UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

SUR LE DÉFAUT PALINDROMIQUE DES MOTS INFINIS

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

ALEXANDRE BLONDIN MASSÉ

DÉCEMBRE 2008

REMERCIEMENTS

J'aimerais particulièrement remercier mon directeur de maîtrise, Srecko Brlek, de m'avoir initié à cette passionnante discipline qu'est la combinatoire des mots, d'avoir su captiver mon intérêt et de m'avoir soutenu tout au long de ma maîtrise. Merci également à Sébastien Labbé avec qui j'ai partagé mes premières découvertes, mes premiers doutes et mes premières rédactions scientifiques. Je remercie également Amy Glen, Xavier Provençal, Geneviève Paquin et Annie Lacasse, pour les enrichissantes discussions combinatoires.

Merci à Laurent Vuillon, pour ses explications claires, son enthousiasme contagieux et sa vivacité d'esprit, à Simone Rinaldi et à Andrea Frosini, pour leur très agréable compagnie à Chambéry et à Bibbiena, ainsi qu'à Jean-Marc Fédou et à Jean-Guy Penaud pour la visite éclair de Florence et pour ce long périple à travers la Toscane.

Merci à Lise Tourigny, qui fait du LaCIM un endroit où il fait bon s'attarder pour manger ou simplement bavarder, ainsi qu'à Manon Gauthier avec qui toutes les démarches se révèlent d'une simplicité étonnante.

Merci à Lorraine, Daniel, Maxime et Xavier, qui m'ont toujours convaincu que la vie n'avait que des merveilles et des découvertes à offrir.

Merci à Annie, ma compagne de tous les jours, qui a enduré cette longue rédaction, qui m'a donné le précieux temps dont j'avais besoin pour mener à bien cette entreprise hasardeuse qu'est la recherche mathématique et, surtout, qui a patiemment écouté la longue valse de "Je pense que j'ai trouvé..." et "Finalement, ça marche pas..." que je lui livrais presque quotidiennement.

Finalement, merci à Ludo d'être entré dans ma vie.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

RÉSUMÉ

Lorsqu'on s'intéresse à l'étude de la structure combinatoire d'un mot infini $\mathbf{w}$, une stratégie classique consiste à calculer sa fonction de complexité, c'est-à-dire à décrire le nombre de mots de longueur n qui apparaissent dans $\mathbf{w}$, pour chaque entier $n \geq 0$. Récemment, des chercheurs se sont intéressés à un raffinement de cette notion en introduisant la fonction de complexité palindromique : pour chaque entier $n \geq 0$, nous calculons le nombre de palindromes de longueur n apparaissant dans $\mathbf{w}$. Rappelons qu'un palindrome est un mot qui se lit de la même façon de gauche à droite que de droite à gauche (par exemple, "radar" et "ressasser" sont des palindromes de la langue française). La connaissance des palindromes apparaissant dans un mot permet de déduire de nombreuses informations précieuses sur sa structure. Par exemple, un mot admettant une infinité de palindromes préfixes est nécessairement récurrent (tout facteur apparaît une infinité de fois) et son langage est fermé sous l'opération miroir. D'autre part, nous étudions également les occurrences de facteurs antipalindromiques (une généralisation de la notion de palindrome), qui semblent naturellement en interaction avec les palindromes usuels. En particulier, nous décrivons les complexités palindromique et antipalindromique de quelques familles importantes de mots : les mots périodiques, les mots sturmiens, le mot de Thue-Morse et les suites de Rote. Dans un deuxième temps, nous étudions le défaut palindromique des mots finis et infinis. Il s'agit d'une mesure de "richesse" ou de "pauvreté" en palindromes des mots. Nous montrons en particulier que certains mots associés aux suites de Rote, à l'instar des mots sturmiens (Droubay, Justin et Pirillo, 2001), sont aussi pleins, c'est-à-dire qu'ils réalisent la complexité palindromique maximale, et nous établissons aussi des conditions sous lesquelles les mots périodiques sont pleins. Une section supplémentaire est consacrée à l'étude des lacunes du mot de Thue-Morse, qui admet une infinité de palindromes, mais dont le défaut est infini (c'est-à-dire qu'il possède une infinité de lacunes palindromiques). En dernier lieu, nous mentionnons quelques problèmes ouverts dans ce passionnant champ de recherche.

Mots-clés : Combinatoire, mots, palindromes, antipalindromes, complexité, défaut

INTRODUCTION

Bien qu'ayant été présente implicitement dans les travaux de grands maîtres tels que Markov, Birkhoff, Bernoulli et Thue, la combinatoire des mots n'existe que depuis quelques décennies comme discipline à part entière. La compréhension de la structure des mots finis et infinis, plus particulièrement de la structure palindromique des mots, possède de nombreuses applications en analyse et traitement des images, en physique (Hof, Knill et Simon, 1995; Baake, 1999; Allouche, 2003) et en théorie des nombres (Allouche et Shallit, 2000; Adamczewski, 2002). Par exemple, nous pouvons représenter le contour d'un objet discret par un mot codant les déplacements (*haut*, *bas*, *gauche*, *droit*) et utiliser des algorithmes linéaires sur les mots pour extraire une foule d'informations utiles parmi lesquelles on compte l'aire, le centre de masse et la convexité (Brlek, Labelle et Lacasse, 2005; Brlek, Fédou et Provençal, 2008; Brlek, Lachaud et Provençal, 2008).

