des scalaires. Pour chaque vecteur α, il notera sa longueur (relative à un certain vecteur-unité) par le scalaire $\mathrm{T}\alpha$ et par $\mathrm{U}\alpha$ le vecteur unitaire de même orientation que α. Il s'ensuit que $\alpha=\mathrm{T}\alpha\cdot\mathrm{U}\alpha$. Ces notions s'étendent comme suit (p. 169) à tout quaternion $q=\frac{\beta}{\alpha}$:

$$\mathrm{T}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=\frac{\mathrm{T}\beta}{\mathrm{T}\alpha}\ ,\ \mathrm{U}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=\frac{\mathrm{U}\beta}{\mathrm{U}\alpha} \text{ et } q=\mathrm{T}q\cdot\mathrm{U}q.$$

Le scalaire $\mathrm{T}q$ est nommé *tenseur* de q et $\mathrm{U}q$ *verseur* du quaternion q. On montre aisément que pour tous quaternions q, q', on a

$$\mathrm{T}(q'\cdot q)=\mathrm{T}q'\cdot\mathrm{T}q \text{ et } \mathrm{U}(q'\cdot q)=\mathrm{U}q'\cdot\mathrm{U}q.$$

---

[47] Comme nous l'avons indiqué dans la section 1.6 portant sur De Morgan, Gregory et Peacock. À propos du principe de permanence, voir aussi (Dorier, 1997, p. 42; Boyer, 1968, p. 625; Kline, 1972, p. 773; Dieudonné, 1987, note p. 140).

Ces notations permettent maintenant d'écrire (p.170) l'identité $\mathrm{K}q = (\mathrm{T}q)^2 \frac{1}{q}$.

Hamilton définit ensuite (p. 177) la *partie scalaire* Sq de tout quaternion q par

$$\mathrm{S}q = \tfrac{1}{2}(q + \mathrm{K}q).$$

Cette somme, $q + \mathrm{K}q$, est en effet un scalaire (p. 125); de plus, la projection orthogonale (fig. 2.4) du vecteur β sur α, où $q = \frac{\beta}{\alpha}$, entraîne (p. 178) que

$$\mathrm{S}q = \mathrm{T}q \cdot \cos \angle q ;$$

comme le note alors Hamilton, cette relation permettra de 'connecter' les quaternions à la trigonométrie.

Il s'ensuit une autre particularité fondamentale des quaternions droits: pour tout quaternion non nul q, on a que

$$\angle q = \pi/2 \text{ radians} \Leftrightarrow \mathrm{S}q = 0 .$$

Soit le quaternion $q = \frac{\beta}{\alpha}$; on sait que le vecteur géométrique β peut se décomposer (dans un espace euclidien) de façon unique comme la somme $\beta = \beta' + \beta''$, où le vecteur β'' est perpendiculaire à α et β' est parallèle à α. Le quaternion q se décompose donc de façon unique comme la somme $q = \frac{\beta'}{\alpha} + \frac{\beta''}{\alpha}$, où $\frac{\beta'}{\alpha}$ est un quaternion scalaire et le quaternion $\frac{\beta''}{\alpha}$ est un quotient droit. Puisque, comme on le voit géométriquement, $\mathrm{S}q = \mathrm{S}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{\beta'}{\alpha}$, alors, en posant $\mathrm{V}q = \frac{\beta''}{\alpha}$, on a l'identité

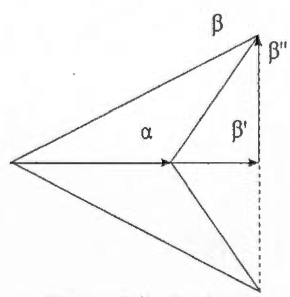

Figure 2.4: Projection orthogonale

$$q = \mathrm{S}q + \mathrm{V}q ,$$

où Sq est la partie scalaire du quaternion q et où le quotient droit Vq est sa *partie vectorielle*. Puisque, par construction du conjugué, on a $\mathrm{K}q = \mathrm{S}q - \mathrm{V}q$, alors on a

$$\mathrm{V}q = \tfrac{1}{2}(q - \mathrm{K}q)\,.$$

Et puisque, par définition, on a $\angle \mathrm{V}q = \pi/2$ radians , alors $SVq = 0$; ainsi la partie Vq du quaternion q est-elle purement vectorielle.

Puisque deux quaternions q et q' peuvent être rapportés à un même vecteur α commun à leurs plans (voir ci-dessus la généralisation de l'addition), on en déduit aisément (p. 185, 204) que

$$\mathrm{S}(q+q') = \mathrm{S}q + \mathrm{S}q' \text{ et } \mathrm{V}(q+q') = \mathrm{V}q + \mathrm{V}q'\,.$$

De même, quelque soit le scalaire x et le quaternion q, on a (p. 178, 197):

$$\mathrm{S}xq = x\,\mathrm{S}q \text{ et } \mathrm{V}xq = x\,\mathrm{V}q\,.$$

Finalement, puisque i, j, k sont des quotients droits, il s'ensuivra que $xi + yj + zk$ est aussi un quotient droit et que tout quaternion q pourra s'exprimer (p. 242) de façon unique sous la forme

$$q = w + xi + yj + zk,$$

où la partie scalaire de q est $\mathrm{S}q = w$ et sa partie vectorielle est $\mathrm{V}q = xi + yj + zk$.
Et puisque que $\mathrm{K}q = \mathrm{S}q - \mathrm{V}q$, on a donc $\mathrm{K}q = w - xi - yj - zk$.

Par la suite (p. 245), Hamilton démontrera que si

$$q = w + xi + yj + zk\,,\; q' = w' + x'i + y'j + z'k \text{ et } q'q = w'' + x''i + y''j + z''k\,,$$

alors

$$w'' = w'w - (x'x + y'y + z'z)\,,\; x'' = (w'x + x'w) + (y'z - z'y)\,,$$
$$y'' = (w'y + y'w) + (z'x - x'z) \text{ et } z'' = (w'z + z'w) + (x'y - y'x).$$

Nous avons donc ici retrouvé la définition algébrique usuelle des quaternions (voir ci-dessous).

2.2 Algèbre linéaire et quaternions

Dans le cadre d'un cours d'algèbre linéaire et géométrie vectorielle, il serait adéquat d'aborder le problème géométrique que Hamilton cherchait à résoudre à l'aide des quaternions — à savoir, déterminer le vecteur v' résultant de la rotation d'un vecteur v, d'un certain angle θ, autour d'un vecteur U — à l'aide seulement des notions de géométrie vectorielle développées par Oliver Heaviside (1850– 1925) et Josiah Willard Gibbs (1839–1903)[48]. Les notions nécessaires à cette fin sont en effet déjà enseignées dans un tel cours, soit d'une part le *produit scalaire* $u \bullet v$, à l'aide duquel sera aisément exprimé tout vecteur v comme la somme $v = v_u + (v - v_u)$, où v_u désigne la projection orthogonale de v sur un vecteur non nul u et où $v - v_u$ est un vecteur perpendiculaire à u ; soit d'autre part le *produit vectoriel* $u \times v$, qui sera utile à déterminer un vecteur orthogonal aux vecteurs u et v, orienté dans le sens de la main droite.[49]

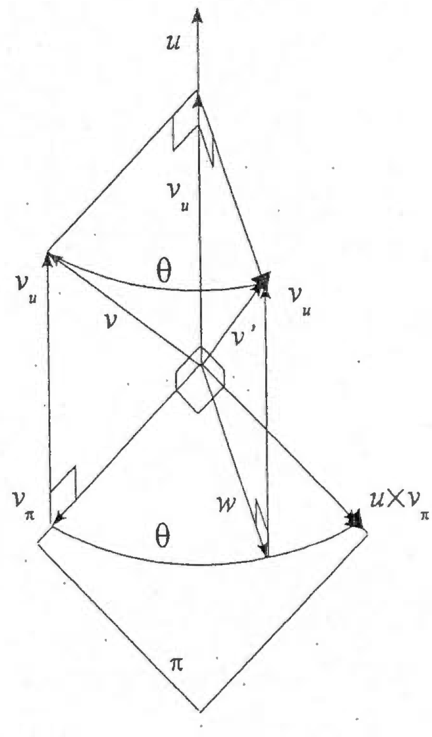

Figure 2.5: Rotation d'un angle θ du vecteur v autour du vecteur u

Déterminons donc le vecteur v' obtenu du vecteur v par rotation, autour d'un vecteur non nul U, d'un angle θ mesuré dans le sens direct de $(U, v, U \times v)$. Pour simplifier la notation, soit u le vecteur unitaire de même orientation que U, donc $u = \frac{1}{|U|} U$, où $|U|$

---

48 Heaviside et Gibbs inventèrent l'analyse vectorielle tridimensionnelle (Kline, 1972, p. 787).

49 On voit que ces notions permettent de calculer aisément ce que Hamilton nommait les parties scalaire Sq et vectorielle Vq d'un quaternion q, ainsi que son axe de rotation $Ax.q$.

désigne la norme de U. Et soit v_π la projection orthogonale de v sur le plan π, orthogonal à u (voir fig. 2.5). On a $v_u=(v\bullet u)u$ puisque u est unitaire; et pour la même raison, on a $|u\times v_\pi|=|v_\pi|$. Puisque $v_\pi=v-v_u$, alors

$$u\times v_\pi=u\times(v-(v\bullet u)u)=u\times v\,.$$

Le vecteur cherché v' est donc le vecteur $v'=w+v_u$, où w est le vecteur obtenu de la rotation d'angle θ de v_π dans le plan π. On a ainsi le vecteur

$$w=\cos(\theta)\,v_\pi+\sin(\theta)\,u\times v\,,$$

d'où

$$v'=\cos(\theta)\,v+(1-\cos(\theta))\,v_u+\sin(\theta)\,u\times v\,.$$

En conséquence, le vecteur v' obtenu du vecteur v par rotation, autour d'un vecteur non nul U, d'un angle θ mesuré dans le sens direct de $(U, v, U\times v)$, est

$$v'=\cos(\theta)\,v+(1-\cos(\theta))(v\bullet u)\,u+\sin(\theta)\,u\times v\,,$$

où $u=\frac{1}{|U|}U$.

La traduction de cette identité à l'aide des composantes des vecteurs géométriques relatives à la base orthonormée ordonnée $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ donne lieu à la représentation matricielle suivante. En posant

$$v=(x, y, z)\,,\ u=(b, c, d) \text{ et } v'=(x', y', z'),$$

on a alors

$$(v\bullet u)\,u=(b^2x+bcy+bdz,\ bcx+c^2y+cdz,\ bdx+cdy+d^2z)$$

et

$$u\times v=(cz-dy,\ dx-bz,\ by-cx)\,,$$

d'où l'équation matricielle :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \cos(\theta) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + (1-\cos(\theta)) \begin{bmatrix} b^2 & bc & bd \\ bc & c^2 & cd \\ bd & cd & d^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \sin(\theta) \begin{bmatrix} 0 & -d & c \\ d & 0 & -b \\ -c & b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

donc

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

où

$$M = \cos(\theta) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1-\cos(\theta)) \begin{bmatrix} b^2 & bc & bd \\ bc & c^2 & cd \\ bd & cd & d^2 \end{bmatrix} + \sin(\theta) \begin{bmatrix} 0 & -d & c \\ d & 0 & -b \\ -c & b & 0 \end{bmatrix}.$$

Comme nous venons de le démontrer, le problème géométrique auquel était confronté Hamilton peut donc être résolu sans l'aide des quaternions. Voyons maintenant comment ce résultat pourrait s'exprimer à l'aide des quaternions, que nous commencerons par définir dans le langage actuel de l'algèbre linéaire.

Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des quadruplets (*a, b, c, d*) qui seront notés

$$q = a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k},$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et où ***i, j, k*** désignent les vecteurs de la base orthonormée usuelle de l'espace géométrique, donc tels que $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1$, $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0$ et $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$. Le nombre réel a sera identifié à la *partie scalaire du quaternion* et le *quaternion pur* $v = b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ à sa *partie vectorielle*. Ainsi,

$$a = a + 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} \quad \text{et} \quad v = 0 + v.$$

En posant

$$q = a + v, \text{ où } v = b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k} \text{ et } a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

$$q' = a' + v', \text{ où } v' = b'\boldsymbol{i} + c'\boldsymbol{j} + d'\boldsymbol{k} \text{ et } a', b', c', d' \in \mathbb{R},$$

on définit le *produit des quaternions*, avec les notations de Gibbs et Heavyside, par

$$q\,q'=(aa'-v\bullet v')+av'+a'v+v\times v',$$

où $v\bullet v'$ désigne le produit scalaire, $v\times v'$ le produit vectoriel et $av'+a'v$ la combinaison linéaire de v et v' selon les scalaires a et a'. On vérifie aisément que cette définition du produit des quaternions est exactement équivalente à celle à laquelle parvenait Hamilton par l'approche que nous avons résumée ci-dessus. De plus, on retrouve les identités

$$\boldsymbol{i}^2=-1\,,\ \boldsymbol{j}^2=-1\,,\ \boldsymbol{k}^2=-1\,,\ \boldsymbol{ij}=\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{ji},\ \boldsymbol{jk}=\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{kj}\,,\ \boldsymbol{ki}=\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{ik}\,.$$

On définit le conjugué $\bar{q}$ de $q=a+b\boldsymbol{i}+c\,\boldsymbol{j}+d\,\boldsymbol{k}$ par $\bar{q}=a-b\boldsymbol{i}-c\,\boldsymbol{j}-d\,\boldsymbol{k}$ et son module par $|q|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$. On vérifie aisément que pour tout quaternion q,

$$q\,\bar{q}=|q|^2=\bar{q}\,q \quad \text{et} \quad r\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ rq=qr\,.$$

Donc, $q\neq 0\ \Rightarrow\ q^{-1}=\dfrac{1}{|q|^2}\bar{q}$ et en particulier, $|q|=1\ \Rightarrow\ q^{-1}=\bar{q}$.

