

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

DE BROUWER À BARSALOU :  
L'INTUITIONNISME À L'ÈRE DES SCIENCES COGNITIVES

MÉMOIRE  
PRÉSENTÉ  
COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN PHILOSOPHIE

PAR  
JEAN-CHARLES PELLAND

JANVIER 2008

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

## TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	vi
RÉSUMÉ	vii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
LA PHILOSOPHIE DE L'ESPRIT DE BROUWER	6
1.1 LUITZEN EGBERTUS JAN BROUWER	6
1.2 MATHÉMATIQUES ET MYSTICISME	7
1.3 LA VIE DE L'ÂME	8
1.3.1 Le paradis du Soi	9
1.3.1 Exode	10
1.3.1 La vie sociale	12
CHAPITRE II	
L'INTUITION PRIMORDIALE DU TEMPS	14
2.1 L'IP À TRAVERS LA CARRIÈRE DE BROUWER	14
2.1 ATTENTION TEMPORELLE	16
2.1 ATTENTION TEMPORELLE VERSUS ATTENTION CAUSALE	19
CHAPITRE III	
ÉLÉMENTS DE L'INTUITION PRIMORDIALE	22
3.1 L'ABSENCE D'UNE LISTE EXHAUSTIVE	22
3.2 BI-UNITÉ	24
3.3 LE CONTINU ET LE DISCRET	25
3.4 L'ORDRE	27
3.5 LE <i>ENCORE</i>	27
3.6 LE <i>AINSI-DE-SUITE</i>	28
3.7 LA MÉMOIRE	29

3.8	L'ABSTRACTION CHEZ BROUWER	30
3.9	COMMENT CONSTRUIRE DES NOMBRES	31
3.10	INTRODUCTION AUX MATHÉMATIQUES INTUITIONNISTES	32
3.11	LE CHOIX	34
3.12	LES ESPÈCES	37
3.13	L'INSERTION	39
3.14	RÉSUMÉ DES ÉLÉMENTS	40
CHAPITRE IV		
DEHAENE ET LE SENS DES NOMBRES		42
4.1	INTRODUCTION	42
4.2	LES DONNÉES	43
	4.2.1 <i>Baby arithmetic</i>	43
	4.2.2 L'animal mathématique	47
	4.2.3 Homologie comportementale	48
4.3	LE CERVEAU ET LA NUMÉROSITÉ	50
	4.3.1 Études de lésion	50
	4.3.2 Neuroimagerie et numérosité	52
	4.3.3 Les neurones de la numérosité?	53
	4.3.4 Résumé des données	54
4.4	DE LA QUANTITÉ NUMÉRIQUE AUX NOMBRES NATURELS	55
	4.4.1 Combien de systèmes de base?	56
	4.4.2 Les interprétations de Carey	57
	4.4.3 Le SHIP et la continuité	59
4.5	L'ONTOGENÈSE SELON CAREY	61
	4.5.1 Problème 1: l'apprentissage de listes	62
	4.5.2 Problème 2: l'apprentissage de la signification des symboles numériques	63
	4.5.3 Récursivité : linguistique ou mathématique?	64
	4.5.4 Problème 3: le passage des listes aux nombres	65
4.6	RÉSUMÉ DES POSITIONS DE DEHAENE ET CAREY	69

CHAPITRE V	
BARSALOU ET L'ABSTRACTION	71
5.1 INTRODUCTION	71
5.2 LES SYMBOLES PERCEPTUELS CHEZ BARSALOU	72
5.2.1 Première propriété : les symboles perceptuels sont des représentations neuronales dans des zones sensorimotrices ou proprio-sensorielles du cerveau	73
5.2.2 Implications pour la cognition	75
5.2.3 Deuxième Propriété : les SP sont des représentations schématiques et incomplètes	76
5.2.4 Troisième propriété : les SSP sont plurimodaux	78
5.3 QUATRIÈME PROPRIÉTÉ : LES SP SONT ORGANISÉS EN SIMULATEURS	79
5.3.1 Définition de simulateurs	79
5.3.2 Comment assembler les SP en simulateurs	80
5.3.3 Simulateurs de propriétés	82
5.3.4 Simulateurs de relations	84
5.3.5 Cinquième propriété : les échafaudages organisent les SP dans les simulateurs	85
5.3.6 Emboîtement et récursivité	86
5.3.7 Sixième propriété : contrôle linguistique des SP	87
5.4 DIPSS : DYNAMIC INTERPRETATION BY PERCEPTUAL SYMBOL SYSTEMS	87
5.4.1 Catégorisation : des <i>types</i> et des <i>tokens</i>	88
5.4.2 Interprétation, inférence, et catégorisation	89
5.4.3 Représentation structurée	90
5.4.4 Réalisation dynamique	91
5.4.5 Trois propriétés confirmées	92
5.5 CONCEPTS ABSTRAITS	93
5.5.1 Concepts mathématiques	95
CHAPITRE VI	
BROUWER ET LES SCIENCES COGNITIVES	98

6.1	BROUWER ET DEHAENE	98
6.1.2	Le discret et le système de répertoire d'objets	99
6.1.3	L' <i>entre</i> du continu de Brouwer et le SHIP	100
6.1.4	Faculté unificatrice et capacité d'individuer	101
6.1.5	L'ordre et le <i>encore</i>	102
6.1.6	La mémoire	102
6.1.7	Le <i>ainsi-de-suite</i>	103
6.2	ABSTRACTION, CHOIX ET INSERTION	103
6.2.1	Brouwer et les trois caractéristiques de l'abstraction	104
6.2.2	Brouwer : trop amodal	105
6.2.3	Insertion et interprétation	106
6.2.4	Choix et liberté du sujet	107
6.3	PASSER DE NUMÉROSITÉ À NOMBRE	108
6.4	EMBOÎTEMENT ET SYSTÈME DE RÉPERTOIRE D'OBJETS	110
6.5	RÉSUMÉ	113
	CONCLUSION	114
	RÉFÉRENCES	119

## LISTES DES FIGURES

Figure		Page
1.1	Genèse mentale selon Brouwer	13
2.1	L'IP crée des séquences emboîtées de sensations	18
3.1	Diminution de la taille des intervalles à mesure que le sujet fait des choix dans le développement de l'expansion décimale	36
4.1	La représentation approximative de la quantité dans le SHIP des deux hémisphères du cerveau	53
5.1	Formation de symboles perceptuels	74
5.2	Construction de simulations	81
5.3	Exemple de simulateur de relation	85
6.1	Comment l'emboîtement d'objets pourrait permettre de compter au-delà de 'quatre'	112

## RÉSUMÉ

L'objectif du présent texte est de tenter de construire un modèle de l'acquisition des concepts mathématiques sans l'aide du langage en s'inspirant des thèses intuitionnistes de L.E.J Brouwer et en les appliquant à des théories plus modernes de l'acquisition et de la représentation des concepts mathématiques, notamment, la théorie du sens des nombres de Stanislas Dehaene. Pour ce faire, nous initierons le lecteur à la pensée de Brouwer dans les deux premiers chapitres et développerons dans le troisième chapitre une nouvelle analyse de l'Intuition Primordiale de Brouwer dans laquelle il est possible d'identifier chaque élément impliqué dans l'acquisition des concepts mathématiques chez Brouwer et le rôle joué par chacun. Le chapitre quatre exposera la théorie de Dehaene selon laquelle nos capacités mathématiques sont le résultat de deux systèmes cognitifs de base, soit le système de répertoire d'objets et le système de représentation approximative de la numérosité. Nous tenterons ainsi d'améliorer le modèle de l'ontogenèse de Dehaene ainsi que les interprétations de Suzanne Carey, celles-ci soulignant le besoin de faire appel à d'autres systèmes de base incluant un système de représentation de l'ordre linéaire ainsi que le langage. Nous présenterons une hypothèse alternative en remarquant qu'une représentation approximative de la numérosité peut implicitement contenir une forme d'ordre et de relation de successeur capable de justifier une partie de l'apprentissage des listes de numéros chez les enfants. Aussi, nous tenterons d'expliquer le développement de concepts mathématiques plus avancés en nous basant sur la théorie de l'abstraction de Lawrence Barsalou, selon laquelle l'abstraction est une interprétation dynamique faite par des systèmes de symboles perceptuels. Nous pourrions alors expliquer la manière dont le système de répertoire d'objets réussit à développer une composante numérique en venant interpréter les représentations du système approximatif. Nous suggérerons enfin l'hypothèse que les concepts mathématiques puissent être aptes à se développer à mesure que ce système de répertoire d'objets produit des représentations structurées dans lesquelles les numérosités se voient regroupées de manière analogue au développement des nombres par l'IP de Brouwer.

Mots clés: intuitionnisme, abstraction, concepts mathématiques, fondements des mathématiques



## INTRODUCTION

La question du statut ontologique des entités mathématiques divise les philosophes depuis des millénaires : tandis que chez Platon, les mathématiques sont découvertes dans un monde abstrait de ‘formes’, chez Aristote, elles seraient le résultat d’une abstraction faite ici sur terre par l’Homme. Deux mille ans plus tard, la découverte des paradoxes en théorie des ensembles provoque une crise dans les fondements des mathématiques et scinde la communauté mathématique en trois courants principaux : les formalistes, les logicistes, et les intuitionnistes.

Même si la question du statut des entités mathématiques n’est toujours pas réglée, les techniques utilisées dans les divers champs des sciences cognitives commencent à nous permettre d’étudier la relation entre le cerveau humain et les mathématiques. Ceci pourrait éventuellement apporter une réponse à la question du statut des entités mathématiques en les définissant à partir de constructions faites par le cerveau (humain). Les recherches de Stanislas Dehaene et de ses collaborateurs sur la nature ontogénétique et phylogénétique des capacités arithmétiques de l’homme illustrent bien la façon dont certains domaines des sciences cognitives — particulièrement, les neurosciences cognitives — commencent à percer le mystère de la nature de la pensée mathématique.

Néanmoins, comme l’admettent fréquemment les chercheurs dans le domaine (incluant Simon, Dehaene, Carey), nous sommes encore bien loin de pouvoir expliquer comment le cerveau du sujet humain arrive à construire le monde objectif des mathématiques. En effet, tandis que les données en neuroscience tendent à associer de plus en plus les fonctions cognitives de haut niveau avec certaines parties spécifiques du cerveau, nous ne disposons toujours pas d’une analyse fonctionnelle rendant compte de

la manière dont ces diverses parties du cerveau interagissent entre elles pour contribuer à la construction des mathématiques.

Par conséquent, une étude approfondie des analyses fonctionnelles de la construction de la pensée mathématique, notamment celle des grands penseurs dans le domaine des fondements des mathématiques et tout particulièrement ceux qui soutiennent la thèse selon laquelle les mathématiques sont dans la tête du sujet, s'avère pertinente. Aucun mathématicien ne répond mieux à ce critère que L.E.J Brouwer : il fut largement (si ce n'est totalement) à l'origine du développement d'une philosophie des mathématiques dont les principales innovations incluent la réduction des mathématiques à des processus présents dans la tête de l'individu. Aussi, bien qu'on ne puisse contester l'importance de l'intuitionnisme de Brouwer dans le domaine des fondements des mathématiques, il demeure néanmoins que l'impact de cette philosophie en sciences cognitives est inexistant. En effet, même si certains chercheurs en sciences cognitives s'aventurent dans le domaine des fondements cognitifs du raisonnement mathématique, aucun d'entre eux ne fait appel à des notions intuitionnistes. Par exemple, bien que Dehaene utilise Hilbert et Frege pour soutenir des thèses dans certains textes, Brouwer est presque toujours absent de la discussion. Lorsqu'il est mentionné, il est fréquemment mis sur la touche, tel un mystique et un rebel. Face à l'absence persistante d'un modèle complet de l'acquisition des concepts mathématiques, les chercheurs en sciences cognitives semblent ignorer la possibilité que nous puissions approfondir nos recherches en la matière en analysant la philosophie de Brouwer.

Le présent texte tentera de corriger cette apparente lacune en explorant les implications de l'intuitionnisme de Brouwer en sciences cognitives. Dans cette optique, nous analyserons la pensée de Brouwer et sa notion de l'Intuition Primordiale (IP) des mathématiques pour, par la suite, tenter de construire une variante de la théorie dominante dans le domaine, celle du sens des nombres de Dehaene. Notre objectif est d'appuyer la thèse intuitionniste, celle-ci avançant l'idée que le langage ne joue aucun rôle dans l'acquisition des concepts mathématiques. Plus précisément, en se servant de notre analyse de Brouwer, nous tenterons de défendre la possibilité selon laquelle le

développement de nos capacités mathématiques se développe uniquement à partir de deux systèmes cognitifs de base postulés par Dehaene, soit le système de représentation approximative de la numérosité et le système de répertoire d'objets. Ce faisant, nous verrons que l'IP de Brouwer contient de nombreux éléments pouvant fournir des alternatives intéressantes aux modèles élaborés par Dehaene ainsi que par d'autres chercheurs en sciences cognitives, prouvant ainsi que cette philosophie contribue à résoudre la question de la construction de la pensée mathématique chez l'être humain.

La première étape dans la construction de notre modèle intuitionniste de l'acquisition des concepts mathématiques est de comprendre la philosophie des mathématiques de Brouwer, particulièrement la construction des mathématiques par l'IP, notion centrale dans sa philosophie. Afin de nous permettre de situer l'IP dans un cadre philosophique plus général, nous présenterons dans le premier chapitre une brève introduction à la philosophie de l'esprit de Brouwer. Le deuxième chapitre contiendra une analyse fonctionnelle de l'IP identifiant la manière dont cette intuition construit la pensée mathématique par répétition de séquences d'intuitions emboîtées les unes dans les autres. Cette analyse générale précèdera une analyse plus détaillée qui se poursuivra dans le chapitre trois, où nous tenterons de présenter chaque élément de l'IP individuellement et d'identifier le rôle précis de chacun dans la construction de la pensée mathématique.

Le cheminement par ces étapes est nécessaire d'autant plus que pareille analyse des éléments de l'IP de Brouwer n'est disponible dans la littérature. En effet, s'il existe de nombreuses analyses de l'IP et de certains de ses éléments, aucune n'a proposé d'isoler chaque élément impliqué dans la construction de la pensée mathématique et d'en identifier son rôle. Aussi, même si les idées de Brouwer ont servi de point de départ pour plusieurs théories dans une variété étonnante de disciplines, la majorité de celles-ci ne se basent pas sur l'IP telle que présentée chez Brouwer, pour les raisons mentionnées plus haut. C'est le cas en mathématiques (par exemple, pour les écoles de Markov, Bishop,

Kleene, et pour d'autres variantes de constructivisme<sup>1</sup>), en logique (par exemple, la logique intuitionniste et ses dérivés), en philosophie du langage (par exemple, Dummett, 1977), et même en phénoménologie (par exemple, O. Becker, 1927, Tiezsen, 2005, et van Atten, 2002) : dans aucun de ces cas l'IP de Brouwer est exposée en tant que telle, dans son intégralité. On choisit, au contraire, d'isoler un des nombreux éléments de la pensée de Brouwer et on l'applique à un autre domaine pour obtenir des résultats.

Or, dans le présent texte, nous voulons utiliser notre analyse de l'IP pour essayer d'appliquer des notions intuitionnistes dans un nouveau domaine, celui des fondements cognitifs des mathématiques. Contrairement aux autres interprétations de Brouwer se basant surtout sur sa philosophie des mathématiques, la nôtre se rattache à la philosophie de l'esprit. Par conséquent, l'analyse du chapitre trois se devra d'intégrer tous les éléments de l'IP pour nous permettre de l'appliquer aux théories plus modernes en sciences cognitives et tenter de les améliorer.

Dans le chapitre quatre, nous présenterons la théorie du sens des nombres de Stanislas Dehaene ainsi que les deux systèmes cognitifs de base sur lesquels celle-ci repose — soit le système de répertoire d'objets et le système de représentation approximative de la numérosité. Bien que cette théorie demeure sans doute la meilleure tentative d'identifier les racines cognitives de nos capacités mathématiques, nous démontrerons que sa description de l'acquisition des concepts mathématiques chez les enfants contient néanmoins de nombreuses lacunes. Avant de tenter de combler ces lacunes dans le chapitre six, nous devons proposer une théorie moderne de l'abstraction, l'abstraction étant chez Brouwer un élément clé, indispensable au développement de nos concepts mathématiques plus avancés. C'est dans cette optique que nous présenterons dans le chapitre cinq la théorie de l'abstraction de Lawrence Barsalou et tenterons d'appliquer sa notion centrale d'interprétation de simulateurs de systèmes perceptuels aux concepts mathématiques plus avancés.

---

<sup>1</sup> Troelstra & van Dalen 1988 contient une bonne introduction aux différentes écoles constructivistes.

Dans le chapitre six, nous établirons un lien entre les éléments de l'IP de Brouwer et certains éléments des théories de Dehaene, Carey, et Barsalou, dans le but de combiner des éléments présents dans chacune de ces théories afin de former un modèle alternatif de l'acquisition des concepts mathématiques capable de combler les imperfections relatives au modèle proposé par Dehaene. Grâce à ces liens, nous combinerons des éléments de notre analyse de Brouwer à certains éléments de la théorie de Barsalou en vue d'aboutir à une nouvelle hypothèse mettant en jeu l'interaction entre les deux systèmes de base de Dehaene ainsi que les propriétés pouvant leur être attribuées et rendant compte de l'acquisition des concepts mathématiques sans l'aide du langage.

Plus précisément, nous démontrerons qu'il est possible de remplacer le rôle joué par le langage dans la théorie de Dehaene en ajoutant des éléments de l'IP de Brouwer—l'ordre, le *encore*, et l'emboîtement récursif—aux systèmes de base postulés dans sa théorie. En se servant de notions issues de notre analyse de Brouwer, nous tenterons ainsi de défendre l'idée selon laquelle le développement de nos capacités mathématiques procéderait uniquement à partir d'une interprétation faite du système de représentation approximative par le système de répertoire d'objets. Par conséquent, il se pourrait que ces systèmes comportent certaines dimensions que Dehaene ne leur attribue pas, notamment l'ordre et la capacité de représentation structurée par emboîtement récursif. Nous obtiendrons ainsi une hypothèse visant à décrire l'acquisition des concepts mathématiques en termes d'emboîtement récursif de simulations, sans l'aide du langage.

## CHAPITRE I

### LA PHILOSOPHIE DE L'ESPRIT DE BROUWER

#### 1.1 Luitzen Egbertus Jan Brouwer

Principal fondateur de la topologie moderne, L.E.J Brouwer est considéré comme un des plus grands mathématiciens du vingtième siècle, ayant été louangé par d'illustres scientifiques de son époque, dont Poincaré, Weyl, Einstein, et même Hilbert. Ayant rapidement obtenu le respect et l'admiration de la communauté mathématique de son époque, Brouwer espère pouvoir profiter de sa réputation pour compléter l'ambitieuse mission qu'il a en tête depuis le début de sa carrière, soit la reconstruction des mathématiques conformément à une philosophie des mathématiques dont il est le fondateur, l'intuitionnisme.

Comme son nom l'indique, l'intuitionnisme est un courant de pensée avançant l'idée selon laquelle les mathématiques sont une activité libre du sujet, basée sur l'intuition du temps et indépendante de la logique et du langage. Cette thèse est totalement opposée aux deux principaux courants de pensée dans le domaine des fondements des mathématiques, soit le formalisme de Hilbert et le logicisme de Frege et Russel, ces derniers cherchant à fonder les mathématiques soit sur des systèmes purement formels de symboles, soit sur la logique<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup> Mancosu, 1998, Benaceraff & Putnam, 1964, ainsi que Troelstra & Van Dalen, 1988, contiennent tous de bonnes introductions à l'intuitionnisme de Brouwer ainsi qu'au débat sur les fondements des mathématiques du début du vingtième siècle.

Tandis que chez les formalistes et logicistes les mathématiques sont en quelque sorte indépendante de l'activité psychologique humaine, l'intuitionnisme de Brouwer fonde les mathématiques dans l'esprit du sujet. Chez Brouwer, les mathématiques sont construites par l'homme, au lieu d'être découverts parmi d'autres vérités transcendantales. Selon Brouwer, les trois grandes crises dans les fondements des mathématiques—soit la découverte des nombres irrationnels par les Pythagoriciens, l'invention du calcul différentiel par Newton et Leibniz, et la découverte des paradoxes dans le domaine de la théorie des ensembles—sont des conséquences inévitables de cette conception platonicienne des mathématiques et de son traitement inadéquat de l'infini. Brouwer croit donc qu'il est nécessaire de remplacer les mathématiques classiques et leur conception platonicienne de l'existence mathématique par ces mathématiques intuitionnistes, dans lesquelles l'existence mathématique implique la possibilité d'être construit par un sujet. Puisque les mathématiques intuitionnistes sont fondés dans la tête du sujet, nous devons examiner la philosophie de l'esprit de Brouwer pour mieux comprendre sa philosophie des mathématiques.

## 1.2 Mathématiques et mysticisme

De nombreux éléments de la philosophie de l'esprit de Brouwer sont fréquemment, et à juste titre, qualifiés d'occultes et de mystiques. Tout au long de sa carrière, Brouwer a montré un intérêt pour le mysticisme oriental et la croyance en le dualisme du corps et de l'esprit. On retrouve d'ailleurs des références aux notions comme le karma, la vie de l'âme, la réincarnation et l'immortalité dans plusieurs de ses textes, incluant des publications mathématiques techniques<sup>3</sup>. Bien qu'il puisse comprendre les motifs pour lesquels les membres de la communauté mathématique occidentale n'ont pas vu la pertinence de tels propos, il est important de noter que les croyances mystiques de Brouwer sont au cœur de sa philosophie : pour lui, le mysticisme est une meilleure

---

<sup>3</sup> Les exemples les plus flagrants sont dans *Life, art, and mysticism* (1905), *On the foundations of mathematics* (1907), *Will, knowledge, and language* (1933), et *Consciousness, philosophy, and mathematics* (1948).

source de connaissance que la raison. Par conséquent, en raison de l'influence directe de son mysticisme dans sa philosophie des mathématiques, il s'avère impossible de dissocier complètement ses thèses plus mystiques (et morales) de ses thèses mathématiques sans altérer de manière significative ces dernières.

On comprend alors pourquoi Largeault dit que « Les écrits de Brouwer publiés à ce jour n'offrent rien d'intermédiaire entre les mathématiques intuitionnistes et les spéculations métaphysico-religieuses » (1993, p.11). Ewald mentionne, de même, que

Brouwer's philosophical pronouncements have often been dismissed as cranky mysticism. But whatever their intrinsic worth, they were central to his thought, and some brief hints of the way they influenced his technical work in foundation throughout his career may perhaps be in order (1996, p.1171).

En effet, même si nous verrons dans le chapitre six que certains éléments de son discours sur l'IP décrivent des processus et facultés réellement actifs dans le cerveau humain, l'on doit garder à l'esprit que la philosophie de l'esprit de Brouwer se limite à une tentative de décrire la façon dont l'intellect (*Mind*) prend forme et d'identifier les éléments et processus qui contribuent à la formation de cet événement. Brouwer ne porte aucun intérêt à la découverte de la réalité empirique de l'acquisition des concepts mathématiques : il semblerait qu'il s'agisse ici d'une spéculation non-informée par l'empirie.<sup>4</sup>

### 1.3 La vie de l'âme

Les écrits de Brouwer relatifs à la vie de l'âme et aux étapes de sa dévolution dans le monde matériel sont particulièrement pertinents pour ce texte. En effet, ils nous permettent de situer la construction des mathématiques dans une métaphysique plus générale et d'identifier l'élément clé de cette construction : l'Intuition Primordiale. La dévolution de l'âme est divisée en deux étapes : le Soi, et la conscience. Dans (Brouwer,

---

<sup>4</sup> Comme le dit van Stigt : « Brouwer was well aware that his development of Mind through all its stages does not represent the historical course of events and that none of these phases describes the present reality as it affects the individual or society. » (van Stigt, 1990, p.145),



1948), la vie de la conscience est elle-même divisée en trois phases, chacune représentant un pas de plus dans la détérioration de la pureté de notre âme : 1) la phase 'naïve', durant laquelle la perception a lieu mais n'est pas présentée à la conscience; 2) la phase 'causale isolée', où ont lieu la construction de la pensée et l'activité mathématique qui l'accompagne; et 3) la phase 'sociale', où s'établit un réseau de transmission et d'exploitation de la volonté entre individus.

Brouwer voit l'évolution de notre âme comme une chute, une perte de pureté, un exode cheminant d'un état paradisiaque de pure contemplation, « la plus profonde demeure de l'âme », vers la conscience, en passant par la construction mathématique du monde perceptuel, pour enfin aboutir à l'interaction sociale, celle-ci étant fondamentalement et irréparablement impure et répréhensible. À chaque étape dans sa vie, l'âme se dirige ainsi vers le monde extérieur de la phase sociale, loin de la pure contemplation du Soi de la phase naïve.

### 1.3.1 Le Paradis du Soi

Dans la première étape de la vie de l'âme, la conscience ne peut être dirigée que vers le « Soi », entité métaphysique, inaccessible à la pensée, celle-ci étant le siège de notre existence. Il n'y a rien d'autre duquel on puisse être conscient: aucune perception, sensation, ou pensée. Même le temps et l'espace ne font pas partie, à cette étape, de la vie mentale. Il n'y a pas d'intellect (*Mind*) correspondant à la définition Brouwerienne du terme, puisque pour Brouwer, l'intellect implique l'activité mentale. Or, même si, à ce stade, nous pouvons avoir des sensations, nous n'en avons pas conscience et ne les percevons pas comme des entités individuelles. Autrement dit, même si nos sens présentent de l'information à notre conscience, celle-ci n'y réagit pas. C'est comme si la conscience était endormie, tel un écran sur lequel sont projetées des images. Toute réaction aux stimuli est spontanée, directe, et primitive. Nous ne combinons pas de percepts pour former des représentations complexes, ni n'enregistrons des objets dans notre environnement, ni même d'environnement.

### 1.3.2 Exode

C'est dans la seconde phase de la vie de l'âme que débute la chute dans l'enfer du monde extérieur. Cette chute est entraînée par notre première expérience perceptuelle : aussitôt que la perception perturbe le repos de la conscience et présente une alternative au Soi, la conscience devient active et l'attention est dirigée vers les objets externes et loin du Soi. Cette première action de la conscience porte plusieurs noms : 'événement primordial', 'intuition primordiale', 'phénomène primordial', et 'intuition primordiale du temps'. Pour Brouwer, c'est le « fundamental phenomenon of the human intellect » (Brouwer, 1912).

L'intuition primordiale (IP) se produit lorsque le sujet devient conscient des éléments discrets dans le temps, lorsqu'un *acte* de la conscience nous permet de reconnaître simultanément deux entités discrètes, l'une comme présente et l'autre comme passée. C'est à ce moment que l'intellect tel que conçu par Brouwer prend forme:

By a move of time one sensation present in consciousness gives way to another sensation in such a way that consciousness retains the former as a past sensation, and moreover through this distinction between present and past, recedes from both and from stillness and becomes mind. (Brouwer, 1948, p.1235)

Autrement dit, lorsque l'IP a lieu, la conscience tient deux éléments côte-à-côte, distincts mais unifiés : les deux éléments ne sont pas identiques, mais forment une seule paire, nommée *bi-unité*. Il est important de comprendre que cette intuition est active : c'est une action de la conscience, décrite de façon variée, tantôt comme un événement, tantôt comme un phénomène, ou un processus. Cette notion, telle que décrite ci-dessus, est donc clairement distincte de la notion kantienne de l'intuition, celle-ci se définissant comme une *forme a priori* de la sensibilité humaine. (cf. Kant, 1787, B.35)

Cette même intuition primordiale peut être répétée sans fin selon la volonté libre du sujet au sein duquel elle est active afin de produire des séquences de plus en plus complexes d'objets mentaux par répétition de l'acte primordial : avec la bi-unité, on peut construire une tri-unité, avec cette dernière une autre construction est possible, et ainsi de suite. Brouwer appelle ces séquences de constructions mentales des *séquences*

*causales* en raison de l'organisation de ces perceptions en séquences de constructions liées dans un réseau de causalité. En effet, comme nous le verrons dans la section 2, l'IP est responsable de la construction de toutes les entités mentales—incluant les mathématiques—ainsi que de toutes les relations qui les relient—incluant la causalité. Pour Brouwer, tout objet de la pensée est une construction faite par le sujet à partir de l'IP. Autrement dit, l'existence — incluant l'existence mathématique — implique la construction par le sujet.

Cette capacité du sujet à organiser ses constructions en séquences causales lui permet *l'attention causale* : le sujet regarde les objets dans son environnement, non dans le but de contempler leur beauté, mais dans celui d'exploiter leur position dans une séquence causale. C'est ce que Brouwer appelle l'acte rusé (*cunning act*) :

Dans une séquence causale d'évènements, on réalise indirectement un élément ultérieur, inaccessible par l'effort spontané et néanmoins désiré (le but), en provoquant la venue d'un élément antérieur dans la séquence, élément sans doute non-désiré pour lui-même, mais accessible par l'effort (les moyens), et en obtenant, dans le sillage de ce dernier, l'élément désiré, à titre de conséquence. (Largeault, 1993, p.424).

Brouwer considère de tels actes prémédités comme impurs et mauvais, car le sujet tente maintenant de contrôler et d'imposer ses désirs sur le monde au lieu d'interagir avec ce dernier de façon passive. L'élément qui détourne ainsi notre attention vers le monde externe est la volonté: « Causal attention allows the development of the conative activity of the subject from spontaneous effort to forethinking enterprise by means of the free-will-phenomenon of *cunning act*. »(Brouwer, 1948, p.1236)

Nous notons donc un changement marqué entre la phase naïve et la phase causale en terme de l'activité de la conscience : dans la phase causale, l'IP est active en unifiant des percepts séparés pour construire des objets mentaux complexes. Nous sommes ainsi maintenant conscients d'un monde d'objets distincts du Soi. Or, dans la phase naïve, l'intellect était bien au repos, recevant des sensations de manière passive, spontanée, et instinctive, ce qui n'est guère le cas pour l'intellect dans la phase causale puisque celui-

ci agit sur les sensations en construisant des séquences ainsi que des relations entre celles-ci.

### 1.3.3 La vie sociale

Dans la phase causale, l'acte rusé est entrepris pour satisfaire les demandes de notre volonté et de notre ego. Dans la phase sociale, cet acte rusé peut maintenant être dirigé par la volonté des autres grâce au phénomène de transmission de volonté. Ainsi il devient possible d'exploiter les séquences causales incluant d'autres individus et de former des séquences causales plus complexes sous forme de réseaux d'interaction sociale. Cet échange de volonté établit une coopération avec les autres : chaque personne coopère avec les séquences causales des autres individus. Des cas spéciaux d'une telle coopération sont les hypothèses et la science : « *scientific thinking*, which in an economical and efficient way catalogues extensive groups of cooperative causal sequences. »(Brouwer, 1948, p.1237)

Plus cette coopération avec les autres devient complexe, plus l'échange et la transmission de volontés seront complexes. C'est ici que le langage devient utile : il permet de simplifier la transmission de la volonté d'un sujet à l'autre. Dans les sociétés avancées

the totalité of laws, decrees, objects, and theories concerned with the acts enjoined upon the organisation of individuals is subjected to a causal attention, the *linguistic causal attention*, and the elements of the mathematical system resulting from this causal attention are indicated by *linguistic basic signs*. (Brouwer, 1948, p.1237-1238).