Dans ce mémoire, nous nous concentrons sur la combinatoire des palindromes dans les mots finis et infinis. En effet, les palindromes sont de précieux indicateurs de la structure de nombreux mots et admettent des interprétations notamment en géométrie discrète (Brlek, Lachaud et Provençal, 2008). Plusieurs chercheurs se sont déjà intéressés à la palindromicité (Allouche, Baake, Cassaigne et Damanik, 2003; Brlek, Hamel, Nivat et Reutenauer, 2004) et un bref survol des résultats connus est donné dans (Allouche, Baake, Cassaigne et Damanik, 2003). En particulier, une mesure de "richesse" et de "pauvreté" en palindromes, appelée *défaut palindromique*, a été définie dans (Brlek, Hamel, Nivat et Reutenauer, 2004).

Plus précisément, nous présentons certains résultats déjà connus sur certaines familles importantes de mots et nous en incluons de nouveaux. Ce travail est divisé comme suit.

Le Chapitre 1 introduit les définitions et les notations nécessaires à la compréhension du présent mémoire.

Dans le Chapitre 2, nous introduisons les complexités palindromique et antipalindromique, qui sont calculables linéairement en comptant, à chaque position, le plus long suffixe (anti-)palindromique nouveau. Nous rappelons la complexité palindromique des mots sturmiens, résultat établi dans (Droubay et Pirillo, 1999). Ensuite, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour décrire celles des mots périodiques (Allouche, Baake, Cassaigne et Damanik, 2003; Brlek, Hamel, Nivat et Reutenauer, 2004). Puis, nous décrivons la complexité palindromique du mot de Thue-Morse. Bien qu'il soit possible d'obtenir sa complexité à l'aide d'un théorème dans (Allouche, Baake, Cassaigne et Damanik, 2003), elle n'y est pas donnée explicitement et nous en donnons une démonstration complète dans (Blondin Massé, Brlek et Labbé, 2008) ainsi que dans ce mémoire. Nous terminons avec certains mots étudiés par Rote, que nous appelons suites de Rote stables sous complémentation (Rote, 1994). Leur complexité palindromique a été décrite dans (Berthé et Vuillon, 2001) et fera également l'objet d'un article en préparation (Blondin Massé, Brlek, Labbé et Vuillon, 2008). Parallèlement, nous donnons explicitement la complexité antipalindromique de ces mots. Il s'agit de résultats qui n'ont pas été explicités dans la littérature, de sorte que par souci de complétude, nous les incluons également.

Dans le Chapitre 3, nous reprenons chacune des familles de mots abordées dans le Chapitre 2 et nous décrivons leur défaut palindromique. Nous rappelons entre autres les résultats connus sur les mots périodiques (Brlek, Hamel, Nivat et Reutenauer, 2004), ainsi que ceux sur les mots sturmiens (Droubay, Justin et Pirillo, 2001), à savoir que ces mots sont pleins (c'est-à-dire qu'à chaque position un nouveau palindrome apparaît dans le calcul de la complexité). Dans un deuxième temps, nous décrivons explicitement les lacunes palindromiques du mot de Thue-Morse introduites dans (Blondin Massé, Brlek et Labbé, 2008), c'est-à-dire les positions auxquelles le plus long palindrome suffixe est déjà apparu antérieurement. Ces résultats ont fait l'objet d'un article et d'une communication à la 6e conférence internationale sur la génération aléatoire et exhaustive de structures combinatoires et la combinatoire bijective (GASCOM 2008) (Blondin Massé, Brlek et Labbé, 2008). Nous reprenons également certaines suites de Rote et nous montrons qu'elles sont pleines, résultats qui seront également inclus dans (Blondin Massé, Brlek, Labbé et Vuillon, 2008).

Nous concluons ce mémoire avec le Chapitre 4, dans lequel nous mentionnons quelques problèmes ouverts sur la complexité, le défaut et les lacunes palindromiques. Différents problèmes ont été abordés et la résolution d'un certain nombre d'entre eux a fait l'objet d'un article (Blondin Massé, Brlek, Frosini, Labbé et Rinaldi, 2008) dans lequel nous nous sommes intéressés à la reconstruction d'un mot à partir de sa complexité palindromique.

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS

Dans ce chapitre, nous adoptons les définitions et les notations usuelles de la combinatoire des mots. La majorité d'entre elles sont standard, mais certaines ne sont introduites que pour les besoins du présent mémoire. Pour plus de détails, le lecteur est référé à Lothaire (Lothaire, 1983).

1.1 Mots

Un *alphabet* A est un ensemble fini dont les éléments sont appelés *lettres* ou *symboles*. Un *mot fini* w sur un alphabet A est une suite finie $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ d'éléments de A, où $n \in \mathbb{N}$ (souvent, pour des raisons arithmétiques, nous commençons l'indexation par 0). Afin d'alléger la notation, nous écrivons $w = w_1 w_2 \cdots w_n$. L'entier n est appelé la *longueur* de w, notée $|w|$. Il existe un unique mot w tel que $|w| = 0$. Ce mot est appelé *mot vide* et est noté ε. L'ensemble des lettres apparaissant dans un mot w est noté $\textsc{Alph}(w)$, c'est-à-dire

$$\textsc{Alph}(w) = \{w_i \mid 1 \leq i \leq |w|\}.$$

Évidemment, $\textsc{Alph}(w) \subseteq A$.