On a aussi $\overline{q_1q_2}=\overline{q_2}\ \overline{q_1}$ pour tous q_1, q_2 ; d'où

$$|q_1q_2|=|q_1|\,|q_2|\,,\quad (q_1q_2)^{-1}=q_2^{-1}\,q_1^{-1} \quad \text{et} \quad |q^{-1}|=|q|^{-1}\,.$$

Il s'ensuit que si $Q=rq$, où $r\in\mathbb{R}^*$ et $q\neq 0$, alors $Q\,v\,Q^{-1}=q\,v\,q^{-1}$.

Remarquons au passage que si q et q' sont des quaternions purs, donc tels que $q=v$ et $q'=v'$, alors on a $qq'=-v\bullet v'+v\times v'$ et $q'q=-v'\bullet v+v'\times v$; on retrouve donc la propriété observée par Hamilton (voir ci-dessus la propriété des quotients droits): $q=v$ et $q'=v'\ \Rightarrow\ q'q=\overline{qq'}$,

puisque $v'\bullet v=v\bullet v'$ et $v'\times v=-v\times v'$. De même, on retrouve l'autre identité:

$$q=v \ \text{et}\ q'=v' \ \text{et}\ v\perp v' \ \Rightarrow\ q'q=-qq',$$

car alors $v\bullet v'=0$. Tandis que si les quaternions $q=a+v$ et $q'=a'+v'$ sont tels que $v\ //\ v'$, alors $q'q=qq'$. En effet, si deux quaternions $q=\frac{\beta}{\alpha}$ et $q'=\frac{\gamma}{\alpha}$ sont coplanaires, alors leurs parties vectorielles $\mathrm{V}q$ et $\mathrm{V}q'$ sont parallèles.

Comme l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, muni de la multiplication complexe (qui prolonge la multiplication par un scalaire), est isomorphe au corps commutatif $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, muni de la multiplication propre aux quaternions, est isomorphe au corps non commutatif $\mathcal{H}$ des quaternions.[50]

Montrons maintenant comment la rotation d'un vecteur géométrique v autour d'un vecteur non nul U peut s'obtenir à l'aide de quaternions. Soit $u=b\boldsymbol{i}+c\boldsymbol{j}+d\boldsymbol{k}$ le vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ de même orientation que U et soit le vecteur $v=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$; alors le quaternion $q=\cos(\theta/2)+\sin(\theta/2)u$ est lui aussi unitaire. Donc, $q^{-1}=\bar{q}$. Alors, par définition du produit, on a

$$\begin{aligned} q\,v\,q^{-1} &= (\cos(\theta/2)+\sin(\theta/2)\,u)(0+v)(\cos(\theta/2)-\sin(\theta/2)\,u) \\ &= (\cos(\theta/2)+\sin(\theta/2)\,u)(\sin(\theta/2)v\bullet u+\cos(\theta/2)\,v-\sin(\theta/2)\,v\times u) \\ &= 0+v'\ \text{, où} \end{aligned}$$

$$v'=\cos^2(\theta/2)\,v+(\sin^2(\theta/2)\,v\bullet u)\,u-\frac{1}{2}\sin(\theta)\,v\times u+\frac{1}{2}\sin(\theta)\,u\times v-\sin^2(\theta/2)u\times(v\times u)$$

par commutativité du produit scalaire: $u\bullet v=v\bullet u$, par une propriété du produit mixte: $u\bullet(v\times u)=(0,\,0,\,0)$ et par l'identité trigonométrique: $\sin(\theta)=2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$.

De plus, par l'identité $\cos^2(\theta/2)-\sin^2(\theta/2)=1-2\sin^2(\theta/2)=\cos(\theta)$, par la propriété d'anti-commutativité du produit vectoriel $u\times v=-v\times u$ et par la formule de Gibbs:

$$u\times(v\times u)=(u\bullet u)\,v-(u\bullet v)\,u\ ,$$

---

50 Dans le langage de l'algèbre matricielle, il suffit d'identifier $\mathbf{1}$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ aux matrices d'ordre 4 suivantes:

$$\mathbf{1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{i}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{j}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix},$$

pour démontrer aisément que l'ensemble $W=\{\ a\mathbf{1}+b\boldsymbol{i}+c\boldsymbol{j}+d\boldsymbol{k}\ |\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 4 de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{4\times 4}$ des matrices d'ordre 4 à coefficients réels. De plus, on observe que W, muni des opérations d'addition et multiplication matricielles usuelles, forme un corps non commutatif isomorphe à l'ensemble des quaternions (Leroux, 1983, p. 169).

on a alors, u étant unitaire, que

$$v'=\cos^2(\theta/2)v-\sin^2(\theta/2)v+2(\sin^2(\theta/2)v\bullet u)u+\sin(\theta)u\times v.$$

Donc

$$q v q^{-1}=\cos(\theta)v+(1-\cos(\theta))(v\bullet u)u+\sin(\theta)u\times v,$$

ce qui est précisément la formule déjà obtenue sans les quaternions.

Nous venons de démontrer que la fonction R_θ, définie par

$$R_\theta(v)=q v q^{-1}\text{, où } R_\theta : \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,$$

applique sur v une rotation d'angle θ autour du vecteur U lorsque

$$q=\cos(\theta/2)+\sin(\theta/2)u \quad\text{et}\quad u=\frac{1}{|U|}U.$$

De plus, si $Q=rq$ et $r\in\mathbb{R}^*$, alors on a aussi $Q\,v\,Q^{-1}=q\,v\,q^{-1}$, comme nous l'avons déjà observé ci-dessus. Il s'ensuit donc également que

$$v'=R_\theta(v)=Q\,v\,Q^{-1}.$$

Comme l'on pouvait s'y attendre, le vecteur v' obtenu par cette rotation R_θ est de même norme que v, puisque $|v'|=|Q v Q^{-1}|=|Q||v||Q|^{-1}=|v|$.

Démontrons maintenant que pour tout quaternion non nul $Q=a+U$, il existe un unique angle $\theta\in[0,2\pi[$ tel que l'on ait $Q\,v\,Q^{-1}=R_\theta(v)$, la rotation s'effectuant autour du vecteur U dans le sens direct de $(U,v,U\times v)$ lorsque U est non nul.

On sait que tout quaternion non nul $Q=a+U=a+b\boldsymbol{i}+c\,\boldsymbol{j}+d\boldsymbol{k}$ peut s'exprimer sous la forme $Q=rq$, où q est unitaire et $r\in\mathbb{R}^*$: il suffit en effet de prendre $r=|Q|$ et $q=\frac{1}{r}Q$, donc $q=\frac{a}{r}+\frac{b}{r}\boldsymbol{i}+\frac{c}{r}\boldsymbol{j}+\frac{d}{r}\boldsymbol{k}$.

Si $U=0$, c.-à-d. si $Q=a$, alors $a v a^{-1}=v$ et l'angle θ est donc nul ($\theta=0\,\mathrm{rad}$). Sinon, il existe un unique angle $\theta\in]0,2\pi[$ tel que

$$\cos(\theta/2)=a/r\,;$$

en posant

$$u=\cos(\alpha)\boldsymbol{i}+\cos(\beta)\boldsymbol{j}+\cos(\gamma)\boldsymbol{k}$$

où l'on a les vecteurs directeurs

$$\cos(\alpha)=\frac{b}{r\sin(\theta/2)}\,,\ \cos(\beta)=\frac{c}{r\sin(\theta/2)}\ \text{ et }\ \cos(\gamma)=\frac{d}{r\sin(\theta/2)}\,,$$

on a que u est un vecteur géométrique unitaire [51] et l'on obtient

$$q=\cos(\theta/2)+\sin(\theta/2)u\ .$$

On trouve donc ainsi la forme trigonométrique souhaitée du quaternion:

$$Q=a+U=|Q|\left(\cos(\theta/2)+\sin(\theta/2)u\right),$$

où $\theta=2\arccos(a/|Q|)$ et où $u=\dfrac{1}{|Q|\sin(\theta/2)}U$ est de même orientation que U, la rotation θ s'effectuant dans le sens direct de $(U, v, U\times v)$.

Cette forme est uniquement déterminée puisque le seul autre quaternion unitaire $q\,'$ tel que $Q=r'q\,'$ est le quaternion $q\,'=-q$ pour lequel $r\,'=-r=-|Q|$. Si Q n'est pas un scalaire, alors il existe un unique angle $\theta\,'\in]\,0{,}2\pi\,[$ tel que

$$\cos(\theta\,'/2)=\frac{a}{r\,'}=-\frac{a}{r}=-\cos(\theta/2).$$

Ainsi, $\theta\,'/2=\pi-\theta/2=(2\pi-\theta)/2$, donc $q\,'=\cos(\theta\,'/2)+\sin(\theta\,'/2)u\,'$, où $u\,'=-u$. D'où

$$q\,'=\cos(\pi-\theta/2)+\sin(\pi-\theta/2)u\,'\ \text{ et }\ Q=r\,'\left(\cos(\pi-\theta/2)+\sin(\pi-\theta/2)u\,'\right).$$

Puisque $u\,'=-u$, alors $u\,'\times v=-u\times v$; ainsi, la rotation d'angle $2\pi-\theta$ autour de u' dans le sens direct de $(u\,', v, u\,'\times v)$ est exactement la même que la rotation d'angle θ autour de u dans le sens direct de $(u, v, u\times v)$.

---

[51] On a effet que u est unitaire, car $\cos^2(\alpha)+\cos^2(\beta)+\cos^2(\gamma)=\dfrac{r^2-a^2}{r^2\sin^2(\theta)}=\dfrac{r^2-r^2\cos^2(\theta/2)}{r^2\sin^2(\theta/2)}=1$.

La théorie des quaternions fut promue dans les sciences physiques par Peter G. Tait (1831–1901) et James C. Maxwell (1831–1879), mais de plus en plus remplacée par les méthodes de la géométrie vectorielle et de l'algèbre linéaire[52]. Mais il demeure que l'importance historique des quaternions fut de construire la première structure algébrique où une opération n'était plus commutative, marquant ainsi une rupture avec la suprématie jusqu'alors incontestée du modèle présenté par les opérations arithmétiques, et d'innover par un calcul sur des quadruplets.

---

[52] C'est avec Leonhard Euler, en 1750, que commence l'analyse des systèmes d'équations linéaires (S.É.L.) au-delà de leurs résolutions: soit leur caractérisation par le nombre d'équations et le nombre de variables en jeu, et surtout le rapport qu'elles entretiennent entre elles; apparaît alors le concept de « dépendance inclusive » décrivant la situation où certaines équations en engendrent une autre (par « combinaison linéaire », dirions-nous aujourd'hui). La même année, Gabriel Cramer généralise les S.É.L. à l'aide de coefficients indéterminés; il inventera sous peu un outil de calcul pour les résoudre: le déterminant. En 1827, August Ferdinand Möbius introduira la notion des segments de droite orientés (et de figures orientées tels le triangle et la pyramide) et leur addition ainsi que le calcul barycentrique (pour déterminer le centre de masse). En 1833, Giusto Bellavitis conçoit les vecteurs comme classes d'équivalence de bipoints et les principales opérations algébriques sur les vecteurs géométriques: addition de vecteurs, leur multiplication par un scalaire, multiplication de vecteurs entre eux (nombres complexes). En 1844, Hermann Günther Grassman invente la théorie de l'extension (un système de $n+1^e$ échelon étant obtenu d'un système de n^e échelon par un changement dit fondamental: ceci deviendra l'ancêtre du concept de dimension); pour ce faire, il élabore le lemme de l'échange, décrivant le procédé pour accéder à l'échelon supérieur: cette construction dénote donc ainsi une conception dynamique de l'espace. En 1848, Arthur Cayley ouvre la notion d'espace à des dimensions supérieures à 3, inspiré en cela par l'invention récente des quadruplets introduits par les quaternions. De plus, il envisage ce que nous appellerions aujourd'hui un isomorphisme entre l'espace géométrique et l'espace algébrique $\mathbb{R}^3$. Entre 1844 et 1858, Ferdinand Eisenstein et Cayley élaboreront la théorie des matrices. En 1875, Georg Ferdinand Frobenius définira le concept d'indépendance linéaire pour les *n*-uplets et les équations linéaires, ainsi que la notion de base du système adjoint (soit de l'espace des solutions du S.É.L.); il en déduira que l'ordre maximal (nommé rang en 1879) des mineurs non nuls de la matrice des coefficients est invariant relativement aux opérations élémentaires, d'où la notion de taille du système adjoint associé au S.É.L. En 1888, Giuseppe Peano énoncera une axiomatique des systèmes linéaires (soit des espaces vectoriels), mais sans le processus dynamique d'extension introduit par Grassmann, la dimension du système étant alors fixée, donnée *a priori*. Il envisage l'existence de systèmes de dimension infinie, soit par exemple dans le cas de l'espace des polynômes. En 1893, Richard Dedekind envisage l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires issues d'un système irréductible (c.-à-d. d'une famille libre de vecteurs) sur un corps. Il procède à la génération des dimensions d'ordre supérieur et ébauche la notion que nous nommerions aujourd'hui les sous-espaces vectoriels de dimension *n* (Dorier, 1997, p. 21 à 102).

CHAPITRE III

LES FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE

Alors que se développent ces extensions des nombres réels que sont les nombres complexes et les quaternions et que le calcul infinitésimal (ou différentiel) est en scène[53], on questionne par ailleurs de plus en plus la nature des nombres réels, en particulier sous l'aspect du continuum qui leur était associé. En 1858, le mathématicien allemand Richard Dedekind (1831–1916), qui fut élève de Gauss, conçoit, en s'inspirant de la continuité de la ligne géométrique, ce qui sera par la suite nommé *coupures de Dedekind*, soit des sous-ensembles α non vides que pour simplifier nous noterions $\alpha =]-\infty, r[\cap \mathbb{Q}$. Les coupures dont la borne supérieure r est un nombre rationnel seront assimilées aux nombres rationnels; les autres aux nombres réels. L'introduction des coupures de Dedekind permettra de démontrer la propriété de densité des rationnels dans les réels, soit qu'entre deux nombres réels distincts existe toujours un nombre rationnel, et surtout de démontrer l'existence d'une borne supérieure réelle à tout ensemble majoré (non vide) de nombres rationnels, ce que l'on nomme maintenant l'axiome de complétude des réels.[54] Cette correspondance biunivoque entre l'ensemble $\mathbb{R}$ et la droite numérique est aujourd'hui nommée

---

[53] En 1872, les mathématiciens allemands Karl Weierstrass (1815-1897) et Heinrich Eduard Heine (1821-1881) auront formulé ce que l'on utilise encore aujourd'hui comme définition de la limite, à l'aide de δ et ε ; ce qui rendra superflu le recours aux infinitésimaux, le tout ne requérant que les nombres réels. Quoique certaines approches récentes en analyse non standard définissent la notion de limite par celle d'ultrafiltre de Boole.

l'axiome de Cantor-Dedekind.