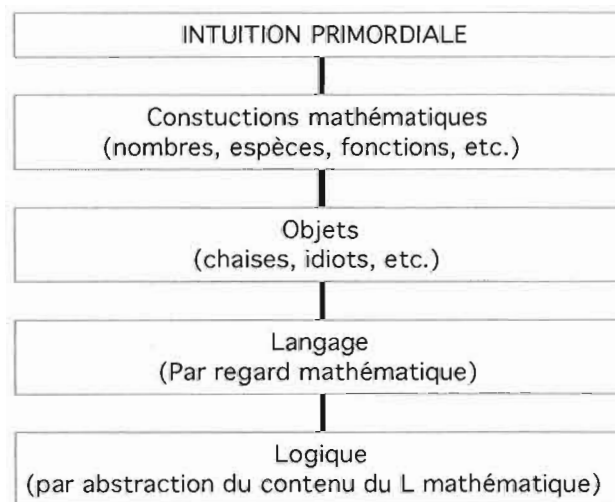
Brouwer conçoit donc le langage comme un outil de transmission de volonté au sein d'une coopération avec d'autres individus. Ceci étant dit, il permet aussi au langage de jouer un rôle pour aider la mémoire, bien que celui-ci soit loin d'être infaillible :

The role of mathematical language can only be that of an aid to help remember mathematical constructions or construction methods..or to suggest them to others,

. sufficient for most practical purposes but never completely safeguarding against error. (Brouwer, 1947, p.339)

D'ailleurs, chez Brouwer, l'utilité du langage se limite à deux rôles, à savoir : celui de transmettre la volonté et celui d'aider la mémoire.

Autrement dit, chez Brouwer, le langage ne joue aucun rôle dans la construction des concepts mathématiques. En effet, les mathématiques sont, chez Brouwer, une construction mentale libre à partir de l'IP qui précède la description linguistique qui l'accompagne. Le langage ne peut que décrire les constructions faites par l'IP. En outre, cette séparation du langage et des mathématiques est l'objet du *First Act of Intuitionism* : « the uncompromising separation of mathematics from mathematical language and thereby from the linguistic phenomena as described by theoretical logic » (van Stigt, 1990, p.96). Pour ce qui est de logique, mentionnons que Brouwer la décrit comme un langage formel stérile et sans pouvoir constructif, obtenu par l'observation de la forme des descriptions linguistiques des processus mathématiques (voir Figure 1). Nous verrons dans le prochain chapitre comment l'IP permet la construction de concepts mathématiques sans faire appel au langage.



**Figure 1.1**

Genèse mentale selon Brouwer

## CHAPITRE II

### L'INTUITION PRIMORDIALE DU TEMPS

Il est vrai que la théorie de Brouwer, en décrivant la naissance de l'intellect, dessine un portrait plutôt mystique. Cependant, elle nous permet tout de même d'identifier certains concepts qui occupent une place centrale dans sa pensée. Notre bref aperçu de sa philosophie de l'esprit nous montre que l'occurrence de l'intuition primordiale est, selon Brouwer, l'événement le plus important dans notre vie intellectuelle, puisqu'il donne naissance à notre intellect et marque notre entrée dans le monde de la perception. L'IP est une notion centrale dans la philosophie de Brouwer—particulièrement dans sa philosophie des mathématiques—étant à l'origine de toutes nos constructions mentales. Notre compréhension de la façon dont l'intellect construit les mathématiques dépend donc d'une bonne compréhension de l'IP. Les sections suivantes tenteront ainsi d'expliquer comment ce processus peut créer une telle diversité d'objets—mathématiques et autres—ainsi que d'identifier les éléments clés tirés de ces constructions.

#### 2.1 L'IP à travers la carrière de Brouwer

Nous retrouvons des références à l'IP dans la philosophie de Brouwer et ce, dès de le début de sa carrière, alors que son intuitionnisme était encore à un stade embryonnaire et ne faisait pas encore l'objet d'un grand nombre de publications. Ceci n'est pas surprenant, cette notion jouant un rôle de pierre angulaire dans sa philosophie<sup>5</sup>. On retrouve, en effet, des références à l'IP tout au long de la carrière de Brouwer, depuis ses notes d'étudiant en 1905 et jusqu'à certaines de ses dernières publications en 1948. Bien que la terminologie ait subi quelques changements mineurs, toutes les références à l'IP

---

<sup>5</sup> Brouwer a attendu de s'établir comme un des plus grands mathématiciens de son époque et d'être universellement respecté avant de montrer ses vraies couleurs et de publier ses thèses intuitionnistes les plus controversées. Il devint 'pleinement' intuitionniste vers 1917, année durant laquelle sa campagne pour la réforme des mathématiques prit réellement son envol.

semblent décrire le même phénomène et toutes lui attribuent la même importance capitale, faisant preuve de ce que van Stigt décrit comme « remarkably little change in his ideology » (van Stigt, 1990, p.112). Notre analyse commencera donc avec les premières publications qui, comme le dit van Stigt, « contain all the essential features of what would become Brouwer's standard definition »(van Stigt, 1990, p.148)<sup>6</sup>

La première référence à une intuition en rapport avec les mathématiques est une courte remarque publiée en 1905 dans *Life, art, and Mysticism*: « Mathematics and its application are sinful because of the intuition of time which is directly experienced as sinful. » (van Stigt, 1990, p.400). Brouwer donne une première description détaillée de l'IP dans *The Foundations of Mathematics* (1907), sa thèse doctorale :

Man has a faculty which accompanies all his interactions with Nature, a faculty of viewing his life mathematically, seeing in the world repetitions of sequences, causal systems in time. The fundamental phenomenon here is no more than the intuition of time, which makes repetition of 'thing-in-time-and-again-thing' possible and on the basis of which moments of life fall apart as sequences of qualitatively different things; these are subsequently concentrated in the intellect as mathematical sequences, not sensed but perceived.(Brouwer, 1907, p.81)<sup>7</sup>

Comparant ces descriptions à celles publiées plus tard dans sa carrière, on remarque peu de changement :

...neo-intuitionism considers the falling apart of moments of life into qualitatively different parts, to be reunited only while remaining separated by time, as the fundamental phenomenon of the human intellect, passing by abstracting from its emotional content into the fundamental phenomenon of mathematical thinking, the intuition of the bare two-oneness. (Benaceraff & Putnam, 1964, p.69)

---

<sup>6</sup> Bien que ces formulations du déroulement de l'IP démontrent peu de changement, l'interprétation qu'en fait Brouwer a cependant connu des modifications majeures, suite à certaines réalisations en raison de certaines limites de son intuitionnisme en début de carrière. Ainsi, Posy (1974) tente de montrer un changement ontologique dans la philosophie de Brouwer.

<sup>7</sup> (La traduction est de *Brouwer's Intuitionism*, p.149, qui semble préférable à celle des *Collected Works*.)

Dans *Will, knowledge, and Speech*, les mêmes éléments sont encore présents, bien que le style ait un peu changé : « The becoming-aware-of-time is the fundamental happening of the intellect: a moment of life falls apart into two qualitatively different things of which the one gives way to the other but is retained by memory. » (Brouwer, 1933, p.45) Comme nous l'avons vu dans notre description de la phase causale de la conscience, les mêmes idées se retrouvent plus tard dans sa carrière, notamment en 1948 :

By a move of time one sensation present in consciousness gives way to another sensation in such a way that consciousness retains the former as a past sensation, and moreover through this distinction between present and past, recedes from both and from stillness and becomes mind. (Brouwer, 1948, p.1235)

## 2.2 Attention temporelle

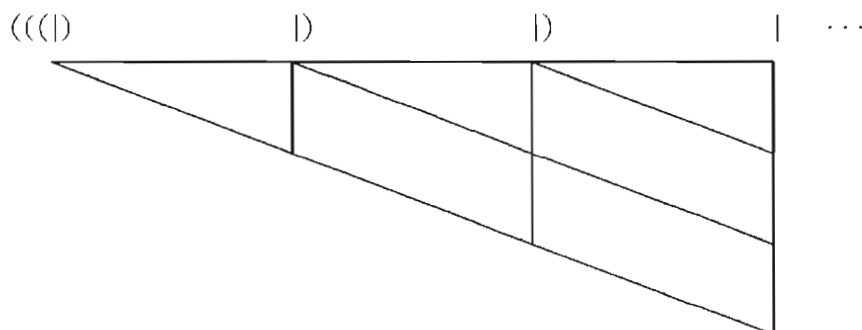
Dans tous ces passages, on identifie l'Intuition Primordiale à notre intuition du temps, notre conscience de deux moments distincts, l'un passé, l'autre présent. L'IP est ce qui nous aide à voir des éléments discrets dans le continu temporel— autrement dit, le changement : « the Primordial Intuition is the becoming-aware of time as nothing but change. » (Brouwer, 1907, p.99) Puisque l'IP représente la naissance de notre conscience, il n'est pas surprenant d'apprendre que dans la première partie de la phase causale, notre conscience soit uniquement capable de distinguer entre le moment d'occurrence de deux sensations, et non entre leur contenu. En effet, la perception ne sert qu'à déclencher l'IP. Les premières constructions de la conscience sont donc bâties à partir d'éléments temporels. Ceci explique pourquoi Brouwer l'appelle parfois l'attention temporelle (cf. Brouwer, 1929, 1933, et 1948).

Durant l'attention temporelle, l'IP est uniquement responsable de la construction d'entités mathématiques et des relations entre elles. Même si l'IP est active, elle n'est pas encore esclave de la volonté et du monde sensoriel et conserve ainsi la pureté et la liberté de l'âme : « There is the fullest constructional beauty, the introspective beauty of mathematics...where the basic intuition is left to free unfolding. » (Brouwer, 1948,



p.1239). Cette distinction entre les champs d'activité de l'IP peut nous aider à comprendre ce que Brouwer veut dire plus haut lorsqu'il mentionne le « falling apart of life moments », qui produit des « sequences of qualitatively different things...not sensed but perceived » : bien qu'on puisse observer nos constructions à partir de moments dans le temps, aucun sens ne peut nous présenter ces moments. Nous percevons donc le changement, mais sans l'aide des sens.

À ce stade, notre attention se porte sur les constructions que nous pouvons faire à partir de notre conscience du changement temporel. Il n'y a pas encore de monde extérieur, seulement un édifice mathématique en construction avec lequel nous pourrions plus tard comprendre et construire le monde extérieur des sens. Brouwer appelle donc parfois *attention mathématique* la capacité qu'a le sujet de regarder ses constructions et de procéder à d'autres constructions en considérant celles-ci comme point de départ. Comme nous l'avons brièvement mentionné plus haut dans notre discussion à propos de la phase causale, il est assez facile de comprendre comment se produit la construction d'entités mathématiques à partir de l'IP : le moment auquel la première bi-unité est construite peut être considéré comme distinct d'un autre moment, devenant ainsi une nouvelle entrée pour le même phénomène et donnant alors naissance à une tri-unité : « Of this temporal two-ity, born out of time-awareness, or this two-membered sequence of phenomena, one of the elements can in turn and in the same way fall apart into two parts; in this way the temporal three-ity or three-element time sequence is born. »(Brouwer, 1933, p.46). En effet, la relation avant-après incarnée dans la bi-unité n'indique pas seulement la présence de deux éléments : c'est aussi le début d'une séquence, chaque élément construit à partir d'une telle paire apparaîtra plus tard dans la séquence d'évènements. Schématiquement, la conscience de deux sensations pourrait être représentée par  $(|)$ , où la barre verticale entre parenthèses est celle qui est retenue par la mémoire. On peut, dans ce cas, représenter la construction de  $n$ -ités par le schéma suivant :



**Figure 2.1** L'IP crée des séquences emboîtées de sensations. (Tirée de van Atten, 2002d)

Dans ce schéma, la ligne horizontale montre le progrès du 'maintenant' : chaque trait vertical a lieu à un moment précis. Les lignes diagonales indiquent que nos connaissances augmentent avec le temps, puisque nous accumulons de plus en plus de séquences emboîtées. Les lignes verticales soulignent qu'à chaque moment, tous les éléments sont présents à la fois dans notre conscience.

Par abstraction de son contenu temporel, ces séquences de  $n$ -unités deviennent la séquence des nombres ordinaux, et par la suite la totalité des mathématiques peut être construite. Ceci veut dire que tous les nombres, ordinaux, naturels, et autres, sont construits à partir de répétitions de l'IP : « the intuition of two-oneness, the primordial intuition of mathematics which immediately creates not only the numbers one and two but all finite ordinal numbers » (Brouwer, 1912, p.12). En effet, il est toujours possible pour le sujet de construire un nombre plus élevé, puisque le nombre de répétitions possibles de l'IP est illimité, sa seule limite étant la liberté du sujet créateur. Nous devons donc nous pencher, de manière plus détaillée, sur la construction des mathématiques intuitionnistes dans le chapitre trois.

### 2.3 Attention temporelle versus attention causale

Bien que nous soyons maintenant capables de comprendre comment l'IP est responsable de la construction des mathématiques, on est en droit de se demander ce qu'il en est des autres entités auxquelles nous pensons telles que : les objets, les personnes, les émotions, etc. Chez Brouwer, ces entités sont aussi des constructions mentales dont l'origine s'explique par le fait que le sujet devient éventuellement aussi apte à distinguer entre les contenus des sensations qu'à déterminer le moment de leur occurrence. C'est à ce niveau que débute la seconde partie de la phase causale, nommée *l'attention causale*. À cette étape, une attention mathématique est portée au monde des sensations contribuant ainsi à la construction d'un monde d'objets perceptuels, ce que Brouwer appelle le *monde extérieur du sujet* (Brouwer, 1948). Ce monde est peuplé d'objets, de personnes, et de choses—toutes des constructions produites par l'IP à partir du contenu des perceptions.

Dans l'attention causale, les séquences que construit notre intellect ne sont plus uniquement de nature temporelle. Bien au contraire, c'est notre volonté qui guide notre attention vers les sensations, construisant des séquences de sensations et identifiant ces séquences-ci avec des objets. Le monde des sens est maintenant l'objet de notre regard mathématique. Ceci explique pourquoi Brouwer appelle aussi l'attention causale le *regard mathématique sur le monde* (*mathematical viewing of the world*). Notre intellect « performs an identification of different sensations and different complexes of sensations, and in this way creates iterative complexes of sensations. » (Brouwer, 1948, p.1235). Par exemple, imaginons que notre attention se tourne vers quelque chose de rouge qui, par la suite, se révèle avoir une forme spécifique lorsque nous la manipulons, accompagnée d'une odeur et d'un certain goût lorsqu'on la mange. Nous formons ainsi une séquence comportant des éléments de divers sens : la vue, le toucher, l'odorat, le goût, et arrivons à associer cette séquence à un objet—disons, une pomme. De la même manière, tous les autres objets appartenant au monde de nos pensées sont construits à partir de morceaux de données sensorielles organisés en séquences établies par application répétée de l'IP : « by reiteration of this two-ity

phenomenon, the object can extend to a world of sensations of motley plurality. »  
(Brouwer, 1948, p.1235)

Notons que Brouwer n'exige pas que les données des sens soient organisées de la même façon lors de la construction d'un objet que lors de son identification ultérieure. Par exemple, une fois que nous avons construit le concept POMME<sup>8</sup>, nous pouvons l'obtenir aussi facilement en voyant une pomme qu'en en touchant une. Autrement dit, il est possible d'identifier un objet avec plus d'une séquence de sensations. Ceci illustre une différence importante entre les constructions résultant de l'attention temporelle et celles résultant de l'attention causale, à savoir : la possibilité de permutation des éléments des séquences. En effet, bien qu'il soit évident que les constructions de ces deux étapes de la phase causale diffèrent par leur contenu—temporel ou sensoriel—une autre divergence offre la possibilité de changer l'ordre des éléments dans certaines séquences sans que l'identité de l'objet qui y est associé soit nécessairement altérée. Or, les entités mathématiques construites dans l'attention temporelle ne peuvent garder leur identité si les éléments dans les séquences les identifiant sont permutés. Tous les objets sensoriels sont identifiés à des séquences de données sensorielles dont les éléments peuvent changer d'ordre sans modifier l'identité de l'objet. La causalité chez Brouwer n'est donc qu'une autre construction mathématique de notre intellect : le sujet observe ses sensations mathématiquement et les unifie dans des séquences de plus en plus complexes au sein desquelles un événement est la cause d'un autre événement ; notre intellect construisant une séquence causale dans laquelle ces deux éléments se suivent.

Nous pouvons maintenant mieux comprendre comment l'IP construit des séquences à partir d'éléments temporels et sensoriels et est ainsi capable de construire des objets mathématiques et sensoriels ainsi que les relations entre ces constructions. Il est important de rappeler que l'IP est un processus distinct de ceux responsables de l'acheminement des données des sens : bien qu'il soit apte à manipuler les données des sens, l'IP peut aussi se produire sans contenu sensoriel. On se posera alors la question

---

<sup>8</sup> Nous utilisons les lettres majuscules pour nommer des concepts.

suivante : comment l'IP peut-il être indépendant des sens si sa première occurrence est déclenchée par notre première expérience perceptuelle ? Rappelons que dans la phase d'attention temporelle, le contenu des sensations n'est pas crucial : seule leur occurrence est nécessaire. En effet, selon Brouwer, le simple fait que le sujet soit capable de recevoir les données des sens est suffisant pour déclencher l'IP: « It seems that only the status of sensation allows the initial phenomenon of this transition. » (Brouwer, 1948, p.1235) Notre première expérience perceptuelle pourrait être amodale, puisque le seul rôle des sens est de réveiller notre conscience en lui présentant de l'information, peu importe la modalité sensorielle<sup>9</sup>.

Ceci semble plausible : après tout, le sujet doit avoir certains concepts formels de base pour comprendre son environnement et le contenu de ses sensations. Par exemple, pour distinguer entre une sensation de rouge et une sensation de bleu, le sujet doit avoir des notions comme DIFFÉRENT et DEUX et pouvoir entretenir plus d'un concept à la fois. Des concepts comme DIFFÉRENT, IDENTIQUE, UN, DEUX, et PLUSIEURS paraissent en effet nécessaires pour prendre conscience du contenu de nos sensations. Chez Brouwer, de tels concepts sont accessibles suite à l'occurrence de divers éléments de l'IP. Comme l'IP est nécessaire pour nous permettre de prendre conscience du contenu de nos sensations, elle doit pouvoir se produire sans contenu sensoriel. Pour mieux exprimer la manière dont elle se produit, le prochain chapitre présentera une analyse détaillée des éléments de l'IP.

---

<sup>9</sup> Bien entendu, il est pertinent dans ce cas de savoir s'il est possible d'avoir une sensation amodale—c'est-à-dire, qui n'appartient à aucun sens en particulier, mais compte qui demeure tout de même une sensation. Il semble possible que ceci puisse arriver, par exemple, chez des bébés très jeunes qui n'ont pas encore conscience d'être une entité distincte de leur environnement : même s'il semble qu'ils réagissent à leur environnement, il n'est pas évident de dire s'ils sont ou non conscients du contenu de leurs sensations. De plus, nous verrons dans notre discussion de l'abstraction chez Lawrence Barsalou (chapitre 5) qu'il est possible de dissocier certains aspects de nos sensations, notamment, l'espace visuel et son contenu.

## CHAPITRE III

### ÉLÉMENTS DE L'INTUITION PRIMORDIALE

#### 3.1 L'absence d'une liste exhaustive

Nous avons vu que chez Brouwer, notre Intuition du Temps est responsable de la construction de tous nos concepts, y compris les concepts mathématiques. Cette Intuition n'est pas seulement le mécanisme qui permet la construction de la pensée, il en fournit aussi la matière première : l'intuition construit des objets à partir de ses propres produits. C'est ce qui explique le '*unfolding of itself*' : l'intuition se dévoile elle-même pour créer une multiplicité d'objets à partir d'elle-même. Mais comment une seule intuition peut-elle être responsable de la création d'une si grande variété d'objets? Pour répondre à cette question, il est nécessaire d'identifier les éléments qui font partie de l'IP et de tenter de définir leurs fonctions respectives.

Or, certains problèmes rendent cette tâche difficile. Premièrement, Brouwer n'a jamais produit de liste complète des éléments de l'IP. D'ailleurs, sa liste non-officielle a dû subir un changement majeur vers 1917 dans ce qu'il a appelé le *Second Act of Intuitionism* pour rester fidèle à ses innovations mathématiques (voir les sections sur les choix et les espèces ci-dessous). Cette absence de liste exhaustive est en totale conformité avec l'importance de la liberté du sujet créateur : chez Brouwer, il est impossible d'énumérer à l'avance tous les éléments impliqués dans les constructions mathématiques, puisque ceci limiterait et déterminerait la liberté du sujet. Il est donc impossible d'axiomatiser ou de catégoriser tous les éléments créatifs, puisqu'il est impossible de limiter la liberté du sujet à un ensemble de caractéristiques qui décrivent

ses constructions. C'est une des raisons pour lesquelles Brouwer était si opposé au formalisme de Hilbert et une raison pour laquelle l'intuitionisme est la seule théorie ayant survécu aux théorèmes de Gödel intacte<sup>10</sup>. Comme le dit Heyting, fidèle disciple de Brouwer : « the possibilities in human thinking cannot be reduced to a finite number of rules to be determined in advance ». (van Stigt, 1990, p.291)

Une autre raison pour laquelle notre liste des éléments de l'IP restera incomplète est que les éléments de l'IP ne peuvent pas être séparés les uns des autres, puisqu'ils sont tous primitifs et prennent tous forme en même temps, dès la première occurrence de l'IP. Comme le dit van Stigt :

The 'primordial' nature of the time intuition does not allow it to be further decomposed into more primitive, self-contained and wholly isolable elements; any aspect is bound-up with others in the one act and is itself apparent in various facets. (van Stigt, 1990, p.154).

Nous trouvons toutefois quelque chose qui ressemble au début d'une liste dans sa dissertation doctorale:

There are elements of mathematical building which in the systems of definitions must remain non-derivable, therefore in communication must find expression in a single word, sound, or symbol. They are the building elements which can be read off from the Primordial Intuition; concepts such as continuous, unity, again, and-so-forth are not derivable. (Brouwer, 1907, p.180)

Brouwer semble accepter la possibilité que ces éléments puissent être discernés en regardant la manière dont ils se manifestent dans les constructions de l'IP. Nous allons donc tenter d'énumérer les éléments les plus évidents de l'IP et d'identifier comment ils interagissent avec d'autres éléments en observant certaines constructions de l'IP. Ceci nous permettra d'obtenir plus d'informations sur la façon dont l'IP construit les

---

<sup>10</sup> Les théorèmes de Gödel exposent les limitations des systèmes formels ou axiomatiques qui comprennent une notion formelle de complétude et de décidabilité—comme ceux de Hilbert. Ces théorèmes ne peuvent donc pas s'appliquer à l'intuitionisme de Brouwer, puisque non-seulement il est impossible de restreindre les mathématiques intuitionnistes à un tel système formel, mais en plus la notion intuitionniste de cohérence se retrouve dans la tête du sujet plutôt que dans une chaîne de symboles: une preuve est, d'un point de vue intuitionniste, cohérente si le sujet est capable de l'accomplir sans arriver à une contradiction.

mathématiques. Par conséquent, nous commençons notre discussion par la construction primitive la plus importante de l'IP : la bi-unité.

### 3.2 Bi-unité

Comme nous l'avons vu plus haut, notre première pensée contient deux éléments unifiés, une sensation passée et une présente : « By a move of time one sensation present in consciousness gives way to another sensation in such a way that consciousness retains the former as a past sensation... » (Brouwer, 1948, p.1235) Au lieu de contenir un seul élément, notre première construction mentale a lieu lorsque deux choses sont *simultanément présentées à notre conscience*. Ceci semble nécessaire : pour être capable de percevoir une différence entre deux moments—autrement dit, un changement—et ainsi établir une relation avant/après entre deux moments, le sujet doit tout d'abord avoir une intuition de DEUX accompagnée de la capacité d'appliquer cette intuition à lui-même : « ...*the adding to it* (i.e. positing while retaining what was thought before) *presupposes the intuition of two* » (Brouwer, 1907, p.179). De plus, pour être conscient de quelque chose, il doit pouvoir voir cette chose *comme une chose*, c'est-à-dire, comme un élément dans un monde mental. Il doit donc y avoir plus d'une chose présentée à notre conscience pour que nous puissions en être conscient *comme des choses*, d'autant plus que ce monde d'éléments mentaux doit contenir plus d'un membre pour former une catégorie, et pour remarquer la 'choséi-té' des objets de notre pensée.

Nous avons vu que la bi-unité est construite avec deux éléments : *thing-in-time* et *again-thing*. Le fait que la conscience voit deux occurrences du même type de chose—c'est-à-dire, deux fois des objets de la pensée—un après l'autre implique qu'il doit y avoir un élément de l'IP qui permet à notre conscience d'observer la répétition. C'est le *encore*. Le fait que, dans la bi-unité, deux éléments sont présentés à notre conscience en même temps implique qu'il y ait un élément qui les unifie : ils doivent avoir une propriété en commun—celle d'être un objet de la pensée. Un mécanisme dans l'IP est forcément présent dans l'IP dont la fonction est d'unifier ces moments et de les



présenter comme unifiés à notre conscience. Nous appellerons ce mécanisme la *faculté unificatrice*, mais nous verrons que c'est un des aspects du continu de l'IP. Le fait que ces éléments soient distincts implique qu'il doit aussi y avoir dans l'IP une faculté qui présente ces éléments comme *qualitatively different*, ainsi qu'une propriété qu'ils ne partagent pas. Nous verrons que ceci est une conséquence de deux éléments de l'IP, la *distincteté* et *l'ordre*. Il est aussi important de noter que la mémoire permet de retenir une sensation passée en la présence d'une autre sensation, de façon à ce que les deux soient présentées à la conscience en même temps. Par ailleurs, il doit y avoir une faculté qui permet au sujet d'ignorer le contenu des sensations et de ne retenir que le moment de leur occurrence. C'est le rôle de *l'abstraction*.

Notre brève analyse de la bi-unité nous a donc permis d'identifier plusieurs éléments de l'IP dont le rôle précis dans la construction de la bi-unité et des mathématiques. Elle nécessite cependant une analyse plus approfondie. Nous commencerons ainsi cette analyse par les éléments les plus connus en mathématique, le continu et le discret.

### 3.3 Le continu et le discret

Tout au long de sa carrière, Brouwer a multiplié les efforts pour trouver une théorie du continu qui pourrait répondre aux exigences de son intuitionnisme tout en conservant le pouvoir analytique des théories classiques du continu. Le continu était une priorité chez Brouwer et une des principales motivations derrière un grand nombre de ses innovations les plus connues en mathématiques (van Stigt, 1990, p.309). Tandis que les théories classiques du continu le construisent en faisant appel à des ensembles infinis de points, le continu de Brouwer ne peut être construit de cette façon, étant inséparable du discret et des autres éléments de l'IP :

Since in the Primordial intuition the continuous and the discrete appear as inseparable complements, each with equal rights and equally clear, it is impossible to avoid one as a primitive entity and construct it from the other, posited as the independent primitive. (Brouwer, 1907, p.8)

En effet, l'interdépendance des éléments de l'IP apparaît tout particulièrement dans la relation entre le discret et le continu, l'un et l'autre étant essentiels pour permettre l'IP. À partir de ces deux notions du continu et du discret, il est possible de discerner certains éléments cités plus haut dans notre discussion de la bi-unité : la faculté unificatrice, le discret, et une représentation de la continuité, *l'entre*.

Selon Brouwer, le continu et le discret ne sont pas contraires mais plutôt complémentaires : chacun est utilisé pour la définition et la compréhension de l'autre. Chacun est essentiel pour l'autre dans la construction de la bi-unité : pour être en mesure d'observer le changement, il doit y avoir deux moments distincts — un 'avant' et un 'maintenant' — qui déterminent un intervalle temporel durant lequel le changement est observé. Ceci veut dire qu'il doit y avoir un élément de l'IP qui contribue à la construction d'éléments discrets, un élément qui effectue une division (*splitting*) et qui permet à un moment d'être composé de deux moments (*falling apart*). C'est la *distincteté*. Similairement, pour être en mesure de distinguer entre deux moments, il doit y avoir *entre* eux, quelque chose qui les sépare tout en aidant le sujet à les unifier dans une action de la conscience. L'IP doit donc aussi contenir un élément qui établit des liens entre des éléments discrets et sert d'*entre* pour ces liens. C'est l'intuition du continu :

This intuition of two-oneness, the basal intuition of mathematics, in which the connected and the separate, the continuous and the discrete are united, gives rise immediately to the intuition of the linear continuum, i.e. of the "between," which is not exhaustible and which therefore can never be thought of as a mere collection of units. (Brouwer, 1912, cité dans Benaceraff & Putnam, 1964, p.69)

Aussi, Brouwer distingue entre deux aspects de notre intuition du continu. Le premier est l'acte de tenir ensemble (*holding together*) des éléments discrets sur un continu, tandis que l'autre est ce qui permet au sujet de considérer ces éléments comme séparés, *l'entre* sur lequel la relation de tenir ensemble se produit. Un aspect est une représentation d'un fluide infiniment divisible *entre* deux éléments, l'autre est une action de la part de notre conscience. Un aspect unifie, l'autre sépare. Les deux sont aussi

importants pour l'IP: « We recognize that the continuum intuition, the 'fluid' is as elemental as the thinking-together of more things into one. » (Brouwer, 1907, p.8)

### 3.4 L'ordre

Bien que Brouwer ne le mentionne jamais comme tel, il semble clair que l'ordre doit aussi être inclus comme un des éléments primitifs de l'IP. Comme nous l'avons déjà mentionné, les moments utilisés pour la construction de l'IP doivent être distincts temporellement pour conduire à la perception d'un changement. Puisque le temps s'écoule dans une seule direction, cette *distincteté* temporelle implique un ordre : un moment doit nécessairement être survenu avant l'autre. L'ordre naturel et irréversible du passage du temps doit être conservé dans l'IP. On doit donc y retrouver un élément qui ordonne les sensations et les constructions de façon à les organiser dans une séquence temporelle : « the self-unfolding of the fundamental happening of the intellect creates the time sequence of phenomena of arbitrary multiplicity » (Brouwer, 1933, p.46). Donc, en plus d'avoir une intuition de la *distincteté*, l'IP comporte aussi un élément qui permet au sujet d'ordonner ces éléments discrets sur le continu.

### 3.5 Le *encore*

Nous avons vu que l'IP « makes repetition of 'thing-in-time-and-again-thing' possible ». Ceci identifie un autre élément de l'IP, similaire à l'ordre : le *encore*. Tandis que l'ordre est l'aspect de l'IP qui vise à organiser les éléments discrets en séquences, offrant au sujet la possibilité de constater que chaque élément en précède un l'autre, le *encore* permet au sujet de répéter ses constructions et de continuer ces séquences indéfiniment. Dans la bi-unité, l'*encore* conduit le sujet à noter une répétition, celle de la réitération du 'thing-in-time'. Cette répétition fait plus qu'ajouter un exemple d'un type de chose : elle établit une similarité de nature entre les objets répétés en identifiant un lien entre les sensations.

Ceci étant dit, le *encore* est distinct de la faculté unificatrice : tandis que cette dernière construit un lien entre des sensations distinctes pour nous aider à les présenter de manière unifiée à la conscience, l'*encore* ne fait que mener à la répétition de l'occurrence d'une sensation. L'*encore* est donc simplement une capacité de répéter, de présenter ou de construire à nouveau, tandis que la faculté unificatrice établit une relation entre ces constructions afin d'accéder au partage d'une propriété. Les deux sont essentiels pour la bi-unité : la première perception doit être répétée pour que deux perceptions soient présentes et puissent déterminer un intervalle temporel, alors que la faculté unificatrice doit les unifier pour que le sujet puisse les constater dans un acte de conscience et identifier une répétition. Sans répétition il n'y a qu'un seul élément. Sans l'aspect unificateur, les éléments restent séparés. Notons que le *encore* joue aussi le rôle de fonction de successeur, car la répétition crée de nouveaux éléments dans une séquence temporelle. En tant que tel, l'*encore* est essentiel pour la construction des mathématiques, puisque des applications de cette fonction engendrent des séquences croissantes d'éléments, comme nous le verrons dans notre discussion sur les nombres ordinaux.