Nous désignons par A^n l'ensemble des mots de longueur n sur A, où $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, l'ensemble des mots de longueur quelconque sur A est noté A^* et est défini par

$$A^* = \bigcup_{i \geq 0} A^n.$$

Étant donné deux mots $u = u_1 u_2 \cdots u_m$ et $v = v_1 v_2 \cdots v_n$ sur A, où $m, n \in \mathbb{N}$, nous appelons *concaténation* de u et v le mot $u \cdot v = u_1 u_2 \cdots u_m v_1 v_2 \cdots v_n$. Remarquons que la concaténation de deux mots est une opération associative sur A^*, de sorte que $(A^*, \cdot)$ est un monoïde, appelé *monoïde libre*, dont l'élément neutre est ε.

Soit $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ un mot de longueur n sur un alphabet A. Nous disons d'un mot u qu'il est *facteur* de w s'il existe des mots x et y tels que $w = xuy$. En particulier, dans le cas où $x = \varepsilon$ (respectivement $y = \varepsilon$), nous disons que u est un *préfixe* (respectivement *suffixe*) de w. L'*ensemble des facteurs* ou le *langage* de w est noté $\textsc{Fact}(w)$, alors que l'ensemble des facteurs de longueur n de w est noté $\textsc{Fact}_n(w)$. D'autre part, l'ensemble des préfixes (respectivement suffixes) de w est noté $\textsc{Pref}(w)$ (respectivement $\textsc{Suff}(w)$). L'unique préfixe (respectivement suffixe) de w de longueur i, où $0 \leq i \leq n$, est noté $\textsc{Pref}_i(w)$ (respectivement $\textsc{Suff}_i(w)$). Nous disons que le nombre i est une *occurrence* de u s'il existe des mots x et y tels que $w = xuy$, où $|x| = i + 1$. Nous désignons par $|w|_u$ le nombre d'occurrences de u dans w. En outre, u est dit *unioccurrent* dans w si $|w|_u = 1$.

L'*image miroir* de $w = w_1 w_2 \cdots w_n$, notée $\widetilde{w}$, est définie par $\widetilde{w} = w_n \cdots w_2 w_1$. Un *palindrome* est un mot p satisfaisant $p = \widetilde{p}$. L'ensemble des facteurs palindromiques d'un mot w est noté $\textsc{Pal}(w)$ et l'ensemble des facteurs palindromiques de longueur n de w est noté $\textsc{Pal}_n(w)$. De plus, afin d'alléger grandement l'écriture par la suite, nous dénotons par $\mathrm{PLPS}(w)$ le plus long palindrome suffixe de w.

La *n-ième puissance* d'un mot w, notée w^n, est donnée par $w^n = ww \cdots w$ (n fois). Nous disons que w est *primitif* s'il n'existe aucun mot u tel que $w = u^n$, pour un certain entier n. En particulier, le *carré* de w est donné par w^2. Un *chevauchement* est un mot de la forme wwu, où w et u sont des mots non vides et $u \in \textsc{Pref}(w)$.

Nous disons de deux mots u et v qu'ils sont *conjugués* s'il existe des mots x et y satisfaisant $u = xy$ et $v = yx$. Par exemple, $u = aabab$ et $v = abaab$ sont conjugués (il suffit de prendre $x = aab$ et $y = ab$). On peut montrer que la relation "être conjugué de" est une relation d'équivalence. L'ensemble des mots conjugués d'un mot w est noté

$[w]$ et on se convainc facilement que $|[w]| = |w|$ si w est primitif.

Supposons que $v \in \text{PREF}(w)$. Alors $v^{-1}w$ est le mot satisfaisant $v(v^{-1}w) = w$, c'est-à-dire que $v^{-1}w$ est le mot obtenu de w en supprimant le préfixe v. De la même façon, si $v \in \text{SUFF}(w)$, alors wv^{-1} est le mot satisfaisant $(wv^{-1})v = w$.

Soient $\varphi : A^* \to B^*$ une fonction, où A et B sont deux alphabets. Nous disons que φ est un *morphisme* s'il préserve la concaténation, c'est-à-dire que $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$, pour n'importe quels $u, v \in A^*$. D'autre part, nous disons que φ est un *antimorphisme* si $\varphi(uv) = \varphi(v)\varphi(u)$, pour n'importe quels $u, v \in A^*$.