De plus, Dedekind définit les ensembles infinis comme ceux dont les éléments peuvent être mis en correspondance biunivoque avec ceux d'un sous-ensemble propre. Le mathématicien allemand Georg Cantor (1845–1918) observera alors que tous les ensembles infinis n'ont pas la même cardinalité : ainsi, les ensembles des entiers et des rationnels sont dénombrables mais pas celui des nombres réels. Ce qui l'amènera à construire les ordinaux transfinis, par récurrence sur les ensembles-puissances. (Krivine, 1969, p. 39) Il démontra alors que la cardinalité de l'ensemble-puissance d'un ensemble est toujours plus grande que celle de cet ensemble. Le problème fut alors de savoir s'il existe des cardinalités intermédiaires. L'*hypothèse* dite *du continu* est de supposer que non. La cardinalité (*c* du continu) de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels étant celle de l'ensemble-puissance des entiers, l'hypothèse du continu revient alors à supposer que tout sous-ensemble infini de $\mathbb{R}$ est soit dénombrable, soit de même cardinalité que $\mathbb{R}$. Kurt Gödel (1906–1978) démontra, en 1940, que cette hypothèse est cohérente avec l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel; et en 1963, Paul J. Cohen (1934–) démontra que l'hypothèse du continu est un énoncé indécidable dans l'axiomatique de ZF (en supposant, évidemment, que celle-ci est non contradictoire) (Dieudonné, 1987, p. 243; Krivine, 1969, p. 46; Kline, 1972, p. 1002, p. 1209; Katz, 1993, p. 663).

Nous avons vu comment l'algèbre s'est appuyée depuis l'Antiquité sur la représentation géométrique pour fonder les méthodes et les formules qui l'ont amenée, par la cohérence de sa démarche propre, à inventer des nombres complexes dont l'interprétation première allait à l'encontre de l'intuition géométrique. C'est d'ailleurs seulement lorsque fut inventée une représentation géométrique adéquate pour les représenter que leur existence fut pleinement acceptée.

---

[54] On retrouve plusieurs approches et formulations de cet axiome. (Rudin, 1964, p. 3 à 13, théorèmes 1.29 et 1.32; Dieudonné, 1960, p. 22 (2.2.16); Kline, 1972, p. 985; Mac Lane & Birkhoff, 1965, page 203).

Cette exploration algébrique s'est poursuivie par l'invention de nouvelles structures algébriques (corps non commutatif des quaternions, l'algèbre des matrices et autres algèbres abstraites) qui mettent de l'avant une approche analysant différents modèles possibles (monoïde, groupe, anneau, espace vectoriel, ...) et non plus seulement le modèle de corps commutatif qui était alors pensé comme principe permanent. La nature du nombre est passée de nombre naturel à nombre rationnel, puis s'est étendue en incluant les nombres irrationnels, les nombres réels puis complexes, les quaternions, les matrices, etc. De même, la théorie des ensembles naissante explorera une approche axiomatique différenciée (avec ou sans l'axiome du choix, avec ou sans l'hypothèse du continu, ...).

Cette nouvelle attitude logique, s'intéressant aux réseaux de théorèmes et concepts apportés par telle ou telle axiomatique, débordera la cadre algébrique pour s'attaquer à ce qui fut depuis toujours la justification intuitive de l'algèbre: la géométrie.

Pendant près de deux millénaires, les géomètres ont cherché à déduire, à partir des définitions, notions communes et autres postulats de la géométrie d'Euclide, son cinquième postulat, à savoir le postulat dit des parallèles:

> Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.

L'une des plus anciennes tentatives en ce sens que nous connaissions vient du philosophe, scientifique et historien grec Poseidônios[55] (ca. -135 – -51), qui croyait avoir ainsi démontré ce postulat des parallèles en remplaçant la définition d'Euclide des parallèles, à savoir :

---

[55] Poseidônios fut responsable de l'École Stoïcienne de Rhodes et professeur de Cicéron. La version latine de son nom est Posidonius.

> Deux droites parallèles sont des droites qui, situées dans un même plan et prolongées indéfiniment, n'ont aucun point en commun.

par la définition suivante, dite de l'équidistance des parallèles:

> Deux droites parallèles sont des droites qui, situées dans un même plan et prolongées indéfiniment, gardent entre elles toujours la même distance.

Or ces deux définitions ne sont pas équivalentes: la définition d'équidistance de Poseidônios implique évidemment la propriété selon laquelle deux droites parallèles n'ont aucun point en commun, mais la réciproque n'est pas vérifiée, à savoir que la définition d'Euclide des parallèles n'implique pas, sans le cinquième postulat, leur équidistance.[56] La définition des parallèles de Poseidônios permet de démontrer aisément que par un point situé hors d'une droite donnée, on ne peut mener qu'une seule droite parallèle à celle-ci. Ensuite, en utilisant cette unicité de la parallèle et comme propriété la définition euclidienne des parallèles, on démontre le cinquième postulat d'Euclide (Trudeau, 1987, p. 121-122). Ainsi, c'est seulement en ajoutant à l'édifice d'Euclide la propriété d'équidistance des parallèles que le cinquième postulat devenait un théorème. Puisque l'équidistance des parallèles dans leur prolongement infini est moins facilement vérifiable que les conditions du cinquième postulat portant sur deux angles intérieurs, la réorganisation proposée par Poseidônios de l'axiomatique euclidienne ne fut pas retenue par l'histoire.

On assistera à plusieurs autres tentatives (Trudeau, 1987, p. 128-129) de déduire le cinquième postulat d'Euclide, par exemple en reformulant l'idée d'équidistance des parallèles (Proclus au V^e^ siècle, Nasir al-Din al-Tusi au XIII^e^ siècle, Christophe Clavius en 1574, Pietro Antonio Cataldi en 1603, Giordano Vitale en 1680) ou en reprenant la propriété de l'unicité de la parallèle (John Playfair au XVIII^e^ siècle) ou en affirmant la possibilité de construire des triangles semblables (John Wallis en 1663)

---

[56] Ainsi par exemple, si nous prenons comme modèle de 'droites' non sécantes certaines courbes asymptotiques (comme le fait la géométrie hyperbolique), la définition d'Euclide serait vérifiée mais pas celle de Poseidônios.

ou l'existence du rectangle (Girolamo Saccheri en 1733) ou que tout quadrilatère ayant trois angles droits a nécessairement son quatrième angle droit (Johann Heinrich Lambert en 1766) ou en posant que la somme des angles d'un triangle est celle de deux droits (Girolamo Saccheri en 1733)[57] .

Ce qui se profile derrière ces tentatives de démontrer le cinquième postulat à l'aide d'énoncés qui se veulent très proches de « l'évidence intuitive » est le réseau des propriétés solidaires de ce postulat; le XIXe siècle verra s'élaborer une réorganisation des axiomes de la géométrie euclidienne ouvrant la voie à ce qui sera nommé la géométrie neutre (ensemble des théorèmes déduits sans le cinquième postulat d'Euclide) et aux extensions de celle-ci sous la forme de la géométrie euclidienne (avec ce postulat) ou des géométries non euclidiennes (avec des axiomes contredisant ce postulat). Ainsi en est-il de la géométrie hyperbolique du hongrois János Bolyai (1775 à 1856) et du russe Nikolaï Ivanovitch Lobatchevski (1793 à 1856), où l'on admet l'existence dans le plan de plus d'une non-sécante à une droite passant par un point qui lui est extérieur, ainsi que de la géométrie elliptique de Riemann où deux droites coplanaires s'intersectent toujours (Hilbert, 1899, p. 47 et 176). Nous aborderons brièvement la géométrie hyperbolique à la section suivante.

Désormais, l'axiome n'exprimera plus une « vérité évidente » mais s'inscrira en tant qu'axiome propre à un ou des modèles mathématiques possibles. La possibilité de ceux-ci relèvera de leur cohérence (non contradiction interne); mais celle-ci ne peut, en dernière instance, être démontrée comme telle. Ainsi par exemple, la preuve de la cohérence des axiomes géométriques de Hilbert (voir Appendice A) s'appuie sur la cohérence supposée de l'algèbre des nombres réels. Or, comme l'a démontré Gödel en 1931, pour toute théorie mathématique S basée sur l'arithmétique, si cette théorie S

---

57 On pourra lire un plaidoyer à la défense de l'axiomatique et de la séquence théorique proposée par Euclide dans le livre *Euclid and his Modern Rivals*, publié en 1879 , de Ch. L. Dodgsdon, professeur de mathématiques à l'Université de Cambridge et mieux connu sous le nom de Lewis Carroll; Dodgsdon y mènera, en particulier, une critique des diverses substitutions historiquement proposées à la définition des parallèles; mais aussi à celles des lignes droites, des angles, des diagonales, du principe de superposition, etc.

est cohérente ("consistent"), alors l'énoncé affirmant la cohérence de S est non démontrable dans S (Mendelson, 1964, p. 143 et 148; Dieudonné, 1987, p. 242). Il ne s'agit donc plus de savoir si tel ou tel axiome mathématique exprime une vérité transcendante mais plutôt d'analyser en détail la toile que tissent les modèles énoncés.

3.1 Hilbert et les fondements de la géométrie

Dans sa réorganisation de la géométrie, les notions de point, de droite et de plan ne relèvent plus chez le mathématicien allemand David Hilbert (1862–1943) d'une intuition 'naïve' de l'espace; les objets non primitifs de la géométrie seront en effet définis de façon explicite. Non pas, comme on serait tenté de le penser[58], qu'il s'agisse d'un assemblage de symboles et de règles n'ayant d'autre signification que combinatoire.

> Comme toute autre science, la mathématique ne peut pas être construite sur la seule logique. Une donnée est indispensable, composée d'objets concrets, résultant d'une expérience antérieure à la pensée. Pour assurer la validité des déductions, ces objets doivent pouvoir être examinés sous toutes leurs faces. Leur présentation, leur discrimination, leur ordonnance, leur relation de voisinage doivent être données immédiatement et intuitivement et cela de façon irréductible à d'autres relations. Telle est ma position philosophique devant les mathématiques ou toute pensée scientifique: elle me paraît indispensable. En mathématiques, les objets que nous examinons sont des signes qui pour nous sont clairs et reconnaissables. C'est là un minimum que tout penseur doit accepter.[59]

Car l'approche de Hilbert, comme il le précise dans l'introduction à la seconde édition de ses *Fondements de la Géométrie*, dont la publication marque les débuts de l'axiomatique moderne, vise en premier lieu les mêmes objets que la géométrie depuis Euclide:

> Le présent travail est un nouvel essai de constituer, pour la géométrie, un système complet d'axiomes aussi simples que possible et d'en déduire les théorèmes les plus importants, de façon à mettre en évidence le rôle des divers groupes d'axiomes et la portée de chacun d'eux. [...] Ce problème est celui de l'analyse de notre intuition de l'espace. (Hilbert, 1903, p. 10)

---

[58] Nous référons ici à ce qu'écrivait De Morgan en 1830 relativement à l'algèbre. (section 1.6)

[59] Ces précisions furent apportées par Hilbert à une conférence faite en 1927. (Hilbert, 1899, Appendice IX, p. 261)

C'est l'optique qui diffère. En 1794, dans ses *Éléments de la géométrie,* livre qui fut par la suite couramment utilisé pour l'enseignement, Adrien-Marie Legendre (1752–1833) posait qu'un « axiome est une proposition évidente par elle-même »; or, ce qui s'avérait ainsi évident pour Legendre deviendra, avec Hilbert, axiome possible mais quelquefois non nécessaire. Il devient donc impératif de rendre explicites les « intuitions premières » sur lesquelles s'appuient les fondements de la géométrie. C'est aussi la communauté à laquelle s'adresse Hilbert qui diffère, soit celle des savants mathématiciens, tandis que Legendre s'adressait avant tout à des étudiants inscrits à l'École Polytechnique de Paris, fondée au cours de la Révolution Française.

Les notions usuelles de la géométrie élémentaire issue de la géométrie d'Euclide sont reprises dans les textes de Legendre et de Hilbert; toutefois, leur introduction, les preuves des théorèmes auxquels elles donnent lieu et leur prolongement diffèrent largement. Legendre introduit ces notions par un recours implicite à une certaine intuition du monde physique, malgré une réserve sur leur particularité (voir définition V ci-dessous); les théorèmes qu'il démontre ne reposent explicitement sur aucun axiome, seulement sur les définitions des objets géométriques présentés et sur quelques règles d'arithmétique. Le recours à « l'évidence » de cette intuition apparaîtra dans certaines démonstrations. Tandis que Hilbert, sans pour autant délaisser le recours à la représentation intuitive du graphisme géométrique, présente ces notions de façon explicite; les démonstrations des théorèmes porteront ensuite sur les termes primitifs introduits, à l'aide d'axiomes et définitions opératoires explicités.

Le prolongement que donne Legendre aux objets de la géométrie plane (point, droite, angle, cercle, polygones) porte sur les objets de la géométrie euclidienne (principalement: plans de l'espace euclidien, polyèdres, sphère, cylindre, cône). Tandis que Hilbert prolonge ces mêmes objets à des géométries non euclidiennes, soit à des géométries vérifiant une partie seulement des axiomes présentés. (La liste complète des axiomes se trouve à l'appendice A, auquel nous nous référerons par la suite.)