### 3.6 Le *et-ainsi-de-suite*

Bien que cet élément ne soit pas directement utilisé dans la construction de la bi-unité, nous l'évoquons ici puisqu'il est directement lié au *encore*. C'est pourquoi. Nous avons vu plus tôt que par ré-itération de l'IP, il est possible de construire une tri-unité, et par ré-itération de ce processus, on peut construire un nombre croissant de  $n$ -ités. Par répétition sans fin de ce processus, on construit ainsi la séquence de nombres ordinaux. Cette répétition sans fin est une généralisation du *encore* : lorsqu'on construit une tri-unité, le processus ayant créé la bi-unité est répété par le *encore*, donnant "thing-in-time and again thing' and again thing'. Autrement dit, il est toujours envisageable d'ajouter un *encore* à l'opération qui crée des  $n$ -ités. L'opération peut ainsi se poursuivre à l'infini: (((((thing-in-time)again)again)again)again)... Le fait que ce processus n'a pas

de fin est une autre conséquence de la liberté du sujet créateur, celle-ci étant incarnée par un autre élément de l'IP, le *ainsi-de-suite*. Ce *ainsi-de-suite* est tout simplement la reconnaissance par le sujet du caractère infini du processus de construction de *n*-ités et du fait qu'il soit possible d'appliquer autant d'*encores* que désiré.

### 3.7 La mémoire

Nous avons vu que Brouwer identifie la mémoire comme l'un des éléments de l'IP dans *Will, knowledge, and speech*: « a moment of life falls apart into two qualitatively different things of which the one gives way to the other but is retained by memory. » (Brouwer, 1933, p.45) Le rôle de la mémoire dans l'IP est assez simple à comprendre : la mémoire est la faculté qui permet à la conscience de retenir un élément passé et de l'observer en même temps qu'un élément présent. C'est donc la mémoire qui aide la conscience à voir deux choses *en même temps*. En outre, il est important de distinguer cet aspect de l'IP de la faculté unificatrice : tandis que la fonction première de la mémoire est de retenir un élément, de le garder à l'esprit pour accéder à la présentation *simultanée* de deux éléments à la conscience, celle de la faculté unificatrice est de construire un lien entre ces deux éléments de façon à aboutir à cette présentation. À mesure que l'IP construit des entités, la mémoire doit toujours être en mesure de retenir un ou plusieurs éléments passés tandis qu'un autre élément est présent : « the human power of memory, which has to oversee these ... languageless constructions originating in the self-unfolding of the primordial intuition » (Brouwer, 1933, p.58).

Notons que malgré l'importance de son rôle dans l'IP, la mémoire est « limited and faillible » (Brouwer, 1933, p.58) et ne peut donc pas garantir la pureté des mathématiques. Ceci étant dit, les constructions résultant de l'application de l'IP dans l'attention temporelle sont exactes et pures, puisqu'elles sont purement intuitives et indépendantes des sens. C'est donc lorsque la mémoire doit être utilisée consciemment que les mathématiques perdent leur pureté. C'est le cas par exemple lors de la

transmission linguistique de la pensée mathématique ou lors de l'utilisation de symboles visant à faciliter des calculs plus complexes.

### 3.8 L'Abstraction chez Brouwer

Bien que le rôle de l'abstraction soit plus facile à observer dans les constructions plus élaborées, il est néanmoins nécessaire dans la construction de la bi-unité : après tout, pour être en mesure de se concentrer sur l'aspect temporel des sensations présentées à la conscience, il doit d'abord être possible de retirer les autres aspects de leur contenu. C'est le rôle de l'abstraction. Ainsi, Brouwer parle de 'abstracting from its emotional content' dans *Intuitionism and Formalism*, tandis que dans *Will, knowledge, and speech*, il évoque une 'abstraction from all content' qui mène au 'temporal two-ity...'. En effet, chez Brouwer, l'abstraction implique la suppression ou l'élimination d'une ou de plusieurs qualités ou propriétés d'une chose. C'est donc grâce à l'abstraction que nos deux premières sensations peuvent se transformer en un 'avant' et un 'maintenant'. Une autre abstraction serait de supprimer le caractère temporel de ces éléments, pour qu'ils deviennent simplement 'premier' et 'second'. Lorsqu'on enlève tout contenu d'une construction, y compris son contenu temporel, on parle alors d'abstraction mathématique : « divesting of all quality results in 'the empty form of the common substratum of all two-ities' »(Brouwer, 1948, p.1237) L'abstraction s'avère aussi essentielle pour la construction d'entités purement mathématiques. Aussi, ce processus permet d'enlever le contenu temporel des constructions de l'IP, ne conservant que le contenu mathématique.

L'abstraction se distingue des autres éléments de l'IP en ce sens qu'elle peut annuler l'effet d'un autre aspect de l'IP. C'est le cas, par exemple, lorsque le sujet fait abstraction de l'ordre dans la construction des nombres naturels ou dans la construction des propriétés mathématiques. Pour bien saisir le rôle joué par l'abstraction dans des constructions mathématiques plus complexes, nous devons tout d'abord comprendre son rôle dans les fondements des mathématiques intuitionnistes.

### 3.9 Comment construire des nombres

Dans notre discussion de la construction de la bi-unité, nous avons identifié plusieurs éléments de l'IP. Bien que nous ayons maintenant une idée de la façon dont ces éléments sont impliqués dans la construction de la bi-unité, nous ne disposons toujours pas d'une explication de la manière dont ils sont capables de créer la totalité des mathématiques. Or, plusieurs éléments de l'IP ne montrent leurs vraies couleurs que dans la construction d'entités mathématiques plus complexes. C'est le cas pour le *encore*, pour l'abstraction, et le continu. Nous commencerons par une construction assez simple : celle des nombres ordinaux.

Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, pour obtenir les nombres ordinaux à partir de la construction de la séquence de  $n$ -ités, il suffit d'abstraire du contenu temporel de ces constructions successives : à partir du 'avant-maintenant', on obtient le 'premier-second', la première paire ordonnée. Cette paire ordonnée peut, par la suite, devenir le premier élément d'une autre paire ordonnée, et une répétition sans fin de ce processus génère les nombres ordinaux. L'abstraction joue clairement un rôle central dans ce processus, en contribuant à isoler les constructions de leur contenu temporel : chaque nombre ordinal est l'homologue atemporel d'une séquence de paires ordonnées de  $n$ -ités emboîtées les unes dans les autres.

Ceci explique pourquoi chez Brouwer les nombres ordinaux précèdent génétiquement les nombres naturels : les ordinaux sont obtenus par abstraction de paires de moments dans le temps, qui sont nécessairement ordonnés. En effet, la direction du passage du temps est conservée dans cette abstraction. Pour obtenir les nombres naturels, il est nécessaire d'accéder à un autre niveau d'abstraction qui élimine l'ordre et ne conserve que la quantité. Les nombres naturels et cardinaux sont donc obtenus par abstraction sur les nombres ordinaux. Pour Brouwer, l'absence d'ordre dans un ensemble est le résultat d'une opération mentale qui mélange les éléments d'une séquence ordonnée et les compare par la suite à la séquence originale en établissant une

correspondance 1-1 et en comptant. Le sujet doit alors avoir accès à des notions telles que la correspondance 1-1 ainsi que l'équivalence et la *distincteté*.

De telles notions sont déjà disponibles pour le sujet à partir des éléments de l'IP identifiés plus haut : la correspondance 1-1 est le résultat de la faculté unificatrice, qui établit un lien entre deux éléments, tandis que la distincteté est le résultat du *entre*. Une telle correspondance (ou son absence) peut être réitérée un nombre indéfini de fois grâce au *encore* et au *ainsi-de-suite*. Quant à la capacité de compter, il est aussi possible de l'obtenir à partir de l'IP en établissant une correspondance 1-1 entre les éléments impliqués dans la construction d'un nombre ordinal et une partie de la séquence de nombres ordinaux. Une fois les nombres ordinaux et naturels construits, il est facile pour le sujet d'obtenir les nombres rationnels et entiers en utilisant des méthodes classiques de construction. Il est inutile de les mentionner ici, car ces constructions n'impliquent pas l'utilisation de nouveaux éléments de l'IP. Pour ce qui est des nombres réels, ils appartiennent à une classe à part, comme d'habitude, et requièrent des outils plus puissants pour leur construction. C'est d'ailleurs afin d'être en mesure de construire les nombres réels que Brouwer a introduit la notion de séquence de choix et d'espèce intuitionniste. Par conséquent, afin de bien cerner ces notions, il est nécessaire de bien comprendre les raisons qui ont motivé leur introduction dans les mathématiques intuitionnistes.

### 3.10 Introduction aux mathématiques intuitionnistes

Comme les mathématiques sont une construction à partir de l'IP, la structure de l'IP devrait se refléter dans certains éléments liés à la pratique des mathématiques. Il est donc peu surprenant de voir que dans les mathématiques intuitionnistes, la même interdépendance entre le discret et le continu persiste, la seule différence majeure étant que dans les mathématiques on fait abstraction de l'aspect temporel des constructions. L'abstraction du contenu temporel de notre intuition du temps nous mène donc à notre intuition du continu mathématique. En mathématiques, le *entre* agit comme le continu



mathématique contenu dans un intervalle. L'intervalle est défini par deux points. Ceux-ci sont des éléments discrets du continu. Le sujet ne peut concevoir un continu que s'il est déterminé par deux points discrets précisément identifiables. De la même manière, le sujet ne peut définir deux points discrets que s'il y a un intervalle entre eux. L'insertion d'un point sur la ligne, une *coupure*, génère deux intervalles dont il est la limite commune. Autrement dit, en mathématiques intuitionnistes, l'intervalle n'existe pas sans le point, et le point n'existe pas sans l'intervalle.

Selon van Stigt, quoique la conception Brouwerienne du continu ait subi des changements considérables (entre autres, suite à ses découvertes en topologie), quatre caractéristiques principales restent au cœur de sa conception tout au long de sa carrière :

- 1) the 'sole-a-priori-element' of the continuum, as for all of mathematics, is 'time';
- 2) the mathematical continuum is a concept, i.e., created by mathematical abstraction and existing in the human mind, the Subject;
- 3) moreover, it is a *primitive* concept, an element of the Primordial Intuition, directly abstracted from the awareness of time (often referred-to as the 'Intuition of the Continuum');
- 4) 'points' can be constructed 'on' a continuum, and have a role to play in the analysis of the continuum as defining the boundaries of intervals into which a continuum can be decomposed; they are not constituent parts of the continuum nor can the continuum be identified with a constructed totality of points. (van Stigt, 1990, p.320)

Nous voyons que dans le quatrième élément, Brouwer semble distinguer entre 'point' et 'élément-du-continu'. Cette distinction s'explique par le fait que les points sont des entités fixes et déterminées, tandis que les éléments du continu doivent partager le caractère dynamique, toujours en devenir, du continu. Rappelons que, pour Brouwer, le continu mathématique doit conserver certaines caractéristiques du continu temporel duquel il est obtenu par abstraction: « For us point and therefore also the points in a set are always something becoming and often something remaining indetermined, contrary to the classical conception, where a point is considered determined as well as finished. » (van Atten & van Dalen 2002, p.11). Nous percevons le temps comme un fluide

homogène et dynamique, et non comme un ensemble de points isolés et statiques. Par conséquent, la construction mathématique s'appliquant au continu est l'analyse celle-ci étant relative à la division du continu en parties homogènes (intervalles) et non en entités discrètes comme des points. Brouwer venait de rencontrer un problème difficile : comment préserver la précision et le caractère défini des mathématiques dans le continu mathématique tout en reflétant le caractère incomplet et dynamique du continu temporel?

Cette question a forcé Brouwer à modifier certains aspects philosophiques et mathématiques de son intuitionnisme pour donner plus de liberté et de pouvoir au sujet dans la construction d'entités mathématiques. La réponse est venue vers 1917. C'est ce que Brouwer appelle le *Second Act of Intuitionism* :

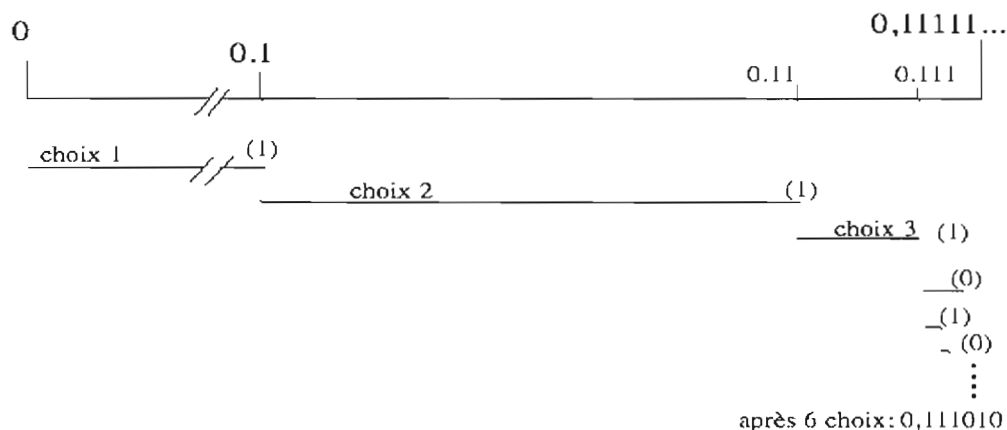
The admission as modality of the self-unfolding of the Primordial Intuition of sequences of mathematical systems proceeding in complete freedom...the admission also, at every stage of the construction of mathematics, of properties to be attributed to mathematical thought-constructions already acquired as new mathematical thought-constructions under the name species.( van Stigt, 1990, p.305)

L'inclusion des séquences de choix et des espèces comme entités mathématiques légitimes ayant leur origine dans l'IP représente un changement radical dans la pratique mathématique: « the broadening of the concept 'sequence' was considered by Brouwer to be the most radical proposal of his reform of the fundamental concepts of classical analysis and, as the introduction of the concept 'species', a radical change from his own earlier views, a 'new insight' » (van Stigt, 1990, p.357)

### 3.11 Le choix

Les choix, en se fondant sur la liberté du sujet, sont des actes incertains et ambigus dont le résultat est difficile à prévoir. Ils sont donc non-dénombrables, à l'image des nombres réels. Néanmoins, ce sont des éléments discrets, c'est-à-dire qu'ils peuvent

faire l'objet de manipulations mathématiques. Imaginons un nombre dont l'expansion décimale est composée d'une séquence sans fin de choix entre 0 et 1 : pour chaque élément dans la séquence, le sujet a le choix entre ces deux chiffres. Une telle séquence peut être identifiée avec un nombre réel : 0.011100100... Dans ces séquences de choix, le segment initial, étant fixe et complété, admet lui aussi des manipulations mathématiques. On peut, par exemple, le comparer à d'autres nombres et l'utiliser dans des opérations mathématiques. Quant au segment final, la 'queue' de la séquence de choix, il reste indéterminé, sa véritable identité demande encore à être établie par les choix du sujet libre. À chaque étape, l'expansion décimale du nombre est donc en devenir, dépendant du choix libre du sujet à choisir entre diverses options. À chaque choix que fait le sujet dans l'expansion décimale, l'intervalle dans lequel il peut faire son prochain choix se restreint, puisque les unités de mesure diminuent à chaque fois qu'un nouvel élément apparaît dans l'expansion décimale. Si le sujet n'a le choix qu'entre 0 et 1 dans l'expansion décimale, tous ces choix seront inclus dans l'intervalle entre 0,1111111111 et 0. Par exemple, si le premier choix du sujet dans l'expansion décimale du nombre est entre 0 et 1, son choix doit se faire dans un intervalle d'un dixième d'unités sur la ligne des réels (soit, l'intervalle entre 0,1 et 0,0). Son deuxième choix est dans un intervalle de un dixième des dixièmes (par exemple, entre 0,10 et 0,11) le troisième dans un dixième des centièmes (par exemple, entre 0,110 et 0,111) etc. Autrement dit, si on associe chaque segment d'une séquence de choix à un intervalle sur le continu, il est possible d'obtenir une séquence d'intervalles qui déterminent un élément du continu, comme le démontre la Figure 3.1 ci-dessous.



**Figure 3.1** Diminution de la taille des intervalles à mesure que le sujet fait des choix dans le développement de l'expansion décimale.

De tels éléments dynamiques sont des ajouts nécessaires à la construction mathématique pour rendre justice de la non-dénombrabilité du continu. Puisque le choix est une activité dynamique indéterminée, sa présence en mathématiques reflète le caractère 'en devenir' et indéterminé de l'intuition du continu temporel du sujet, tandis que le caractère déterminé et fixe des segments initiaux des séquences de choix permet de leur appliquer des opérations mathématiques. L'inclusion des séquences de choix donne donc à Brouwer une méthode constructive pour analyser le continu :

It allows as modality of the self-unfolding of the Primordial Intuition the combining of mathematical entities in finite sequences and of inductively pre-formed mathematical entities in lawlike unlimited proceeding sequences, but also the combining of mathematical entities in sequences proceeding indefinitely either in complete freedom or freedom subject to possibly varying degrees of restriction. (van Stigt, 1990, p.311)

Pour Brouwer, le choix est donc un élément essentiel de l'IP, celui-ci se présentant comme une partie de l'intuition laissant au sujet la liberté de construire certains types d'entités mathématiques tout en introduisant un aspect dynamique aux constructions des mathématiques intuitionnistes. Il est impossible de le dériver à partir des autres éléments

de l'IP. Aussi, doit-il donc être considéré comme un de ses éléments primitifs. Bien que cette addition peut sembler hors du commun, Il est important de rappeler que les mathématiques classiques disposent aussi d'une notion de choix comme l'illustre la méthode de construction utilisée très controversé axiome du choix<sup>11</sup>.

### 3.12 Les espèces

Mis à part le problème du continu, un autre problème de taille pour les mathématiques intuitionnistes avant 1917 était que ces mathématiques ne comportaient pas de notion équivalente à celle de propriété, ce qui rendait la définition de certaines notions importantes (par exemple, les ensembles de points) particulièrement difficile. Pour résoudre ce problème, Brouwer introduisit la notion d'*espèce* dans le *Second Act* mentionné plus haut en la définissant comme suit : « properties supposable for mathematical entities previously acquired ... mathematical entities for which the property 'holds' are called the elements of the species. » (Brouwer, 1948, p.1237). L'introduction des espèces donne ainsi aux intuitionnistes une version constructive de l'axiome de compréhension (i.e., que pour chaque propriété il y a un ensemble de choses ayant cette propriété). En outre, les espèces permettent aux intuitionnistes de former des hypothèses et de les généraliser à des ensembles d'entités mathématiques *préalablement construites*.<sup>12</sup>

On obtient une espèce intuitionniste en isolant une partie d'une entité mathématique construite précédemment. Par exemple, on obtient l'espèce 'nombre ordinal plus petit que 10' par abstraction sur la construction 'nombre ordinal'. Pour déterminer si une construction est un membre d'une espèce, il doit y avoir une construction mentale qui 'insère' la construction dans l'espèce— autrement dit, une preuve que la construction a la

---

<sup>11</sup> Selon cet axiome, pour tout ensemble non-vide, il existe une fonction qui lui associe un de ses éléments.

<sup>12</sup> Notons qu'en limitant la formation d'espèces à l'utilisation d'entités mathématiques déjà construites, Brouwer évite les pièges des paradoxes des théories des ensembles, puisque les ensembles qui génèrent ces paradoxes ne peuvent être construits et donc ne réussissent jamais à déterminer une espèce intuitionniste

propriété. Brouwer appelle cette construction mentale une insertion (*fitting-in*<sup>13</sup>). Dans une telle insertion, on *suppose* qu'une construction mathématique  $x$  a une propriété  $P$ , ce qui veut dire qu'il est possible de prouver  $P(x)$ —c'est-à-dire, que  $x$  a la propriété  $P$ .

Les espèces sont donc comparables à des hypothèses sur les entités : « *A species is a property which mathematical entities can be supposed to possess.* » (Heyting, 1971, p.37). Nous supposons qu'une propriété tient pour des entités mathématiques préalablement construites et cette supposition nous mène à la création de nouvelles entités mathématiques (par exemple, 'nombre plus petit que 10') si le sujet est capable de compléter l'insertion, ou de prouver que cette tentative d'insertion conduit à une contradiction. Par exemple, tenter d'insérer 8 dans l'espèce 'nombre impair' mène à une contradiction, ainsi qu'à l'espèce (peu intéressante) 'nombre qui n'est pas impair'. Une autre option est cependant possible, à savoir : celle où le sujet est incapable de compléter l'insertion mais n'est pas non plus capable de démontrer qu'elle est contradictoire. C'est ce qui arrive lors de problèmes mathématiques dont la solution nous échappe. Dans ce cas, on ne peut pas asserter l'existence ou l'absurdité de certaines réponses au problème. Lorsqu'une insertion mène à une contradiction—Brouwer utilise aussi souvent le terme 'absurdité'—nous avons une preuve qu'un élément *n'est pas* membre d'une espèce. Nous obtenons ainsi la négation intuitionniste.

On rencontre trois étapes principales dans la construction d'une espèce :

- 1) la construction des entités mathématiques qui feront partie du domaine potentiel de l'espèce  $P$ ;
- 2) la construction de l'espèce primaire  $P$  par abstraction d'une autre entité mathématique préalablement construite. (On l'appelle espèce primaire puisque qu'il n'y a toujours pas de preuve qu'il y a des membres du domaine qui peuvent y être insérés.)
- 3) vérification par insertion des éléments du domaine potentiel de  $P$  qui sont bien des éléments de  $P$ .

Une espèce primaire ne peut donc devenir une espèce en bonne et due forme sans qu'on prouve qu'elle contient effectivement des éléments. Notons que l'on peut ici distinguer

---

<sup>13</sup> Il utilise ce terme dans diverses publications en 1907, 1908, et 1923.

les propriétés intuitionnistes de celles de Cantor : tandis que chez Cantor, une propriété génère ses éléments, ce n'est pas le cas chez les espèces, puisque les membres sont déjà construits.

### 3.13 L'insertion

La question importante demeure ici celle de savoir quel aspect de l'IP permet la création d'espèces. Autrement dit, comment le sujet réussit-il à déterminer si la relation d'insertion est établie lorsqu'il détermine si une construction peut être un membre d'une espèce? En premier lieu, on peut identifier les éléments de l'IP responsables de la construction de l'espèce primaire et des éléments du domaine potentiel que nous avons mentionnés dans les étapes 1) et 2) de la construction d'espèces. Ces constructions sont toutes possibles grâce aux éléments de l'IP dont nous avons déjà discuté. Il reste donc l'étape 3), où le sujet tente d'insérer une construction dans une autre.

Comment se produit une telle insertion? Il semble que dans la construction des espèces, le sujet tente d'établir une relation de parenté entre deux constructions : une construction (l'élément du domaine) devient un exemple, un *token* d'une autre construction (l'espèce) qui détermine un *type*, une catégorie. La relation entre une espèce et un de ses membres est donc de nature différente de celle établie par la faculté unificatrice mentionnée plus haut, à savoir : tandis que la faculté unificatrice place deux constructions sur un même niveau de manière à permettre à la conscience de les voir en même temps, l'insertion établit une relation de parenté, où une construction est dans un sens subordonnée à une autre. Bien que Brouwer ne donne pas de détails quant à la façon dont se produit la relation établie par une insertion, il semble cependant plausible de considérer la tentative d'insérer une construction dans une autre comme une tentative de voir si une entité mathématique peut être obtenue par les mêmes étapes impliquées dans la construction d'une autre. Par exemple, si on essaie d'insérer l'entité '8' dans l'espèce 'nombre pair', on s'efforcera de voir si les étapes impliquées dans la construction de

‘nombre pair’ peuvent être utilisées pour construire ‘8’ — c’est-à-dire, en comptant sur la séquence 0, 2, 4, 6... — ce qui est le cas.

Notons que nous ne tenons pas compte de l’habileté du sujet à reconnaître si cette insertion est une réussite ou si elle est absurde comme un phénomène séparé nécessitant l’ajout d’un autre aspect de l’IP. Il semble que cette reconnaissance ne soit que la conséquence d’une telle tentative d’insertion, un acte de la conscience qui reconnaît ses constructions. Tout comme c’est le cas pour l’abstraction, l’observation de la part du sujet du processus de construction ne fait pas partie d’une construction, ce n’est qu’une observation extérieure. Nous voyons donc que la construction d’espèces mathématiques ne requiert qu’un seul élément supplémentaire qui s’ajoute à l’IP — c’est-à-dire, le processus impliqué dans l’insertion d’une construction dans une autre.

### 3.14 Résumé des éléments

Notre analyse de l’intuition primordiale du temps chez Brouwer nous a révélé la présence de plusieurs éléments responsables de la construction des mathématiques : la faculté unificatrice, le *entre*, le discret, l’ordre, le *encore*, le *et-ainsi-de-suite*, la mémoire, l’abstraction, le choix, et l’insertion. Il est important de rappeler que la liste précédente ne peut être complète car il est toujours possible qu’il y ait des innovations mathématiques faisant appel à de nouveaux aspects de l’IP. Ce caractère incomplet est, comme nous l’avons mentionné, une conséquence du fait que les mathématiques intuitionnistes sont le résultat d’actes mentaux d’un sujet libre. Nous remarquons que certaines notions normalement associées aux mathématiques sont absentes de cette liste, tels que : le langage, la raison et la logique. En effet, Brouwer a toujours nié que ces éléments puissent jouer un rôle dans la construction des mathématiques. Nous tenterons de voir, lors de notre exploration des théories modernes de la construction des mathématiques par le cerveau humain, si Brouwer avait raison de les exclure, et si les éléments de l’IP décrits dans ce chapitre dressent un portrait plausible de l’acquisition de



la pensée mathématique. C'est dans cette optique que nous nous tournerons vers la théorie du sens des nombres de Stanislas Dehaene.

## CHAPITRE IV

### DEHAENE ET LE SENS DES NOMBRES

Dans les chapitres précédents, nous avons présenté les éléments de l'IP de Brouwer et avons identifié le rôle joué par chacun dans la construction des concepts mathématiques. Nous sommes maintenant prêts à voir si la théorie de Brouwer peut nous aider à améliorer les théories plus modernes sur l'acquisition de ces concepts. Pour ce faire, on doit tout d'abord se familiariser avec ces théories et présenter leurs lacunes, s'il y a lieu. Dans le présent chapitre, nous présenterons une des théories les plus dominantes dans ce domaine, celle du sens des nombres de Stanislas Dehaene.

#### 4.1 Introduction

Depuis quelques années, Stanislas Dehaene et ses collaborateurs ont développé une théorie selon laquelle les capacités arithmétiques de l'homme sont basées sur deux systèmes cognitifs de base ('core systems'). Tandis que le premier système nous permet de représenter de façon approximative des numérosités<sup>14</sup> comportant un nombre arbitraire d'objets, le second nous aide à représenter un nombre très restreint d'individus de façon précise. Du point de vue phylogénétique et ontogénétique, l'arithmétique formelle doit son existence à ces systèmes. Autrement dit, ces deux systèmes « expliquent nos intuitions numériques de base et servent de fondation pour les concepts numériques plus sophistiqués uniques à l'homme. » (Feigenson et al., 2004a, p.307) Selon Dehaene, la numérosité nous est autant imposée que les autres dimensions

---

<sup>14</sup> La numérosité d'un stimulus est une propriété dont la valeur est uniquement déterminée par le nombre d'éléments qui y sont discernables par nos sens. Par exemple, si on voit un tableau comportant 5 points, la numérosité du tableau est de 5. Si on entend une séquence comportant 5 sons, la numérosité de la séquence est de 5.

fondamentales du monde construit par notre système nerveux : comme notre perception de la couleur, des sons, ou de l'espace, « le sens des nombres peut être considéré comme une catégorie de connaissance biologiquement déterminée »<sup>15</sup> (Dehaene, 2001, p.3).

Dans le présent chapitre, nous voulons évaluer la validité de l'hypothèse de Dehaene selon laquelle il y a continuité ontogénétique et phylogénétique dans l'évolution de nos capacités arithmétiques. Pour ce faire, nous voulons répondre à deux questions : d'abord, au point de vue phylogénétique, est-il plausible que ces systèmes soient le résultat d'une longue évolution génétique, ou bien sont-ils plutôt l'adaptation récente de systèmes uniquement humains? Ensuite, au point de vue ontogénétique, comment les capacités arithmétiques émergent-elles au cours du développement de l'être humain de ces deux systèmes ? Pour répondre à la question de la continuité phylogénétique, nous survolerons les données indiquant la présence de ces deux systèmes chez les animaux, les bébés et les adultes humains. Par la suite, nous évaluerons la description faite par Dehaene ayant trait à la façon dont ces systèmes interagissent pour construire l'arithmétique formelle afin de voir si les mêmes systèmes régissent les habiletés arithmétiques des adultes et celles des bébés humains. Comme nous le verrons à la fin du chapitre, tandis que le support pour la thèse phylogénétique est convaincant, il manque plusieurs détails concernant la genèse de l'arithmétique à partir de ces deux systèmes. Nous tenterons de corriger cette lacune dans le chapitre six, en faisant appel à des notions prises dans l'IP de Brouwer et dans la théorie de l'abstraction de Lawrence Barsalou.

## 4.2 Les données

### 4.2.1 *Baby arithmetic*

Une récente étude menée par Xu et Spelke (Xu and Spelke, 2000) a démontré que les bébés pré-verbaux (agés de six mois) sont capables de distinguer la numérosité de

---

<sup>15</sup> Toutes les citations dans ce chapitre sont traduites de l'anglais par une (ou plusieurs?) partie(s) du cerveau de Jean-Charles Pelland.

stimuli quand les autres variables perceptuelles sont contrôlées<sup>16</sup>. Les données indiquent que les bébés distinguent entre des images comportant 4 vs.8, 8 vs. 16, et 16 vs. 32 éléments. Une autre expérience menée par Xu (Xu, 2003) indique, par ailleurs, que les bébés ne semblent pas capables de discerner entre des images comportant 4 vs. 6, 8 vs. 12, et 16 vs. 24 points respectivement. Dans d'autres expériences, on remarque que les enfants peuvent différencier 1 vs 3, 2 vs. 4 objets (Wynn, Bloom, 1999), mais pas 4 vs. 6 objets (Starkey, Cooper, 1980; Xu 2003).

Ces données indiquent la présence chez l'enfant de ce que Dehaene appelle l'effet de distance : « une diminution systématique et monotone dans la performance de la discrimination de la numérosité à mesure que la distance numérique entre les nombres diminue » (Dehaene, 2001, p.6-7). Autrement dit, plus les stimuli ont une numérosité similaire, plus les enfants ont de la difficulté à les distinguer. Par exemple, cet effet se manifeste dans la capacité des enfants à distinguer entre 8 et 16 points, mais pas entre 8 et 12. De même, ces données montrent que les capacités de l'enfant subissent l'effet de taille : à distance numérique égale, il est plus difficile de faire la différence entre deux petits nombres qu'entre deux grands nombres. Par exemple, les enfants sont capables de distinguer entre des images comportant 8 et 16 points respectivement, et non entre des images comportant 16 et 24 points respectivement, malgré la différence de 8 unités dans les deux cas.

La présence des effets de taille et de distance indique que la capacité de représentation approximative de quantités numériques suit la loi de Weber, selon laquelle la différenciation de deux stimuli est proportionnelle au ratio de leur intensité : plus deux stimuli sont similaires, plus il est difficile de les représenter comme étant différents. Ceci s'applique aux sons et aux couleurs, et selon ces données, aux numérosités : plus deux stimuli comportent un nombre similaire d'éléments discernables, plus nous aurons de la difficulté à les distinguer.

---

<sup>16</sup> Dans ces expériences, on détecte la réaction du bébé en observant son temps de réaction. Celui-ci varie en fonction de si l'image présentée comporte ou non le même nombre de points que celle à laquelle le bébé fut habitué. L'enfant regarde toujours plus longtemps l'image avec une nouvelle numérosité que des images comportant le même nombre de points que celle à laquelle il fut habitué.

Si les expérimentateurs ont raison de dire que les variables non-numériques ont été contrôlées, les enfants pré-verbaux auraient alors une représentation approximative de la quantité numérique puisque leur capacité à distinguer la numérosité des stimuli est limitée à ceux ayant une différence de numérosité suffisamment grande.