Supposons que $A = \{a, b\}$. Le *complément* d'un mot $w \in A^*$, dénoté par $\overline{w}$, est le mot obtenu par l'application du morphisme échangeant les lettres de w, c'est-à-dire que $\bar{\cdot}$ est le morphisme défini par $\overline{a} = b$ et $\overline{b} = a$. Il est clair que l'opération de complémentation est une involution. Nous dénotons par $\widehat{\cdot}$ l'antimorphisme sur les alphabets binaires correspondant à la composition des opérateurs $\widetilde{\cdot}$ et $\bar{\cdot}$, c'est-à-dire que pour tout mot binaire w sur $A = \{a, b\}$, nous avons

$$\widehat{w} = \widetilde{\overline{w}} = \overline{\widetilde{w}}.$$

Le fait que les opérateurs $\widetilde{\cdot}$ et $\bar{\cdot}$ commutent est clair. Un *antipalindrome* est un mot w satisfaisant $w = \widehat{w}$. Nous dénotons par $\text{ANTIPAL}(w)$ l'ensemble des facteurs antipalindromiques de w. On peut montrer que si w est un antipalindrome et $p \in \text{PAL}(w)$, alors $\overline{p} \in \text{PAL}(w)$. De plus, le lecteur vérifie que l'unique mot qui est à la fois un palindrome et un antipalindrome est le mot vide ε. De la même façon que pour les palindromes, nous désignons par $\text{PLAS}(w)$ le plus long antipalindrome suffixe de w.

Finalement, notons que $\widetilde{\cdot}$ et $\widehat{\cdot}$ sont des antimorphismes, c'est-à-dire que pour tous mots u et v, nous avons $\widetilde{uv} = \widetilde{v}\widetilde{u}$ et $\widehat{uv} = \widehat{v}\widehat{u}$.

Exemple 1. Considérons le mot $w = 00101100$ sur l'alphabet $A = \{0, 1\}$. Alors

$$
\begin{aligned}
\text{Fact}_0(w) &= \{\varepsilon\} \\
\text{Fact}_1(w) &= \{0, 1\} \\
\text{Fact}_2(w) &= \{00, 01, 10, 11\} \\
\text{Fact}_3(w) &= \{001, 010, 011, 100, 101, 110\} \\
\text{Fact}_4(w) &= \{0010, 0101, 0110, 1011, 1100\} \\
\text{Fact}_5(w) &= \{00101, 01011, 10110, 01100\} \\
\text{Fact}_6(w) &= \{001011, 010110, 101100\} \\
\text{Fact}_7(w) &= \{0010110, 0101100\} \\
\text{Fact}_8(w) &= \{00101100\} \\
\text{Pal}(w) &= \{\varepsilon, 0, 1, 00, 11, 010, 101, 0110\} \\
\text{Antipal}(w) &= \{\varepsilon, 01, 10, 0101, 1100, 001011\}
\end{aligned}
$$

1.2 Arbres des palindromes et des antipalindromes

Soit u, v deux mots. Il est facile de vérifier que "u est facteur de v" est une relation réflexive, antisymétrique et transitive et donc une relation d'ordre (par contre, ce n'est pas une relation d'ordre total). Nous introduisons une restriction de cette relation sur les palindromes comme suit.

Définition 1. Soient p et q deux palindromes. Nous écrivons $p \preceq q$ s'il existe un mot x tel que $q = xp\widetilde{x}$ et nous disons que p est un *facteur palindromique central* de q.

Le lecteur vérifie facilement la proposition suivante.

Proposition 1. La relation $p \preceq q$, où p et q sont des palindromes, est un ordre partiel (mais ce n'est pas un ordre total). $\square$

Étant donné un mot w, il est possible de représenter sous forme d'arbre les palindromes apparaissant dans w à l'aide de la relation $\preceq$. Plus précisément, nous avons la définition suivante.

Définition 2. Soit w un mot. Alors l'*arbre des palindromes de* w est l'arborescence dont les sommets sont donnés par les éléments de $\textsc{Pal}(w)$, ainsi qu'un sommet distingué supplémentaire qu'on appelle *racine*. De plus, il existe un arc de la racine vers ε et chacune des lettres de w. Finalement, nous avons un arc du sommet p vers le sommet q si $q = \alpha p \alpha$, pour une certaine lettre α.

Remarquons que chaque ordre partiel induit un graphe cyclique et donc une arborescence sur un ensemble de mots. Cependant, dans ce mémoire, nous nous intéressons plus particulièrement aux facteurs palindromiques et antipalindromiques.

Par ailleurs, dans les représentations graphiques d'arbre des palindromes, nous ne dessinons pas l'orientation des arcs puisqu'il est facile de la déduire en consultant l'étiquette des sommets source et but.

Notons que la relation $\preceq$ peut être également étendue aux antipalindromes, c'est-à-dire que si p et q sont deux antipalindromes, alors on écrit $p \preceq q$ lorsqu'il existe un x tel que $q = xp\widehat{x}$. L'arbre des antipalindromes d'un mot w est défini de la même façon qu'à la Définition 2.

Définition 3. Soit w un mot binaire. Alors l'*arbre des antipalindromes de* w est l'arborescence dont les sommets sont donnés par les éléments de $\textsc{Antipal}(w)$, ainsi qu'un sommet distingué supplémentaire qu'on appelle *racine*. De plus, il existe un arc de la racine vers ε et chacune des lettres de w. Finalement, nous avons un arc du sommet p vers le sommet q si $q = \alpha p \overline{\alpha}$, où α et $\overline{\alpha}$ sont les deux lettres de l'alphabet.

Nous illustrons ces notions par un exemple. Il est pratique de représenter par des arbres les facteurs palindromiques et antipalindromiques d'un mot puisqu'ils donnent rapidement une intuition de leur structure combinatoire. En particulier, ils mettent en évidence les symétries et les extensions possibles pour chaque palindrome.

Exemple 2. En reprenant le mot $w = 00101100$ nous obtenons les arbres des palindromes et des antipalindromes de w aux figures 1.1 et 1.2.