Voici la séquence de définitions que donne Legendre pour définir la droite:

> Définition II
> La *surface* d'un corps est la limite qui le sépare de l'espace environnant.
>
> Définition III
> Le lieu où les surfaces de deux corps se rencontrent est appelée *ligne*.
>
> Définition IV
> Un *point* est le lieu où deux lignes se coupent.
>
> Définition V
> On conçoit [...] les surfaces, les lignes, indépendamment des corps auxquels ils appartiennent.
>
> Définition VIII
> La *ligne droite* est une ligne indéfinie qui est la plus courte entre deux quelconques de ses points.
> On doit regarder comme évident que d'un point à un autre on ne peut mener qu'une ligne droite, et que si deux portions de lignes droites coïncident, ces lignes coïncident dans toute leur étendue.

Le fait qu'une droite se prolonge « dans toute son étendue » est tenu implicitement pour acquis par Legendre. Nous reviendrons ci-dessous sur ce problème d'extension (axiomes de continuité). On remarquera que la définition de droite présuppose l'existence d'un minimum (« la plus courte ») dans la mesure de la distance entre deux points, la notion de distance étant supposée définie; de même est affirmée (« comme évidente ») l'unicité de la droite qui relie deux points distincts. La définition II pose d'emblée que la géométrie est concernée par une intuition de « l'espace environnant », compte tenu de la réserve énoncée par la définition V.

Voici maintenant la définition que donne Hilbert de la droite:

> Nous pensons trois systèmes différents de choses; nous nommons les choses du premier système *points*; [...] nous nommons *droites* les choses du deuxième système [...]; nous appelons *plans* les choses du troisième système [...]. Les points constituent les éléments de la géométrie linéaire; les points et les droites sont les éléments de la géométrie plane; enfin, les points,

> les droites et les plans sont ceux de la géométrie de l'espace ou de l'espace lui-même.
> Entre les points, les droites et les plans, nous imaginons certaines relations que nous exprimons par des expressions telles que *être sur*, *entre*, *congruent*; la description exacte et appropriée au but des mathématiques de ces relations est donnée par les *axiomes de la géométrie*. (Hilbert, 1899, p.11)

Hilbert définit les conditions d'utilisation des notions primitives de point et de droite par la séquence d'axiomes suivante :

I.1 Il existe une droite liée à deux points donnés A et B à laquelle appartiennent ces points.

I.2 Il n'existe pas plus d'une droite à laquelle appartiennent deux points [distincts].

I.3 Sur une droite, il y a au moins deux points [...].

II.1 Si un point B est *entre* un point A et un point C , les points A, B, C appartiennent à une droite et B est aussi entre C et A.

II.2 Deux points A et C étant donnés, il existe au moins un point B appartenant à la droite AC et tel que C soit entre A et B.

II.3 De trois points d'une droite, il n'y en a pas plus d'un qui est entre les deux autres.

II.4 Soient A, B, C trois points non alignés et a une droite du plan ABC qui ne passe par aucun des points A, B, C ; si la droite a passe par l'un des points du segment AB , elle passe ou par un point du segment BC ou par un point du segment AC.

Déf.: Deux droites coplanaires qui ne se coupent pas sont dites *parallèles*.

IV *Axiome d'Euclide*: Soient une droite a et un point A extérieur à a ; dans le plan déterminé par a et A , il existe au plus une droite qui passe par A et qui ne coupe pas a .

V.1 *Axiome d'Archimède* (ou de la mesure)
Si AB et CD sont deux segments quelconques, il existe un nombre entier n tel que le report du segment CD répété n fois à partir de A sur la demi-droite déterminée par B conduit à un point situé au-delà de B.

V.2 *Axiome de l'intégrité linéaire* (version de la 6e édition, p. 44)
Les éléments *points*, *droites* et *plans* de la géométrie constituent un système d'objets qui, si l'on admet les axiomes précédents [la liste complète se retrouve en appendice], n'est susceptible d'aucune extension. Autrement dit, il n'est pas possible d'adjoindre un système d'objets au système constitué par les points, les droites et les plans de telle sorte que les axiomes I à IV et V.1 soient valables pour le système total ainsi constitué.

Il résulte des axiome d'Archimède et d'intégrité linéaire que la droite contient tous les points de son prolongement; ce qui, comme nous l'avons observé ci-dessus, allait intuitivement de soi chez Legendre. Notons que l'une des conséquences importantes de ces axiomes de continuité est de permettre une bijection entre les points de la droite (que forme un axe dans le plan cartésien) et l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, puisque celui-ci est un corps archimédien totalement ordonné complet[60] (Hilbert, 1899, p. 282). À ce propos, Hilbert écrit, dans la première édition de ses *Fondements*:

> La valeur de cet axiome [de l'intégrité linéaire], au point de vue des principes, tient donc à ce que l'existence de tous les points limites en est une conséquence et que, par suite, cet axiome rend possible la correspondance univoque et réversible des points d'une droite et de tous les nombres réels. (Hilbert, 1899, p. 44)

De même, Hilbert établit la relation biunivoque entre la géométrie cartésienne plane et la géométrie euclidienne (constituée de tous les axiomes linéaires et plans présentés dans ses fondements: axiomes I.1, I.2, I.3, II, III, IV, V.1, V.2). Pour démontrer que la géométrie cartésienne vérifie l'axiome d'intégrité (V.2), Hilbert fait une preuve par l'absurde en utilisant la notion des coupures de Dedekind. Et de conclure:

> Toute contradiction dans les conséquences des axiomes I à V apparaîtrait dans l'arithmétique des nombres réels. (Hilbert, 1899, p. 55)

Cette bi-univocité est illustrée explicitement dans le chapitre III des *Fondements* (p. 74-75) où un calcul segmentaire vérifiant la structure de corps archimédien totalement ordonné complet permet de démontrer « une correspondance [biunivoque] entre les points d'une droite quelconque de l'espace et les nombres réels » (p. 88-89).

---

60 Rappelons que l'axiome de complétude peut être énoncé sous différentes formes, soit l'existence d'une borne supérieure réelle à tout sous-ensemble majoré non vide de $\mathbb{R}$, soit que toute suite de Cauchy a une limite, soit l'axiome de Cantor qui peut aussi s'exprimer par celui des intervalles emboîtés (posant l'existence d'une intersection non vide à toute suite infinie d'intervalles fermés emboîtés). (Mac Lane et Birkhoff, 1965, p. 202-203; Rudin, 1964, p. 10; Dieudonné, 1968, p. 18).

Dans ce calcul, l'addition et la multiplication des segments sont définies comme suit (Hilbert, 1899, p. 82).

- Soient A, B, C trois points alignés de sorte que B soit entre A et C ; si $a = AB$, $b = BC$ et $c = AC$, alors $c = a + b$.

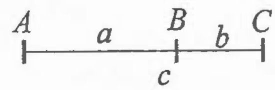

Figure 3.1: Somme segmentaire

- Soit un angle droit d'origine O ; posons sur une des demi-droites, à partir de O , un segment-unité d'extrémité notée 1 et un segment d'extrémité b ; de même sur l'autre demi-droite, posons à partir de O un segment d'extrémité a. L'extrémité ab est définie sur la deuxième demi-droite comme l'intersection avec « la » droite passant par b parallèle à la droite passant par les extrémités 1 et a.

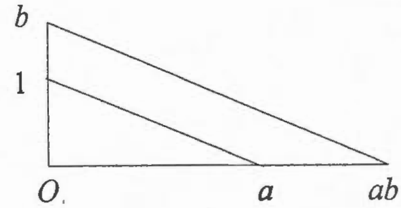

Figure 3.2: Produit segmentaire

On constate que la somme segmentaire reprend la représentation géométrique des anciens Babyloniens, tandis que le produit segmentaire reprend celle de Descartes. On note aussi que cette définition du produit requiert l'axiome d'Euclide (axiome IV de l'appendice A).

Dans sa réorganisation axiomatique de la géométrie euclidienne, Hilbert s'attachera à à mettre en relief les limites théoriques engendrées par une axiomatique où est absent le postulat d'Euclide (et ses équivalents). Commençons par rappeler les définitions communes aux géométries construites par Legendre et Hilbert.

Legendre définit comme suit l'angle droit:

> Définition XV
>
> Lorsque la ligne droite *AB* rencontre une autre droite *CD*, de telle sorte que les angles adjacents *BAC* et *BAD* soient égaux entre eux, la ligne *AB* est dite *perpendiculaire* sur *CD*, et les angles égaux *BAC* et *BAD* sont appelés *droits*.
>
> Il sera démontré que par un point *A* pris sur une droite *CD* on peut

toujours élever une perpendiculaire sur cette droite, et que tous les angles droits sont égaux entre eux.

Voici, dès la première proposition et son corollaire, la preuve de l'existence de la perpendiculaire et de l'égalité des angles droits qu'en donne Legendre.

Proposition première.

Théorème. Par un point pris sur une droite on peut tirer une perpendiculaire sur cette droite, et on n'en peut élever qu'une.

En effet, supposons qu'une droite AM, d'abord couchée sur AC, tourne autour du point A: elle formera deux angles adjacents MAC et MAB, dont l'un, MAC, d'abord très petit, ira toujours en croissant, et dont l'autre, MAB, d'abord plus grand que MAC, ira constamment en décroissant jusqu'à zéro.

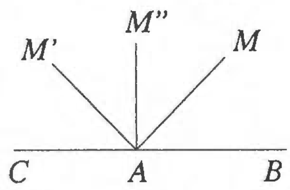

Figure 3.3: Existence de l'angle droit

L'angle MAC, d'abord plus petit que MAB, deviendra donc plus grand que cet angle; par conséquent, il y aura une position AM' de la droite mobile où ces deux angles seront égaux, et il est évident qu'il n'y en aura qu'une seule.

Corollaire . Tous les angles droits sont égaux.

Soient DC perpendiculaire sur AB, et HG perpendiculaire sur EF: je dis que l'angle DCB est égal à HGF. En effet, si l'on porte la droite EF sur AB, de manière que le point G tombe en C, GH prendra la direction de CD; autrement on pourrait, par un point pris sur une droite, élever deux perpendiculaires sur cette droite.

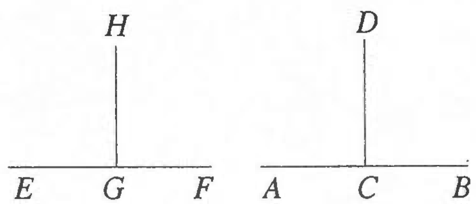

Figure 3.4: Unicité de l'angle droit

Comme le remarque Hilbert dans une note au théorème 21 des éditions 3 à 8 de ses *Fondements* (p. 38), portant sur l'égalité de tous les angles droits, la preuve de la proposition I de Legendre procède par continuité de la rotation: « Legendre pose que les angles sont un système de grandeurs variant continûment. » Plus précisément, Legendre présume que la rotation d'une demi-droite engendre des angles dont la mesure parcourt toutes les valeurs d'un intervalle continu, d'où la nécessité que les deux angles MAC et MAB de la proposition I se rencontrent en une valeur égale. De plus, la preuve du corollaire présume l'unicité du report d'une figure dans le plan de sorte à en faire coïncider certains de ses éléments.

Hilbert utilise aussi ce procédé de report, mais contrairement à Legendre, ce report est défini explicitement comme conséquence de l'axiome III.1, posant la possibilité de construire des segments congruents. Quant à l'unicité du report d'un segment sur une droite à partir d'un point et dans un sens donné, elle sera démontrée (p. 22-23) comme conséquence de l'axiome III.4, qui pose l'unicité du report d'angle, et de l'axiome III.5 portant sur la congruence des triangles ayant un angle congruent portant des segments homologues congruents.

Hilbert (1899) définit l'angle droit à l'aide de l'angle supplémentaire, tout comme le faisaient Euclide et Legendre:

> Deux angles sont dits *supplémentaires* s'ils ont même sommet, un côté commun et si les côtés distincts sont portés par une seule droite. [...] Un angle congruent à un de ses suppléments est un *angle droit.* (p. 24)

La preuve qu'existent des angles qui sont droits (p. 26) est une conséquence de l'axiome III.5, du théorème 12 (premier cas de congruence des triangles: côté-angle-côté) et du théorème 14 (congruence des angles supplémentaires à deux angles congruents). La proposition selon laquelle tous les angles droits sont égaux entre eux est amenée par le théorème 21; cette preuve, dont l'idée se trouverait chez Proclus, (note p. 31) est faite par l'absurde et utilise la transitivité de la congruence des angles.

Legendre et Hilbert définissent la notion de droites parallèles de la même manière que Euclide. En effet, chez Legendre, on a la définition XVI:

> Deux lignes sont dites parallèles lorsque, étant situées dans le même plan, elles ne peuvent se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge l'une de l'autre.

Tandis que chez Hilbert, on a:

> Deux droites coplanaires qui ne se coupent pas sont dites parallèles. (p. 39)

L'existence d'une droite parallèle à une droite, passant par un point hors de cette droite, est démontrée différemment par Legendre et Hilbert.

Hilbert procède ainsi (p. 39): dans un même plan, par un point A hors d'une droite *a* on mène une droite *c* qui intersecte *a* en B et par A on mène une droite *b* de sorte que les angles correspondants de *c* avec *a* et *b* soient congruents (ce qui est possible par l'axiome III.4). Par le théorème 22, on sait que chaque angle extérieur d'un triangle est supérieur à chacun des deux angles non adjacents; si la droite *b* intersectait la droite *a* en un point C , ceci contredirait le théorème 22 (car alors on aurait ∠B=∠A). La droite *b* est donc parallèle à la droite *a* .

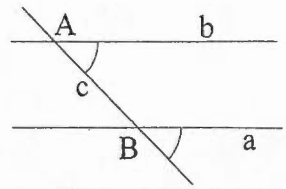

Figure 3.5: Existence d'une droite parallèle

Legendre commence par démontrer à la proposition XV que d'un point situé hors d'une droite on peut mener une unique perpendiculaire à cette droite. L'existence d'une telle perpendiculaire est semblable à la preuve par Hilbert de l'existence des angles droits. Quant à l'unicité de cette perpendiculaire, Legendre la déduit du premier cas de congruence des triangles et de l'unicité de la droite joignant deux points distincts. Ensuite, à la proposition XXI, il en conclut que deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles (sinon, de leur point d'intersection on pourrait abaisser deux droites perpendiculaires, en contradiction avec la proposition XV). Ce qui lui permet de démontrer, à la proposition XXII qui suit, que par un point donné A on peut mener une parallèle à une droite donnée .