Pour ce qui est du système exact postulé par Dehaene, les célèbres expériences de Karen Wynn (Wynn, 1992), ainsi que d'autres montrant des résultats similaires à l'aide de méthodes différentes (Feigenson, et al., 2002) ont souvent été interprétées comme indiquant que les enfants sont capables de représenter de petites numérosités de façon exacte. Ces expériences montrent donc que les enfants sont aptes à représenter de façon exacte au maximum trois objets en même temps car ils réussissent à additionner et à soustraire 1 ou 2 éléments, mais sont néanmoins incapables de différencier 3 vs. 4 ou 3 vs. 8 objets. Ni l'effet de taille ni l'effet de distance ne s'appliquent à cette échelle numérique très restreinte car même si l'on augmente la différence de numérosité les enfants éprouvent toujours de la difficulté à distinguer entre deux stimuli. De plus, les données à cette échelle ne suivent pas la loi de Weber. En effet, la capacité de discrimination est la même lorsque les enfants discernent 1 de 2 et 2 de 3 objets. Comme les données ne partagent ici aucune des propriétés associées avec les données recueillies par Xu et Spelke à de plus grandes numérosités, il semble clair que nous devons faire appel à un second système de base pour expliquer les performances des bébés dans les expériences de Wynn.

Or, il n'est pas évident que les bébés réagissent à la numérosité dans ces expériences, ce qui implique qu'un des systèmes postulés par Dehaene ne soit pas spécialement conçu pour discerner la numérosité. En effet, comme le mentionnent Xu et Spelke (2000), les expériences du type menées par Wynn ont été fortement critiquées en raison de leur incapacité à contrôler adéquatement l'influence d'autres qualités perceptuelles variant avec la numérosité (par exemple, la taille du stimulus). Aussi, « les rares expériences qui ont strictement contrôlé pour certaines de ces variables n'ont trouvé aucune preuve que les enfants répondent à la numérosité d'ensembles comportant un petit nombre de membres »(Xu & Spelke, 2000,p.B2).

Simon (1997) présente une interprétation différente des résultats de Wynn. Le comportement observé chez les bébés s'expliquerait, selon lui, par une transgression des attentes de l'enfant face à la permanence spatio-temporelle des objets et non pas face aux lois mathématiques. Simon a, par la suite, créé un modèle nommé INFANT capable de reproduire le comportement de l'enfant en se basant sur quatre habiletés dont la présence est suffisante pour expliquer la réaction des enfants : 1) la mémoire et les capacités discriminatoires; 2) la capacité à individuer des stimuli jusqu'à concurrence d'environ trois objets par modèle; 3) la capacité de représenter la permanence des objets; et, 4) la capacité de représenter les caractéristiques spatio-temporelles des objets.

Selon Simon, son modèle permet d'expliquer le comportement des enfants sans faire appel à une nouvelle représentation de base, puisque les quatre capacités mentionnées plus haut sont déjà courantes dans les explications du comportement des enfants (Simon, 1998). L'interprétation de Simon fut confirmée par les expériences de Feigenson et al. (2002) qui l'amènèrent à conclure que les performances des enfants dans les tâches de type transgression des attentes s'expliquent par la présence de représentations de type répertoire d'objets plutôt que par des représentations reliées à la numérosité. Dehaene semble avoir accepté l'explication de Simon lorsqu'il mentionne que « plusieurs tâches sont maintenant reconnues comme dépendants de la présence d'un système de répertoire d'objets limité à une représentation de trois objets. »(Dehaene, 2004a, p.221), et affirme qu'il est plausible que ce système contribue à quelques tâches numériques en plus du système de représentation approximative (Dehaene, 2004b, p.12).

Même si l'on peut adhérer à l'interprétation de Simon et qu'elle semble rendre compte du comportement des bébés dans certaines situations, il est important de constater que son système de répertoire d'objets ('object file') n'explique néanmoins pas leur comportement dans les expériences de Xu et Spelke. En effet, les ensembles de points dans celles-ci comportent trop de membres pour que l'on réussisse à déterminer les réactions des nabots grâce à des mécanismes d'attention basés sur l'identité des objets. L'ensemble des données recueillies chez les bébés ne peut donc pas être justifié uniquement par le système de répertoire d'objets, ni par le système de représentation

approximative de la quantité numérique. Par conséquent, l'hypothèse de Dehaene voulant que deux systèmes de base soient responsables de nos capacités arithmétiques semblerait être confirmée par les études faites sur les capacités 'arithmétiques' des bébés humains.

#### 4.2.2 L'animal mathématique

Selon Dehaene, nos capacités mathématiques et le sens des nombres (SDN) qui les génère sont le fruit d'une longue évolution phylogénique : « Le SDN de l'homme a des racines dans l'évolution » (Dehaene, 2004a, p.219). De nombreuses expériences indiquent en effet que l'on retrouve le même genre de dissociation dans les capacités numériques animales observées chez les bébés humains. Bien que leur validité méthodologique soit souvent critiquée (par exemple, Seron & Pesenti, 2001), ces expériences démontrent que nombreux animaux sont capables de représenter la numérosité de certains stimuli<sup>17</sup>, même s'ils ne le font qu'en dernier recours et non spontanément.

Par exemple, des expériences exposant des singes Tamarin de Geoffroy à des séquences de sons comportant un nombre variable de syllabes démontrent qu'ils peuvent spontanément (et donc, sans entraînement) distinguer 4 vs 8, 4 vs 6 et même 8 vs 12 syllabes (Hauser *et al*, 2003). Cependant, ils ne semblent pas capables de discriminer 4 vs 5 ou 8 vs 10 syllabes. De la même manière, les expériences de Church et Meck (1983, et 1984), nous indiquent depuis longtemps que les rats ont une capacité de représenter les nombres de façon approximative, étant capables de distinguer entre des séquences

---

<sup>17</sup> Des expériences ont démontré que la numérosité peut être discernée par les pigeons [Honig, W. K. & Stewart, K. E., *Animal Learn. Behav.* **17**, 134 (1989)], les perroquets [Pepperberg, I., *Ethology* **75**, 137 (1987)], les dauphins [Mitchell, R. W. *et al.*, *J. Comp. Psychol.* **99**, 218 (1985)], les lions [McComb, K., Packer, C., & Pusey, A. (1994), Roaring and numerical assessment in contests between groups of female lions, *Panthera leo. Animal Behaviour*, **47**, 379-387], et même les salamandres [Uller C., Jaeger R, Guidry G., Martin C.: Salamanders (*Plethodon cinereus*) go for more: rudiments of number in an amphibian. *Anim. Cogn* 2003, **6**: 105-112].

auditives comportant, par exemple, 12 et 24 sons. De plus, les rats semblent avoir une représentation amodale de la numérosité, comme le démontre leur capacité d'additionner des séquences comportant des stimuli auditifs et visuels. La diminution de la capacité à distinguer 2 stimuli à mesure que leur numérosité s'approche indique que les capacités des animaux subissent la loi de Weber, suggérant ainsi que le même système de représentation approximative observé chez l'enfant est présent dans le royaume animal.

Pour ce qui est du système de répertoire d'objets, les expériences de Hauser et al. (2000) ont démontré que les singes rhésus peuvent discriminer entre 1 vs. 2, 2 vs. 3, et 3 vs. 4, mais pas 4 vs. 5, ni même 4 vs. 8 ou 3 vs. 8 objets. L'incapacité de distinguer entre 4 v. 8 chez ce primate malgré le ratio de 2:1 ainsi que la limite de 4 à ses habilités de distinction spontanée montrent que le système approximatif ne s'applique pas à de tels numérosités en raison de la trop grande proximité des nombres impliqués. On attribue ces capacités à la présence d'un système de répertoire d'objets similaire à celui présent chez le bébé humain.

Nous voyons donc que les données recueillies dans le royaume animal semblent confirmer l'hypothèse de la continuité phylogénétique des deux systèmes de bases puisque l'on retrouve ici les deux systèmes présents chez les bébés humains.

#### 4.2.3 Homologie Comportementale

Le fait que les comportements des bébés et des animaux suivent la loi de Weber « indique que les animaux et les enfants semblent ne posséder qu'une représentation floue des nombres, dans laquelle l'imprécision grandit proportionnellement au nombre représenté » (Dehaene, 2001, p.7). Leur incapacité à représenter simultanément plus de quatre objets de façon précise laisse paraître qu'ils partagent le même système de représentation de répertoire d'objets. Les données indiquent donc que les bébés humains et certains animaux partagent les deux systèmes de représentation de base postulés par Dehaene.



Étonnamment, le comportement des adultes humains comporte les mêmes caractéristiques. En effet, des expériences ont tendance à démontrer que l'homme adulte prend plus de temps pour déterminer si 8 est plus grand que 7 que si 8 est plus grand que 4 (Dehaene, 1997). On obtient ces résultats que ce soit en comparant des nombres présentés sous forme de points sur des tableaux, sous forme écrite (par exemple, 'huit'), ou en notation arabe (par exemple, '8'). Autrement dit, la loi de Weber s'applique aussi aux capacités arithmétiques de l'homme adulte.

De plus, l'adulte humain semble avoir une limitation similaire quant à sa capacité de représenter un nombre exact d'objets à la fois, comme le témoigne le fait que les performances des adultes qui tentent d'estimer spontanément la numérosité de stimuli visuels présentent un déclin marqué lorsque le nombre dépasse 4.

La similarité des comportements des animaux ainsi que des bébés et des humains adultes mène Dehaene à deux conclusions principales. Premièrement, il constate que le système de représentation approximative de la quantité numérique est présent autant chez l'animal que chez le bébé et l'adulte humain, suggérant une continuité phylogénétique.

La seconde conclusion que Dehaene tire de l'apparente homologie entre les capacités des adultes humains et celles des enfants et des animaux est que l'utilisation de symboles linguistiques ou arabes fait appel à cette représentation analogue de la quantité numérique. Ceci est indiqué par le fait que la comparaison de quantités numériques présentées sous forme symbolique suit les mêmes effets que lorsque ces quantités sont présentées de façon directe à l'aide de stimuli tels des ensembles de points ou des séquences de sons. Par exemple, l'effet de taille est présent même quand la tâche est de déterminer si deux nombres présentés en notation arabe sont identiques (Dehaene & Akhavein, 1995).

Cependant il n'est pas suffisant de démontrer des similarités comportementales pour établir une continuité phylogénétique. Nous devons aussi démontrer des homologies

dans les substrats neuraux associés à ces comportements. La prochaine section exposera donc les données soutenant une telle homologie.

### 4.3 Le cerveau et la numérosité

Dehaene a compilé des données venant de « trois des principales sources de support empirique reliant des processus cognitifs au cerveau—les études de lésion, les enregistrements sur des cellules individuelles et la neuroimagerie » (Bechtel, 2006, p. 31). Ces trois sources de données semblent montrer que notre capacité à représenter la numérosité est localisée dans un sillon horizontal du cortex intrapariétal (SHIP). Pour ce qui est des données dans les cerveaux des animaux et des bébés, elles sont plus limitées en raison des difficultés méthodologiques. Par exemple, dans le cas des bébés, le fait que leur cortex ne soit pas assez développé rend la tâche d'y localiser une fonction cognitive plutôt problématique! Dans ce cas, les données proviennent de troubles du développement comme la dyscalculie.

#### 4.3.1 Études de Lésion

Les patients atteints de pathologies impliquant des problèmes de calcul (par exemple, l'acalculie et la dyscalculie) éprouvent des difficultés considérables à additionner, soustraire, et comparer des nombres, mais dans de nombreux cas leurs capacités linguistiques restent intactes. Par exemple, un certain nombre de patients ayant des lésions dans la région pariétale inférieure gauche peuvent reconnaître, lire, et nommer des nombres sous représentation arabe mais sont incapables de les manipuler mentalement—par exemple, en les comparant (Dehaene, 1997). D'autres parmi eux ne sont capables que d'arithmétique approximative ; additionner exactement ou multiplier leur étant impossible (Dehaene, 1997, p.198). On retrouve ainsi des anomalies au niveau du lobe pariétal (Molko et al., 2004, p.44) aussi bien dans des troubles de développement

impliquant des problèmes de calcul comme le syndrome de Gerstmann ou syndrome de Turner que dans des lésions suite à des accidents donnant lieu à l'acalculie

Selon Dehaene et Cohen, ces troubles de calcul et d'autres opérations requérant la manipulation des nombres surviennent suite à une « désorganisation d'une représentation abstraite de quantités numériques plutôt que des processus de calcul eux-mêmes » (Dehaene, 2001, p.8). Autrement dit, les problèmes de calcul associés à des pathologies comme l'acalculie seraient associés non à une modification d'un mécanisme de calcul, mais plutôt à une représentation amodale de la quantité numérique sur laquelle opèrent des mécanismes tels le calcul et la comparaison de la taille.

Si c'est le cas, il devrait être possible de trouver des cas où certaines opérations applicables sur les nombres resteraient intactes tandis que la représentation des nombres serait compromise. De tels cas existent : Dehaene décrit le cas de Mr. Mar, qui n'est pas capable de faire la bissection des nombres mais qui n'a aucun problème à exécuter cette opération avec d'autres entités comme les jours de la semaine ou les mois de l'année. (Dehaene, 2001. p .9)

Des études de lésions indiquent aussi que certains patients ont des difficultés à effectuer des soustractions, mais pas des multiplications suite à des lésions situées dans les régions postérieures du lobe pariétal, tandis que des lésions dans les régions associées au langage ont souvent l'effet inverse, les patients éprouvant plus de mal à multiplier qu'à soustraire (Lemer et al, 2003; Dehaene et Cohen, 1997; pour d'autres exemples, voir Piazza et al., 2004, p.12). Ici, les dissociations comportementales liées à des lésions suggèrent une division entre les parties du cerveau impliquées dans la manipulation des nombres et celles impliquées dans leur représentation. Les données recueillies par imagerie fonctionnelle par résonance magnétique (IfRM) viennent confirmer et préciser cette dissociation.

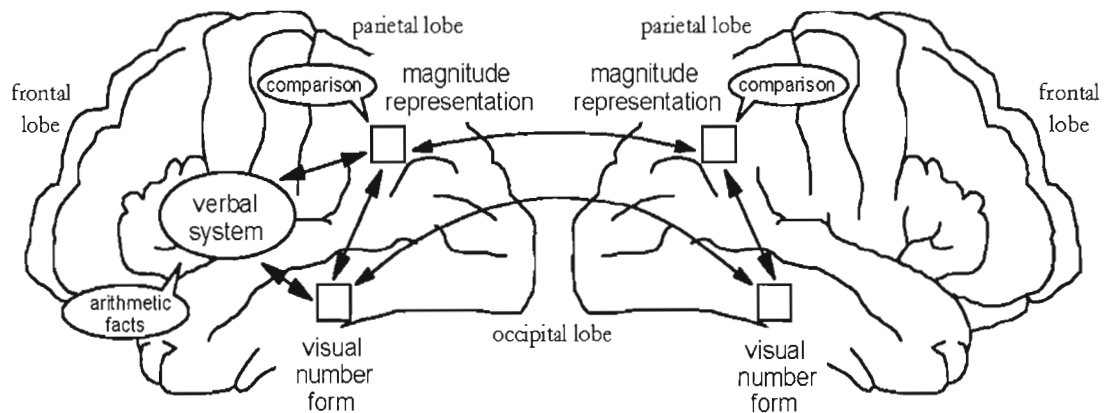
#### 4.3.2 Neuroimagerie et numérosité

Les données produites par IfRM indiquent que nos manipulations arithmétiques approximatives activent principalement le sillon horizontal de la région inférieure des lobes pariétaux du cortex (SHIP). Bien entendu, il est clair que plus d'une région du cerveau est impliquée dans des opérations arithmétiques: "[le SHIP] n'est pas le seul système impliqué dans le traitement des nombres. L'arithmétique mentale repose sur un ensemble hautement composé de processus, la plupart desquels ne sont probablement pas spécifiques au domaine des nombres » (Piazza et al.2004a, p.10). Par exemple, la région du gyrus angulaire gauche, souvent associée au langage, s'active plus fréquemment lors de tâches faisant davantage appel à des représentations symboliques des nombres comme dans le cas de l'addition exacte, nécessitant une représentation symbolique, ou de la multiplication, impliquant la mémorisation de faits appris à l'aide de symboles (Dehaene et al., 1999a, p.972). De son côté, la région supérieure du lobe pariétal postérieur, généralement associée à des représentations visuo-spatiales, s'active la plupart du temps lors de tâches comme la comparaison des nombres, la soustraction, ou l'approximation, introduisant plutôt la manipulation directe de la quantité. Dans les deux cas, malgré l'activation de « systèmes satellites », on note une activation du SHIP. Mais surtout, « dans les expériences plus simples, qui impliquent la détection ou la comparaison de nombres, le SHIP est parfois la seule région spécifiquement engagée » (Piazza et al. 2004a, p.14).

De plus, le SHIP est plus actif lors de tâches de comparaison de nombres que de tout autre type d'objets, et c'est la seule région du cerveau où l'on observe une augmentation de l'activité lors de tâches de détection des nombres versus la détection de couleurs ou de lettres de l'alphabet. Notons aussi que le SHIP s'active même lorsque nous percevons des nombres sans en être conscient, par exemple, lorsque nous voyons une image subliminale comportant un chiffre arabe. Finalement, l'activité du SHIP est indépendante de la modalité sensorielle dans laquelle est présenté le nombre (voir Piazza et al 2004, p.7-10 pour plus de détails)

Toutes ces données semblent soutenir la thèse selon laquelle le SHIP comporte une représentation analogue primitive de la quantité numérique puisque c'est la seule région activée durant toutes les tâches ayant un rapport avec les nombres, et que cette région est active même lorsqu'aucune manipulation n'est effectuée sur le nombre. En effet, selon Dehaene, les données en neuroimagerie « suggèrent que la région du SHIP contient une représentation sémantique de la quantité numérique indépendante des sens et du langage qui peut être accédée via divers codes symboliques ou non ». (Dehaene, 2004a, p.219).

Lors de manipulations sur les nombres, d'autres régions du cerveau—des systèmes linguistiques ou visuo-spatiaux, par exemple — sont chargés de manipuler cette représentation. Quant à ces manipulations, les dissociations observées dans l'activation des systèmes satellites des nombres « suggèrent que les bases neurales du calcul doivent être hétérogènes » (Piazza et al., 2004, p. 10).



**Figure 4.1** La représentation approximative de la quantité dans le SHIP dans les deux hémisphères

#### 4.3.3 Les neurones de la numérosité?

De récentes études en IfRM ont démontré que certains groupes de neurones semblent sensibles à la numérosité. En effet, bien qu'ici aussi les résultats sont encore controversés en ce qui a trait à la méthodologie (voir Dehaene, 2002 pour une brève

discussion) et aux implications (Fias & Verguts, 2004; Feigenson et al., 2004b), les études de Nieder et al. (2002) indiquent qu'il y a dans le sillon intrapariétal du cerveau des macaques des neurones dont la fonction est de reconnaître des nombres. De la même manière, l'expérience de Piazza *et al.* (2004b) observe de l'activité dans un groupe restreint de neurones du SHIP de l'être humain en fonction de la numérosité spécifique de stimuli.

Dans les deux cas, les neurones ne semblent pas encoder le stimulus de façon exacte, mais plutôt de façon approximative. Par exemple, un groupe de neurones spécifique réagissait légèrement si on lui présentait 2 ou 4 points, fortement pour 3 points, et aucunement pour 1 ou 5 points. Comme ce fut le cas dans les données comportementales, les données neuronales indiquent que nos capacités de discriminer en se basant sur la numérosité subissent la loi de Weber: même pour des neurones, plus les stimuli sont différents et plus il est facile de les distinguer.

#### 4.3.4 Résumé des données

Il est plausible que nous ayons ici une preuve biologique de l'homologie comportementale observée plus tôt entre notre système de représentation approximative des nombres et celui de certains animaux : l'activation d'une région du cerveau humain et celle d'une région homologue du cerveau animal sont considérables lors de l'exécution d'une tâche de comparaison de numérosité. Ces données sont capables de défendre fortement l'hypothèse de Dehaene relative à la continuité phylogénétique de notre système de représentation approximative de la numérosité, en prouvant que les mêmes tâches activent des neurones homologues entre des espèces. Or, bien que ces données appuient l'hypothèse de la continuité phylogénétique du système de représentation approximative de la numérosité, les homologies entre le cerveau humain et celui des macaques sont encore loin d'être établies, et nous devons attendre d'avoir plus de détails sur le cerveau des macaques et de l'humain avant que la correspondance décrite par Dehaene puisse être considérée comme étant bien établie.

Les données considérées mentionnent uniquement le système approximatif. Quant au système précis, sa généralité le rend difficile à localiser dans le cerveau : « la représentation d'objets distincts est si fondamentale à la perception et la cognition qu'elle peut éluder les méthodes courantes de neuroimagerie » ( Feigenson et al.2004a, p.312). Cependant, les données comportementales indiquent ici aussi une continuité phylogénétique. De plus, il semble intuitivement clair que les animaux et les enfants doivent eux aussi avoir un système leur permettant de représenter un nombre restreint d'objets de façon précise : sans un tel système les aidant à mémoriser un nombre restreint et précis d'éléments, on comprendrait difficilement comment un animal pourrait se battre contre des ennemis ou cacher de la nourriture à divers endroits. Il semble qu'il faille faire appel au système de répertoire d'objets dans toutes tâches de comparaison, sans quoi la comparaison entre deux éléments s'avèrerait inconcevable.

#### 4.4 De la quantité numérique aux nombres naturels

Les données considérées dans la section 2 indiquent qu'il est fort plausible que l'être humain vienne au monde doté des deux systèmes de représentation postulés par Dehaene. Or, nous ne savons toujours pas comment ces systèmes interagissent pour construire des représentations aussi précises que les nombres naturels, qui servent de base à l'arithmétique précise. Malheureusement, Dehaene reste plutôt vague quand il s'agit d'expliquer la genèse des mathématiques à partir d'un ou de plusieurs systèmes de base : il est en effet non seulement difficile de déceler quel système est impliqué dans la construction des mathématiques formelles, mais il est encore plus difficile de savoir comment procède cette construction.

Bien que Dehaene nous précise où il est plausible de trouver des régions cérébrales responsables de nos capacités arithmétiques, il ne nous donne néanmoins aucune description relative à la façon dont elles s'y prennent. Par exemple, nous ne savons pas comment le circuit linguistique interagit avec le circuit de quantité approximative pour nous donner une intuition précise d'un nombre impliqué dans la multiplication. Même

dans ses modèles plus généraux sur la conscience (par exemple, Dehaene et Changeux, 2004), il n'y a pas de description reliant les processus responsables de la genèse des nombres naturels à la théorie du « global neuronal workspace », théorie selon laquelle certains neurones sont capables de recevoir et d'envoyer de l'information entre divers modules du cerveau pour permettre la conscience.

Dans notre discussion, nous nous intéressons seulement à la création des nombres naturels. Cette limite dans notre analyse n'est pas uniquement motivée par un désir d'alléger le texte : le développement des mécanismes de base des mathématiques comme l'addition dans le cerveau semble être une question distincte de celle du développement des nombres naturels, puisque ces opérations s'appliquent aussi à des quantités autres que des nombres autant chez l'homme que l'animal. En effet, autant chez les animaux que chez les humains, il est possible d'additionner des quantités non-numériques comme la taille (voir Gallistel & Gelman, 2000). Certains animaux comprennent, par exemple, que l'ajout d'une quantité d'éléments à une autre quantité d'éléments forme une somme plus grande que les deux quantités individuelles. De plus, plusieurs proies calculent le nombre total de prédateurs qui les entourent dans des situations de chasse pour se faire une idée de la taille de la menace qui les entoure.

#### 4.4.1 Combien de systèmes de base ?

Il est difficile de savoir si Dehaene croit que nous avons un ou plusieurs systèmes de base responsable de nos capacités mathématiques. À certains endroits, Dehaene semble affirmer que le circuit de la quantité approximative est le circuit mathématique de base, celui sur lequel toutes nos représentations mathématiques sont fondées :

ce mécanisme [approximatif] sert de noyau fondamental des connaissances numérique, fournissant à l'homme un outil de départ qui permet l'acquisition de symboles numériques. La représentation analogue des quantités numériques sert de base pour notre intuition de ce qu'une grandeur numérique donnée signifie. (Piazza et al., 2004a, p.6)



Plus directement, Dehaene et ses collaborateurs supposent que « ... [le système approximatif], le plus fondamental, est à la base de nos capacités arithmétiques. »(Molko et al., 2004, p.45).

Cependant, Dehaene considère aussi, dans certains passages, qu'il y a deux noyaux de base à nos habiletés arithmétiques:

deux systèmes primitifs de représentation numérique distincts sont présents dans l'enfant humain et d'autres espèces animales (...) [C]es systèmes expliquent nos intuitions numériques de base et servent de fondation pour les concepts numériques plus sophistiqués qui sont uniquement humains.(Feigenson et al 2004a, p.307).

Il est possible que Dehaene tente d'exprimer l'idée que les deux systèmes sont nécessaires pour la construction de l'arithmétique précise, mais que la représentation approximative est dans un sens plus primitive, parce qu'elle contient les bases du concept de nombre, comme l'indique l'activation du SHIP dans la reconnaissance subliminale de nombres. Autrement dit, tandis que le système approximatif fournit la matière de base, le système de répertoire d'objets, auquel s'ajoutent certains autres systèmes encore à déterminer, vient le modifier. Mais comment procèdent ces modifications ? Ici encore, les descriptions de Dehaene, étant limitées à l'énumération de certains facteurs, manquent de précision et n'expliquent pas comment ces derniers contribuent à créer les nombres :

[T]ous les enfants naissent avec une représentation de la quantité qui leur donne la signification de base de la quantité numérique. L'exposition au langage, à la culture, et à l'éducation mathématique, mène à l'acquisition de domaines de compétence additionnels comme un lexique de mots pour les nombres, un ensemble de numéraux pour la notation écrite, des procédures de calculs, et ainsi de suite. (Dehaene, 2001, p. 12)

#### 4.4.2 Les interprétations de Carey

Pour remédier à ce manque de précision de la part de Dehaene, Suzanne Carey (2001) propose deux façons d'interpréter la relation entre les nombres naturels et le système de représentation approximative décrite par Dehaene. La première interprétation

veut que les symboles produits par le système linguistique ne fournissent que des symboles externes qui viennent se mettre en correspondance avec des entités déjà présentes sous forme de « proto-liste » dans le système de représentation approximative. Quant à la seconde interprétation, la représentation approximative des quantités numériques, elle ne contient pas d'homologues aux nombres naturels. Elle est ainsi modifiée par des systèmes externes, grâce à des facteurs culturels, pour produire des listes de numéraux et, éventuellement, les nombres naturels.

La première interprétation peut sembler plausible si l'on considère que Dehaene postule que les développements culturels de haut niveau en arithmétique émergent à travers le développement de liens entre cette représentation analogue de base (la 'ligne numérique') et d'autres représentations verbales et visuelles de notation numérique. » (Carey, 2001, p.2). Ceci étant dit, des textes plus récents (publiés après la critique de Carey) montrent que Dehaene privilégie plutôt la seconde interprétation : « la représentation analogue de la quantité de l'humain n'est probablement pas passivement liée à des symboles numériques, mais peut être modifiée de façon significative dans le processus – au moins par rapport à sa précision (fraction Weber), mais possiblement plus profondément, par exemple dans ses représentations de grands nombres et de base 10 » (Dehaene, 2004b, p.8)

Carey tente de réfuter cette seconde interprétation de deux façons. Premièrement, en affirmant que le système approximatif ne contient pas de relation de successeur entre deux numérosités. Cette relation est pourtant nécessaire dans l'apprentissage des nombres naturels pour permettre aux enfants de comprendre que pour tout mot correspondant au nombre  $n$ , le prochain mot correspond au nombre qui suit  $n$ . Or, il semble possible de concevoir, au contraire, que ce système comporte déjà une forme approximative de la relation de successeur. La prochaine section tentera d'expliquer cette possibilité.

#### 4.4.3 Le SHIP et la continuité

Nous avons vu comment le SHIP semble être un candidat plausible pour la localisation cérébrale d'une représentation approximative de la numérosité. Dehaene admet cependant qu'il n'est actuellement pas possible de déterminer complètement si le SHIP est dédié au traitement de quantités purement numériques ou s'il est aussi impliqué dans le traitement d'autres dimensions continues comme la taille physique ou la luminosité. Une étude récente suggère néanmoins que les quantités numériques et la taille sont comparables via une seule représentation analogue d'un continuum localisée dans le SHIP : « la représentation interne du nombre et de la taille (...) partagent des ressources neurales communes »<sup>18</sup> (Pinel et al., 2004 p.8).

Nous pensons que pour permettre des telles comparaisons, un tel pseudo-continuum doit comporter une forme d'ordre. Le fait que le SHIP soit un candidat pour une représentation générale d'un continuum capable de servir de base pour plusieurs types de comparaisons, suggère qu'une forme d'ordre doit être présente dans plusieurs représentations de quantités continues—incluant la numérosité<sup>19</sup>. Par exemple, pour dire qu'un objet est plus gros ou qu'une numérosité est plus grande, il doit y avoir une valeur qui représente la taille—au moins de façon implicite—dans le continuum. En outre, lorsqu'on compare deux objets, il est possible de dire qu'un objet est plus gros qu'un autre grâce à la valeur de comparaison « taille ». S'il est possible de comparer deux numérosités approximatives et décider celle qui est la plus grande, il doit y avoir une valeur de comparaison qui nous permet de les distinguer : soit l'une est à gauche de

---

<sup>18</sup> Dans ce cas, les représentations de ces quantités continues seraient distribuées de façon analogue à celles de catégories d'objets comme les visages ou les autos, où les neurones dédiés à chaque type de représentation ne sont pas tous regroupés en un seul endroit mais plutôt distribués dans une aire cérébrale de façon à se chevaucher le long d'un circuit. Notons que d'autres comparaisons de dimensions continues subissant toutes un effet de distance activent aussi des régions intrapariétales (par exemple, comparaison d'angles ou de longueurs de lignes), mais certaines non (par exemple, comparaison de luminosité, ou de férocité des animaux).

<sup>19</sup> Si cette réflexion tient la route, les pseudo-continuum sur lesquels nous basons nos comparaisons ne sont pas des homologues biologiques de la ligne des nombres réels, puisqu'il est possible au moins en partie d'ordonner les éléments qui y sont projetés, ce qui n'est pas le cas chez les réels. Cette réflexion semble contredire la théorie de Gallistel et Gellman (2001), selon laquelle les réels précèdent les nombres naturels phylogénétiquement et ontogénétiquement. Nous n'avons pas assez d'espace pour détailler davantage leur théorie ici.

l'autre, ou est plus haute, ou contient plus d'éléments que l'autre. Après tout, ces comparaisons donnent plus d'informations que la distinction différent/identique: elles préconisent l'une des entités comparées par rapport à une valeur de comparaison—dans le cas qui nous intéresse, il s'agit de la numérosité. Cette valeur de comparaison impose une forme d'ordre dans nos représentations analogues, puisqu'il est possible d'ordonner une partie—mais pas nécessairement la totalité—des représentations.

Nous utilisons ici l'expression « une forme d'ordre » parce que le caractère flou des représentations de quantités continues pourrait empêcher de spécifier le prochain élément (c'est-à-dire, le successeur) dans une séquence : par exemple, bien qu'il soit possible de dire lequel de deux nombres est le plus grand, on ne peut garantir de spécifier celui qui vient immédiatement après le plus grand dans l'ordre de grandeur. Ceci étant dit, on peut aussi envisager que le prochain élément soit identifiable dans la mesure où il est possible de considérer deux quantités continues comme venant immédiatement une après l'autre si aucune autre quantité n'est discernable entre elles. Cette interprétation pourrait cependant être perçue comme violant le caractère continu de ces représentations en les rendant discrètes. Cette conclusion semble néanmoins pouvoir être évitée si l'on se rappelle que l'être humain, étant limité par ses sens, son cerveau et sa mortalité, n'est pas capable de discerner une infinité de divisions dans un continuum. Dans ce cas, nous retrouvons donc une forme de relation de successeur dans notre représentation de la numérosité : au début, cette relation revêt la forme de « prochaine numérosité que je peux percevoir ». À mesure que le système se développe, cette relation vient elle aussi à se préciser et devient le « prochain nombre auquel je peux penser ».