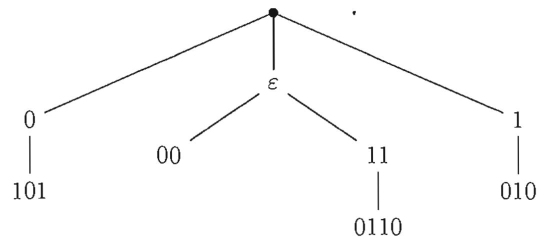


Figure 1.1: Arbre des palindromes du mot $w = 00101100$.

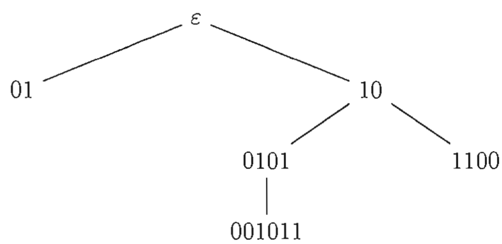


Figure 1.2: Arbre des antipalindromes du mot $w = 00101100$.

1.3 Mots infinis

Un *mot infini* $\mathbf{w}$ sur un alphabet A est une suite dénombrable d'éléments de A. En général, les mots infinis seront dénotés en gras. La plupart des définitions de la section 1.1 s'étendent aux mots infinis.

Un mot $\mathbf{w}$ est dit *périodique* s'il existe un mot non vide v tel que $v^n \in \textsc{Pref}(\mathbf{w})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous écrivons alors $\mathbf{w} = v^\omega$. On dit que $\mathbf{w}$ est *récurrent* si pour tout $u \in \textsc{Fact}(\mathbf{w})$, nous avons $|\mathbf{w}|_u = \infty$. Il existe une notion plus forte de récurrence : $\mathbf{w}$ est dit *uniformément récurrent* si pour tout $u \in \textsc{Fact}(\mathbf{w})$, il existe un entier n tel que pour tout $v \in \textsc{Fact}_n(\mathbf{w})$, $u \in \textsc{Fact}(v)$. Autrement dit, un mot uniformément récurrent a la propriété que chaque paire d'occurrences consécutive apparaît avec une distance bornée. Soit $u \in \textsc{Fact}(w)$. Un mot v est appelé *mot de retour complet de u dans w* si

(i) $v \in \textsc{Fact}(w)$,

(ii) $|v|_u = 2$,

(iii) $u \in \textsc{Pref}(v)$ et

(iv) $u \in \textsc{Suff}(v)$.

Nous désignons par $\textsc{RetourComplet}_w(u)$ l'ensemble des mots de retour complet de u dans w. Notons que cette notion est définie pour les mots finis et infinis, mais elle est surtout considérée dans les mots infinis. En particulier, le nombre de mots de retour complet d'un mot u dans w est fini si w est uniformément récurrent.

Exemple 3. Soit $u = aababbaabbabaa$. Le mot

$$\mathbf{w} = u^\omega = (aababbaabbabaa)^\omega = aababbaabbabaaaababbaabbabaa\cdots$$

est un exemple de mot périodique. Nous pouvons par ailleurs montrer que u^n est un palindrome, pour tout $n \geq 0$. Il est clair que $\mathbf{w}$ est récurrent et même uniformément récurrent. Finalement, nous constatons que

$$\textsc{RetourComplet}_{\mathbf{w}}(aa) = \{aaa, aababbaa, aabbabaa\}.$$

1.4 Morphismes

Rappelons qu'un morphisme est une application $\varphi : A^* \to B^*$ telle que $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$, pour n'importe quels $u, v \in A^*$. Il est par conséquent suffisant de connaître l'action de φ sur les lettres de A pour l'étendre au monoïde libre A^*. On dit d'un mot w qu'il est *point fixe* du morphisme φ si $w = \varphi(w)$.

Soit $\varphi : A^* \to A^*$ un morphisme sur un alphabet A. On peut montrer qu'un mot w dont la première lettre est α est fixé par φ si et seulement si la première lettre de $\varphi(\alpha)$ est α (Allouche et Shallit, 2003, chapitre 7). Dans ce cas, on écrit $\varphi^\omega(\alpha)$. La notation est justifiée par le fait que $\varphi^n(\alpha)$ est un préfixe de w pour tout entier $n \geq 0$. Notons que certains mots finis peuvent être point fixe d'un morphisme.

Exemple 4. Considérons le morphisme (effaçant) $\varphi : \{a, b\}^* \to \{a, b\}^*$ défini par $\varphi(a) = ab$ et $\varphi(b) = \varepsilon$. Alors $\varphi(ab) = ab$ et donc ab est un point fixe de φ.

Par contre, pour la suite de ce mémoire, nous nous intéressons seulement aux points fixes de morphisme qui sont des mots infinis.

Un morphisme est appelé *k-uniforme* s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $|\varphi(\alpha)| = k$, pour chaque $\alpha \in A$. De plus, un *φ-bloc* (ou simplement *bloc* quand le contexte est clair) est un mot de la forme $\varphi(\alpha)$ pour un certain $\alpha \in A$.