Proposition XXII.

Théorème. *Par un point on peut mener une parallèle à une droite, et on n'en peut mener qu'une seule.*
Du point A abaissez AB perpendiculaire sur BC, et au même point menez AD perpendiculaire sur AB, les deux droites AD et BC, étant toutes deux perpendiculaires sur AB, seront parallèles.
On admettra en second lieu, comme une proposition évidente, que par un point on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite.

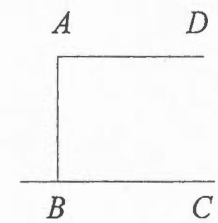

Figure 3.6: 'La' parallèle de Legendre

Ainsi, l'affirmation de Legendre, selon laquelle par un point hors d'une droite on ne peut mener qu'une seule parallèle à celle-ci, n'est appuyée que par 'l'évidence'. Au contraire, chez Hilbert, cette affirmation apparaît sous la forme d'un axiome.

> Axiome d'Euclide
> Soit une droite a et un point A extérieur à a ; dans le plan déterminé par a et A , il existe au plus une droite qui passe par A et qui ne coupe pas a .

L'un des buts de l'analyse des fondements de la géométrie entreprise par Hilbert est d'observer quels sont les principaux théorèmes de la géométrie euclidienne qui peuvent être démontrés sans cet axiome d'Euclide. À l'aide des axiomes I à V.2 sauf l'axiome d'Euclide, Hilbert démontre les deux théorèmes suivants (p. 59-61), que la tradition a nommés théorèmes de Legendre.

> Premier théorème de Legendre. (thm. 35 chez Hilbert)
> La somme des angles d'un triangle est égale ou inférieure à deux droits.
>
> Deuxième théorème de Legendre. (thm. 39)
> Si dans un triangle quelconque la somme des angles est égale à deux droits, la somme des angles de tout triangle est égale à deux droits.

Comme on le sait, si on ajoute l'axiome d'Euclide, la somme des angles est égale à deux droits (Legendre, 1794, prop. XXIX; Hilbert, 1899, p. 176). Voici les grandes lignes de la preuve par Hilbert du premier théorème de Legendre.

Premier théorème de Legendre. (thm. 35 chez Hilbert)

La somme des angles d'un triangle est égale ou inférieure à deux droits.

Soit un triangle ΔABC , avec les angles $\sphericalangle A=\alpha$, $\sphericalangle B=\beta$, $\sphericalangle C=\gamma$ où $\beta \leq \gamma$; on sait qu'existe le point-milieu D du segment BC. On prolonge AD d'un segment DE qui lui est congruent. Par le théorème portant sur le premier cas de congruence des triangles (côté-angle-côté), on a donc $\Delta ADC \equiv \Delta EDB$, d'où $\sphericalangle CBE=\gamma$ et $\sphericalangle BEA=\sphericalangle CAE$.

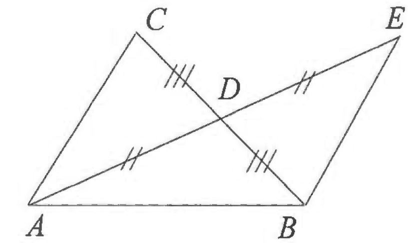

Figure 3.7: Somme des angles d'un triangle

Soit $\sphericalangle EAB=\alpha'$, $\sphericalangle ABE=\beta'$ et $\sphericalangle BEA=\gamma'$. Alors on a $\alpha'+\gamma'=\alpha$ et $\beta+\gamma=\beta'$.

Ainsi $\alpha'+\beta'+\gamma'=\alpha+\beta+\gamma$, donc la somme des angles du triangle ΔABC est préservée dans le triangle ΔABE . Puisque par construction $\beta \leq \gamma$, alors[61] $m(AC) \leq m(AB)$, donc $m(BE) \leq m(AB)$, d'où il s'ensuit que $\alpha' \leq \gamma'$, donc $\alpha' \leq \alpha/2$.

En appliquant cette procédure r fois, où r est un nombre naturel quelconque, on peut donc obtenir un triangle dont la somme des angles est la même que celle du triangle ΔABC et dont la mesure de l'un des angles est inférieure ou égale à $\alpha/2^r$.

Supposons que la somme des angles du ΔABC est supérieure à deux droits, c.-à-d. $\alpha+\beta+\gamma=2\rho+\epsilon$, où ρ est la mesure de l'angle droit et ϵ la mesure d'un certain angle. Par une conséquence directe (thm. 34) de l'axiome d'Archimède, il existerait alors un nombre naturel r tel que $\alpha/2^r < \epsilon$. Soit donc le triangle d'angles α^*, β^*, γ^* obtenue par la procédure précédente où $\alpha^* \leq \alpha/2^r$; on aurait alors $\beta^*+\gamma^* > 2\rho$.

Soit δ le supplément de β^*, c.-à-d. $\beta^*+\delta=2\rho$, donc $\delta < \gamma^*$; or δ serait alors un angle extérieur à ce triangle et sa mesure inférieure à l'angle non adjacent γ^* : ce qui

[61] Par théorème 23: dans tout triangle, au plus grand angle est opposé le plus grand côté.

contredit un théorème antérieur[62]. Contradiction qui démontre que la somme des angles d'un triangle est égale ou inférieure à deux droits.

Ce théorème a une conséquence directe sur le problème suivant de Saccheri: le quadrilatère dit de Saccheri est celui dont l'un des côtés (la base) supporte à ses extrémités deux segments congruents faisant un angle droit avec la base. Saccheri essaya en vain de démontrer sans le postulat d'Euclide que ce ce quadrilatère se doit d'être un rectangle, c.-à-d. que les deux autres angles de ce quadrilatère sont droits. Tout ce qu'il parvint alors à démontrer, c'est que ces deux angles sont congruents et qu'ils sont aigus ou droits. En voici la preuve, inspirée de celle de Hilbert (thm. 36).

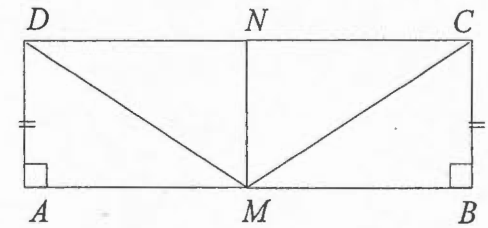

Figure 3.8: Quadrilatère de Saccheri

Soit A et B des angles droits et soit les segments congruents AD et BC. Il est possible d'élever du point-milieu M de AB une perpendiculaire qui coupera le segment CD en un point N. Par le premier cas (côté-angle-côté) de congruence des triangles, on a $\Delta AMD \equiv \Delta BMC$. Il s'ensuit que les angles $\sphericalangle DMN$ et $\sphericalangle CMN$ sont congruents, d'où la congruence $\Delta DMN \equiv \Delta CMN$. Les angles $\sphericalangle MDN$ et $\sphericalangle MCN$ sont donc congruents. De plus, N est le point-milieu du segment DC et les angles $\sphericalangle DNM$ et $\sphericalangle CNM$ étant congruents, ils sont droits. Puisque la somme des angles du quadrilatère $AMND$ est égale à la somme des angles des triangles ΔAMD et ΔDMN, il s'ensuit par le premier théorème de Legendre[63] que l'angle $\sphericalangle ADN$ est aigu ou droit.

Après deux millénaires d'essais infructueux à tenter de démontrer le cinquième postulat d'Euclide à partir de ses autres postulats géométriques, la preuve que ceci est impossible fut amenée par la construction de modèles géométriques vérifiant tous ces postulats, sauf le cinquième.

---

62 Théorème 22: chaque angle extérieur d'un triangle est supérieur à chacun des deux angles non adjacents.

63 « La somme des angles d'un triangle est égale ou inférieure à deux droits. »

3.2 La géométrie hyperbolique

L'essence des mathématiques est leur liberté.
Cantor (*in* Hilbert, 1899, p. 264]

Au XIX[e] siècle, les mathématiciens Nikolaï Iavnovitch Lobatchevski (1739–1856) , János Bolai (1802–1860), F. A. Taurinus (1794–1874) et Bernhard Riemann (1826–1866) ont inventé de nouvelles géométries qui, "tout aussi rigoureuses", se sont non seulement peu à peu imposées comme des modèles possibles, mais se sont en fait révélées fort utiles aux sciences physiques. Plus particulièrement, la géométrie de Riemann fut utilisée par Einstein pour la théorie de la Relativité.

> [...] par la théorie des équations (de toutes sortes), la géométrie est intimement liée aux problèmes les plus profonds qui se posent dans la mathématique et la physique du XX[e] siècle. Pour cette raison, de nouvelles géométries se sont développées tous azimuts au cours du siècle. [...] La géométrie permet de construire des objets suffisamment riches pour que ces équations [...] deviennent simples! (Lalonde, 2000, p. 148 et 150).

Mais cette émancipation de la géométrie ne se fit pas sans heurts; plusieurs mathématiciens préférèrent rejeter d'emblée l'existence d'une géométrie non euclidienne. Citons ce compte-rendu non signé que Michael V. Ostrogradsky (1801 à 1861), qui fut considéré par l'historiographie soviétique comme l'un des plus grands mathématiciens du XIX[e], a fait publier en 1834 dans le journal *Le Fils de la Patrie,* sous la plume du journaliste Bouratchek:

> Géométrie imaginaire? Pourquoi en effet ne pas s'imaginer que le noir est blanc, le carré rond et la somme des angles du triangle moindre que deux droits? On se demande pourquoi on écrit et surtout on publie de telles fantasmagories. Le vrai but de M. Lobatchevski a été certainement de jouer une farce aux mathématiciens. Et pourquoi alors le titre *Les fondements de la géométrie*, et non pas *La satire de la géométrie* ou *La caricature de la géométrie* ?
>
> (Ostrogradsky; *in* Toth, 1983, p. 248).

Les attaques sont même venues de mathématiciens desquels on se serait attendu, selon notre perspective actuelle, à une meilleure anticipation du potentiel créateur alors libéré. Ainsi Augustin de Morgan, dont nous avons indiqué ci-dessus l'apport dans l'invention de nouvelles algèbres abstraites, considérait la géométrie euclidienne comme une orthodoxie et « les hérétiques de cette orthodoxie comme se situant à l'extrême de toute hérésie » (Toth, 1983, p. 245).

Même Gottlob Frege, considéré par plusieurs comme le fondateur de la logique moderne et grand novateur dans le domaine des fondements des mathématiques, écrira au début du XX^{e} siècle:

> Oserait-on qualifier d'astrologie les *Éléments* d'Euclide, cette œuvre jouissant d'une autorité incontestable depuis plus de deux mille ans? Mais, si on ne l'ose pas, alors c'est la géométrie non euclidienne qui doit être classée parmi les pseudo-sciences (astrologie, alchimie). (Frege; *in* Toth, 1983, p. 251)

Les 16 axiomes présentés à l'appendice B permettent de démontrer, avec les définitions qui les accompagnent, les *principaux théorèmes de la géométrie neutre* (*absolute geometry*), dont voici quelques-uns ci-dessous. La numérotation réfère ici à la monographie *Foundations of Euclidian and Non-Euclidian Geometry*, de Ellery G. Golos.

• Concernant les triangles, les principaux théorèmes démontrés sont les suivants.

> Les quatre cas de congruence: le cas côté-angle-côté (thm. 61), le cas côté-côté-côté (thm. 73), le cas angle-côté-angle (thm. 74) et le cas côté-angle-angle (thm 80).
> Un triangle possède deux côtés congruents si et seulement si les angles opposés à ces deux côtés sont congruents (thms. 70, 71).
> L'inégalité du triangle (thm. 103).
> Tout angle intérieur d'un triangle est inférieur à chacun des deux angles extérieurs opposés (thm. 79).
> Dans tout triangle, il existe au moins deux angles intérieurs aigus (thm. 93).
> Dans tout triangle, la somme des mesures de toute paire de ses angles intérieurs est inférieure à deux droits (thm. 107).

- Concernant les non sécantes et les perpendiculaires à une ligne (voir règle de langage 1 de l'appendice B), les principaux théorèmes démontrés sont les suivants.

> Par tout point hors d'une ligne il passe au moins une ligne non sécante à celle-ci (thm. 75).
> Si une transversale à deux lignes comporte des angles alternes internes congruents ou des angles correspondants congruents ou des angles internes supplémentaires, alors ces lignes sont non sécantes (thms. 76, 77, 78).
> Par un point hors d'une ligne passe exactement une perpendiculaire à cette ligne (thms. 93, 94).
> Par un point d'une ligne passe exactement une perpendiculaire à cette ligne (thms. 95, 96).
> Le plus petit segment joignant un point hors d'une ligne et un point de cette ligne est la perpendiculaire abaissée de ce point sur cette ligne (thm. 99).

En opposition au postulat d'Euclide, le postulat des parallèles hyperboliques (axiome 17 et thm. 114) pose l'existence de *deux* lignes distinctes passant par un point *P* hors d'une ligne *m* et parallèles à celle-ci. Par définition, ces parallèles sont non sécantes et toute ligne passant par *P* entre ces parallèles et la ligne *m* intersecte la ligne *m*. On en déduit ce qui suit.