Nous venons de présenter la possibilité que le système de représentation approximative de la numérosité associé au SHIP contienne une forme d'ordre, puisqu'il sert de base pour des comparaisons. Nous avons aussi mentionné comment cet ordre peut soutenir une forme approximative de la relation de successeur limitée par nos capacités discriminatoires. Par conséquent, si notre hypothèse est valable, on peut envisager que ce système contienne une forme de relation de successeur pouvant servir

de base à l'induction faite par les enfants lors du mécanisme de comptage. De ce fait, la première objection de Carey voulant que le système approximatif n'ait pas une telle relation ne s'applique pas ici. Dans la prochaine section, nous verrons comment la seconde objection de Carey paraît plus plausible, bien qu'elle ne donne pas assez de précision sur le développement de nos capacités arithmétiques.

#### 4.5 L'ontogenèse selon Carey

La seconde raison proposée par Carey pour réfuter la seconde interprétation de Dehaene (section 3.2) est que les représentations comportant un nombre restreint d'éléments jouent un rôle important dans l'apprentissage des mots pour les nombres. En effet, les enfants apprennent d'abord à dire 'un', 'deux', puis 'trois', etc. L'apprentissage de ces mots est selon Carey une étape cruciale dans la construction des concepts de nombres naturels. Or, on ne dispose d'aucune expérience où des enfants apprennent à compter en commençant par 'environ 28', pour poursuivre ensuite avec 'un', 'deux', etc. Il est évident que les mots qu'on mémorise en apprenant à compter expriment des numérosités trop petites pour être fournies par le système approximatif. Carey semble donc avoir raison de suggérer que le système de répertoire d'objets est celui utilisé, à ce stade, dans l'apprentissage des concepts de nombres.

Selon Carey, ces interprétations ne mènent nulle part. Elle admet, avec Dehaene, que le circuit de quantité approximative est un système de base pour l'arithmétique, mais suggère que ce système soit intégré avec d'autres pour produire les nombres naturels seulement après la construction de listes de numéraux par d'autres systèmes—incluant le système de représentation de répertoire d'objets. Cependant, comment ces listes sont-elles construites ? D'après Carey,

le problème de la façon dont l'enfant construit une représentation d'une liste de numéraux se décompose en trois sous-problèmes reliés. Le premier : comment l'enfant apprend-t-il la liste elle-même, 'un, deux, trois, quatre, cinq, six... ?' Le deuxième : comment l'enfant apprend-t-il la signification

de chaque symbole dans la liste. Le troisième : comment l'enfant apprend-t-il que la liste elle-même représente les nombres (...) ? (Carey, 2001, p.50)

#### 4.5.1 Problème 1 : l'apprentissage de listes

Pour répondre au premier problème, Carey fait remarquer que les enfants ont la capacité d'apprendre des listes ordonnées sans nécessairement en connaître la signification<sup>20</sup>, comme les jours de la semaine ou les lettres de l'alphabet. Selon Carey, cette capacité fait partie d'un système de connaissance de base, celui d'ordonner des éléments dans une liste. Carey poursuit en postulant que ce système est un des quatre systèmes qui jouent un rôle dans l'ontogenèse de l'arithmétique. Cependant, aucun substrat neural spécifique n'y a encore été associé.

Notons que la possibilité présentée dans la section 3.3 selon laquelle le système approximatif contiendrait déjà une forme d'ordre pourrait invalider ce postulat, puisque la capacité d'ordonner des éléments dans une liste pourrait découler directement de notre représentation d'un continuum quelconque. Dans ce cas, on pourrait expliquer l'apprentissage d'une liste sans en connaître la signification en associant des symboles à certaines représentations approximatives qui sont déjà ordonnées. Si c'est le cas, il est faux de dire comme Carey que la représentation approximative ne joue pas de rôle dans la construction de listes de numéraux puisqu'elle leur fournirait le concept d'ordre. Même si Carey a raison, la solution qu'elle apporte au premier problème manque de précision et donne lieu à plusieurs questions, à savoir : comment ce système interagit-il avec les autres pour générer nos capacités arithmétiques ? Comment se développe-t-il ? A quel endroit se cache-t-il dans le cerveau ?

---

<sup>20</sup> Notons que l'expérience de Brannon et Terrace (1998) confirme cette capacité d'ordonner des stimuli chez certains primates.

#### 4.5.2 Problème 2 : l'apprentissage de la signification de symboles numériques

Pour tenter de répondre au deuxième problème posé par Carey, nous devons tenir compte de certaines données sur l'apprentissage de la signification des nombres. Wynn (1990; tiré de Hauser et al. 2004, p.2) décrit, ainsi, un enfant qui sait compter jusqu'à six mais qui ne connaît que la signification précise de 'un': au départ, 'un' veut dire 'singulier', tandis que tous les nombres à partir de deux, deux inclus, veulent dire 'plus que un'. L'enfant apprend la signification de 'deux', et ensuite celle de 'trois'. Wynn fait remarquer, avec intérêt, qu'elle n'a trouvé aucun enfant ayant appris la signification de 'quatre' qui ne connaissait pas aussi la signification de tous les nombres plus grands que quatre dans la liste. Puisque les enfants font une distinction sémantique qui ne correspond pas aux représentations approximatives — au lieu d'associer des grandes quantités à des grands chiffres, ils associent tous les chiffres sauf 'un' aux grandes quantités — ce système ne joue probablement pas de rôle à ce stade dans l'apprentissage de la signification des séquences de numéraux.

En outre, comme la distinction entre pluriel et singulier sert de première interprétation à la séquence comptée par les enfants, ces données indiquent que le langage est un des systèmes cognitifs de base reliés à la construction des nombres naturels, comme Dehaene le suggère dans sa deuxième conclusion mentionnée plus haut. Selon Carey, « la syntaxe/sémantique d'un langage naturel contient des représentations numériques. C'est-à-dire, tous les langages structurent en partie les phrases en termes de nombre » (Carey, 2001, 50). Bien que l'on retrouve de nombreuses variations, l'on doit admettre que tous les langages ont des termes pour quantifier leur environnement, ne serait-ce que des termes comme 'un', 'deux', et 'plusieurs'.

Ceci expliquerait entre autres pourquoi il peut prendre 20 ans pour apprendre à un chimpanzé à compter jusqu'à neuf à l'aide de symboles : l'absence de langage empêche d'organiser une correspondance sémantique entre des quantités et des nombres (Dehaene, 1997). De plus, ceci expliquerait pourquoi les peuples ayant des langages limités dans leur habilité à quantifier ne peuvent qu'effectuer des calculs approximatifs:

ils ne disposent pas de symboles précis pour quantifier. Aussi, ils ne peuvent affiner leurs représentations numériques à l'aide du langage (Pica et al., 2004).

Une question se pose cependant : où le langage prend-il ses représentations numériques? Cette question est d'une grande complexité ; nous ne tenterons pas d'y répondre ici. Il nous semble possible qu'il les obtienne dans la représentation approximative de la numérosité, puisque cette représentation est accessible à de nombreux autres systèmes cognitifs comme ceux impliqués dans le calcul, et que le langage semble y faire appel dans des tâches de détection subliminale de nombres arabes. Ceci laisserait une place indirecte à la représentation approximative à ce stade d'apprentissage. La solution de Carey soulève donc bien des questions complexes sans toutefois nous donner beaucoup de précision : nous ne savons pas comment et quand le langage interagit avec les autres systèmes pour construire nos capacités mathématiques et devons maintenant nous demander où le langage puise ses distinctions numériques.

#### 4.5.3 Récursivité : linguistique ou mathématique?

La position de Carey selon laquelle le langage joue un rôle dans l'acquisition du concept de nombre soulève une question sur le rôle du langage, à savoir : quel aspect du langage est impliqué dans l'acquisition des mathématiques ? Est-ce la sémantique, la syntaxe, ou autre? La réponse semble devoir inclure une référence à la récursivité. Or dans ce cas, pourquoi associer la récursivité au langage, quand celle-ci semble être plus générale? On peut, par exemple, appliquer la récursivité à des notions non-linguistiques, comme les mathématiques, et même les couleurs, notamment lorsque l'on tente d'obtenir des degrés de plus en plus pâles de rouge. Dans ce cas, on part du rouge, on le pâlit, et on applique le même processus au degré plus pâle ainsi obtenu. Il s'agit ainsi d'un processus récursif qui semble ni linguistique ni mathématique. Il paraît d'usage d'associer la récursivité avec le langage. Par exemple, Chomsky, dans son programme minimaliste, émet l'hypothèse que le langage, dans le sens le plus étroit (FLN), « only



includes recursion and is the only uniquely human component of language » (2002, précis)

Un exemple de cette domination du langage est manifesté dans notre discussion relative aux peuples aux langages limités : ces peuples ne disposent en effet pas de concepts mathématiques développés en raison d'un langage encore trop rudimentaire. Or, l'opposé est tout aussi plausible : leur langage est appauvri parce que leurs concepts sont limités, puisqu'ils n'ont peut-être jamais eu besoin de les développer. Ceci confirmerait une des thèses de Brouwer quant à la nature du langage : celui-ci se développerait, dit-il, en relation avec la complexité des échanges de volonté. Par conséquent, il reste encore peu développé dans les sociétés où ces échanges demeurent plus simples.

#### 4.5.4 Problème 3 : le passage des listes aux *nombres*

La solution au troisième problème de Carey est elle aussi peu détaillée. Elle propose que l'enfant fasse une induction sur le processus de comptage à partir de la relation de successeur. Selon elle, le système de répertoire d'objets contient un analogue de la relation de successeur capable d'expliquer l'induction faite par l'enfant, mentionnant que « l'ouverture d'un autre répertoire d'objet est un analogue naturel à [l'opération] d'ajouter un » (Carey, 2001, p.52). L'enfant apprendrait la signification des nombres naturels en faisant le lien entre l'opération de compter et celle d'ouvrir un répertoire d'objet en remarquant que, dans les deux cas, on ajoute une unité. Dans ce cas, les nombres naturels seraient les objets obtenus en ajoutant une unité dans la séquence de comptage. Notons cependant que ce qui initie cette induction chez l'enfant n'est pas précisé. De plus, il n'est pas clair qu'une telle induction permette à l'enfant de comprendre le concept de NOMBRE en tant qu'élément d'une séquence sans fin, plutôt que de lui donner simplement la signification des premiers chiffres. Aussi, il n'est pas évident de voir comment l'ouverture d'un répertoire d'objet est un analogue naturel de l'opération de l'addition. Carey propose que les enfants apprennent à compter en faisant

une analogie entre l'ordre des chiffres dans la liste ('deux' vient après 'un', 'trois' vient après 'deux'...) et l'addition d'un objet dans le système de répertoire, mais, encore ici, l'addition d'un nouvel objet semble être une opération bien différente de celle d'ajouter 'un' dans une liste de chiffres — entre autres, pouvant s'appliquer à une variété d'objets non ordonnés de la pensée, comme les couleurs (Carey, 2007).

Ceci étant dit, une expérience récente pourrait confirmer que « object-file representations are a better candidate than analog magnitude representations for the system of core knowledge that underlies the learning of the explicit integer list representation of number. » (Carey, 2001, p.52). Dans ces expériences, les expérimentateurs ont demandé à des enfants âgés entre 3 et 5 ans d'estimer le nombre d'éléments dans des ensembles sans les compter (Carey, 2007). Le but de l'expérience était ainsi de tenter d'identifier les systèmes de bases impliqués dans l'apprentissage des listes de chiffres. En raison de la différence d'âge des enfants, il n'est pas surprenant de constater une variation considérable dans leur connaissance de la signification des listes de chiffres. En effet, tandis que certains n'étaient en mesure que d'utiliser 'un' correctement pour identifier le nombre d'objets dans une collection, d'autres pouvaient aisément distinguer des collections comportant jusqu'à 10 éléments en les comptant, et réussissaient aussi procéder à des additions de base. Par exemple, face à une collection de 7 objets, ces derniers ayant bien mémorisé la signification de 'huit', étaient en mesure d'ajouter un élément à la collection pour qu'elle en compte 8.

Dans cette étude, on remarque que plusieurs enfants connaissant uniquement la signification de 'un' estimaient fréquemment à 'deux' la numérosité d'ensembles comportant entre 5 et 10 éléments. De même, les enfants ayant compris la signification de 'deux', avaient tendance à utiliser 'trois' pour estimer la numérosité de ces mêmes ensembles. Un résultat est particulièrement intéressant : plusieurs enfants connaissant la signification de la liste des 10 premiers chiffres étaient totalement incapables d'estimer la numérosité d'ensembles comportant entre 5 et 10 éléments, répondant fréquemment « cinq » pour des ensembles comportant 6, 8, ou 10 éléments. Pourtant, lorsqu'ils peuvent compter les éléments dans ces ensembles, ils sont capables d'identifier leur

numérosité avec succès. De plus, plusieurs enfants connaissant la signification de la liste des chiffres sont incapables de déterminer la taille relative des ensembles comportant un nombre relativement élevé (plus que 4) d'éléments. Par exemple, ces enfants ne parviennent pas à déterminer si l'expression '10 poissons' indique la présence de plus de poissons que l'expression '6 poissons'. Bien que ces enfants sachent comment compter des objets dans des collections, ils sont incapables d'associer ces chiffres à des tailles relatives d'ensembles, ce qui semble indiquer l'absence d'une correspondance avec les représentations approximatives.

En effet, deux expériences menées dans cette étude démontrent que, tandis que la signification de 'un' à 'quatre' est disponible avant l'apprentissage des listes de numéraux, les chiffres plus grands que 4 n'entrent en correspondance que 6 mois après cet apprentissage. De plus, les évaluations que produisent les enfants pour des ensembles de 4 éléments ou moins ne confirment pas la présence de représentations approximatives, puisque l'effet Weber et d'autres signatures typiques de ce système sont absents des données. Selon Carey, ces données suggèrent fortement que les enfants n'ont pas besoin d'établir une correspondance entre la liste de chiffres et des représentations du système approximatif pour en connaître la signification, puisque dans ces données, ces derniers connaissent la signification des listes de chiffres mais ne semblent pas capables de l'utiliser pour estimer des numérosités, ce qui est une tâche normalement associée au système approximatif. La correspondance entre les chiffres plus grands que 'quatre' et les représentations du système approximatif se produiraient plutôt après l'apprentissage des listes de chiffres. Carey conclut donc que la signification de 'un' à 'quatre' n'est donnée uniquement que par le système de répertoire d'objets, indépendamment des représentations approximatives. Ceci signifierait que le système approximatif ne joue pas de rôle dans l'apprentissage de ces listes, et donc que le système de répertoire d'objets contient bien un aspect numérique.

Bien que ces données paraissent confirmer une telle conclusion, il est encore prématuré d'affirmer que le système de répertoire d'objets comporte une représentation numérique. En effet, une telle conclusion pourrait avoir comme effet de modifier le

système de répertoire d'objets de façon à lui conférer plusieurs propriétés sans toutefois expliquer leur provenance. Par exemple, outre l'aspect numérique postulé par Carey, il semblerait aussi possible de conclure que le système de répertoire d'objets doit contenir une représentation de la couleur, puisque plusieurs études relatives à l'apprentissage des couleurs, présentent des données similaires à celles rapportées par Carey. En effet, comme c'est le cas pour les chiffres, les enfants apprennent les listes de noms de couleurs sans en connaître la signification. De plus, à un stade de leur apprentissage, les enfants connaissent certes la signification des listes de couleurs (par exemple, sont capables de sélectionner un objet rouge parmi des objets d'autres couleurs) mais sans être toutefois en possession du concept COULEUR, étant encore incapables de regrouper des objets en fonction de leur couleur (Sandhofer & Smith, 2001). Dans ce cas, l'enfant peut identifier des objets de diverses couleurs grâce à sa liste, mais ne semble pas avoir conscience qu'il s'agit de couleurs : l'enfant peut associer le mot 'rouge' à des objets rouges sans disposer du concept ROUGE comme exemple de la catégorie COULEUR.

Ceci rappelle les données rapportées par Carey : l'enfant peut identifier des collections de 8 objets en les comptant, mais ne détient néanmoins pas le concept HUIT comme un exemple du concept NOMBRE, étant incapable d'estimer des numérosités de cette taille. Ceci démontre l'absence d'une correspondance entre le système de représentation de numérosités approximatives et les nombres appris dans ces listes, ce qui pousse Carey à penser que le système approximatif ne joue pas de rôle dans l'apprentissage de ces listes et à attribuer un aspect numérique au système de répertoire d'objets. Les résultats mentionnés, relatifs aux couleurs, démontrent également l'absence d'une correspondance entre le système qui représente la couleur et les couleurs apprises dans ces listes. Pouvons-nous ainsi dire que le système de représentation des couleurs n'est pas impliqué dans l'apprentissage des listes de couleurs, et que nous devons, par conséquent, attribuer une forme de représentation des couleurs dans le système de répertoire d'objets? Cette conclusion s'avère bien difficile à accepter. Or, dans les deux cas, il apparaît que les enfants comprennent bien la signification des termes appartenant

à une catégorie pour identifier des objets qui en font partie sans toutefois qu'une correspondance ait été établie entre le système de représentation responsable de cette catégorie et la signification des termes appris.

Au lieu de justifier l'ajout d'un aspect numérique au système de répertoire d'objets, nous pensons que les données recueillies par Carey suggèrent l'hypothèse selon laquelle le système de répertoire d'objets viendrait plutôt interpréter le système de représentation approximative pour obtenir des représentations numériques précises pour 'un', 'deux', 'trois' et 'quatre'. Nous présenterons cette hypothèse dans la partie 6.2 puisqu'elle repose sur des notions issues de la théorie de l'abstraction de Barsalou, qui fera l'objet du prochain chapitre.

#### 4.6 Résumé des positions de Dehaene et Carey

En raison du manque de support empirique et de détail théorique quant à l'interaction des deux systèmes de base et du haut niveau d'incertitude de plusieurs des hypothèses proposées relatives à la construction des nombres naturels, il est difficile de soutenir l'hypothèse selon laquelle le système de représentation approximative de la numérosité de Dehaene est à l'origine de la construction de nos capacités arithmétiques avancées. Malgré la plausibilité de sa récente hypothèse sur le 'recyclage neuronal' responsable du substrat neural adapté pour l'arithmétique (voir Dehaene 2004b), le manque de précision quant aux mécanismes de développement qui construisent l'arithmétique empêche d'infirmer des théories alternatives comme celles basées sur la plasticité de Simon (1999) ou Fias et al. (2004). Comme l'admet Dehaene : « la manière dont les enfants maîtrisent le système de symboles numériques et la manière dont ce système est relié aux deux systèmes de base partagés avec les bébés et les animaux est encore une question bien ouverte. » (Feigenson et al. 2004a, p.448)

Le modèle proposé par Carey pour expliquer la manière dont les enfants construisent les nombres naturels nous fait part de certains détails qui sont absents chez Dehaene. Cependant, Carey admet que « nous ne savons pas à l'heure actuelle comment l'enfant

construit les représentations de listes de numéraux à partir des matériaux fournis par les systèmes de base. »(Carey, 2001, p. 52) Si Carey a raison, le système de représentation approximative ne joueraient pas de rôle dans la construction des listes de numéraux. Ces listes seraient plutôt construites à partir du système de répertoire d'objets, accompagné d'un système d'ordre linéaire et du langage pour ensuite être mis en correspondance avec la représentation approximative et enfin créer les nombres naturels. Nous avons mentionné la possibilité que la représentation approximative contienne une forme d'ordre et soit donc nécessaire à la construction de ces listes, dans plusieurs étapes proposées par Carey. Bien qu'une étude plus récente mène Carey à attribuer un aspect numérique au système de répertoire d'objets pour expliquer l'apprentissage de ces listes, nous avons tenté de démontrer que cette conclusion pourrait être hâtive. Notre présentation de la théorie de l'abstraction de Barsalou dans le prochain chapitre nous permettra de mieux comprendre comment ces listes pourraient se développer grâce à une interaction entre le système de répertoire d'objets et le système approximatif, ce qui rendrait une telle attribution inutile.

## CHAPITRE V

### BARSALOU ET L'ABSTRACTION

#### 5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté la théorie de Dehaene relative à l'acquisition des concepts comme NOMBRE chez les enfants. Or, chez Dehaene, nous traitons surtout de capacités mathématiques de base, comme comparer des nombres et compter. Qu'en est-il pour nos capacités mathématiques plus avancées? Nous avons vu que chez Brouwer les concepts mathématiques plus abstraits sont obtenus grâce à l'abstraction et au processus décrit par la notion d'insertion, deux éléments de l'IP. Pour être en mesure de bien comprendre la construction de la pensée mathématique dans son intégralité, nous devons en connaître davantage sur le développement de nos capacités mathématiques plus avancées. Puisque chez Brouwer, l'abstraction joue un rôle crucial dans le développement des concepts mathématiques avancés, ce pourrait être une bonne idée de tenter de développer le modèle de Dehaene en y intégrant une théorie moderne de l'abstraction.

Pour ce faire, nous présentons dans ce chapitre la théorie de l'abstraction de Lawrence Barsalou, telle que présentée dans les textes *Perceptual Symbol Systems* (1999) et *Abstraction as Dynamic Interpretation by Perceptual Symbol Systems* (2002). Ces deux textes proposent une hypothèse intéressante et plausible quant à la nature de l'abstraction et pourraient donc nous aider à compléter le modèle de Dehaene et aller au-delà de l'interprétation et de l'évaluation de la plausibilité des théories de Brouwer. Dans ce chapitre, nous présenterons donc la théorie DIPSS (*Dynamic Interpretation by*

*Perceptual Symbol Systems*) de l'abstraction de Barsalou pour ensuite tenter de compléter notre modèle intuitionniste de l'acquisition des concepts mathématiques en y ajoutant une théorie plus moderne de l'abstraction dans le chapitre six. Notons que, contrairement aux textes de Dehaene, la théorie de Barsalou se présente comme un « high-level functional account of how the brain could implement a conceptual system using sensory-motor mechanisms » (Barsalou, 1999, p.6). Nous y trouverons donc peu de références directes aux parties du cerveau impliquées dans l'abstraction et la conceptualisation. Ceci ne veut pas dire que ces théories n'ont pas de support empirique — les deux textes (particulièrement *Abstraction as Dynamic Interpretation by Perceptual Symbol Systems*) contiennent de nombreuses références à des expériences venant appuyant ces thèses. Ce chapitre est divisé en trois sections : la première section introduit la théorie des SSP de Barsalou et la notion centrale de simulateurs. La deuxième section présente la relation entre les simulateurs et la notion de l'abstraction chez Barsalou. La troisième section comporte une présentation de la construction des concepts abstraits chez Barsalou suivie d'une discussion sur la construction et l'acquisition des concepts mathématiques plus avancés.

## 5.2 Les Symboles Perceptuels chez Barsalou

Dans la plupart des théories récentes en sciences cognitives il est normalement présumé que les mécanismes cérébraux à l'origine de la cognition<sup>21</sup> et de la construction des concepts plus abstraits forment un système distinct de ceux responsables du traitement des données de la perception. Or, selon Lawrence Barsalou, la cognition est possible grâce à plusieurs systèmes *perceptuels* : au lieu d'être un système distinct de la cognition de haut niveau (la conceptualisation), la perception est considérée comme un des systèmes impliqués dans la construction des représentations et des concepts de plus haut niveau. Chez Barsalou, les mécanismes cérébraux et les

---

<sup>21</sup> Ici nous désignons l'ensemble des capacités mentales de haut niveau, en incluant l'imagination, la conceptualisation, l'inférence catégorielle, l'abstraction, la mémorisation, etc.



groupes de neurones responsables de la perception et autres modalités de l'expérience (par exemple, proprioception, introspection) sont identiques à ceux utilisés pour la cognition : « a common representational system underlies perception and cognition, not independent systems » (Barsalou, 1999, p.2). La notion clé est celle de systèmes de symboles perceptuels (SSP) : les représentations sont des ensembles de ces SSP.

Barsalou (1999) propose une théorie du concept basée sur la notion de reconstitution (*reenactment*) de motifs d'activation de neurones sensorimoteurs grâce aux SSP. Ce mécanisme de 'sensory-motor reenactment' a deux phases : l'entreposage dans la mémoire et la reconstitution (Barsalou, 2002, p.9) par des SSP. L'objectif de Barsalou est de démontrer que les SSP forment un système conceptuel capable de :

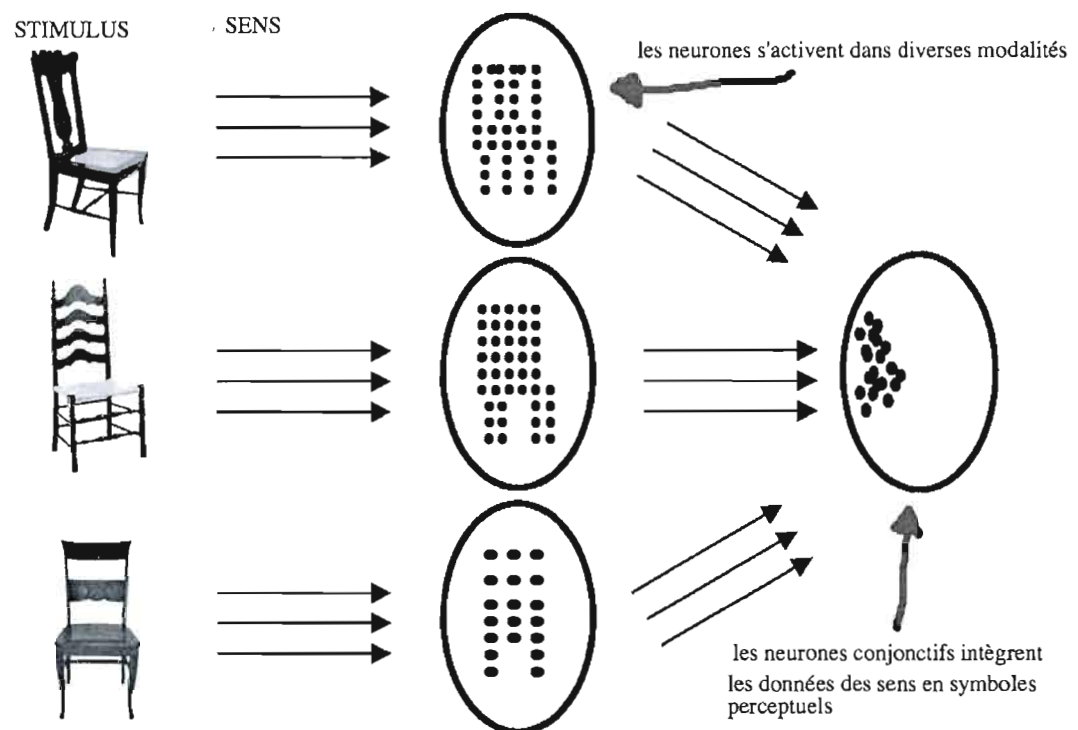
- représenter des *types* et des *tokens*;
- produire des inférences catégorielles (*categorical inferences*);
- combiner des symboles de manière productive pour construire une infinité de structures conceptuelles;
- produire des propositions en attachant des types à des tokens et ;
- représenter des concepts abstraits. (Barsalou, 1999)

Barsalou décrit six propriétés de base des symboles perceptuels (SP) qui leur permettent de remplir ces rôles. Nous allons présenter cinq de ces six propriétés en détail, puisque la sixième, le contrôle linguistique des SP, n'influence pas la compréhension de sa théorie, étant un cas particulier de l'application d'un simulateur (linguistique) à une simulation.

#### 5.2.1 Première propriété : les symboles perceptuels sont des représentations neuronales dans des zones sensorimotrices ou proprio-sensorielles du cerveau

Les SP sont des enregistrements des états neuronaux qui sont présents durant la perception. Lorsqu'on perçoit, des neurones s'activent dans les détecteurs de caractéristiques (*features*) appropriés dans notre cerveau. Certains s'activent lors de la détection des couleurs, d'autres des sons, d'autres détectent certaines formes, etc. Barsalou donne l'exemple de divers groupes de neurones dédiés à des aspects visuels spécifiques des objets : « some neurons fire for edges, vertices, and planar surfaces,

whereas others fire for color, orientation, and direction of movement » (Barsalou, 2002, p.10). Pour chaque modalité sensorielle on retrouve du support empirique indiquant de telles distributions de groupes de neurones dont les motifs d'activation représentent diverses caractéristiques d'un objet, incluant comment il sent, goûte, sonne, mais aussi les actions et les états introspectifs (comme les émotions) qui y sont associés : «[a] tremendous amount of neuroscience research has documented the structure of feature maps across modalities and the states that arise in them »( Barsalou, 2002, p.10) .



**Figure 5.1** Formation de symboles perceptuels

Un enregistrement de l'activation de ces groupes de neurones est, par la suite, conservé dans la mémoire sous forme de symbole perceptuel représentant l'objet perçu. Le motif d'activation du groupe de neurones actifs au moment de la perception devient

donc un SP pour l'objet de notre attention. Lorsqu'un tel groupe de neurones détecteurs de caractéristiques s'active, le motif d'activation est retenu par des neurones 'conjonctifs' (*conjunctive*) à travers les modalités sensorielles. Barsalou appelle les activations à l'intérieur d'une modalité des 'features maps', tandis que les groupes de neurones conjonctifs forment ce qu'il appelle des zones de convergence (c.f. Damasio, 1989).

Nos sens fournissent ainsi la base cognitive de nos représentations, nous présentant divers aspects de notre expérience en activant les neurones de caractéristiques appropriées. De telles représentations à l'intérieur d'une modalité sensorielle peuvent, par la suite, être combinées par des neurones conjonctifs de plus haut niveau pour construire des représentations plus globales de l'entité en question, cette fois-ci sous forme de motifs d'activation de neurones conjonctifs : des neurones sont d'abord activés lors de la perception et, des neurones dans des zones de convergence intègrent ensuite l'information des divers systèmes perceptuels pour créer une représentation globale de l'entité perçue.

Notons que cette représentation de plus haut niveau n'est pas amodale chez Barsalou, mais plurimodale : elle est une collection des représentations des diverses modalités associées à un objet. C'est ici que prend racine une des différences majeures entre la théorie de Barsalou et d'autres théories en sciences cognitives, à savoir : chez Barsalou les représentations conservent toujours un aspect proprio-sensoriel : « complete transductions never occur whereby amodal representations that lie in associative areas totally replace modal representations. » (Barsalou, 1999, p.6)

### 5.2.2 Implications pour la cognition

Chez Barsalou plusieurs processus mentaux allant de *bottom-up* (par exemple, la perception) à *top-down* (par exemple, l'imagination) sont basés sur le mécanisme de la construction de SSP. En effet, les mêmes groupes de neurones spécialisés dans la perception sont utilisés dans des tâches normalement associés à la cognition, comme

l'abstraction. Cependant, il ne faut pas croire que les mêmes systèmes sont à la fois responsables de la perception, de l'imagination, et de la connaissance. Les processus de plus haut niveau font plutôt appel aux SP construits dans la perception. Selon Barsalou, ces représentations sous forme de SP seront utilisées par d'autres mécanismes dans le cerveau pour nous donner des connaissances : « The important assumption is that sensory-motor representations exist, and that high-level cognitive processes reenact them to represent knowledge. » (Barsalou, 2002, p.10)

Même s'il est facile de voir comment un tel mécanisme de reconstitution est actif lorsqu'un sujet se rappelle consciemment d'un objet, Barsalou croit que les reconstitutions ainsi produites ne sont pas nécessairement des images mentales conscientes : « unconscious reenactments may often underlie memory, conceptualization, comprehension, and reasoning » (Barsalou, 2002, p.11) Particulièrement : « In the account of abstraction to follow, the neural reenactment of sensory-motor mechanisms is the critical mechanism, not conscious mental images. » (Barsalou, 2002, p.11) Plusieurs représentations neuronales de ce type sont donc inconscientes, comme le soulignent les données en neuroscience et en psychologie (c.f. section 2.11 de *Perceptual Symbol Systems*). Par exemple, l'effet du *semantic priming* démontre que même lorsqu'on ne fait que voir une image sans en avoir conscience, des groupes de neurones enregistrent tout de même de l'information sur notre environnement. C'est ce qui se produit quand on est rêve ou dans le cas des images subliminales, quand l'image défile trop rapidement dans notre champ de vision. Ceci étant dit, nous verrons dans la section sur les simulateurs que l'attention joue un grand rôle dans la manière dont ces symboles sont organisés.