Soit M_A l'ensemble des morphismes sur un alphabet A. Alors $(M_A, \circ)$ est un monoïde, où $\circ$ est la composition fonctionnelle usuelle et où l'élément neutre est donné par le morphisme

$$\begin{array}{rccc} \textsc{Id} : & A^* & \longrightarrow & A^* \\ & \alpha & \longmapsto & \alpha. \end{array}$$

Nous utilisons la notation exponentielle pour dénoter la composition, c'est-à-dire que φ^k est le morphisme obtenu par l'itération du morphisme φ :

$$\varphi^k = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{k \text{ fois}}.$$

Remarquons que nous avons l'intéressante propriété que si $\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{u})$, alors $\mathbf{u} = \varphi^k(\mathbf{u})$, pour tout entier $k \geq 0$.

Un morphisme $\varphi : A^* \rightarrow B^*$ est dit *non effaçant* si $\varphi(\alpha) \neq \varepsilon$, pour tout $\alpha \in A$. Un morphisme $\varphi : A^* \rightarrow A^*$ est dit *primitif* si, pour tout $\alpha \in A$, il existe un entier k tel que $\textsc{Alph}(\varphi^k(\alpha)) = A$. Il est clair qu'un morphisme primitif est non effaçant. De plus, tout point fixe de morphisme primitif est uniformément récurrent, ce qui est démontré par exemple dans (Allouche et Shallit, 2003, chapitre 7).

Soient φ et ψ deux morphismes. Nous disons que φ est un *conjugué droit* de ψ, noté $\varphi \triangleleft \psi$, s'il existe un mot u tel que

$$\varphi(\alpha)u = u\psi(\alpha), \quad \text{pour tout } \alpha \in A.$$

Notons que cette relation n'est pas symétrique. Nous disons alors que les morphismes φ et ψ sont *conjugués*, ce qui est noté par $\varphi \bowtie \psi$, si $\varphi \triangleleft \psi$ ou $\psi \triangleleft \varphi$, c'est-à-dire que la relation $\bowtie$ est la fermeture symétrique de la relation $\lhd$. Le lecteur vérifie facilement que $\bowtie$ est alors une relation d'équivalence.

Nous illustrons ces notions par un exemple.

Exemple 5. Considérons le morphisme $\varphi : \{a,b\}^* \to \{a,b\}^*$ défini par $\varphi(a) = ab$ et $\varphi(b) = a$. Alors

$$\mathrm{w} = \varphi(\mathrm{w}) = abaababaabaababaababa\cdots$$

est l'unique point fixe de φ et est appelé *mot de Fibonacci*. Ce mot appartient à la célèbre famille des mots sturmiens que nous présentons un peu plus loin dans ce mémoire. Un conjugué de φ est donné par $\varphi' : \{a,b\} \to \{a,b\}$ défini par $\varphi'(a) = ba$ et $\varphi'(b) = a$. Remarquons que φ' n'admet aucun point fixe, puisque la première lettre de $\varphi'(\alpha)$ est différente de α, pour toute lettre α. Par contre, $(\varphi')^2$ défini par $(\varphi')^2(a) = aba$ et $(\varphi')^2(b) = ba$ admet deux point fixes, soient $((\varphi')^2)^\omega(a)$ et $((\varphi')^2)^\omega(b)$. Finalement, il est possible de vérifier que

$$\textsc{RetourComplet}_{aba}(\mathrm{w}) = \{ababa, abaaba\}.$$

Exemple 6. Soit $A = \{a,b\}$ et $\mu : A^* \to A^*$ le morphisme 2-uniforme donné par $\mu(a) = ab$ et $\mu(b) = ba$. Alors μ admet exactement deux points fixes :

$$\mu(\mathbf{t}) = \mathbf{t} = abbabaabbaababbabaababbaabbabaab\cdots$$

$$\mu(\overline{\mathbf{t}}) = \overline{\mathbf{t}} = baababbaabbabaababbabaabbaababba\cdots$$

On démontre facilement que $\textsc{RetourComplet}_{\mathbf{t}}(a) = \{aa, aba, abba\}$. Le mathématicien Axel Thue a également démontré que $\mathbf{t}$ est sans chevauchement. Une traduction de ses travaux se trouve dans (Berstel, 1992). À noter que $\mathbf{t}$ et $\overline{\mathbf{t}}$ sont également des points fixes du morphisme $\theta : A^* \to A^*$ défini par $\theta(a) = abba$ et $\theta(b) = baab$. Le mot $\mathbf{t}$ est appelé *mot de Thue-Morse*. Il possède de nombreuses propriétés palindromiques intéressantes et une grande littérature est consacrée à son étude (Brlek, 1989; Berstel, 1992; Allouche et Shallit, 1998; Allouche et Shallit, 2000; Blondin Massé, Brlek, Glen et Labbé, 2007; Blondin Massé, Brlek et Labbé, 2008).

CHAPITRE II

COMPLEXITÉ

Parmi les nombreuses stratégies pour mesurer l'information contenue dans les mots finis et infinis, celle consistant à calculer leur complexité factorielle, c'est-à-dire à compter le nombre de facteurs distincts d'une longueur donnée, a été largement utilisée dans la littérature. De nombreux travaux ont porté sur la complexité factorielle motivés entre autres par la théorie des nombres. En particulier, il est possible de se restreindre à l'étude des facteurs palindromiques (Allouche, Baake, Cassaigne et Damanik, 2003; Brlek, Hamel, Nivat et Reutenauer, 2004) ou antipalindromiques. Dans ce chapitre, nous présentons les complexités palindromique et antipalindromique de quelques familles de mots bien connues.