> Les angles formés par la perpendiculaire abaissée de ce point *P* sur la ligne *m* et l'intérieur de ces parallèles sont congruents et aigus (thms. 110, 112); ainsi, cette perpendiculaire est la bissectrice de l'angle intérieur entre ces parallèles (thm. 111).
> De plus, ces parallèles forment, du côté de *m*, des asymptotes à *m* en ce que la mesure de la perpendiculaire à *m* abaissée d'un point *A* situé sur l'une quelconque de ces parallèles décroît lorsque *A* s'éloigne de *P* du côté intérieur à ces parallèles et devient inférieure à tout segment donné (thms. 141, 142).
> Les angles correspondants formés par une transversale à deux lignes quelconques qui sont parallèles ne sont pas congruents, de même que leurs angles alternes internes (thm. 117).
> Deux lignes non sécantes non parallèles ont exactement une perpendiculaire commune (thms. 134, 143).
> À l'inverse des lignes parallèles, si *m* et *n* sont deux lignes non sécantes non parallèles et que *P* et *Q* sont leurs points d'intersection respectifs avec leur perpendiculaire commune, alors la mesure de la perpendiculaire abaissée d'un point *A* de *m* sur *n* croît lorsque *A* s'éloigne de *P*. De plus, cette mesure peut devenir plus grande que celle de tout segment donné. (thm. 144).

Autrement dit, deux lignes parallèles entre elles convergent (de leur côté intérieur) tandis que deux lignes non sécantes non parallèles entre elles divergent.
Finalement, on démontre que la somme des mesures des trois angles intérieurs de tout triangle est inférieure à deux droits (thm. 146).

Face à ces nouveaux résultats qui vont à l'encontre de maints énoncés de la tradition euclidienne, il est légitime de se demander si l'axiomatique de la géométrie hyperbolique est cohérente (non contradictoire). Le modèle présenté par le mathématicien français Henri Poincaré (1854 à 1912) offre une interprétation possible des notions propres à la géométrie hyperbolique.

On peut représenter le « plan hyperbolique » sous la forme d'une demi-sphère euclidienne où le cercle ω de la base représente l'*absolu* ou l'*infini* du plan; les « droites hyperboliques » sont alors les demi-cercles c issus de l'intersection de la demi-sphère avec des plans perpendiculaires au cercle ω. L'angle entre les droites hyperboliques est alors l'angle euclidien entre ces demi-cercles. Deux points distincts A, B de la demi-sphère déterminent alors un seule droite hyperbolique, notée AB, qui intersecte l'absolu en deux points α et β : ceux-ci représentent les *extrémités à l'infini* de la droite (Gonseth, 1926, p. 80-81).

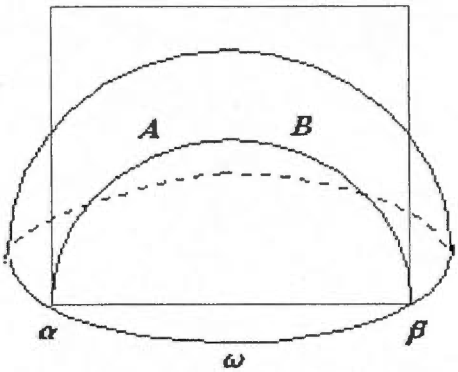

Figure 3.9: Demi-sphère de Poincaré

La distance orientée $d(AB)$ sera alors définie par $d(AB)=K\cdot\ln\left(\dfrac{\overline{\alpha B}\cdot\overline{A\beta}}{\overline{\alpha A}\cdot\overline{B\beta}}\right)$, où K est une constante arbitraire et $\overline{XY}$ désigne la longueur euclidienne de l'arc XY. On voit que si les deux points A et B sont confondus, alors la distance $d(AB)$ est nulle. Et si l'un des points A ou B s'approche de α ou β, alors le quotient tend vers 0 ou vers $+\infty$, donc le logarithme vers $\mp\infty$. L'absolu est donc à une distance infinie de tout point du plan hyperbolique (Gonseth, 1926, p.80 ; Katz,1993, p. 710-713).

De plus, si le point C est situé entre A et B sur une même droite hyperbolique, alors on voit aisément que la propriété formelle suivante des distances découle des propriétés des logarithmes:

$$d(AC)+d(CB)=K\cdot\ln\left(\frac{\overline{\alpha C}\cdot\overline{A\beta}}{\overline{\alpha A}\cdot\overline{C\beta}}\cdot\frac{\overline{\alpha B}\cdot\overline{C\beta}}{\overline{\alpha C}\cdot\overline{B\beta}}\right)=K\cdot\ln\left(\frac{\overline{\alpha B}\cdot\overline{A\beta}}{\overline{\alpha A}\cdot\overline{B\beta}}\right)=d(AB)\,.$$

Deux droites hyperboliques sont dites *parallèles* lorsqu'elles ont une extrémité commune (un point de ω). Par tout point P hors d'une droite hyperbolique AB passe alors exactement deux parallèles à cette droite (l'une passant par P et α, l'autre par P et β). Toute droite passant par P et située entre les parallèles et la droite AB est sécante à cette droite. Les autres droites passant par P sont non sécantes et non parallèles à AB. Ce modèle offre donc une représentation de l'axiome propre à la géométrie hyperbolique (axiome 17).

Le fait que ce modèle du plan hyperbolique soit inclus dans la géométrie euclidienne prouve que les axiomes de la géométrie hyperbolique sont non contradictoires dans la mesure où ceux de la géométrie euclidienne ne le sont pas (Golos, 1968, p. 213). Mais cela démontre aussi que la géométrie euclidienne est suffisamment riche pour héberger une géométrie non euclidienne.

Face à l'examen minutieux, mené par Hilbert et ses successeurs, des liens logiques qu'engendrent les divers regroupements axiomatiques de la géométrie euclidienne et face aux nouvelles géométries non euclidiennes qui la dé-construisent encore davantage, certains seraient alors tentés de maintenir que l'axiomatique euclidienne est celle qui demeure tout de même la plus près de notre intuition du 'réel' physique. Nous dresserons, dans la prochaine section, une esquisse critique de cette problématique.

3.3 Axiomatique et intuition du « réel » physique

Au cours du XIX^e siècle, on a découvert ou inventé les vibrations optiques (Young, Fresnel, 1817), l'électromagnétisme (Oersted, 1820), l'énoncé des principes de géologie (Lyell, 1830), l'induction électromagnétique (Faraday, 1831), le premier télégraphe (1836), l'origine des espèces (Darwin, 1859), la spectroscopie chimique (Bunsen, Kirchhoff, 1859), les grottes de Cro-Magnon (1868), le tableau périodique des éléments chimiques (Mendeleïev, 1869), les relations entre l'électricité et le magnétisme (Maxwell, 1873), le téléphone (Bell, 1873), les ondes hertziennes (Hertz, 1887), la microbiologie (Pasteur, 1888), les rayons X (Roentgen, 1895), la radioactivité (Becquerel, 1896), l'électron (J. J. Thomson, 1897), le radium (Curie, 1898), la théorie quantique (Planck, 1901), la Relativité (Einstein, 1905) ...

Bref, notre perception de la Nature a été bouleversée. Alors que Legendre introduit la géométrie euclidienne en se référant au « monde physique », la physique actuelle est plutôt une physique mathématique, le scientifique n'est plus en position de lire « le Grand Livre ouvert de la Nature »:

> Avant Einstein, le rôle *conceptuel* des mathématiques n'était pas aussi crucial: on pouvait généralement bien comprendre toutes les manifestations d'une théorie en ne raisonnant qu'à partir des concepts physiques. Les mathématiques ne servaient alors qu'à raffiner la compréhension, qu'à quantifier les résultats du raisonnement, qu'à apporter de la précision. [...] Mais avec Einstein, un nouveau saut dans la mathématisation est accompli: certaines conséquences *conceptuelles* de la relativité générale sont impossibles à déduire autrement qu'en résolvant les équations mathématiques (la structure interne des trous noirs en rotation, par exemple, avec ses univers multiples). [...] Pourquoi? Parce que notre vocabulaire et notre intuition, qui se sont développés à partir de l'enseignement de nos sens, ne sont pas nécessairement adaptés pour appréhender des domaines où nos sens n'ont pas accès, tel l'infiniment petit et l'infiniment grand. Or, c'est lorsque les mathématiques prennent le dessus sur l'intuition courante que le terrain devient propice aux prédictions allant à l'encontre du sens commun. (Durand, 2000, p. 36)

Pour Legendre et la tradition qui le précède, les axiomes de la géométrie euclidienne étaient pensés comme des « propositions évidentes par elles-mêmes »; ceux-ci semblaient traduire l'expérience *immédiate* de la Nature. Or, comme nous l'avons vu aux sections précédentes, tandis que le premier théorème 'démontré' par Legendre dans ses *Éléments* porte sur l'existence de l'angle droit, la preuve de celle-ci est un corollaire du théorème 14 des *Fondements* de Hilbert et ne se retrouve qu'au théorème 93 du développement théorique présenté par Golos. Ainsi doit-on désormais considérer que notre intuition repose, nécessairement, sur un modèle axiomatique incontournable:

> Avec le nouvel esprit scientifique, c'est tout le problème de l'intuition qui se trouve bouleversé. En effet, cette intuition ne saurait désormais être primitive, elle est précédée par une étude discursive qui réalise une sorte de dualité fondamentale. Toutes les notions de base peuvent en quelque manière être dédoublées; elles peuvent être bordées par des notions complémentaires. Désormais toute intuition procédera d'un choix; il y aura donc une sorte d'ambiguïté essentielle à la base de la description scientifique et le caractère immédiat de l'évidence cartésienne sera troublé. (Bachelard, 1934, p. 146)

L'interprétation de l'information délivrée par le dispositif instrumental propre à l'observation scientifique dépend des modèles théoriques en jeu dans la conception même de ces instruments; dès lors, le réel nous apparaît construit:

> La science, cessant d'être le spectateur de la nature, se reconnaît elle-même comme partie des actions réciproques entre la nature et l'homme. La méthode scientifique, qui choisit, explique et ordonne, admet les limites qui lui sont imposées par le fait que l'emploi de la méthode transforme son objet, et que, par conséquent, la méthode ne peut plus se séparer de son objet. (Heisenberg, 1962, p. 34)

> Les qualités du réel scientifique sont ainsi, au premier chef, des fonctions de nos méthodes rationnelles. Pour constituer un fait scientifique défini, il faut mettre en œuvre une technique cohérente. (Bachelard, 1934, p. 176)

CONCLUSION

> Il faut se rappeler quelle a été depuis cent ans l'évolution de la pensée mathématique, non seulement en géométrie, mais en arithmétique et en analyse. La notion de nombre s'est éclaircie et précisée; en même temps, elle a reçu des généralisations diverses. La plus précieuse pour les analystes est celle qui résulte de l'introduction des « imaginaires », dont les mathématiciens modernes ne pourraient plus se passer; mais on ne s'est pas arrêté là et on a fait entrer dans la science d'autres généralisations du nombre ou, comme on dit, d'autres catégories de nombres complexes.
>
> Les opérations de l'arithmétique ont été, de leur côté, soumises à la critique, et les quaternions d'Hamilton nous ont montré un exemple d'une opération qui présente une analogie presque parfaite avec la multiplication, que l'on peut appeler du même nom et qui, pourtant, n'est pas commutative, c'est-à-dire dont le produit change quand on intervertit l'ordre des facteurs. C'était là en arithmétique une révolution toute pareille à celle qu'avait faite Lobatchevsky en géométrie.
>
> Notre façon de concevoir l'infini s'est également modifiée. M. G. Cantor nous a appris à distinguer les degrés dans l'infini lui-même (qui n'ont d'ailleurs rien de commun avec les infiniment petits des différents ordres créés par Leibniz en vue du calcul infinitésimal ordinaire). La notion de continu, longtemps regardée comme primitive, a été analysée et réduite à ses éléments.
>
> Mentionnerai-je également les travaux des Italiens [Peano et Padoa], qui se sont efforcés de créer un symbolisme logique universel et de réduire le raisonnement mathématique à des règles purement mécaniques?
>
> Il faut se rappeler tout cela si l'on veut comprendre comment des conceptions, qui auraient fait bondir Lobatchevsky lui-même, tout révolutionnaire qu'il fût, nous semblent aujourd'hui presque naturelles et ont pu être proposées par M. Hilbert avec une parfaite tranquillité.
>
> (Poincaré, 1902, p. 162-163)

Nous avons vu que les nombres complexes sont apparus au XVI^{e} siècle, en tant que « procédés de calcul » plutôt que « nombres », dans le contexte d'une théorie des équations naissante; ils étaient alors utilisés par Cardano et Bombelli pour trouver les solutions réelles des équations cubiques, bien avant qu'on ne découvre une façon générale de les calculer. Le XVII^e siècle apportera, avec Viète et Descartes, une représentation trigonométrique et géométrique de ces mêmes équations cubiques. De plus, la théorie des équations s'enrichira d'énoncés algébriques fondamentaux concernant les racines des polynômes, Girard jugeant même non seulement utile mais nécessaire de considérer les racines complexes. Grâce au développement du calcul différentiel et intégral, le XVIII^e siècle apportera, avec Euler notamment, une façon de calculer les nombres complexes et, en particulier, leurs racines cubiques. De plus, la présence des nombres complexes permettra de tisser de nouveaux liens, féconds, entre différentes fonctions transcendantes; ainsi, le nombre complexe ne se révélera-t-il plus seulement utile à la résolution d'équations mais nécessaire au développement même de la théorie mathématique.

Toutefois, le 'nombre' complexe est alors encore perçu comme « quantité imaginaire » ou « impossible »; c'est que, depuis l'Antiquité, l'existence des nombres a toujours été fondée sur leur représentation géométrique. En particulier, les seuls 'nombres' irrationnels à être acceptés, jusqu'au XVII^e siècle, étaient ceux correspondant aux « grandeurs incommensurables » obtenues par la géométrie; Descartes y verra d'ailleurs une façon de préserver une « continuité » entre les grandeurs.

Au XIX^e siècle, Argand et Wessel apporteront enfin une représentation géométrique du nombre complexe; celle-ci donnera lieu au plan complexe de Gauss et aux quantités géométriques de Cauchy. L'existence du nombre complexe, comme tel, sera alors peu à peu reconnue par l'ensemble des mathématiciens.