### 5.2.3 Deuxième Propriété : les SP sont des représentations schématiques et incomplètes

Un symbole perceptuel n'est pas une représentation globale de l'état du cerveau, mais est plutôt l'enregistrement de l'activation d'un sous-ensemble de groupes de

neurones actifs lors de la perception qui représente schématiquement les aspects les plus marqués de la perception. L'aspect schématique des symboles perceptuels découle de deux présuppositions relatives à l'attention qui, selon Barsalou sont « nearly axiomatic in cognitive psychology : Selective attention (1) isolates information in perception, and (2) stores the isolated information in long-term memory. » (Barsalou, 1999, p.7) Autrement dit, l'attention filtre l'information donnée par la perception et en isole une partie qui est par la suite entreposée dans la mémoire à long terme. Bien qu'il soit possible qu'une partie de l'information non isolée par l'attention soit entreposée, nombreuses expériences indiquent que l'aspect de notre expérience perceptuelle qui a le plus de chances d'être conservé dans la mémoire à long terme est, en effet, celui qui fait l'objet de notre attention (c.f *Perceptual Symbol Systems*, p.7). Par exemple, si l'on recherche une balle bleue dans un baril de balles jaunes, notre attention va 'filtrer' l'information comme la forme et la texture de la balle et mettre l'accent sur la couleur. L'attention dirige donc en quelque sorte l'entreposage des informations perceptuelles dans la mémoire à long terme en sélectionnant un groupe de neurones parmi un ensemble de neurones actifs lors de la perception (par exemple, en isolant les neurones impliqués dans la détection de la couleur).

Cette conception des symboles perceptuels comme motifs d'activation d'un groupe de neurones a comme conséquence que de tels symboles ne peuvent être des entités discrètes et statiques, mais doivent, au contraire, être considérés comme dynamiques, puisque les groupes de neurones impliqués dans une représentation peuvent varier selon le contexte. L'on peut, par exemple, observer une telle variation par exemple suite à de nouvelles associations ou lors d'activations partielles.

Notons aussi qu'il n'est pas nécessaire que chaque groupe de neurones associé à une entité ne s'active en même temps pour permettre au sujet d'en avoir une représentation. Il se peut que chaque aspect d'un symbole perceptuel soit activé indépendamment des autres (par exemple, il est possible d'isoler la forme d'une balle d'avoir tout de même une représentation de celle-ci). Les symboles perceptuels ne sont donc pas holistiques, mais des groupes plus ou moins strictement définis.

Considérant ces aspects des symboles perceptuels, il est moins surprenant d'apprendre que ces derniers ne représentent pas toujours des individus (étant donné leur caractère incomplet, schématique, et dynamique), mais peuvent représenter plus d'un individu (dépendamment du contexte).

#### 5.2.4 Troisième propriété : les SSP sont plurimodaux

Nous avons mentionné que les symboles perceptuels peuvent être formés dans toutes les modalités de l'expérience : « in any modality, selective attention focuses on aspects of perceived experience and stores records of them in long-term memory, which later function as symbols. » (Barsalou, 1999, p.9). Le processus de formation de symboles perceptuels (décrit dans la section 1.1) semble clair pour les modalités comme la vision et l'odorat, mais qu'en est-il pour l'introspection et la proprioception?

Selon Barsalou, l'introspection inclut trois types d'expériences : états représentationnels (par exemple, représenter un objet en son absence), états cognitifs (par exemple, anticipation, planification, comparaison, recherche, etc.), et émotions (Barsalou, 1999, p.9) Dans chaque cas « selective attention can focus on an aspect of an introspective state and store it in memory for later use as a symbol. » ( Barsalou, 1999, p.9). Autrement dit, dans toutes les modalités d'expérience les mêmes processus s'appliquent mais dans le cas de l'introspection et de la proprioception, l'identité des groupes de neurones impliqués reste beaucoup plus incertaine. Pour les besoins de notre texte (et de celui de Barsalou) il n'est pas nécessaire de connaître ces détails.

### 5.3 Quatrième propriété : les symboles perceptuels sont organisés en simulateurs

#### 5.3.1 Définition de simulateurs

Les objets qui ont des caractéristiques physiques en commun auront tendance à activer des groupes de neurones détecteurs de propriétés similaires dans les *features maps*. Ceci veut dire que les neurones conjonctifs qui enregistrent ces activations seront eux aussi regroupés dans des groupes identiques : « categories tend to have statistically correlated features...similar populations of conjunctive neurons tend to capture [neural states in feature maps] » (Barsalou, 2002, p.11). Éventuellement, de tels groupes de neurones conjonctifs similaires peuvent construire une représentation plurimodale d'une catégorie, en intégrant des neurones conjonctifs des centres pour la vue, l'odorat, le toucher, les actions motrices, les émotions, et d'autres modalités.

Barsalou appelle de tels systèmes de groupes de neurones hiérarchisés et distribués à travers des modalités sensorielles des simulateurs : « [p]erceptual symbols do not exist independently of one another in long-term memory. Instead, related symbols become organized into a simulator that allows the cognitive system to construct specific simulations of an entity or event in its absence (...) » (Barsalou, 1999, p.10) Selon Barsalou, « a simulator develops for any component of experience that attention selects repeatedly » (Barsalou, 2002 p.12)

On voit ici l'importance de l'attention dans la théorie de Barsalou, puisque c'est elle qui décide la partie de notre expérience qui sera intégrée dans un simulateur : « attention is central to schematic symbol formation. By focusing on an aspect of perceptual experience and transferring it to long-term memory, attention overcomes the limits of a recording system...its role here is to create the schematic perceptual symbols that compose simulators ». Ces composants schématiques de l'expérience ne sont pas nécessairement des objets physiques, et peuvent inclure des événements, endroits, émotions, propriétés, etc.

### 5.3.2 Comment assembler les SP en simulateurs

Les symboles perceptuels sont donc organisés de façon à nous permettre une éventuelle simulation d'un ou de plusieurs aspects de l'objet qui leur a donné naissance. Or, comment les symboles perceptuels sont-ils organisés en simulateurs? Autrement dit, de quel genre de similarité parle-t-on lorsqu'on traite de symboles perceptuels *similaires* ? Selon Barsalou, la relation qui doit s'établir entre deux symboles perceptuels afin qu'ils deviennent membres d'un même simulateur est celle de proximité expérientielle, c'est-à-dire de proximité spatiale ou temporelle dans notre attention. Des objets ayant des caractéristiques spatiales (par exemple, taille, forme, location, etc.) ou temporelles (durée, moment d'incidence, etc.) communes peuvent donc générer des simulateurs.

Les symboles formés pour les objets qui reçoivent notre attention sont intégrés spatialement : leurs relations spatiales sont conservées, reflétant l'expérience du sujet. Barsalou donne l'exemple d'une personne qui contourne un véhicule en l'observant : dans ce cas, l'attention peut isoler certains aspects de ce véhicule, par exemple les roues, portes, fenêtres, et si l'on change ensuite de point de vue, l'attention se portera sur les lumières et le pare-brise, etc. Puisque les symboles sont intégrés spatialement, le pare-brise et les pneus ont un lien conceptuel plus fort que les pneus et, disons, une girafe, en raison de leur proximité spatiale et du fait qu'ils font partie du même objet. La proximité expérientielle organise donc les SP : si on pense à un véhicule, on produit une simulation de ce véhicule avec les SP enregistrés lors de nos interactions avec les véhicules.



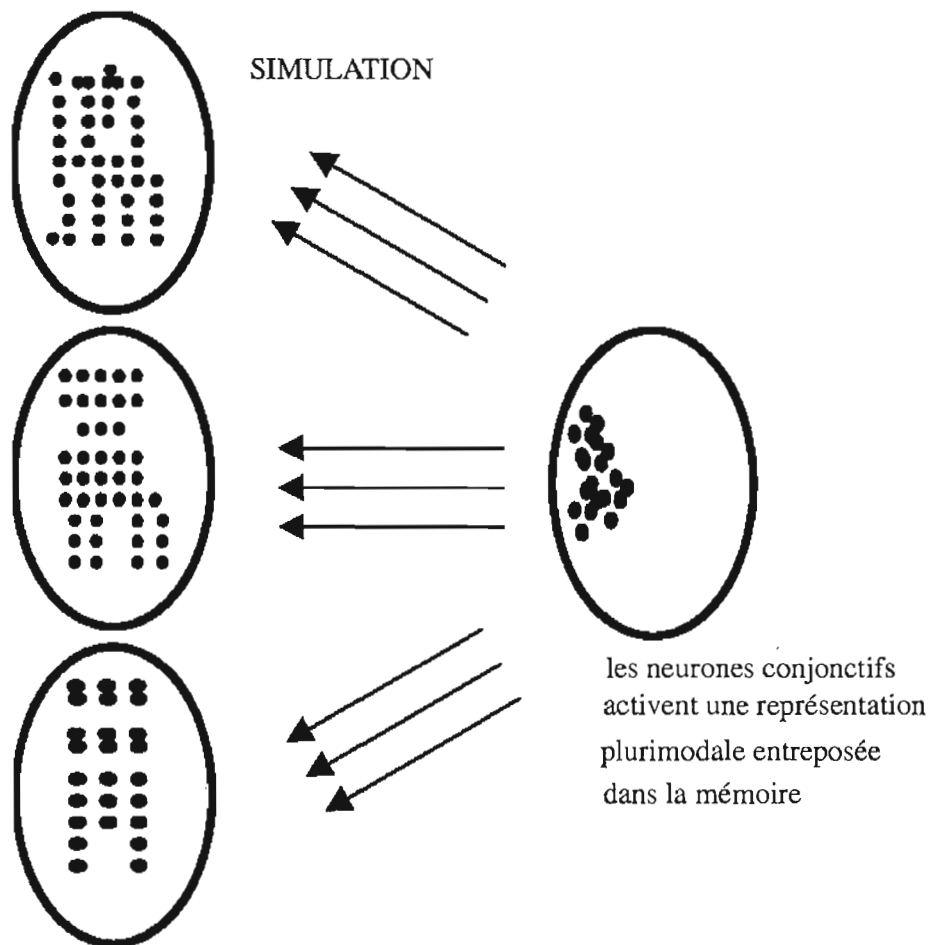


Figure 5.2 Construction de simulations

Il est possible de construire des simulateurs pour des séquences d'évènements de manière analogue : l'information enregistrée pour chaque événement dans une séquence est enregistrée de façon à tenir compte de la proximité temporelle des évènements. Les évènements qui se suivent de près et qui reçoivent notre attention sont donc intégrés dans un simulateur. Par exemple, étant donné que le son d'un crissement de pneus est souvent suivi de très près par le bruit d'un accident de voiture, ces bruits font partie du simulateur pour ACCIDENT DE VOITURE.

Les simulateurs reproduisent donc les expériences que nous avons des objets, intégrant une forme de continuité spatio-temporelle et permettant éventuellement de

former des associations entre des symboles perceptuels, comme des inférences, ou des relations causales (par exemple, associer le son d'une auto qui freine soudainement à celui d'un accident). Les objets que l'on perçoit occupent dans notre environnement temporel et spatial une place qui leur est propre, et les symboles générés par nos sens reflètent ces propriétés.

### 5.3.3 Simulateurs de propriétés

Dans la théorie de l'abstraction de Barsalou, les simulateurs pour les propriétés et les relations sont centraux, puisque ce sont les éléments de base permettant la construction d'abstractions. Lorsque Barsalou évoque les simulateurs de propriétés, il parle de simulateurs comme ceux qui déterminent les concepts NEZ, CHIEN, et aussi des concepts plus *ad hoc* comme ESPACE SUR LE MUR QUI PEUT CONTENIR UNE PHOTO DE JEAN CHAREST. Barsalou mentionne 7 propriétés importantes pour les simulateurs de propriétés<sup>22</sup>.

- 1) Les simulateurs de propriétés sont plurimodaux : un simulateur pour une propriété produit une simulation pour tous les aspects pertinents de la propriété à travers les modalités sensorielles.
- 2) « Property simulators represent properties locally » (2002, p.13). La propriété n'est pas simulée comme une entité indivisible qui est manifestée dans plusieurs instances plurimodales, mais elle est plutôt la combinaison de nombreuses représentations locales. Donc NEZ peut être représenté par des images et des bruits de plusieurs nez humains, mais aussi par un grand nombre de nez d'animaux et même de dragons. Comme nous l'avons mentionné dans la section 1.1, NEZ n'est pas un concept abstrait, mais un ensemble de plusieurs SP modaux.
- 3) Ces représentations locales de propriétés ne sont pas isolées, mais simulées, en relation avec le contexte qui les a générées : même si notre attention a filtré certains

---

<sup>22</sup> Pour les détails empiriques soutenant cette théorie, on consultera les pages 15-17 de Barsalou, 2002.

aspects de notre perception pour isoler la propriété, l'objet ou l'événement à partir desquels la propriété fut encodée font partie de sa représentation. Par exemple, NEZ sera représenté dans le contexte d'un visage ou d'un corps même si ce n'est que de façon sommaire et imprécise.

4) À l'intérieur d'un simulateur de propriétés, les simulations statistiquement les plus dominantes ont plus de chance d'être activées que celles moins dominantes. Plus on perçoit un exemple de la propriété plus il devient dominant. Ceci explique pourquoi si on pense à NEZ, on imagine la plupart du temps d'abord un nez d'humain : on côtoie fréquemment des nez humains et par conséquent, l'exemple le plus dominant de NEZ.

5) Les simulateurs de propriété sont capables d'*interpréter* d'autres simulations (et symboles perceptuels) et de leur appliquer la propriété en établissant une correspondance entre elles. Par exemple, une correspondance établie entre des simulations pour NEZ et CHIEN fait en sorte que nous appliquons aussi la propriété NEZ aux chiens. Dans ce cas, nous interprétons les chiens comme des choses qui peuvent avoir des nez. Dans de tels cas, une simulation ou une SP est insérée dans une autre simulation ou SP et une relation d'appartenance (ou de non appartenance) est établie. Nous discuterons plus amplement de l'interprétation et de la relation d'appartenance dans la section sur la catégorisation.

6) De telles interprétations par les simulateurs de propriétés génèrent des propositions *type-token* implicites : « binding a simulator successfully with a perceived individual via a simulation constitutes a type-token mapping » (Barsalou, 1999, p.20). Dans ce cas, l'entité simulée est interprétée comme un exemplaire de la catégorie que le simulateur de propriété représente. Si on tente alors d'établir une correspondance entre un simulateur de propriété et un objet, cet objet est interprété comme ayant la propriété, et comme étant un *token* de ce *type*. Cette interprétation constitue une proposition implicite qui est vraie ou fausse. Par exemple, si on tente d'appliquer NEZ à un livre, la proposition implicite « ce livre a un nez » est fausse.

Si la proposition implicite est vraie, une foule d'informations à propos de l'objet présente dans le simulateur pour la propriété devient accessible au sujet sous forme d'inférences catégorielles (*categorical inferences*).

7) Un nombre potentiellement infini d'interprétations peuvent être effectuées sur un même objet. Puisque toute région d'une simulation peut être interprétée comme étant une propriété et que ces propriétés peuvent s'appliquer à tout objet, il n'y a pas de fin au processus d'interprétation.

En bref: « property simulators produce local simulations of properties that are multi-modal, framed within the context of larger entities, and organized implicitly by dominance. When a local property simulation becomes active, it can interpret a region of a simulated or perceived entity thereby establishing a type-token proposition that carries categorical inferences. An infinite number of such interpretations are possible. » (Barsalou, 2002, p.15).

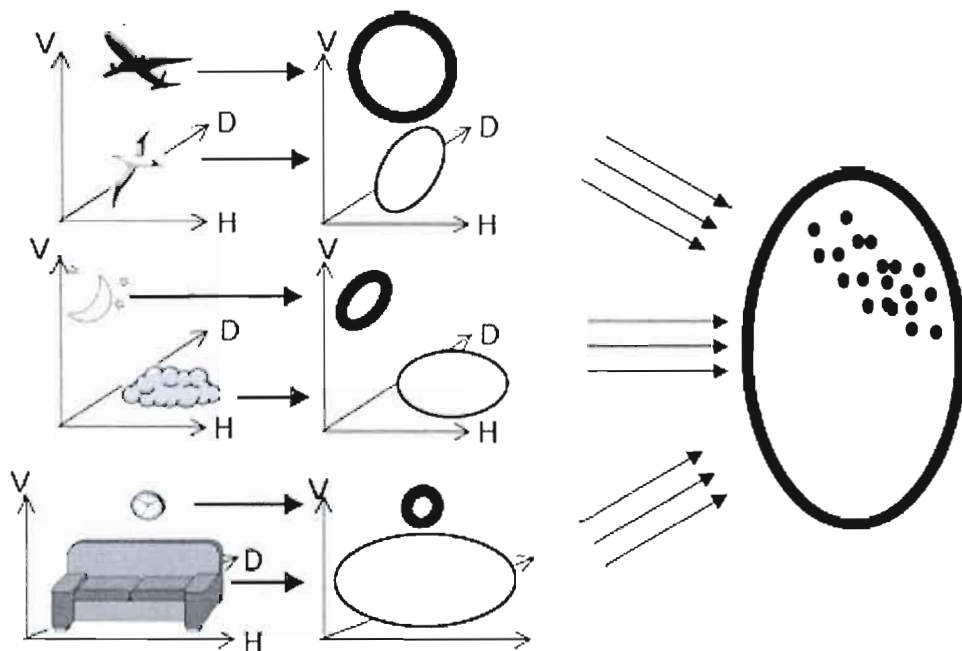
#### 5.3.4 Simulateurs de relations

Pour ce qui est des simulateurs de relations, ils sont considérés comme un cas spécial des simulateurs de propriétés : tandis que les simulateurs de propriétés interprètent une région d'un objet, les simulateurs de relations interprètent multiples régions et leurs configurations. Par exemple, le simulateur pour DESSUS interprète l'emplacement et la configuration relatives de deux régions d'une autre simulation (ou d'un symbole perceptuel). Appliquer ce simulateur à deux régions de notre perception d'un livre sur la table constitue une interprétation vraie, c'est-à-dire une interprétation qui nous donne accès à des informations catégorielles sur la disposition de ces deux régions de notre espace perceptuel. (cf. Barsalou, 2002 pp.19-20).

Similairement, il existe des simulateurs pour des relations temporelles, causales, et intentionnelles, qui fonctionnent tous de la même manière : « According to perceptual symbol systems, any type of relation focuses on multiple space-time regions, and

attempts to establish a particular configuration between them. »( Barsalou, 2002, p.20)  
 Par exemple, AVANT isole deux évènements non simultanés dans une simulation et concentre l'attention sur le premier.

## Simulateur pour 'dessus'



**Figure 5.3** Exemple de simulateur de relation

### 5.3.5 Cinquième propriété : les échafaudages organisent les SP dans les simulateurs

Maintenant que nous sommes familiers avec les divers types de simulateurs, nous sommes en mesure de comprendre comment ils peuvent se développer. Les simulateurs ont deux niveaux structurels : 1) l'échafaudage (*frame*), qui intègre les symboles perceptuels des objets suffisamment proches au niveau de l'expérience, et 2) les diverses simulations qui peuvent être construites à partir de l'échafaudage. Les échafaudages sont

une banque de SP intégrés pouvant construire des simulations. Les objets ayant des propriétés spatiales ou temporelles en commun (par exemple, la forme commune qu'ont des autos et des autos miniatures) peuvent être intégrés dans un même échafaudage. Les symboles perceptuels acquis lorsque notre attention est attirée par divers aspects d'un objet sont intégrés autour de cet objet de manière à représenter l'information spatiale et l'information relative au contenu de cet espace séparément. À un niveau, on représente les propriétés spatiales (forme, taille, orientation, etc.) de diverses régions de l'objet, tandis qu'à un autre niveau le contenu de ces régions est représenté : « Whereas the spatial representation establishes the frame's skeleton, the content specializations flesh it out » (Barsalou, 1999, p.14). (Voir Barsalou, 1999, p.14 pour support empirique).

Lorsque notre attention est attirée par une région particulière d'un objet, on peut obtenir plus d'information sur le contenu de cet endroit et l'ajouter aux informations déjà obtenues sur cet endroit. Par exemple, si on obtient de l'information spatiale détaillée sur les portes de plusieurs véhicules — c'est-à-dire si on enregistre plusieurs symboles perceptuels pour des portes de véhicules — les symboles perceptuels acquis pour cette région du véhicule seront intégrés autour de la partie *porte* du symbole perceptuel *véhicule*. Plusieurs expériences sont ainsi intégrées autour d'un même symbole, et cette intégration marque la construction d'un échafaudage pour *auto*. Cet échafaudage et le simulateur pour lequel il servira de base s'enrichissent lorsque nos expériences avec d'autres véhicules y sont intégrées à leur tour. De cette façon, l'information relative aux détails spécifiques de divers aspects d'un objet est intégrée de manière à enrichir le symbole perceptuel pour l'objet. Dans le cas de concepts plus abstraits, les régions de l'objet qui permettent une spécialisation peuvent aussi avoir une dimension temporelle.

### 5.3.6 Emboîtement et récursivité

La construction de ces échafaudages peut procéder de manière récursive lorsqu'une simulation est construite à l'intérieur d'un simulateur déjà actif : « a simulation can be constructed recursively by specializing the specialization of a schematic region. »

(Barsalou, 1999, p.16) Par exemple, imaginons un pneu de véhicule : on construit une simulation de roue d'un véhicule dans laquelle la simulation de pneu d'un véhicule est construite. Par expérience répétée, on obtient de plus en plus de détails quant à la spécialisation de chaque région d'un objet. Ces détails sont obtenus par des simulateurs qui sont emboîtés dans d'autres simulateurs, un processus qui n'est limité que par la résolution perceptuelle du sujet. Par exemple, après expériences avec multiples véhicules, j'obtiens un simulateur pour ENJOLIVEUR DE ROUE dans mon simulateur pour ROUE dans mon simulateur pour VÉHICULE.

#### 5.3.7 Sixième propriété : contrôle linguistique des simulateurs

Barsalou mentionne aussi une autre caractéristique des symboles perceptuels, celle du contrôle linguistique : les SP peuvent être construits pour des mots de manière analogue à d'autres stimuli. À mesure qu'un mot devient associé à un concept, le SP pour ce mot devient aussi associé à ce concept. Lorsque le sujet reconnaît le mot, le simulateur associé au mot s'active et produit une simulation du concept associé. Ainsi, il est possible d'avoir un contrôle linguistique des SP et arriver à produire des simulations pour une variété de concepts qui ne sont pas directement disponibles par le biais de nos sens ou à l'aide de mots. Bien que cet aspect des SP soit intéressant, il ne fait pas appel à de nouveaux mécanismes cognitifs pour la production de concepts — la seule innovation étant ici l'association de mots à des SP, celle-ci étant une association spéciale entre deux sortes de SP. Ainsi, nous n'en parlerons pas davantage

#### 5.4 DIPSS : Dynamic Interpretation by Perceptual Symbol Systems

Nous avons examiné les propriétés des SP et la manière dont ces derniers peuvent construire des concepts en formant des simulateurs. Nous sommes maintenant prêts à comprendre comment ces SSP sont impliqués dans la théorie de l'abstraction de Barsalou. Selon Barsalou, : « abstractions are temporary online constructions, derived

from an underlying set of property and relation simulators used to interpret many category instances ».( Barsalou, 2002, p.24)<sup>23</sup> Autrement dit, les abstractions sont des interprétations faites d'une perception ou d'un SP par un ensemble de simulateurs. Puisque ces interprétations peuvent être effectuées par différents simulateurs, une abstraction peut alors prendre plusieurs formes pour la même catégorie, dépendamment de la situation et de l'interprétation qu'elle suscite.

Barsalou considère trois propriétés centrales à la notion d'abstraction comme représentation sommaire : l'interprétation, la représentation structurée et la réalisation dynamique. Les prochaines parties expliqueront comment les simulateurs sont capables de rendre compte de ces trois propriétés.

#### 5.4.1 Catégorisation : des *types* et des *tokens*

Pour bien comprendre comment les simulateurs jouent un rôle dans l'interprétation, nous devons saisir comment ils permettent la catégorisation. Nous avons vu que les simulateurs sont des groupes de symboles perceptuels organisés dans lesquels les données de la perception sont réduites à des schémas et regroupées autour d'échafaudages qui incluent plusieurs instances d'un type d'objet. Comme les simulateurs intègrent des d'objets ayant des propriétés communes, ils déterminent des catégories d'objets et d'évènements de notre expérience : « Each simulator represents a type, not a token » (Barsalou, 1999, p.16). De plus, puisqu'un simulateur peut générer plusieurs exemplaires d'une catégorie, chaque simulation est alors une nouvelle conceptualisation de cette catégorie : chez Barsalou, « a *concept* is equivalent to a simulator » (Barsalou, 1999, p.11). Barsalou donne l'exemple pour notre simulateur de *chaise* : chaque simulation d'une chaise (soit visuelle, auditive, ou autre) est une conceptualisation différente tirée de la catégorie *chaise*.

---

<sup>23</sup> Assurons-nous de distinguer entre « l'abstraction » et « une abstraction » : le premier réfère à un processus mental, tandis que le second réfère à son produit. En général, Barsalou parle d'abstractions, qui sont le produit de l'abstraction. Le contexte devrait être suffisamment clair pour déterminer le sens adéquat qui est utilisé



Pour déterminer si un objet appartient à une catégorie, on doit être en mesure de déterminer si le simulateur pour cette catégorie peut produire une simulation satisfaisante de cet objet. Il y a au moins deux processus impliqués dans la catégorisation : un processus de construction d'une simulation pour un objet perçu et le processus qui permet de déterminer si cette simulation peut être générée par le simulateur d'une catégorie déterminée de façon satisfaisante. La catégorisation est donc un processus dynamique chez Barsalou, impliquant la construction d'une simulation qui est, par la suite, évaluée et comparée à un objet afin de déterminer si elle en est une simulation satisfaisante. Par exemple, lorsqu'on perçoit un triangle, on l'identifie comme tel parce que notre simulateur pour TRIANGLE produit des simulations qui sont satisfaisantes face à ce que l'on perçoit. Le simulateur pour RECTANGLE n'est cependant pas capable de produire une simulation satisfaisante, puisque celui-ci ne produit pas de simulation qui correspond à l'objet perçu.

La notion de satisfaction est centrale ici, permettant (ou non) d'établir un lien positif entre simulateur et simulation, et de déterminer les objets qui appartiennent à un certain type de catégorie. Malheureusement, comme l'admet Barsalou dans une note en bas de page, « the criteria for a simulation providing a satisfactory fit to a perceived entity remain unresolved in this theory » (Barsalou, 1999, p.32). Bien qu'il mentionne qu'une simulation satisfaisante d'un objet rencontrée une seconde fois est celle qui correspond ('matches') à une autre simulation dans la mémoire, nous ne savons toujours pas ce qui constitue cette correspondance ni le système qui pourrait lui être associé. Nous tenterons de préciser cette notion au fil de notre discussion sur la relation entre l'insertion de Brouwer et l'interprétation chez Barsalou.

#### 5.4.2 Interprétation, inférence, et catégorisation

Nous avons mentionné que les simulateurs de relations et de propriétés peuvent interpréter des objets en insérant une simulation dans une autre. Selon Barsalou, ce processus est central à la cognition humaine. L'interprétation permet la catégorisation

en construisant une correspondance *type-token* entre simulateur et simulation, catégorisant la simulation. Selon Barsalou, cette correspondance contient implicitement une proposition exprimant que l'objet simulé appartient à la catégorie du simulateur : « to produce an interpretation, concepts in memory type the components of sensory-motor experience to produce type-token propositions. » ( Barsalou, 2002 p.2).

L'interprétation, en insérant une simulation ou un SP dans un *type*, nous permet d'appliquer l'information contenue dans le *type* au *token*. Ces nouvelles informations sont les bases d'inférences à propos de l'exemplaire : « interpretation carries inferential capability. »(Barsalou, 2002, p.21). Les possibilités d'interprétation sont sans fin pour tout objet. Par exemple, un sofa peut être interprété comme étant un exemple du type SOFA, mais aussi des types PLACE POUR DORMIR, OBJET MODERNE, PLACE OÙ LE CHIEN NE PEUT ALLER, etc. La proposition implicite dans la relation *type-token* d'une interprétation particulière produit ainsi les bases pour des inférences sur l'objet.

En effet, toute inférence découlant d'une interprétation dépend de l'interprétation. Par exemple, si un objet est interprété comme un sofa, des inférences quant à sa souplesse, son confort et son poids sont possibles. Si le même objet est interprété comme place où le chien ne peut aller, d'autres inférences sont possibles. Les inférences sont donc des « propositions linked to the type-token mappings that triggered them. » (Barsalou, 2002, p.3), puisque le contexte de l'interprétation dictera les inférences possibles.

#### 5.4.3 Représentation structurée

Les inférences catégorielles peuvent se complexifier lorsque des simulations sont emboîtées les unes dans les autres. C'est ce que Barsalou appelle la représentation structurée. La récursivité (voir partie 1.5) permet d'expliquer et d'implémenter les représentations structurées par l'emboîtement de simulations les unes dans les autres. Selon Barsalou, nos concepts interprètent notre expérience de manière structurée et non

individuelle : les objets interprétés dans les relations *type-token* sont interprétés en relation à d'autres objets interprétés eux-mêmes grâce à des concepts qui les relient. Par exemple, on interprète un sofa comme étant SUR un tapis, SOUS un plafond, grâce à un simulateur de relations spatiales qui relie les trois objets : sofa, plafond, tapis. Ces trois objets ne sont donc pas interprétés individuellement, mais comme parties d'un groupe structuré. Lorsqu'on compare des exemplaires d'une catégorie, ou que l'on assigne des exemplaires à des catégories, on utilise de telles structures dans nos représentations, et non les propriétés individuelles de l'objet. Autrement dit, la représentation structurée n'est qu'une forme complexe d'interprétation.

#### 5.4.4 Réalisation dynamique

Un problème bien connu en philosophie est celui de définir une catégorie de manière à identifier tous ses membres et uniquement ceux-ci. Ceci n'est pas une tâche facile à accomplir — ni même possible, si on se fie à certains passages sur les jeux de Wittgenstein, de Fodor et Putnam (cf. Barsalou, 2002, p.27). Chez Barsalou, ce problème peut être posé en termes de simulateurs, soit : quels simulateurs déterminent une catégorie ? Il semble impossible de définir une catégorie avec un ensemble fixe de simulateurs, puisque les simulateurs qui interprètent les exemplaires d'une catégorie ne sont pas toujours les mêmes et peuvent changer à mesure que le sujet interagit avec une catégorie (voir partie 1.4). De plus, non seulement il peut y avoir de la variation à l'intérieur d'un seul sujet, mais il est clair aussi que les simulations locales utilisées pour une même catégorie varient énormément d'une personne à l'autre pour plusieurs raisons. Par exemple, la catégorie FRUIT chez les Indonésiens aura un contenu différent du nôtre. Les abstractions ne sont donc pas des représentations sommaires amodales qui décrivent chaque aspect de toutes les instances d'une catégorie. On parle plutôt ici de collections plus ou moins strictes de simulateurs de propriétés et de relations. Les abstractions sont donc des entités dynamiques, capables de subir nombreuses

modifications selon les expériences du sujet. Dans ce cas, plusieurs abstractions peuvent représenter les membres de la même catégorie temporairement.

Il est facile de voir comment les simulateurs permettent une telle réalisation dynamique de l'abstraction. En effet, nous avons déjà mentionné dans la partie 1.1 que les SP sont nécessairement des entités dynamiques, puisque les groupes de neurones utilisés dans la reconstitution par un SP peuvent changer selon le contexte et d'autres facteurs. De plus, nous avons aussi noté que l'interprétation d'un objet dépend du contexte, et que chaque objet peut être interprété par une grande variété de simulateurs (partie 2.2). Ceci veut dire que chaque situation peut être interprétée par une grande variété de simulateurs, définissant ainsi plusieurs abstractions différentes.