2.1 Complexité factorielle

Dans un premier temps, nous rappelons la définition de complexité factorielle. Soit w un mot (fini ou infini) sur un alphabet fini A. Alors la *complexité factorielle* de w est la fonction $F_w : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (notée simplement F quand le mot w est fixé) définie par

$$F_w(n) = |\{v \in A^* \mid v \in \text{F{\scriptsize ACT}}_n(w)\}|.$$

Exemple 7. Remarquons que la croissance de la complexité factorielle peut être constante, linéaire, quadratique, voire même exponentielle, comme l'illustrent les exemples suivants.

1. Soit $w_1 = a^\omega$. Alors $F_{w_1}(n) = 1$, pour tout $n \geq 0$.

2. Pour chaque entier $n \geq 0$, nous pouvons énumérer les mots de longueur n selon l'ordre lexicographique. Si on définit w_2 comme la concaténation infinie de tous ces mots en les énumérant d'abord selon leur longueur et ensuite selon l'ordre lexicographique, alors $F_{w_2}(n) = |A|^n$.

3. Les mots sturmiens sont ceux dont la complexité factorielle est donnée par $F(n) = n+1$, pour tout $n \geq 1$ (Hedlund et Morse, 1938; Hedlund et Morse, 1940; Lothaire, 1983; Parvaix, 1998). Nous en discutons en détail plus bas.

4. La complexité du mot de Thue-Morse $\mathbf{t}$ satisfait la récurrence

$$F_{\mathbf{t}}(n+1) - F_{\mathbf{t}}(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } 3 \cdot 2^k < n \leq 2^{k+2}, \text{ où } k \geq 0 \\ 4 & \text{si } 2^{k+1} < n \leq 3 \cdot 2^k, \text{ où } k \geq 0 \end{cases}$$

avec valeurs initiales $F_{\mathbf{t}}(0) = 1$, $F_{\mathbf{t}}(1) = F_{\mathbf{t}}(2) = 2$ (Brlek, 1989; de Luca, Varricchio, 1989). De plus, il a été démontré que les seuls mots ayant cette complexité sont dans l'orbite de $\mathbf{t}$ et de $\varphi(\mathrm{t})$ où φ est le morphisme défini par $\varphi(0) = 00$ et $\varphi(1) = 11$ (Aberkane et Brlek, 2002).

5. Soit $A = \{a, b\}$ un alphabet, où $a, b \in \mathbb{N}^+$. Il est facile de vérifier que tout mot fini w sur A peut être factorisé de façon unique w comme un produit de puissances de lettres, c'est-à-dire que $w = \alpha_1^{n_1}\alpha_2^{n_2}\cdots\alpha_k^{n_k}$, où $k \in \mathbb{N}$, $n_i \in \mathbb{N}^+$ et $\alpha_i \in A$, pour $1 \leq i \leq k$, ainsi que $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq k-1$. Par exemple, nous avons $11212221 = 1^2 2^1 1^1 2^3 1^1$.

   On définit une application $\delta : \Sigma^* \to \Sigma^*$ par $\delta(w) = n_1 n_2 \cdots n_k$, où les n_i sont les exposants dans l'écriture unique de w sous forme de produit de puissances de lettres. Ainsi $\delta(11212221) = 21131$. En particulier, la fonction δ peut être étendue aux mots infinis à condition que ceux-ci ne soient pas ultimement périodiques, c'est-à-dire de la forme uv^ω, pour certains mots u et v. Il est possible de vérifier que sur l'alphabet $\{1, 2\}$, la fonction δ admet deux points fixes K et $1K$, où K est le *mot de Kolakoski* (Kolakoski, 1965). Des généralisations de ce mot ont été étudiées, notamment sur des alphabets binaires avec des paires différentes de $\{1, 2\}$

(Bergeron-Brlek, Brlek, Lacasse et Provençal, 2003; Berthé, Brlek et Choquette, 2005; Brlek, Melançon et Paquin, 2004).

Les *mots lisses* consistent en une autre généralisation du mot de Kolakoski (Brlek, Melançon et Paquin, 2004). Il s'agit des mots infinis $\mathbf{w}$ pour lesquels $\delta^k(\mathbf{w})$ est défini, pour tout entier $k \geq 1$. En particulier, il a été démontré que la complexité factorielle de tout mot lisse $\mathbf{w}$ est bornée polynomialement. Plus précisément, elle satisfait l'inégalité

$$C_1 n^k \leq F_{\mathbf{w}}(n) \leq C_2 n^k,$$

où $k = \frac{\log 3}{\log \frac{3}{2}}$ et $C_1 > 0, C_2 > 0$ sont des constantes (Weakley, 1989). Nous ne discutons pas davantage des mots lisses dans ce travail, mais mentionnons tout de même que la complexité palindromique (que nous définissons plus bas) satisfait $P_{\mathbf{w}}(n) \leq 2$, pour tout entier $n \geq 0$ (Brlek et Ladouceur, 2003). Une multitude d'autres propriétés combinatoires sont explorées dans (Brlek, Dulucq, Ladouceur et Vuillon, 2006).