Mais ce réconfort d'une assise géométrique offrant une légitimité existentielle aux objets mathématiques sera bousculé, au XIX^e siècle, par l'invention des géométries non euclidiennes. Dès lors, l'intuition géométrique ne se limitera plus à l'axiomatique euclidienne; les axiomes, en particulier celui des parallèles, ne seront plus pensés comme procédant d'une évidence intuitive première. Nous retrouverons ainsi dans l'articulation axiomatique de la géométrie autant de modèles possibles que leur cohérence le permet. Toutefois, l'actualité de la géométrie euclidienne sera maintenue car sa richesse permet de représenter d'autres géométries, en renommant ses propres objets selon une nouvelle terminologie, dédoublée; ainsi, l'axiomatique de la géométrie hyperbolique peut-elle être représentée, comme nous l'avons vu, par le modèle de la demi-sphère de Poincaré, elle-même située dans une géométrie euclidienne. De même en est-il de la représentation des parallèles et des non sécantes (de la géométrie hyperbolique) à l'aide d'asymptotes dans le plan cartésien, celui-ci reprenant à son compte le postulat des parallèles sous la forme algébrique de la pente d'une droite et sous la forme trigonométrique de son angle d'inclinaison.

Le regard logique que Hilbert porte sur la géométrie consiste, en particulier, à analyser l'indépendance des axiomes et à explorer les conséquences propres à certains de leurs regroupements. Or cette reconstruction axiomatique, à partir de laquelle la déduction peut engendrer les objets de la géométrie, ne va pas à l'encontre de l'intuition; il s'agit plutôt d'une rigueur logique veillant à ne pas introduire dans notre raisonnement des éléments non explicités — méthode que prônait d'ailleurs Descartes dans ses règles de l'esprit. En fait, Hilbert recourt fréquemment à la construction de figures géométriques pour représenter son raisonnement.

Ainsi, alors que l'algèbre s'ouvre à de nouvelles structures et que la géométrie est explorée selon diverses axiomatiques, la dialectique entre l'intuition et la logique demeure nécessaire au développement des mathématiques.

> Il nous faut une faculté qui nous fasse voir le but de loin, et, cette faculté, c'est l'intuition. Elle est nécessaire à l'explorateur pour choisir sa route, elle ne l'est pas moins à celui qui marche sur ses traces et qui veut savoir pourquoi il l'a choisie.
>
> Si vous assistez à une partie d'échecs, il ne vous suffira pas, pour comprendre la partie, de savoir les règles de la marche des pièces. [...] C'est pourtant ce que ferait le lecteur d'un livre de Mathématiques, s'il n'était que

> logicien. Comprendre la partie, c'est tout autre chose; c'est savoir pourquoi le joueur avance telle pièce plutôt que telle autre qu'il aurait pu faire mouvoir sans violer les règles du jeu. C'est apercevoir la raison intime qui fait de cette série de coups successifs une sorte de tout organisé. À plus forte raison, cette faculté est-elle nécessaire au joueur lui-même, c'est-à-dire à l'inventeur. [...]
>
> Ainsi, la logique et l'intuition ont chacune leur rôle nécessaire. Toutes deux sont indispensables. La logique qui peut seule donner la certitude est l'instrument de la démonstration: l'intuition est l'instrument de l'invention.
>
> (Poincaré, 1905, p. 36-37)

Alors qu'il est formateur, dans l'enseignement des mathématiques au collégial, d'exposer les étudiants à l'axiomatisation des structures algébriques de sorte à approfondir leur expérience de la démonstration et de la rigueur logique, il reste que la représentation géométrique, tout intuitive qu'elle soit, est non seulement utile mais nécessaire à leur formation intellectuelle.

> [...] en devenant rigoureuse, la Science mathématique prend un caractère artificiel qui frappera tout le monde; elle oublie ses origines historiques; on voit comment les questions peuvent se résoudre, on ne voit plus comment et pourquoi elles se posent.
>
> Cela nous montre que la logique ne suffit pas; que la Science de la démonstration n'est pas la Science tout entière et que l'intuition doit conserver son rôle comme complément, j'allais dire comme contrepoids ou comme contrepoison de la logique.
>
> J'ai déjà eu l'occasion d'insister sur la place que doit garder l'intuition dans l'enseignement des Sciences mathématiques. Sans elle, les jeunes esprits ne sauraient s'initier à l'intelligence des Mathématiques; ils n'apprendraient pas à les aimer et n'y verraient qu'une vaine logomachie; sans elle surtout, ils ne deviendraient jamais capables de les appliquer. (Poincaré, 1905, p. 35)

Ainsi, introduire l'enseignement des nombres complexes et de l'algèbre linéaire par le biais de la représentation géométrique ne revient pas à dénaturer ou rendre 'impures' les structures algébriques qui s'en dégageront; cette assise offrira plutôt à l'étudiant la possibilité de développer son intuition des mathématiques, de sentir leur nécessité et d'en soutenir les généralisations subséquentes.

APPENDICE A

LES AXIOMES DE HILBERT

La numérotation est celle, définitive, depuis la deuxième édition des *Fondements*.

Premier groupe: axiomes d'appartenance

I.1 Il existe une droite liée à deux points donnés A et B à laquelle appartiennent ces points.

I.2 Il n'existe pas plus d'une droite à laquelle appartiennent deux points [distincts].

I.3 Sur une droite, il y a au moins deux points; il existe au moins trois points non alignés.

I.4 Il existe un plan α lié à trois points non alignés A, B, C auquel appartiennent ces trois points A, B, C.
À tout plan appartient au moins un point.

I.5 Il n'existe pas plus d'un plan auquel appartiennent trois points non alignés A, B, C.

I.6 Si deux points A,B d'une droite a appartiennent à un plan α, tous les points de la droite appartiennent à ce plan α.

I.7 Si deux plans α et β ont un point A commun, ils ont encore au moins un autre [point] B [en commun].

I.8 Il existe au moins quatre points non coplanaires.

Deuxième groupe: axiomes d'ordre

Déf. Entre les points d'une droite, il existe une relation dans la description de laquelle figure le mot « **entre** ».

II.1 Si un point B est *entre* un point A et un point C, les points A, B, C appartiennent à une droite et B est aussi entre C et A.

II.2 Deux points A et C étant donnés, il existe au moins un point B appartenant à la droite AC et tel que C soit entre A et B.

II.3 De trois points d'une droite, il n'y en a pas plus d'un qui est entre les deux autres.

II.4 Soient A, B, C trois points non alignés et a une droite du plan ABC qui ne passe par aucun des points A, B, C ; si la droite a passe par l'un des points du segment AB , elle passe ou par un point du segment BC ou par un point du segment AC. (Note: les extrémités du segment ne sont pas des points du segment).

Troisième groupe: axiomes de congruence

Déf.: Entre les segments, il existe certaines relations exprimées par les mots « **congruent** » ou « **égal** ».

III.1 Soient A et B deux points d'une droite a et A' un point de cette droite ou d'une autre droite a' ; sur a', d'un côté donné de A', on peut trouver un point B' tel que le segment AB soit *congruent* (ou égal) au segment $A'B'$; nous écrivons cette relation $AB \equiv A'B'$.

(Cet axiome introduit la possibilité du *report* des segments dont l'univocité sera démontrée plus bas.)

III.2 Si un segment $A'B'$ et un segment $A''B''$ sont congruents à un même segment AB, le segment $A'B'$ est congruent au segment $A''B''$; en bref, si deux segments sont congruents à un troisième, ils sont congruents entre eux.

III.3 Soient AB et BC deux segments sans points communs portés par la droite a d'une part, $A'B'$ et $B'C'$ deux segments de la droite a' eux aussi sans points communs; si $AB \equiv A'B'$ et $BC \equiv B'C'$, alors $AC \equiv A'C'$.

Déf.: Entre les angles, il existe certaines relations désignées par les termes « **congruent** » ou « **égal** ».

III.4 Soient un angle $\angle(h,k)$ dans un plan α et une droite a' dans un plan α' ainsi qu'un côté donné de a' dans α'. Désignons par h' une demi-droite portée par a', issue du point O' de a' ; il existe une unique demi-droite k' issue de O' telle que l'angle $\angle(h,k)$ est congruent (ou égal) à l'angle $\angle(h',k')$ et dont l'intérieur est du côté donné de la droite a'.
En résumé, les angles sont congruents: $\angle(h,k) \equiv \angle\,(h',k')$.
Tout angle est congruent à lui-même; autrement dit,
$\angle(h,k) \equiv \angle\,(h,k)$ et $\angle(h,k) \equiv \angle\,(k,h)$.

III.5 Si dans deux triangles [non dégénérés] ABC et $A'B'C'$ les congruences suivantes sont satisfaites: $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle\, B'A'C'$,
alors la congruence $\angle ABC \equiv \angle\, A'B'C'$ l'est aussi.
Par changement de désignation, on a aussi la congruence $\angle ACB \equiv \angle\, A'C'B'$.

Déf.: Deux angles sont dits **supplémentaires** s'ils ont même sommet, un côté commun et si les côtés distincts sont portés par une seule droite. [...] Un angle congruent à un de ses suppléments est un **angle droit**.

Quatrième groupe: axiome des parallèles

Déf.: Deux droites coplanaires qui ne se coupent pas sont dites parallèles.

IV Axiome d'Euclide: Soient une droite a et un point A extérieur à a ; dans le plan déterminé par a et A , il existe au plus une droite qui passe par A et qui ne coupe pas a .

Cinquième groupe: axiome de continuité

V.1 Axiome de la mesure ou d'Archimède. Si AB et CD sont deux segments quelconques, il existe un nombre entier n tel que le report du segment CD répété n fois à partir de A sur la demi-droite déterminée par B conduit à un point situé au-delà de B.

V.2 Axiome de l'intégrité linéaire. L'ensemble des points d'une droite, soumis aux relations d'ordre et de congruence, n'est susceptible d'aucune extension dans laquelle sont valables les relations précédentes et les propriétés fondamentales d'ordre linéaire et de congruence déduites des axiomes I à III et de l'axiome V,1.

APPENDICE B

AXIOMES DE LA GÉOMÉTRIE NEUTRE ET DE LA GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE[64]

Règle de langage 1: « Point » et « ligne » sont des termes techniques indéfinis. Le langage universel des termes indéfinis sera le vocabulaire de la logique et des ensembles, ainsi que des nombres naturels, au besoin.

Axiome 0: Chaque **ligne** est un ensemble de points.

Axiome 1: Pour chaque paire de points distincts, il existe une unique ligne qui les contient.

Axiome 2: Chaque ligne contient au moins deux points distincts.

Axiome 3: Pour chaque ligne, il existe au moins un point qui ne lui appartient pas.

Axiome 4: Il existe au moins une ligne.

Déf. 2: Deux points ou plus appartenant à une même ligne sont dits **colinéaires**.

Axiome 5: $A*B*C$ si et seulement si $C*B*A$. (On dit alors que B est **entre** A et C).

Axiome 6: Si $A*B*C$, alors A,B,C sont distincts et colinéaires.

Axiome 7: Si A, B, C sont trois points distincts colinéaires, alors exactement un seul des trois cas suivants est vérifié: $A*B*C$, $B*C*A$, $C*A*B$.

Axiome 8: Si A, B, C, D sont quatre points distincts colinéaires et si $A*B*C$, alors exactement un seul des cas suivants est vérifié: $A*B*C*D$, $A*B*D*C$, $A*D*B*C$, $D*A*B*C$.

Axiome 9: Si A et B sont deux points distincts, alors

a) il existe un point C tel que $A*B*C$
b) il existe un point D tel que $A*D*B$
c) il existe un point E tel que $E*A*B$.

---

64 Selon l'axiomatique présentée par (Golos, 1968).

Déf. 6: Soient deux points distincts A, B; un **segment** A-B est l'ensemble des points X tels que $A*X*B$. (Il suit de l'axiome 6 qu'un segment A-B ne contient pas ses extrémités A,B.)

Axiome 10 (Pasch)
Si A, B, C sont trois points distincts et non colinéaires, m une ligne ne passant par aucun de ces trois points et si m contient un point du segment A-B, alors m contient aussi un point du segment A-C ou du segment B-C.

Déf. 4: Soient O et A deux points distincts d'une ligne m; on définit les **demi-lignes** S_1 et S_2 de m relatives à O comme suit: S_1 est l'ensemble des points X tels que $O*X*A$ ou $O*A*X$ et S_2 est l'ensemble des points X tels que $X*O*A$.

Axiome 11 (Unicité du report de segment)
Soient un segment A-B et un point C appartenant à une ligne m; alors, sur chacune des deux demi-lignes incluses dans m et d'extrémité C, il existe exactement un point D tel que $A\text{-}B \equiv C\text{-}D$.
(On dit alors que A-B et C-D sont des **segments congruents**.)

Axiome 12: La congruence $\equiv$ entre les segments est une relation d'équivalence (donc réflexive, symétrique et transitive).

Axiome 13 Addition des segments
Si $A*B*C$ et $D*E*F$ et $A\text{-}B \equiv D\text{-}E$ et $B\text{-}C \equiv E\text{-}F$, alors $A\text{-}C \equiv D\text{-}F$.

Notation: On désignera par $\overrightarrow{AB}$ la demi-ligne d'extrémité A et contenant le point B.

Déf. 16: Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires; la réunion de ces deux demi-lignes et du point A est dit former un **angle** CAB ou BAC (aussi noté $\angle CAB$ ou $\angle BAC$) de sommet A. (Remarquons que cette définition de l'angle exclut l'angle plat, ce qui permettra, pour chaque angle, de déterminer son intérieur, son extérieur et son sommet).

Déf. 9: Soit m une ligne quelconque et P un point n'appartenant pas à cette ligne. On définit les **demi-plans** S_1 et S_2 relatifs à m comme suit:
S_1 est l'ensemble des points contenant P et tous les points X tels que le segment P-X ne contient aucun point de m et S_2 est l'ensemble des points Y tels que le segment P-Y contient un point de m.

Axiome 14 (Unicité du report d'angle)
Soient un angle BAC et $\overrightarrow{DF}$ incluse dans une ligne m ; alors, dans chacun des deux demi-plans déterminés par m, il existe exactement une demi-ligne $\overrightarrow{DE}$ telle que $\angle BAC \equiv \angle EDF$.
$\angle BAC$ et $\angle EDF$ sont alors dits **angles congruents**.

Axiome 15: La congruence $\equiv$ entre les angles est une relation d'équivalence (c.-à-d. réflexive, symétrique et transitive).