Bien que plusieurs abstractions différentes peuvent être utilisées pour interpréter un objet, il est clair que certains simulateurs sont plus appropriés que d'autres et finissent par être mieux adaptés à nos objectifs : « due to frequency and recency, some simulators may be more likely to be applied than others » (Barsalou, 2002, p.25). L'abstraction est donc une forme d'habileté, celle de construire des interprétations qui subviennent à nos besoins : « what develops permanently is not a fixed summary representation, but a skill for interpreting instances effectively and efficiently. » (Barsalou, 2002, p.25).

#### 5.4.5 Trois propriétés confirmées

Nous avons vu comment un simulateur appliqué à une autre simulation permet l'interprétation d'un objet en formant une relation *type-token* entre simulateur et simulation (partie 2.2). Puisqu'une des trois caractéristiques de l'abstraction est d'être capable d'interpréter, l'abstraction doit faire appel aux mêmes processus impliqués dans l'interprétation — et donc, aux simulateurs.

Les abstractions font partie de systèmes structurés d'interprétation : au lieu d'interpréter les objets de notre expérience individuellement, « abstractions assemble into structured representations that interpret complex structure in the world. » (Barsalou,

2002, p.4). L'aspect structuré de nombreux concepts complexes s'explique par le fait que les simulateurs peuvent être emboîtés les uns dans les autres, créant ainsi des interprétations de plus en plus complexes. L'abstraction, étant une forme de représentation structurée, doit donc faire appel à ces simulateurs.

Selon Barsalou, l'abstraction doit être un processus dynamique pour expliquer la manière dont plusieurs abstractions peuvent décrire la même catégorie. Cette réalisation dynamique résulte du fait que plusieurs simulateurs peuvent interpréter immédiatement des exemplaires de catégories, et que de telles interprétations varient largement d'une occasion à l'autre et d'une personne à l'autre selon les objectifs et expériences du sujet. Les simulateurs sont appliqués aux exemplaires d'une catégorie de manière dynamique, par opposition à une application identique pour tous les exemplaires dans toutes les occasions. Il y a donc une variation considérable dans les simulateurs utilisés dans les interprétations, ce qui implique que les abstractions soient des entités dynamiques

Nous voyons donc comment les simulateurs peuvent rendre compte des trois caractéristiques de l'abstraction de Barsalou : ils sont impliqués dans l'interprétation ; ils sont capables d'être organisés dans des représentations structurées et sont implémentés de façon dynamique par une variété de simulateurs. Ayant ainsi, à ce stade de notre analyse, mieux compris ce que sont des abstractions, nous sommes en mesure de saisir comment sont construits les concepts abstraits.

### 5.5 Concepts Abstraites

Dans *Perceptual Symbol Systems* (1999), Barsalou avance l'hypothèse selon laquelle la formation de concepts abstraits par symboles perceptuels est possible grâce à trois mécanismes : l'encadrement dans une simulation d'une séquence d'événements, la caractéristique sélective de l'attention, et la formation de symboles perceptuels sur des états introspectifs. Barsalou fait, tout d'abord, remarquer que les concepts abstraits comme la vérité ou le mariage sont représentés au sein d'un contexte de connaissances s'établissant sur un long parcours temporel. Pour construire des concepts abstraits, nous

devons donc construire des échafaudages pour des catégories d'objets qui ont une durée indéterminée, ce qui peut être réalisé grâce aux simulateurs d'évènements. De plus, l'attention est nécessaire à la construction de concepts abstraits car l'on doit être apte à isoler le contenu de base du concept abstrait des autres aspects de tous les évènements auquel celui-ci se trouve associé. Les concepts abstraits font souvent référence à un état interne du sujet, ce qui indique que les simulateurs pour ces concepts devront contenir des symboles représentant des états introspectifs comme la proprioception.

Barsalou donne l'exemple de la construction du concept de vérité. Imaginons qu'un sujet pense qu'il est vrai qu'un livre est sur la table. Pour ce faire, il est nécessaire de construire la simulation d'un livre sur une table grâce à des simulateurs pour LIVRE, SUR, et TABLE. Cette simulation représente le premier évènement dans une séquence d'évènements. Le second évènement est la perception par le sujet de l'évènement (c'est-à-dire, sa perception d'un livre sur la table, ou de l'absence d'un livre sur la table) Par la suite, le sujet tente d'établir une correspondance entre cette simulation et ce qu'il perçoit. Si la correspondance est établie, le sujet pense qu'il est vrai qu'il y a un livre sur la table.

Nous voyons, en premier lieu, un simulateur pour une séquence d'évènements dans la simulation du livre sur la table, suivie de la perception et de la correspondance. L'attention permet d'isoler la correspondance (ou le manque de correspondance) des autres aspects des évènements. Finalement, nous voyons que le sujet doit avoir des symboles perceptuels pour des états introspectifs dans plus d'une étape du processus, incluant le symbole pour la simulation du livre sur la table ainsi que celui pour la comparaison entre la simulation et la perception, et celui pour le résultat de cette comparaison. Dans ces trois cas, les symboles sont utilisés pour représenter des états internes du sujet. Barsalou définit la fausseté, la négation et la colère de manière similaire avec une séquence d'évènements comprenant l'évaluation d'une comparaison entre une perception et une simulation.

Selon Barsalou, de telles représentations sont accessibles dès la naissance, si ce n'est avant, puisque le comportement des enfants semble indiquer que leurs attentes peuvent

être satisfaites ou non quand il s'agit de concepts abstraits comme NOURRITURE, CONFORT, SOMMEIL. Barsalou pense, en outre, que de telles attentes indiquent la présence de séquences d'évènements impliquant par exemple les concepts de VÉRITÉ et de NÉGATION, puisque les réactions des enfants quant à la satisfaction (ou la non-satisfaction) de leurs attentes montrent qu'ils produisent des simulations, simulations par rapport auxquelles ils comparent ce qu'ils perçoivent. Ceci laisse entendre que, chez Barsalou, le langage ne joue pas un rôle crucial dans le processus de formation de concepts abstraits, bien qu'il puisse être utilisé, par la suite, pour contrôler des simulations.

Si Barsalou a raison, « abstract concepts are perceptual, being grounded in temporally extended simulations of external and internal events. »(Barsalou, 1999, p.27). Les concepts abstraits se différencient en raison de la construction des concepts : ceux-ci font, en effet, appel à des combinaisons complexes d'évènements mentaux provenant de plusieurs modalités sensorielles. Les concepts plus concrets comme AVION et NEZ sont aussi obtenus de façon similaire par abstraction, mais sans avoir besoin d'une séquence aussi complexe d'évènements. Barsalou l'exprime clairement en énonçant : « what distinguishes abstract concepts, perhaps, is the complexity of the relational information they capture, along with their frequent inclusion of mental states. »(Barsalou, 2002, p.35)

### 5.5.1 Concepts mathématiques

Maintenant que nous avons une idée de ce que sont les concepts abstraits en général, qu'en est-il des concepts mathématiques? Par exemple, comment les simulateurs peuvent-ils être utilisés pour la construction de QUATRE, ou, encore de concepts plus abstraits comme NOMBRE, ou encore RACINE CARRÉE? Comme le dit Ohlsson, « I have never perceived these things, so how could my mental representations of them consist of parts of percepts? » (Ohlsson, 1999, p.76). Puisque Barsalou ne semble pas avoir de théorie traitant de la construction de concepts mathématiques, nous devons

tenter de répondre à la question d'Ohlsson à l'aide des trois éléments impliqués dans la construction de concepts abstraits. Essayons d'abord de voir comment l'acquisition du concept MULTIPLICATION peut être expliquée en termes de simulateurs. Si l'acquisition d'un tel concept ne s'avère pas problématique, celui-ci pouvant être exprimé en termes de simulateurs, il est peut-être envisageable de reproduire la même opération pour des concepts dont l'acquisition semble plus difficile à expliquer, comme ceux d'ADDITION et de NOMBRE.

Premièrement, l'attention doit sélectionner le contenu de base du concept. Bien que cette notion soit vague, il est possible que, dans le cas de la multiplication, le 'contenu de base' consiste en l'opération d'obtenir un nombre par addition successive d'un autre. Nous devons aussi identifier les états introspectifs utilisés dans notre représentation de MULTIPLICATION. Il semble qu'on puisse dire que la reconnaissance des nombres dans une addition, les événements associés au calcul (soit compter, additionner plusieurs fois un nombre à lui-même, écrire sur un bout de papier, etc.), et la reconnaissance de l'obtention du résultat sont de tels états introspectifs. Un autre état introspectif semble aussi être nécessaire, à savoir : celui où le sujet regarde ces trois étapes et les interprète comme faisant partie d'un seul processus. Le simulateur d'événements associé à la multiplication contiendrait ainsi ces trois états introspectifs. À mesure que l'on produit des multiplications, il nous est alors possible d'associer ce simulateur au SP linguistique 'multiplication'. En général, on est capable d'identifier les concepts mathématiques à des séquences d'états introspectifs associées aux étapes de la construction mathématique en question. Si notre analyse est plausible, il demeure néanmoins, prématuré de dire, comme le fait Ohlsson, que « Barsalou's treatment of abstraction is entirely inadequate »(Ohlsson, 1999, p.76).

Nous voyons que les simulateurs peuvent construire des concepts mathématiques comme MULTIPLICATION. Mais, qu'en est-il du concept plus fondamental de NOMBRE : comment pourrait-on expliquer son acquisition en termes de simulateurs? Suite à notre discussion de Dehaene, une réponse pourrait être que ce concept est primitif, comme l'est celui de COULEUR, puisqu'il nous est donné par notre



représentation analogue de la numérosité, et n'est donc pas obtenu par abstraction. Or, le système de représentation approximative de la quantité de Dehaene ne peut expliquer l'acquisition du concept de NOMRE à lui seul, puisque ce système ne peut générer que des représentations approximatives comme NUMÉROSITÉ—du moins, avant qu'il ne soit développé par un ou plusieurs autres systèmes. Pour tenter de savoir si l'acquisition des concepts mathématiques plus primitifs peut être expliquée en termes de simulateurs, nous devons d'abord réunir plus de détails relatifs au développement de ces représentations approximatives. Or, notre discussion du modèle Dehaene-Carey à la fin du chapitre quatre a clairement démontré qu'il manque encore plusieurs éléments permettant de déterminer les systèmes qui sont impliqués dans la construction de nos concepts mathématiques, et le rôle que chacun joue dans ce processus. Dans le prochain chapitre, nous tenterons d'élaborer un modèle plus complet capable de répondre à ces questions en se basant sur l'intuitionnisme de Brouwer et sur sa notion centrale de l'IP.

## CHAPITRE VI

### BROUWER ET LES SCIENCES COGNITIVES

#### 6.1 Brouwer et Dehaene

Bien que le chapitre précédent nous ait permis de voir comment la théorie de Barsalou contribue à expliquer l'acquisition et le développement de certains concepts abstraits grâce à la présence de SP et de simulateurs, nous restons sans réponse face aux problèmes que pose le modèle Dehaene-Carey quant à l'acquisition des concepts mathématiques, problèmes soulevés à la fin du chapitre quatre. Dans le présent chapitre, nous voulons combiner des éléments des théories de Dehaene et de Barsalou aux notions rencontrées chez Brouwer afin de former un modèle complet de l'acquisition des concepts mathématiques. Pour ce faire, il semble important tout d'abord d'établir un lien entre les éléments de la présentation de Brouwer et ceux des théories plus modernes. Ceci nous aidera non-seulement à démontrer que les idées de Brouwer demeurent toujours d'actualité, mais aussi de voir comment certains éléments de Brouwer pourraient contribuer à combler les lacunes des modèles plus récents.

Dans notre discussion sur les éléments de l'Intuition Primordiale, nous avons identifié les éléments responsables de la construction des mathématiques selon Brouwer. Dans la présente section, nous tenterons de voir s'il est possible de trouver des homologues de ces éléments dans les théories de Dehaene et Barsalou.

Bien entendu, dans l'étude suivante, il est important de rappeler que la notion de mathématiques chez Brouwer est bien plus générale que celle décrite par Dehaene et

inclut tout processus de construction mentale, conscient ou inconscient, puisque toutes nos capacités mentales sont fondées dans l'IP. Par exemple, la construction des objets sensoriels chez Brouwer est possible grâce à nos capacités mathématiques. En effet, comme le dit, à juste titre, Ewald:

[T]he basic intuition of two-oneness underlies, not only pure mathematics and theoretical logic, but also many scarcely conscious everyday mental processes, including the mental organisation of the objects of the external world; so in this sense mathematics is broader than any of the special sciences and does not rest upon any foundation more fundamental than itself. (Ewald, p.1173)

Or, chez Dehaene, le terme 'mathématiques' a une connotation plus restreinte, n'incluant que les processus et représentations impliqués dans des tâches comme compter, additionner, multiplier, comparer des nombres, etc.— autrement dit, la conception des mathématiques chez Dehaene est plus proche de la conception populaire. Ceci étant dit, il est facile de dissocier les mathématiques pures chez Brouwer, correspondant aux mathématiques formelles de Dehaene, des capacités mathématiques en général, qui sont, semble-t-il, l'équivalent de nos capacités cognitives générales : les mathématiques formelles chez Brouwer sont des constructions pures de l'IP. Autrement dit, ce qui est construit purement par l'IP sans aucune aide des sens correspond à la conception commune des mathématiques.

#### 6.1.2 Le discret et le système de répertoire d'objets.

Nous avons vu comment un des deux éléments clés relatifs à nos capacités mathématiques dans la théorie de Dehaene est celui du système de répertoire d'objets de Simon (section 2.1), capable de représenter trois objets distincts. Nous avons aussi noté que ce système semble présent chez les enfants et les animaux, bien qu'il soit difficile de dire si les données dans ces expériences indiquent réellement la présence d'un tel système, compte tenu de sa généralité. Selon le modèle de Simon, ce système est

composé de quatre éléments principaux permettant la conception de divers objets individuels.

Nous avons, par ailleurs, remarqué que l'IP de Brouwer contient un élément aidant le sujet à concevoir des objets discrets, élément nécessaire dans la construction de la bi-unité puisqu'il contribue à dévoiler la présence de deux éléments distincts devant notre conscience. La distincteté chez Brouwer paraît donc être l'équivalent du système de répertoire d'objets, puisque dans les deux cas on parle d'un système permettant au sujet de construire des objets discrets et de représenter la distincteté d'un nombre restreint d'objets en même temps.

### 6.1.3 L'*entre* du continu de Brouwer et le SHIP

Notre discussion de Dehaene a identifié le SHIP comme localisation probable d'une représentation analogue primitive de la quantité numérique et possiblement d'autres quantités continues. Il semble facile d'identifier cette représentation amodale avec le *entre* du continu Brouwérien. Premièrement, comme le *entre*, la représentation analogue de la quantité numérique est indépendante des sens traditionnels du toucher, de la vue, etc : elle est une représentation qui permet de distinguer la numérosité de stimuli. Chez Brouwer, l'*entre* aide lui aussi à distinguer deux éléments tout en les posant sur une seule base de comparaison, d'abord temporelle, puis, suite à une abstraction, numérique.

De plus, la représentation amodale de la numérosité permet une spécialisation : à partir de représentations approximatives de numérosités, il est possible d'obtenir des nombres précis qui peuvent être utilisés dans des calculs ainsi que dans d'autres manipulations arithmétiques (cf. section 2.4.2). Autrement dit, cette représentation favorise l'insertion sans limites de nouvelles entités. L'*entre* de Brouwer donne accès à la même spécialisation, étant un fluide infiniment divisible sur lequel les nombres naturels, ordinaux, et même réels peuvent être définis.

La question peut être posée : l'*entre* de Brouwer n'est-il pas trop général, compte tenu du fait qu'il permet de distinguer des entités mathématiques ainsi que tout autre genre d'entité? En guise de réponse, nous pouvons rappeler que nous parlons ici de mathématiques formelles de Brouwer sans évoquer sa conception de la construction des objets dans le monde. Mais même si ce n'était pas le cas, rappelons aussi que nous avons vu que les neurones impliqués dans la représentation amodale de la numérosité peuvent aussi servir de continu pour d'autres quantités continues comme la luminosité et la taille (Pinel et al. 2004), ce qui indique que cette représentation pourrait aussi avoir un rôle à jouer dans des constructions non-mathématiques.

#### 6.1.4 Faculté unificatrice et capacité d'individuer

Dans le modèle INFANT de Simon, un des éléments est 'la capacité d'individuer des stimuli jusqu'à concurrence d'environ trois objets par modèle' (p.5). Il semble possible de faire un lien entre cette capacité et la faculté unificatrice de Brouwer. En effet, une telle capacité d'individuer plusieurs stimuli à la fois paraît impliquer la capacité de les présenter *comme des objets* à notre conscience. C'est pourquoi il s'agit d'un système de répertoire d'*objets*, et non de sensations, à savoir : cette capacité d'individuer des objets doit permettre à notre conscience de faire un lien conceptuel entre ces objets en les comparant les uns aux autres. Or, le rôle de la faculté unificatrice chez Brouwer est précisément de créer ce lien permettant à notre conscience deux choses comme 'thing-in-time and again thing' — autrement dit, comme des objets. Que ce soit grâce à un acte de la conscience ou grâce à un autre mécanisme, la capacité d'individuer des objets et de les mémoriser est présente dans le modèle de Simon, et, à notre avis, aussi chez Brouwer.

### 6.1.5 L'ordre et le *encore*

Nous avons vu comment Suzanne Carey semble croire que la relation de successeur est nécessaire pour l'apprentissage des nombres naturels afin d'aider les enfants à comprendre que les éléments dans les listes de nombres sont tous des successeurs dans une liste croissante. Nous avons exposé l'éventualité que le SHIP contienne une forme d'ordre pour avoir accès à des comparaisons de taille comme celles présentes dans les expériences de Dehaene. De plus, cette discussion a aussi laissé entrevoir la possibilité que cet ordre engendre une relation de successeur contribuant à identifier le prochain élément discernable dans l'ordre des numérosités approximatives dont la précision peut varier. Mais si notre hypothèse est fautive, celle de Carey pourrait être vraie, et la relation de successeur aurait donc un rôle à jouer — celle de l'ordre — dans nos capacités arithmétiques : tandis que l'ordre est essentiel à l'apprentissage de listes ordonnées (même sans en comprendre la signification), la relation de successeur est nécessaire pour la supposée induction faite par l'enfant à partir de laquelle il apprend qu'il s'agit bien d'une liste *de nombres*.

Ces deux éléments sont clairement présents dans l'IP de Brouwer : nous avons mentionné que l'ordre est nécessaire dans l'IP de Brouwer pour permettre aux éléments de l'IP d'être présentés à la conscience comme un 'avant', et un 'maintenant'. Aussi, nous avons vu que le *encore* dans l'IP est l'élément qui incite le sujet à constater une répétition et à créer de nouveaux éléments dans une séquence temporelle, correspondant ainsi à une relation de successeur.

### 6.1.6 La mémoire

Nous avons vu que la mémoire joue un rôle dans le système INFANT de Simon, étant l'un des quatre éléments utilisés dans la construction de ce modèle. On peut aisément comprendre comment la mémoire est impliquée dans un système de répertoire d'objets puisqu'elle est la faculté qui assure à ces objets le maintien de leur identité à

travers le temps. En outre, la mémoire joue aussi un rôle important dans l'IP, comme faculté contribuant à retenir l'élément passé dans la bi-unité.

### 6.1.7 Ainsi-de-suite

Pour ce qui est du *ainsi-de-suite*, il ne semble pas y avoir d'élément équivalent dans la théorie de Dehaene. Néanmoins, dans la troisième question de Carey, on rencontre un élément qui pourrait jouer un rôle similaire. En effet, lorsque Carey s'interroge sur la façon dont les enfants font pour saisir qu'une liste de nombres représente les nombres, il semble qu'une réponse consiste à avancer que le processus de compter n'a pas de fin. Les nombres, contrairement à d'autres listes apprises par les enfants (par exemple, les lettres de l'alphabet, les mois de l'année, les jours de la semaine, etc.), font partie d'une liste sans fin. Il apparaît que le fait de constater que le processus de compter n'a pas de fin permettrait aux enfants de comprendre le concept de nombre, soit : les nombres sont les éléments de la liste sans fin. Autrement dit, la liste de nombres étant la seule qu'apprennent les enfants qui n'a pas de fin, il se peut que leur compréhension de ce qu'est un nombre soit liée au fait qu'ils comprennent que ce processus de compter soit sans fin. Bien que cette réponse amène avec elle une série de questions, rappelons que celle de Carey manque aussi de détails, particulièrement en ce qui a trait à l'induction faite par l'enfant dans son apprentissage de la signification de NOMBRE.

## 6.2 Abstraction, choix, et insertion

Il nous reste à trouver l'équivalent de trois éléments de notre liste d'éléments de l'IP. Pour trouver des équivalents aux notions Brouweriennes de l'abstraction, du choix et de l'insertion, nous devons faire des rapprochements avec des éléments de la théorie de Barsalou. En tentant d'établir des correspondances entre Brouwer et Barsalou, quelques questions nous viennent à l'esprit :

- 1) l'abstraction de Brouwer correspond-elle aux trois caractéristiques de Barsalou?

- 2) L'abstraction de Brouwer peut-elle être expliquée par la notion de simulateur?
- 3) la notion d'insertion de Brouwer peut-elle être expliquée par la notion d'interprétation de Barsalou?
- 4) Y a-t-il d'autres éléments de la philosophie de Brouwer qui ont leurs équivalents dans la théorie de Barsalou?

### 6.2.1 Brouwer et les trois caractéristiques de l'abstraction

La réponse à 1) semble être affirmative. En effet, il est clair que l'abstraction chez Brouwer peut rendre compte de la réalisation dynamique, qu'elle est structurée, et qu'elle permet d'interpréter les éléments qui y sont impliqués. Puisque l'abstraction est un des éléments de l'IP, un processus dynamique et constructif se produisant dans la tête du sujet, elle doit permettre la réalisation dynamique : sinon, on ne parlerait plus de sujet *libre*. Aussi, l'abstraction est bien ce processus dynamique et constructif reflétant la liberté du sujet et qui, comme l'un des aspects de l'IP, contribue à la réalisation dynamique. Le sujet est donc capable de construire autant d'abstractions qu'il le désire. Une entité mathématique peut alors être produite par plusieurs abstractions différentes. Par exemple, le nombre 2 peut être le résultat de plusieurs abstractions, dont le 'premier nombre pair', 'résultat de 3-1', etc. Bien qu'à première vue, ces désignations ne soient pas des abstractions au sens brouwerien du terme, il semble facile de les concevoir ainsi. Par exemple, on obtient 'résultat de 3-1' en isolant cette entité de la plus grande catégorie 'résultat de soustraction à partir de 3'. Dans ce sens, 'résultat de 3-1' est autant le résultat de l'abstraction que celui de 'nombre naturel plus petit que 10'.

D'autre part, il est clair que l'abstraction de Brouwer permet la formation de représentations structurées, puisque les notions comme celles de 'nombre pair' et 'nombre premier' sont des entités mathématiques dont la construction par le sujet nécessite plusieurs étapes. Ceci veut dire que ces constructions mentales dépendent les unes des autres, et sont donc des constructions complexes et structurées.

Finalement, l'abstraction de Brouwer peut être vue comme une forme d'interprétation, puisqu'elle permet elle aussi de construire des relations *type-token* de manière implicite. Par exemple, lorsqu'on obtient l'espèce 'nombre plus petit que 10'



par abstraction sur l'espèce 'nombre naturel', il semble aller de soi que la première espèce est un membre de la seconde.

### 6.2.2 Brouwer : Trop amodal

Pour ce qui est la deuxième question, il semble, à première vue, que la réponse doive être négative, puisque l'abstraction chez Brouwer est un processus primitif de l'IP, et ne peut donc pas être expliqué par des entités plus primitives comme les simulateurs et les simulations. Or, puisque l'abstraction paraît être, chez Brouwer, un processus conscient dépendant de processus inconscients et que les simulateurs sont de tels processus, il semble qu'on puisse admettre que ces derniers soient responsables du mécanisme d'abstraction. De plus, rappelons que la théorie de Barsalou appartient aux systèmes de symboles *perceptuels*. En effet, rappelons que dans la théorie de Barsalou, « complete transductions never occur whereby amodal representations that lie in associative areas totally replace modal representations »(1999, p.6). Comment, dans ce cas, est-il possible de concevoir que la théorie de Brouwer soit équivalente à celle de Barsalou, quand Brouwer affirme clairement qu'il est possible d'obtenir des représentations amodales par abstraction? A cet égard, il s'avère difficile de comprendre comment la théorie amodale de Brouwer peut être considérée comme l'homologue de la théorie modale de Barsalou.

Rappelons cependant que l'abstraction chez Brouwer procède en enlevant certaines caractéristiques d'une construction mentale afin d'en obtenir une autre. C'est donc un *processus* primitif pouvant dépendre de représentations obtenues par des simulateurs et simulations. De plus, si Dehaene a raison et que nous avons un sens des nombres, l'abstraction de Brouwer est fondée sur le monde des sens, comme c'est le cas chez Barsalou. Si ces deux observations sont valables, la théorie de l'abstraction de Brouwer pourrait être expliquée en termes de simulateurs : sous sa forme la plus primitive dans la construction de la bi-unité, elle serait dans ce cas une interprétation dynamique de la simulation d'une numérosité.

### 6.2.3 Insertion et interprétation

Pour ce qui est de la notion Brouwerienne de l'insertion, à l'origine de la construction des espèces mathématiques, il semble possible de la considérer comme équivalente à la notion d'interprétation chez Barsalou. En effet, nous avons vu dans la section sur les simulateurs de propriétés que l'on peut appliquer un simulateur de propriété à d'autres simulations (et symboles) afin d'interpréter cette simulation. Dans une telle interprétation, on insère une simulation dans une autre, ceci engendrant une relation d'appartenance ou de non appartenance, selon que la propriété du simulateur s'applique ou non à celle de la simulation qui y est insérée. Ceci s'avère être une description de la notion de l'insertion de Brouwer. Rappelons que dans l'insertion, une construction est insérée dans une autre de manière à établir une relation d'appartenance dans laquelle une construction est un membre de l'espèce définie par l'autre. Dans l'insertion comme dans l'interprétation de Barsalou, on insère une construction mentale dans une autre de façon à établir une relation *type-token* entre elles. Dans les deux cas, une construction plus générale (soit une espèce, ou un simulateur) est utilisée pour tenter d'en produire une autre (soit une construction, ou une simulation). Si le résultat est satisfaisant, une construction est un *token* de l'autre, sinon le contraire est vrai.

Compte tenu de cette relation entre insertion et interprétation, est-il possible d'améliorer la notion de satisfaction entre un simulateur et une simulation ? Il semble que oui : lorsque le sujet prouve qu'un élément n'est pas un membre d'une espèce, il note ainsi que l'insertion mène à une contradiction. Dans ce cas, Brouwer dit que le sujet remarque que le processus de construction se termine sans être achevé, son intention n'étant pas satisfaite : « the construction does not go further » (Brouwer, 1907, p.127). La notion de satisfaction de Barsalou pourrait alors aussi être expliquée en termes de satisfaction *suite à un échec ou une réussite de construction de la part du sujet* : si un simulateur est capable de produire une simulation satisfaisante, le sujet peut arriver au terme d'une simulation et les attentes du sujet sont comblées. Par contre, s'il est incapable de compléter la simulation, ses attentes se trouvent alors déçues. Un pas paraît avoir été franchi par rapport à la notion de correspondance (*matching*) mentionnée plus

haut, puisqu'on fait désormais référence à un autre état mental du sujet responsable de l'évaluation du résultat d'une tentative de simulation.

#### 6.2.4 Choix et liberté du sujet

Le seul élément de l'IP pour lequel nous n'avons pas encore trouvé d'homologue moderne est celui du choix. Aussi, l'on peut établir un lien entre la liberté du sujet créateur de Brouwer et la réalisation dynamique de la notion d'abstraction chez Barsalou. En effet, tandis que la liberté du sujet créateur se manifeste, entre autres, par l'impossibilité de prévoir le résultat de ses choix ou de formaliser totalement son comportement, notre discussion sur la réalisation dynamique de l'abstraction a montré qu'il n'y a pas de limites aux abstractions que peut utiliser le sujet pour interpréter une situation, et que les interprétations d'une situation sont en partie déterminées par les expériences et objectifs du sujet. La liberté du sujet doit donc être un facteur important dans la caractérisation de l'abstraction chez Barsalou, puisqu'elle permet d'expliquer leur caractère dynamique ainsi que l'impossibilité de déterminer l'abstraction qui s'applique le mieux à une situation déterminée. Si cette liberté du sujet se manifeste par sa capacité de choisir, l'on peut alors en déduire que la notion de choix de Brouwer a sa place dans la conception de l'abstraction de Barsalou. En effet, le sujet peut, dans certains cas, choisir la manière avec laquelle il interprète une situation — par exemple, s'il fait beau, le sujet peut décider d'interpréter la situation 'journée d'été' comme un événement pour jouer au tennis, se baigner, ou encore taper à l'ordinateur, etc.

Nous voyons ainsi qu'il est facile d'établir des liens entre les éléments de l'IP de Brouwer et des éléments des théories plus modernes en sciences cognitives. Par conséquent, l'on peut envisager d'appliquer des idées de Brouwer à celles de Barsalou et Dehaene. Nous devons donc voir maintenant comment l'IP nous fournit les outils pour répondre à la question de l'acquisition des concepts mathématiques. Notre réponse restera néanmoins spéculative.

### 6.3 Passer de NUMÉROSITÉ à NOMBRE

Nous voulons ici savoir comment il est possible d'obtenir le concept NOMBRE. Suite à nos discussions sur les théories de Dehaene et de Barsalou, l'on conçoit de poser cette question en termes de simulateurs et de systèmes de base. La question devient : comment les enfants arrivent-ils à appliquer les simulations précises produites par le système de répertoire d'objets au contenu conceptuel des simulations produites par la représentation approximative de la numérosité ? Individuellement, il semble que le système de représentation approximative et celui de répertoire d'objets ne peuvent nous donner plus que NUMÉROSITÉ APPROXIMATIVE ainsi que OBJET, respectivement — bien que Carey puisse dire que le concept OBJET a une dimension numérique, comme nous l'avons mentionné à la fin du chapitre quatre. De plus, même si ces concepts nous sont accessibles à un jeune âge, il ne va pas de soi qu'ils soient accessibles à la conscience compte tenu des résultats obtenus dans les expériences effectuées chez les enfants : le temps de réaction mesuré chez l'enfant lors de celles-ci nous indique que le processus qui permet de différencier, par exemple, deux numérosités approximatives ou deux objets peut être complètement inconscient. Autrement dit, bien que l'enfant ait accès à ce stade à une représentation de la quantité numérique, il n'en a peut-être pas conscience. Chez Brouwer, on parle du stade naïf chez l'enfant, stade où les sens nous présentent des données sans que nous en ayons conscience. Dans ce cas, il paraît impossible pour l'enfant d'avoir un concept de nombre tant que les numérosités ne sont pas des objets de la pensée — c'est-à-dire, tant que le système de répertoire d'objets ne vient pas s'appliquer aux représentations approximatives. Or, il semble clair que le concept NOMBRE doit être accessible à la conscience si les enfants qui l'ont acquis sont capables d'utiliser des nombres pour énumérer les éléments dans des collections.

Donc, pour expliquer l'acquisition des concepts mathématiques, nous devons répondre aux deux questions suivantes : d'une part, comment le concept de NUMÉROSITÉ APPROXIMATIVE peut-il devenir un objet de la pensée et être ainsi accessible à notre conscience, et, d'autre part, comment ce concept se raffine-t-il et se précise-t-il pour devenir NOMBRE?