Déf. 8: Soient trois points non colinéaires A, B, C; le **triangle** ABC (noté ΔABC) est la réunion de ces trois points et des segments $A\text{-}B$, $A\text{-}C$, $B\text{-}C$. L'angle $\angle BAC$ est alors noté $\angle A$. (Remarquons que cette définition exclut les triangles dégénérés).

Axiome 16: (d'où s'ensuit directement le 1[er] cas de congruence des triangles: thm. 61)
Soient ABC et DEF des triangles tels que $A\text{-}B \equiv D\text{-}E$, $A\text{-}C \equiv D\text{-}F$ et $\angle A \equiv \angle D$; alors $\angle B \equiv \angle E$ et $\angle C \equiv \angle F$.

Voilà ce qui termine l'axiomatique de la géométrie dite neutre (*absolute geometry*), celle-ci étant commune aux géométries euclidienne et hyperbolique.

Voici maintenant l'axiome qui, ajouté aux axiomes précédents de la géométrie neutre, forment une axiomatique de la géométrie hyperbolique.

Axiome 17: Postulat des parallèles hyperboliques
Soit P un point hors d'une ligne m ; alors il existe exactement deux demi-lignes $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{PS}$ telles que:

a) ces demi-lignes ne sont pas situées sur une même ligne
b) ces demi-lignes n'intersectent pas la ligne m
c) toute demi-ligne $\overrightarrow{PQ}$ intersecte m si et seulement si $\overrightarrow{PQ}$ est située entre $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{PS}$.

Chacune des demi-lignes $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{PS}$ est dite **parallèle** à m passant par P.

APPENDICE C

RECONSTRUCTION ALGÉBRIQUE DES QUATERNIONS

Voici le cheminement algébrique qui, selon Jean Dieudonné (1987, p. 140 à 142), aurait amené Hamilton à définir les quaternions comme nous les connaissons depuis.

On sait que si $z=(a,b)=(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, où $r\in\mathbb{R}^+$ et $\theta\in\mathbb{R}$, alors, en nommant $\bar{z}=(a,-b)$ le conjugué de z et le nombre positif $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=r$ son module, on a l'identité $|z_1 z_2|=|z_1||z_2|$, c.-à-d. $\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$.

Selon Dieudonné, il s'agissait tout d'abord d'étendre la définition de la multiplication des nombres complexes aux « triplets » $a+bi+cj$ et $x+yi+zj$, de sorte à retrouver l'identité selon laquelle le produit des modules des nombres complexes est égal au module de leur produit. Hamilton aurait donc cherché à déterminer les nombres A, B, C de sorte que

$$(a+bi+cj)(x+yi+zj)=A+Bi+Cj$$

et, si possible,

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=A^2+B^2+C^2.$$

Pour analyser ces contraintes, Hamilton aurait commencé ses réflexions en maintenant les propriétés algébriques que nous désignons, dans la terminologie actuelle, par la structure de corps. On voit que si $y=z=0$, il suffit alors de poser $A=ax, B=bx, C=cx$; ce qui entraîne, lorsque $x=1$, que le triplet $1+0i+0j$ est neutre pour cette multiplication.

Si $c=z=0$, alors il suffit de poser $A=ax-by,\ B=ay+bx,\ C=0$ comme dans le cas des nombres complexes, donc avec $i^2=-1$.

De même, si $b=y=0$, il suffit alors de poser $A=ax-cz,\ B=0,\ C=az+cx$, donc avec $j^2=-1$. Le produit de ces triplets (en maintenant valides les propriétés de corps) et le produit de leurs modules seraient donc

$$(a+bi+cj)(x+yi+zj)=(ax-by-cz)+(ay+bx)i+(az+cx)j+(bz+cy)ij \text{ et}$$

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax-by-cz)^2+(ay+bx)^2+(az+cx)^2+(bz-cy)^2.$$

Ainsi, en posant $ij=k$, le produit obtenu devient un « quadruplet » de la forme $A+Bi+Cj+Dk$. De plus, le dernier terme du produit, $(bz+cy)ij$, provient en fait de $bz\,ij+cyji$; ainsi, en posant plutôt $ji=-ij$, on aurait $D=bz-cy$. Les membres de droites obtenus seraient alors de la forme $A+Bi+Cj+Dk$ et $A^2+B^2+C^2+D^2$. Il faudrait donc définir cette multiplication non pas sur des triplets mais plutôt sur des quadruplets, munie d'une propriété de non-commutativité; on a déjà $i^2=-1,\ j^2=-1,\ ij=k,\ ji=-ij$, d'où par associativité et linéarité:

$$k^2=ijij=-ijji=-1,\ ki=iji=-iij=j,\ kj=ijj=-i,\ ik=iij=-j,\ jk=jij=-jji=i.$$

Selon cette reconstruction fictive imaginée par Jean Dieudonné, Hamilton en viendrait ainsi à définir la multiplication par

$$(a+bi+cj+dk)(x+yi+zj+tk)=A+Bi+Cj+Dk, \text{ où}$$

$$A=ax-by-cz-dt,\ B=ay+bx+ct-dz,\ C=az-bt+cx+dy,\ D=at+bz-cy+dx,$$

obtenant donc

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2)=A^2+B^2+C^2+D^2.$$

RÉFÉRENCES

Livres:

Argand, Jean-Robert. 1797. « Essai sur une manière de représenter les Quantités Imaginaires dans les constructions géométriques ». *Mémoires de l'Académie des Sciences du Danemark.* Nouv. tirage de la 2e éd. Préf. de M.J. Hoüel, 1874. Paris: Librairie Scientifique et technique Albert Blanchard.

Ayres, Frank Jr. 1979. *Trigonométrie.* New York: Série Schaum, McGraw-Hill.

Bachelard, Gaston. 1934. *Le nouvel esprit scientifique.* Nouvelle Édition Philosophique. Paris: Presses Universitaires de France, 1971.

———. 1938. *La formation de l'esprit scientifique.* 8e éd. Paris: J. Vrin , 1972.

Bombelli, Rafael. 1572. *L'Algebra..* (Les "Imaginaires", le "Second Degré" et quelques autres fragments). Trad. Gérard Hamon. I.R.E.M. De Rennes, 1996.

Bourbaki, N. 1970. *Théorie des* ensembles. Paris: Hermann.

Boyer, Carl B. 1968. *A History of Mathematics.* New York: John Wiley & Sons.

Brousseau, Guy. 1998. *Théorie des situations didactiques.* Paris: Éditions La Pensée Sauvage.

Colette, Jean-Paul. 1979. *Histoire des mathématiques.* Vol.2. Montréal: Renouveau Pédagogique.

Dahan-Dalmedico, Amy, et Jeanne Peiffer. 1986. *Une histoire des mathématiques: Routes et dédales.* Paris: Éditions du Seuil, Science.

Descartes, René. 1629. « Les règles pour la direction de l'esprit ». In *Oeuvres de Descartes*, tome onzième. Publ. par Victor Cousin, Paris : F.-G. Levrault, 1824-1826. Disponible à l'adresse ftp://ftp.bnf.fr/009/N0094272_PDF_213_344.pdf

———. 1637. *La Géométrie.* Nouv. éd. 1886. Paris: A. Hermann, Librairie Scientifique. Sceaux: Éditions Jacques Gabay, 1991. Disponible à l'adresse ftp://ftp.bnf.fr/002/N0029040_PDF_1_98.pdf

Dieudonné, Jean. 1960. *Éléments d'analyse*, t.1: *Fondements de l'analyse moderne.* Paris: Gauthier-Villars.

———. 1968. *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire.* 3e éd. Paris: Hermann.

———. 1987. *Pour l'honneur de l'esprit humain: Les mathématiques aujourd'hui.* Paris: Hachette.

Dodgson, Charles L. 1879. *Euclid And His Modern Rivals.* London: MacMillan and Co.

Dorier, Jean-Luc. 1997. « Une lecture épistémologique de la genèse de la théorie des espaces vectoriels ». In *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, sous la dir. de Jean-Luc Dorier. Édition La Pensée Sauvage.

Druon, Maurice. 1960. *Alexandre le dieu.* Lausanne: La Guilde du Livre.

Durand, Stéphane. 2000. « Les équations n'ont pas de préjugés ». In *Mathématiques d'hier et d'aujourd'hui*, sous la dir. de Richard Pallascio et Gilbert Labelle. Montréal: Modulo Éditeur.

Duval, Raymond. 2003. *« Voir » en mathématiques.* Université du Littoral Côte d'Opale, IUFM Nord Pas-de-Calais.

Flament, Dominique. 2003. *Histoire des nombres complexes: Entre algèbre et géométrie.* CNRS Histoire des Sciences. Paris: CNRS Éditions.

Girard, Albert. 1629. « Invention nouvelle en l'algèbre ». In *The Early Theory of Equations: On Their Nature and Constitution* (*Viète, Girard, De Beaune*), trad. anglaise de Ellen Black. Annapolis (Maryland): Golden Hind Press, 1986.

Golos, Ellery G. 1968. *Foundations of Euclidian and Non-Euclidian Geometry.* New York, Holt, Rinehart and Winston.

Gonseth, Ferdinand. 1926. *Les fondements des mathématiques: De la géométrie d'Euclide à la relativité générale et à l'intuitionisme.* Préf. de Jacques Hadamard. Paris, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, 1974.

Hamilton, Sir William Rowan. 1837. « Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time ». *Transactions of the Royal Irish Academy*, vol. 17, p. 293-422. Ed.: David R. Wilkins, 2000. Disponible à l'adresse: http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/PureTime/PureTime.pdf

————. 1866. *Elements of Quaternions*. 3d ed., vol.I, New York, Chelsea Publishing Company, New York, 1969.

Heisenberg, Werner. 1962. *La nature dans la physique contemporaine*. Paris, Collection Idées NRF, Gallimard.

Hilbert, David. 1989-1930. *Les fondements de la géométrie*. Éd. critique par Paul Rossier d'après les 10 premières éd. Paris: Dunod, 1971.

Katz, Victor J. 1993. *A History of Mathematics. An introduction.* New York, HarperCollins College Publ.

Kline, Morris. 1972. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* New York, Oxford Univ. Press.

Krivine, J.L. 1969. *Théorie axiomatique des ensembles.* Paris, Collection SUP, Presses Universitaires de France.

Labelle, Gilbert. ca. 1975. *Introduction aux nombres complexes et applications*, Association Mathématique du Québec, Fascicule 1.

Lalonde, François. 2000. « Qu'est devenue la géométrie au XXe siècle? ». In *Mathématiques d'hier et d'aujourd'hui*, sous la direction de Richard Pallascio et Gilbert Labelle, Montréal, Modulo.

Lebesgue, Henri. s.d. « Commentaires sur l'œuvre de F. Viète ». Chap. in *Notices d'Histoire des Mathématiques*, p. 10-18. Monographies de *L'Enseignement Mathématique*, Institut de Mathématiques, Université Genève, Dunod, 1958.

Legendre, Adrien-Marie. 1794. *Éléments de Géométrie*. Avec additions et modifications par M.A. Blanchet, 37e édition, Librairie de Paris.

Leibnitz, Godefroy-Guillaume (Leibniz , Gottfried Wilhelm). 1674-1700. *Correspondance avec Oldenburg, Newton, Collin, Wallis: Oeuvre mathématique autre que le calcul infinitésimal, Fascicule II.* Trad. du latin par Jean Peyroux, Librairie A. Blanchard (1987), d'après le tome II des Oeuvres Mathématiques de Jean Wallis.

Leroux, Pierre. 1983. *Algèbre linéaire; une approche matricielle.* Montréal, Modulo.

Lucas-Dubreton, Jean. 1954. *Le monde enchanté de la Renaissance. Jérôme Cardan l'halluciné*. Paris, A. Fayard.

Luminet, Jean-Pierre. 2006. *Le secret de Copernic.* Paris, Jean-Claude Lattès.

Mac Lane, Saunders, et Garrett Birkhoff. 1971. *Algèbre, t.* I: *Structures Fondamentales.* Paris, Gauthier-Villars.

Mankiewicz, Richard. 2000. *L'histoire des mathématiques.* Paris, Seuil.

Mendelson, Elliott. 1964. *Introduction to Mathematical Logic.* New York, Van Nostrand Reinhold.

Newton Isaac. 1728. « Universal Arithmetick: or, a Treatise of Arithmetical Composition and Resolution ». Trad. du latin par Mr. Ralphson. In *The Mathematical Works of Isaac Newton*, vol. 2. New York and London, Johnson Reprint Corporation, 1964, p. 3-137.

————. 1737. « A Treatise of the Method of Fluxions and Infinite Series, with its application to the Geometry of Curve Lines ». Trad. du latin par John Stewart (?). In *The Mathematical Works of Isaac Newton*, vol. 1. New York and London: Johnson Reprint Corporation, 1964, p. 29-141.

Platon. *La République.* Trad. de Georges Leroux. Montréal: Flammarion, 2002.

Poincaré, Henri. 1902. « Les fondements de la géométrie ». *Journal des savants*, mai 1902, p. 252 à 271. *In* Dernières pensées. Paris: Flammarion, 1913.

————. 1905. *La valeur de la science*. Sciences de la Nature. Paris: Flammarion

Rudin, Walter. 1964. *Principles of Mathematical Analysis.* New York: McGraw-Hill Book, International Series in Pure and Applied Mathematics.

Toth, Imre. 1983. « La révolution non euclidienne ». In *La Recherche en Histoire des sciences*, Le Point Sciences S37. Paris: Éd. du Seuil La Recherche.

Trudeau, Richard J. 1987. *The Non-Euclidian Revolution.* Boston: Birkhäuser.

Viète, François, « De aequationum recognitione et emendatione ». In *The Early Theory of Equations: On Their Nature and Constitution* (*Viète, Girard, De Beaune*). Trad. anglaise de Robert Schmidt. Annapolis (Maryland): Golden Hind Press, 1986.

Voelke, Jean-Daniel. 2005. *Renaissance de la géométrie non euclidienne entre 1860 et 1900.* Bern: Peter Lang SA, Éditions scientifiques européennes.