Il semble utile de dresser un parallèle avec les couleurs, soit : comment les couleurs deviennent-elles des objets de la pensée? Nous avons vu que les enfants prennent beaucoup de temps pour apprendre à distinguer entre des objets en se basant uniquement sur leur couleur, même si les sens leurs envoient toutes les données nécessaires. En effet, même au-delà de l'âge de deux ans, bien que les enfants disposent certainement d'un concept comme VISUELLEMENT DIFFÉRENT, ils ne détiennent ni ne maîtrisent celui de COULEUR. Ils réussissent seulement à différencier entre des objets en se basant sur leur couleur une fois qu'ils ont appris les mots désignant ces couleurs (Sandhofer & Smith, 2001). De même, nous avons vu que les enfants apprennent la liste des numéros sans en connaître la signification et peuvent distinguer entre des numérosités sans posséder le concept NOMBRE. Mais, comment passe-t-on de VISUELLEMENT DIFFÉRENT à COULEUR DIFFÉRENTE? Et, comment passe-t-on, de la même manière, de NUMÉROSITÉ DIFFÉRENTE à NOMBRE DIFFÉRENT?

Dans les deux cas, il semble que la notion d'interprétation de Barsalou pourrait nous aider à comprendre comment l'enfant acquiert un concept plus précis: si, comme Dehaene, l'on considère la numérosité comme un sixième sens, les représentations approximatives, comme des couleurs, peuvent faire partie de SP qui sont utilisés pour représenter des qualités d'objets. Or, il est aussi possible de créer des SP pour des états introspectifs. Dans ce cas, l'on se trouve peut-être en mesure d'affirmer qu'à chaque fois que le bébé fait appel à sa capacité de détecter des numérosités ou des couleurs dans sa vie quotidienne, cette capacité prend assez de place pour devenir l'objet d'un état introspectif. Autrement dit, au fur et à mesure que l'enfant interagit avec des numérosités — par exemple, en triant des objets, comme pour jouer aux billes — il devient de plus en plus utile de développer un SP pour cette qualité, et de considérer la numérosité comme un objet de la pensée. Aussi, suite à de nombreuses manipulations de numérosités, l'enfant est à même de développer le concept de NUMÉROSITÉ DIFFÉRENTE ainsi que celui de NUMÉROSITÉ INDENTIQUE, et finalement de NUMÉROSITÉ. Dans ce cas, le système de répertoire d'objet — considéré comme un simulateur — pourrait être capable d'interpréter les SP associées aux numérosités approximatives comme des

objets, puisque l'interaction répétée avec ces SP leur accorde le statut d'objet de la pensée. Ceci pourrait alors expliquer pourquoi les enfants apprennent d'abord la signification de 'un', et ensuite celle de 'deux', et de 'trois' et enfin celle de 'quatre' : en suivant cet ordre, il semble que ce sont là les numérosités les plus fréquemment rencontrées dans la vie d'un enfant âgé d'environ 2 ans.

Pour ce qui est des numérosités plus grandes, si l'enfant est capable de voir une numérosité approximative comme un objet distinct d'autres objets de la pensée, il pourrait par la suite y imposer des opérations mentales comme l'addition et la comparaison et par le biais de telles utilisations arriver à préciser cette représentation. Après tout, nous avons vu que nos simulateurs s'enrichissent au fur et à mesure que l'on interagit avec des exemplaires de leur catégorie ; les abstractions étant une forme d'habileté nous permettant de construire des interprétations qui subviennent à nos besoins. Les concepts mathématiques pourraient ainsi constituer une telle habileté : à mesure que l'enfant interagit avec ENVIRON 12, ENVIRON 8, etc., il serait apte à développer ses habiletés et à obtenir 12, 8, etc.

#### 6.4 Emboîtement et système de répertoire d'objets

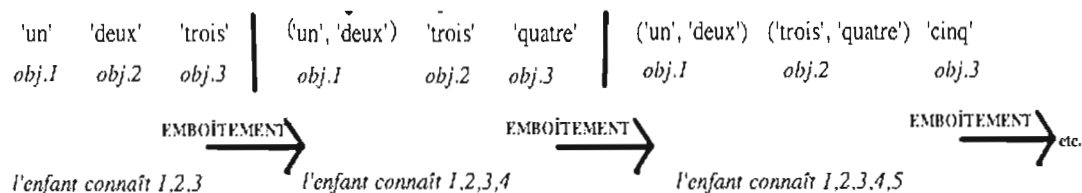
Il semble cependant que cette interaction entre le système de répertoire d'objets et celui des représentations approximatives doit être davantage approfondie, puisque le simple fait de considérer une numérosité approximative comme un objet demeure insuffisant pour permettre d'obtenir le concept de NOMBRE. En effet, il semble qu'on puisse dire que le simple fait de considérer une numérosité comme un objet de la pensée soit insatisfaisant, puisque les numérosités pourraient simplement être considérées comme des exemples de la catégorie OBJET, qui pourrait être un primitif cognitif sans aspect numérique.

L'interprétation par le système de répertoire d'objets du système de représentation approximative de la numérosité impliquerait que le sujet serait capable de distinguer entre trois numérosités de façon précise, puisque le système de répertoire d'objets

comporte un maximum de trois éléments. Or, nous avons vu que Wynn n'a trouvé aucun enfant connaissant la signification de QUATRE, ne sachant pas la signification des autres nombres dans une liste. Comment l'enfant pourrait-il percer la barrière de TROIS et arriver à avoir le concept QUATRE ? Il semble insuffisant de dire comme le fait Carey que l'enfant procède à une induction, puisque nous ne savons pas ce qui déclenche cette induction (voir partie 4.3.4)

Une réponse potentielle pourrait nous venir de Brouwer et de sa description de la construction des *n*-ités, qui se produit en considérant une paire comme premier élément d'une autre paire : si l'enfant conçoit deux des numérosités comme un seul objet, il a maintenant de la place pour d'autres numérosités dans son système de répertoire d'objets. Par répétition de ce processus, il peut ainsi construire une liste de plus en plus importante de numérosités et considérer chacune, avec précision, comme distincte l'une de l'autre. Bien sûr, on doit maintenant se demander comment l'enfant peut concevoir deux numérosités comme un seul objet, mais il s'agit là d'une question plus générale relative à la manière de former la notion de PAIRE. On pourrait répondre que le système de répertoire d'objets peut réussir à s'appliquer à soi-même puisqu'il est possible pour des simulations de procéder à l'intérieur d'autres simulations.

L'enfant serait donc en mesure de passer la barrière du TROIS lorsqu'il est en mesure, grâce à un tel processus de récursion de paires d'objets, de considérer plusieurs numérosités précises à la fois (voir figure 6.1 ci-dessous). Ceci pourrait expliquer pourquoi certains enfants connaissaient la signification de certains nombres sans y associer une taille relative dans l'étude menée en 2006 par Carey : étant donné que ces nombres sont obtenus en regroupant d'autres dans un seul objet de la pensée, les nombres ne sont pas encore tous individués en même temps dans la conscience de l'enfant et l'enfant ne peut, de ce fait, accorder une taille relative à chacun d'entre eux.



**Figure 6.1** Comment l'emboîtement d'objets pourrait permettre de compter au-delà de 'quatre'.

Une autre réponse expliquant comment la barrière du TROIS est franchie consisterait à dire que lorsque le système de répertoire d'objets s'applique aux représentations approximatives, l'enfant est capable d'identifier plusieurs numérosités comme des objets, la mémoire lui permettant de définir de plus en plus de numérosités comme des objets tout en conservant les identifications passées. Par la suite, les nouvelles numérosités seraient considérées comme distinctes de celles emmagasinées dans la mémoire. Ce serait ainsi la naissance du concept de NOMBRE PRÉCIS. Évidemment, comprendre la signification des listes des dix (ou vingt) premiers nombres ne garantit pas que l'enfant connaisse actuellement la signification du concept NOMBRE comme membre d'une liste infinie, tel que l'a démontré l'étude de 2006 de Carey : celle-ci montre que même si les enfants distinguent la signification de ces listes, ils demeurent néanmoins toujours incapables de comprendre que 'huit' est plus petit que 'dix'. Or, on est pourtant maintenant à même de dire qu'il s'agit du début de la compréhension de ce concept. Aussi, un grand nombre de personnes peuvent affirmer comprendre le concept NOMBRE sans toutefois avoir conscience de l'infinité des nombres. Nous suggérerons donc qu'un tel raffinement peut survenir suite à un développement du simulateur pour NOMBRE à l'aide de parents et d'enseignants, aidés ou non d'un système de base permettant de représenter l'infini, comme le *ainsi-de-suite*.



## 6.5 Résumé

Dans ce chapitre, nous avons vu comment il est possible d'établir des liens entre les idées de Brouwer, de Barsalou et Dehaene. Cette correspondance nous a certes permis de démontrer l'actualité des idées de Brouwer, mais aussi d'utiliser des éléments de la construction de la pensée par l'IP pour élaborer de nouvelles hypothèses afin de répondre à la question de l'acquisition des concepts mathématiques. Nous avons avancé, au fil de cette discussion, deux nouvelles hypothèses quant à la nature de l'interaction entre les deux systèmes de base postulés par Dehaene, afin d'expliquer la manière dont le système de répertoire d'objets peut délivrer une forme de représentation numérique. Dans les deux cas, le système de répertoire d'objets interprète les simulations du système de représentation approximative de sorte à nous permettre de considérer ces dernières comme des objets de la pensée. Une première hypothèse postule que le système de répertoire d'objets interprète les simulations du système approximatif et construit des simulations de numérosités emboîtées les unes dans les autres, comme on le voit dans la construction de  $n$ -ités chez Brouwer. Dans ce cas, l'enfant est en mesure de considérer plusieurs numérosités à la fois grâce à l'emboîtement de ces dernières. Une autre hypothèse laisse entrevoir que les numérosités approximatives deviennent de plus en plus précises grâce à leur entreposage dans la mémoire suite à des utilisations répétées par l'enfant dans sa vie quotidienne.

## CONCLUSION

L'objectif du présent texte fût de tenter de construire un modèle de l'acquisition des concepts mathématiques sans l'aide du langage tout en s'inspirant des thèses intuitionnistes de L.E.J Brouwer. Pour ce faire, il s'agissait, tout d'abord, de familiariser le lecteur avec les idées de Brouwer afin de mieux clarifier la notion de l'Intuition Primordiale des mathématiques. Aussi, après avoir introduit les idées de Brouwer dans les deux premiers chapitres, l'on est venu à présenter une analyse détaillée des éléments qui composent l'IP dans le chapitre trois puisqu'aucune analyse ne semble être disponible dans la littérature. Cette étude nous a permis de mieux comprendre comment chaque élément est impliqué dans la construction Brouwerienne des mathématiques tout en dressant une analyse potentiellement fonctionnelle de l'acquisition des concepts mathématiques.

Pour s'assurer que notre modèle respecte le plus fidèlement possible les données empiriques obtenues dans les divers champs des sciences cognitives, nous avons présenté la théorie du sens des nombres de Stanislas Dehaene dans le chapitre quatre. Nous avons ainsi montré comment les données paraissent appuyer l'hypothèse selon laquelle deux systèmes cognitifs de base sont impliqués dans nos représentations de concepts mathématiques, soit le système de répertoire d'objets et le système de représentation approximative de la numérosité. Nous avons aussi noté, à la fin de ce chapitre, que plusieurs détails relatifs à la façon dont ces systèmes permettent l'acquisition et le développement des concepts mathématiques sont toujours absents. En outre, nous avons choisi de présenter quelques hypothèses pertinentes de Suzanne Carey, celles-ci voulant que le système de répertoire d'objet soit en grande partie responsable de cette acquisition, en recevant un peu de soutien du système de représentation

et aidé occasionnellement du langage et d'un système de représentation de l'ordre linéaire. Nous avons expliqué la manière dont les idées de Brouwer proposent un point de vue différent sur l'une de ces hypothèses en faisant remarquer que le système de représentation approximative est susceptible de contenir, au préalable, une forme d'ordre, comme c'est le cas pour l'IP de Brouwer.

Dans le chapitre cinq, nous avons exposé la théorie de l'abstraction de Laurence Barsalou afin d'être en mesure de comprendre comment pourraient se développer les concepts mathématiques plus complexes, puisque ni Dehaene ni Carey ne disposent de théorie traitant de ces concepts. Nous avons analysé comment la théorie de Barsalou construit les concepts abstraits à l'aide d'interprétations faites par des simulateurs, et avons tenté d'appliquer ce modèle aux concepts mathématiques, puisqu'une telle présentation est absente chez Barsalou. Nous avons pu alors conclure que le modèle de Barsalou semble être à même d'expliquer le développement des concepts mathématiques plus complexes grâce aux simulateurs d'évènements et aux simulateurs attachés aux états introspectifs.

Ayant en main les données empiriques de Dehaene et Carey visant à expliquer l'acquisition des concepts mathématiques de base ainsi que le modèle fonctionnel de Barsalou pour le développement des concepts plus complexes, nous avons pu tenter d'appliquer le modèle intuitionniste de Brouwer aux modèles plus récents des chercheurs en sciences cognitives. Pour ce faire, il s'est avéré important de comparer les éléments de Brouwer à ceux de Dehaene et Barsalou pour s'assurer de la compatibilité de leurs points de vue. Ainsi, dans le chapitre six, nous avons vu comment plusieurs éléments de la philosophie de Brouwer sont présents dans les théories plus modernes, et même que certains éléments de Brouwer peuvent contribuer à améliorer certains aspects des théories plus modernes. En effet, le lien établi entre Brouwer et Barsalou nous a permis de préciser davantage la notion importante de satisfaction chez Barsalou, à savoir : l'on remarque d'une part, que chez Brouwer l'insertion est en relation avec les attentes du sujet, attentes se rapportant à sa capacité de réaliser l'insertion d'une construction dans

une autre, et d'autre part, que le succès ou l'échec de cette insertion peuvent correspondre à la satisfaction ou à la non-satisfaction d'une interprétation chez Barsalou.

Après avoir établi ces correspondances, nous avons pris des éléments dans les théories de Brouwer, Dehaene, Carey, et Barsalou pour tenter de construire un modèle de l'acquisition des concepts mathématiques respectant les données récentes en matière d'acquisition et de représentation de concepts mathématiques (Dehaene, Carey), tout en conservant une plausibilité fonctionnelle (Barsalou). En premier lieu, le lien établi entre les éléments de Brouwer et Barsalou a visé à approfondir la question de l'ontogenèse des mathématiques dans le cerveau. En effet, notre critique de la construction des concepts abstraits en termes de simulateurs nous a poussé à nous interroger sur la question de l'ontogenèse des mathématiques en termes différents, c'est-à-dire, en faisant référence à la manière dont les simulateurs du système de répertoire d'objets réussissent à modifier les simulations du système de représentation approximative. Notre tentative de réponse a fait appel à la notion d'interprétation de Barsalou ainsi qu'à celle d'enrichissement de simulateurs. En effet, nous avons tenté de défendre l'hypothèse selon laquelle le système de répertoire d'objets vient interpréter celui de représentation approximative afin de nous aider à traiter les numéros approximatifs comme des objets. Par la suite, nous avons utilisé des notions rencontrées dans la construction de  $n$ -ités chez Brouwer pour tenter d'expliquer comment les enfants sont en mesure de construire des listes de numéros, en soulignant que le même emboîtement d'une construction dans un autre présent dans l'IP pourrait être responsable de la construction d'une liste ordonnée de numéros chez l'enfant.

Ainsi, grâce aux notions rencontrées chez Brouwer, Dehaene, Carey, et Barsalou, nous sommes arrivés à un modèle de l'acquisition des concepts mathématiques qui semble plausible et qui ne fait pas appel au langage. Cette ontogenèse serait donc le résultat des deux systèmes de base postulés par Dehaene, légèrement modifiés en conformité avec des thèses intuitionnistes. En effet, tandis que le système de représentation numérique possède la capacité de représenter l'ordre ainsi qu'une forme de relation de successeur, le système de répertoire d'objets est capable de délivrer une

représentation structurée et de considérer une collection comportant plus d'un élément comme un objet. Si ces considérations sont justifiées, nous pouvons alors avancer que nous obtenons nos capacités mathématiques uniquement par le biais de ces deux systèmes. Dans ce cas, le système de représentation approximative nous donnera le concept de NUMÉROSITÉ qui sera par la suite modifié par le système de répertoire d'objet pour enfin donner celui de NOMBRE. Les nombres les plus utilisés ('un', 'deux', 'trois', ...) pourront alors ensuite être éventuellement perçus comme un seul objet (par exemple, PAIRE) en laissant ainsi de la place à d'autres NUMÉROSITÉS fréquemment employées par l'enfant. Au fur et à mesure que l'enfant utilisera ces numérosités, elles deviendront plus précises et viendront elles aussi s'ajouter à la liste de nombres. Cette liste sera ordonnée puisque les numérosités approximatives sont elles aussi ordonnées au préalable par le système de représentation approximative. Une fois en possession de la liste de nombres, l'enfant perfectionnera ses connaissances mathématiques à travers son éducation et deviendra ainsi familier avec le concept NOMBRE. Une fois en possession de ce dernier, l'enfant pourra développer les autres concepts mathématiques plus complexes en développant des simulateurs d'évènements et d'états introspectifs appropriés.

Nous avouons que notre modèle est hautement spéculatif, et qu'il est présenté sans aucun support empirique. Ceci étant dit, nous pensons tout de même que plusieurs aspects semblent plausibles, et qu'un grand nombre d'idées que nous avançons méritent d'être prises en compte et pourraient être développées de manière intéressante par les chercheurs concernés. Nous pensons notamment que certaines idées puisées chez Brouwer s'annoncent bien prometteuses et nous ont ainsi permis de présenter de nouvelles interprétations des données. Mentionnons l'amélioration de la notion de satisfaction de Barsalou, ainsi que les modifications apportées aux systèmes de base de Dehaene évoquées dans le chapitre précédent, au sein desquels l'emboîtement, l'ordre, la récursivité, et l'absence du langage sont toutes des notions issues de notre présentation de l'IP de Brouwer. Néanmoins, même si aucune de ces hypothèses ne semble fructueuse, nous espérons au moins avoir contribué à rendre les idées de Brouwer plus

claires et plus intéressantes et à les distancier de leur caractère mystique, qui semble empêcher plusieurs d'apprécier sa philosophie à sa juste valeur.

## RÉFÉRENCES

### Chapitres 1-3

#### Brouwer, Luitzen Egbertus Jan

Van Stigt , 1990 comporte une liste complète des œuvres publiées et non-publiées de Brouwer.

- 1905        *Life, Art, and Mysticism*, In Heyting, 1975
- 1907        *On the foundations of mathematics*, In Heyting, 1975
- 1912A       *Intuitionism and Formalism*, In Benaceraff & Putnam, 1964
- 1923        *Intuitionist splitting of the fundamental notions of mathematics*, In Mancosu, 1998
- 1928A       *Intuitionist reflections on formalism*, In Mancosu, 1998
- 1929        *Mathematics, Science, and Language*, In Mancosu, 1998
- 1930A       *The structure of the continuum*, In Mancosu, 1998
- 1933B       *Will, Knowledge, and Language*, In van Stigt, 1990
- 1947        *Guidelines of Intuitionistic mathematics*, In Heyting 1975
- 1948C       *Consciousness, philosophy and mathematics*, In Benaceraff & Putnam, 1964
- 1952B       « Historical background, principles and methods of intuitionism », *South African Journal of Science* 49, pp.139-146; In Heyting 1975, vol.1 pp.508-515
- 1955        *The effect of intuitionism on classical algebra of logic*, dans Heyting 1975
- BMS 3B     *The rejected parts of Brouwer's dissertation*, In van Stigt, 1990
- BMS32     Notes pour un cours donné à Berlin en 1927, In van Stigt, 1990

- BMS32 Notes pour un cours donné à Berlin en 1927, In van Stigt, 1990
- BMS37 Notes pour un livre non-publié sur les fonctions réels, In van Stigt, 1990
- BMS49 *Disengagement of Mathematics from Logic*, In van Stigt, 1990
- BMS51 *The Cambridge Lectures*, In van Dalen, 1981

### **Autres auteurs**

- Becker, O., 1927, *Mathematische Existenz*, extraits cités dans Mancosu, 1998
- Benaceraff, Paul, et Hilary Putnam (éd.). 1964. *Philosophy of Mathematics : Selected Readings*, Cambridge university press, Cambridge
- Ewald, William (éd. ).1996., *From Kant to Hilbert : a sourcebook in the foundations of mathematics, Volume II*, Clarendon Press, Oxford
- Glivenko, Valerii. 1929. *On some points of the logic of Mr. Brouwer*, In Mancosu, 1998
- Heyting, Arend. 1930. *On intuitionist logic*, In Mancosu 1998
- Heyting, Arend. 1955. *Intuitionnisme et théorie de la démonstration*, Gauthier-Villars, Paris
- Heyting, Arend. 1971. *Intuitionism : an introduction*, North-Holland, Amsterdam
- Heyting, Arend. 1975., *L.E.J Brouwer Collected Works Vol 1*, North-Holland, Amsterdam
- Kant, Immanuel. 1787. *Critique of Pure Reason*, traduit de l'allemand par N. Kemp-Smith, MacMillan, Londres, 1929
- Largeault, Jean. 1993. *Intuitionnisme et théorie de la démonstration*, Vrin, Paris
- Mancosu, Paolo. 1998. *From Brouwer to Hilbert*, OUP, New York
- van Stigt, W. P. 1990. *Brouwer's intuitionism*, North-Holland, Amsterdam
- Troesltra, Anne S. et Dirk van Dalen. 1988. *Constructivism in mathematics : an introduction, Vol I*, North-Holland, Amsterdam



## Autres sources consultées

- Dummett, M.A.E. 1977. *Elements of intuitionism*, Clarendon Press, Oxford
- Fraenkel, Abraham A, et Yehoshua Bar-Hillel (éd.). 1958. *Foundations of set theory*, Elsevier, Amsterdam
- van Heijenoort, J. 1967. *From Frege to Godel*, Harvard University Press, Cambridge Mass.
- Kleene, C. & Vesley, R.R. 1965. *The foundations of intuitionistic mathematics*, North-Holland, Amsterdam
- Posy, C.J. .1974. « Brouwer's constructivism », *Synthèse* vol.27, pp.125-159
- Tiezen, Richard. 2005. *Phenomenology, Logic, and the Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge
- Troelstra, Anne S. et Dirk van Dalen (éd.). 1982. *The L.E.J. Brouwer Centenary symposium*, North Holland, Amsterdam
- Troelstra, A.S. 1977. *Choice Sequences*, Clarendon Press, Oxford
- Troelstra, A.S. 1982. *On the origin and development of Brouwer's concept of choice sequence*, dans Troelstra & van Dalen 1982
- Van Atten, M., Dirk van Dalen, et Richard Tieszen. 2002d. « Brouwer and Weyl : The phenomenology and mathematics of the intuitive continuum », *Philosophia Mathematica*, vol. 10, no 2, p.203-226
- Van Atten, Mark, et Dirk van Dalen. 2002e. « Arguments for the continuity principle », *Bulletin of symbolic logic*, vol.10, no 3, p.329-347
- Van Dalen, Dirk. 1999. *Mystic, Geometer, Intuitionist : the life of L.E.J Brouwer*, Clarendon Press, Oxford
- Van Dalen, Dirk. 1981. *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*, Cambridge University Press, Cambridge

## Chapitres 4-6

- Adams, F. & Campbell, K. 1999. « Modality and abstract concepts », *Behavioral and Brain Sciences*, vol. 22, p.610
- Barsalou, L.W. 1999. « Perceptual symbol systems », *Behavioral and Brain Sciences*, vol. 22, p.557-660
- Barsalou, L.W. 2002. « Abstraction as Dynamic Interpretation in perceptual symbol systems » ébauche d'un chapitre apparaissant In L. Gershkoff-Stowe & D. Rakison (éd.). 2005. *Building object categories in developmental time*, p.389-431, Hillsdale, NJ: Erlbaum
- Barth, Hilary, Nancy Kanwisher, et Elizabeth Spelke. 2003. « The construction of large number representations in adults », *Cognition*, vol. 86, p.201-221
- Bechtel, William, (2006): « The epistemology of evidence in cognitive neuroscience », In R. Skipper Jr., C. Allen, R. A. Ankeny, C. F. Craver, L. Darden, G. Mikkelsen, and R. Richardson (éd.), *Philosophy and the Life Sciences: A Reader*. MIT Press, Cambridge, MA:
- Carey, Suzanne. 2001. « Cognitive foundations of arithmetic : evolution and ontogenesis », *Mind and Language*, vol. 16, no 1, p. 37-55
- Carey, Suzanne, et Mathieu Le Corre. 2007. « One, two, three, four, nothing more: An investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles », *Cognition*, vol. 105, p.395-438.
- Dehaene, Stanislas: *La Bosse des Maths*, Odile Jacob, Paris, 1997
- Dehaene, Stanislas & Laurent Cohen. 1997. « Cerebral pathways for calculation: double dissociation between rote verbal and quantitative knowledge of arithmetic », *Cortex*, vol. 33, p.219-250
- Dehaene, Stanislas, Spelke, E., Pinel, P., Stanescu, R., Tsivkin, S. 1999a. « Sources of mathematical thinking: Behavioral and brain-imaging evidence », *Science*, vol. 284, p.970- 974

- Dehaene, Stanislas, et Elizabeth Spelke. 1999b. « Biological foundations of numerical thinking: Response to T.J. Simon », *Trends in Cognitive Science*, vol. 3, no 10, p.365-366
- Dehaene, Stanislas. 2001. « Précis of the number sense », *Mind & Language*, vol. 16, p.16-36,
- Dehaene, Stanislas & Lionel Naccache. 2001. « Towards a cognitive neuroscience of consciousness: Basic evidence and a workspace framework », *Cognition*, vol. 79, p.1-37,
- Dehaene, Stanislas. 2002. « Single-Neuron Arithmetic », *Science*, vol. 297, p.1652-1653,
- Dehaene, Stanislas. 2003« Les bases cérébrales d'une acquisition culturelle: la lecture ». In Changeux, Jean-Pierre, (éd.), *Gènes et Culture*, pp. 187--199. Odile Jacob, Paris
- Dehaene, Stanislas. *et al.* 2004a. « Arithmetic and the brain », *Current Opinion in Neurobiology*, vol. 14, p.218-224,
- Dehaene, Stanislas. 2004b. « Evolution of cortical circuits for reading and arithmetic: the neuronal recycling hypothesis », dans Dehaene, S., Duhamel, J.R., Hauser, M. & Rizzolatti, G. (éd.), *From monkey brain to human brain*, MIT Press, Cambridge, Mass.
- Dehaene, Stanislas & Jean-Pierre Changeux. 2004. « Neural mechanisms for access to consciousness ». In Michael Gazzaniga (éd.). *The Cognitive Neurosciences 3rd edition*, MIT Press, Cambridge, Massachussets
- Feigenson, Lisa, Suzanne Carey, et Elizabeth Spelke. 2002. « Infants' discrimination of number vs. continuous extent », *Cognitive Psychology*, vol. 44, p.33-66
- Feigenson, Lisa, Stanislas Dehaene, et Elizabeth Spelke. 2004a. « Core systems of number », *Trends in Cognitive Science*, vol. 8, no7, p.307-314
- Feigenson, Lisa, Stanislas Dehaene, et Elizabeth Spelke. 2004b. « Origins and endpoints of the core systems of number . Reply to Fias and Verguts », *Trends in Cognitive Science*, vol. 8, no 7, p.307-314
- Fias, Wim, et Tom Verguts. 2004. « The mental number line : exact and approximate », *Trends in Cognitive Science*, vol.8, no 10, p.447-448
- Frege, Gottlob. 1884. *The foundations of Arithmetic : A logico-mathematical enquiry into the concept of number*, Northwestern University Press, Evanston, Illinois, 1980

- Gallistel, Randy, et Rochel Gelman. 2000. « Non-verbal numerical cognition: from reals to integers », *Trends in Cognitive Science*, vol. 4, no 2, p. 59-65
- Gallistel, Randy, et Rochel Gelman. 2001. « The cultural and evolutionary history of the real numbers », In Levinson, S. & Jaisson, P. (éd.) *Culture and Evolution*, MIT Press, Cambridge, Massachussets
- Hauser, Marc D., Suzanne Carey, et Lilian B. Hauser. 2000. « Spontaneous number representations in semi-free-ranging rhesus monkeys », *Proceedings of the Royal Society of London B*, vol. 267, p. 829-833
- Hauser, Marc D., Fritz Tsao, Patricia Garcia, et Elizabeth Spelke. 2003. « Evolutionary foundations of number : spontaneous representation of numerical magnitudes by cotton-top tamarins », *Proceedings of the Royal Society of London B*, vol. 270, p. 1441-1446
- Hauser, Marc D. et Elizabeth Spelke. 2004. « Evolutionary and developmental foundations of human knowledge. » In Michael Gazzaniga (éd.) *The Cognitive Neurosciences, 3rd edition*, MIT Press, Cambridge, Massachussets
- Lemer Cathy, Stanislas Dehaene, Elizabeth Spelke, et Laurent Cohen. 2003. « Approximate quantities and exact number words: Dissociable systems », *Neuropsychologia*, p. 1942-1958
- Molko, Nicolas, Anna Wilson, et Stanislas Dehaene. 2004. « Dyscalculie, le sens perdu des nombres », *La recherche*, Octobre 2004, p.42-49
- Naccache, Lionel et Stanislas Dehaene. 2001. « The priming method : imaging unconscious repetition priming reveals an abstract representation of number in the parietal lobes », *Cerebral Cortex*, vol 11, p.966-974
- Ohlsson, Stellan. 1999. « Selecting is not abstracting », *Behavioral and Brain Sciences*, vol. 22, p.630-631
- Piazza, Manuela, Andrea Mechelli, Brian Butterworth, et Cathy J. Price. 2002. « Are subitizing and counting implemented as separate or functionally overlapping processes? », *Neuroimage*, vol. 15, p.435-446
- Piazza, Manuela et Stanislas Dehaene. 2004a. « From number neurons to mental arithmetic: the cognitive neuroscience of number sense », In Michael Gazzaniga (éd.) *The Cognitive Neurosciences, 3rd edition*, MIT Press, Cambridge, Massachussets,

- Piazza, Manuela, Véronique Izard, Philippe Pinel, Denis LeBihan, et Stanislas Dehaene. 2004b. « Tuning curves for approximate numerosity in the human intraparietal sulcus », *Neuron*, vol.4, p.547-555
- Pica, Pierre, Cathy Lemer, Véronique Izard, et Stanislas Dehaene. 2004. « Exact and approximate arithmetic in an Amazonian indigene group », *Science*, vol. 306, no. 5695, p.499-503
- Pinel, Philippe, Manuela Piazza, Denis LeBihan, et Stanislas Dehaene. 2004. « Distributed and overlapping cerebral representations of number size and luminance during comparative judgements », *Neuron*, vol. 41, no 6, p.983-993
- Sandhofer, Catherine M., et Linda B. Smith. 2001. « Why Children learn color and size words so differently: Evidence from adult's learning of artificial terms », *Journal of Experimental Psychology: General*, vol. 130, p.600-617
- Seron, Xavier, et Mario Pesenti. 2001. « The number sense theory needs more empirical evidence », *Mind and Language*, vol. 16, no 1, p.76-88
- Simon, T.J. 1997. « Reconceptualizing the origins of number knowledge: A 'non-numerical' account », *Cognitive Development*, vol. 12, 349-372
- Simon, T.J. 1998. « Computational evidence for the foundations of numerical competence », *Developmental Science*, vol. 1, p. 71-78
- Simon, T.J. 1999. « Numerical thinking in a brain without numbers? » *Trends in Cognitive Science*, vol. 3, p.363-364,
- Spelke, Elizabeth S. 2000. « Core knowledge », *American Psychologist*, vol. 55, p. 1233-1243.
- Xu, Fei, et Elizabeth Spelke. 2000. « Large number discrimination in 6-month-old infants », *Cognition*, vol. 74, p.B1-B11.
- Xu, Fei. 2003. « Numerosity discrimination in infants: Evidence for two systems of representation », *Cognition*, vol. 89, p.B15-B25
- Zorzi, Marco, Konstantinos Priftis, et Carlo Umiltà. 2002. « Brain damage: neglect disrupts the mental number line », *Nature*, vol. 417 p.138-139