6. Plus généralement, il a été démontré que la complexité d'un mot $\mathbf{w}$ qui est point fixe d'un morphisme a une croissance dans $\mathcal{O}(n^2)$, $\mathcal{O}(n \log n)$, $\mathcal{O}(n \log \log n)$, $\mathcal{O}(n)$ ou $\mathcal{O}(1)$ dépendamment de la nature du morphisme (Ehrenfeucht, Lee et Rozenberg, 1975).

2.2 Complexité f-palindromique

Dans la suite de ce travail, nous étudions la complexité palindromique des mots, c'est-à-dire que nous décrivons les fonctions donnant le nombre de palindromes de longueur n, pour chaque entier $n \geq 0$.

Dans un premier temps, nous introduisons une généralisation de la notion de palindrome.

Définition 4. Soit A un alphabet fini et $f : A \to A$ un morphisme involutif. Nous disons qu'un mot w est un *f-palindrome* si $w = \widetilde{f(w)}$.

Exemple 8. En prenant $f = \textsc{Id}$, nous retrouvons la notion habituelle de palindrome. Si $A = \{a, b\}$, il suffit de prendre l'*échange de lettres* $\bar{\ } : A \to A : a \mapsto b, b \mapsto a$

pour obtenir la notion d'antipalindrome. D'autre part, en prenant $A = \{a, b, c, d\}$ et $f(a) = d$, $f(b) = c$, $f(c) = b$ et $f(d) = a$, nous avons que $abcdabcd$ est un f-palindrome. Finalement, remarquons que peu importe A et f, ε est un f-palindrome.

De la même façon, on définit la complexité f-palindromique de w comme suit.

Définition 5. Soit w un mot fini ou infini sur un alphabet fini. Alors la *complexité f-palindromique* de w, notée P^f_w ou simplement P^f quand le contexte est clair, est donnée par la fonction

$$P^f_w(n) = |\{v \in A^* \mid v \in \text{FACT}_n(w) \text{ et } v = \widetilde{f(v)}\}|.$$

Bien que l'étude de la complexité f-palindromique est intéressante en soi, dans ce travail, nous ne considérons que deux instances de complexité f-palindromique.

Définition 6. Les *complexités palindromique et antipalindromique* de w, notées respectivement P_w et A_w, sont définies par $P_w = P^{\text{ID}}_w$ et $A_w = P^{\bar{\ }}_w$.

Il existe une démonstration élégante du fait que le nombre de palindromes distincts apparaissant dans w est borné par $|w| + 1$.

Théorème 1. (Droubay, Justin et Pirillo, 2001) Soit w un mot fini. Alors $|\text{PAL}(w)| \leq |w| + 1$.

Démonstration. Soit p_i le préfixe de longueur i de w, où $0 \leq i \leq n$. Soit P_i le nombre de palindromes suffixes de p_i et unioccurrents dans p_i, où $0 \leq i \leq n$. Nous montrons que $P_i \leq 1$, pour $0 \leq i \leq n$. En procédant par contradiction, supposons qu'il existe un indice j tel que $P_j \geq 2$. En particulier, il existe deux palindromes distincts u et v qui sont suffixes de p_j et qui sont unioccurrents dans p_j. De plus, comme u et v sont différents, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $|u| > |v|$. Il existe donc un mot non vide x tel que $u = xv$. Or, $u = \widetilde{u} = \widetilde{xv} = \widetilde{v}\widetilde{x} = v\widetilde{x}$, c'est-à-dire que v apparaît au moins deux fois dans u et donc dans p_j, contredisant la supposition que u est unioccurrent dans p_j. On en conclut que $P_i \leq 1$ pour $0 \leq i \leq n$ et donc $|\text{PAL}(w)| \leq |w| + 1$. $\square$

Notons que le Théorème 1 se généralise facilement aux antipalindromes.

Proposition 2. *Soit w un mot non vide sur $\{a, b\}$. Alors* $|\text{ANTIPAL}(w)| \leq |w|$.

Démonstration. Soit p un préfixe non vide de w. Dans un premier temps, nous montrons qu'il existe au plus un suffixe palindromique de p unioccurrent dans p. En raisonnant par contradiction, supposons au contraire qu'il existe des palindromes suffixes u et v de p unioccurrents dans p tels que $|u| < |v|$. Alors $v = xu$ pour un certain mot non vide x. Ceci entraîne que $v = \widehat{v} = \widehat{xu} = u\widehat{x}$ de sorte que u n'est pas unioccurrent dans p, ce qui est absurde. Par conséquent, $|\text{ANTIPAL}(w)| \leq |w| + 1$. Maintenant, soit w_1 la première lettre de w. Alors $\text{PLAS}(w_1) = \varepsilon$, c'est-à-dire que nous n'avons pas de nouveau antipalindrome à l'indice 1. Ainsi, $|\text{ANTIPAL}(w)| \leq |w|$.

D'autre part, il existe des mots finis et infinis atteignant les bornes des Théorèmes 1 et 2. Un mot dont le nombre de palindromes réalise la borne est appelé *plein* (Brlek, Hamel, Nivat et Reutenauer, 2004).

Exemple 9. Le mot $u = abbabbaa$ est plein, puisqu'il possède les 9 facteurs palindromiques suivants :

$$\text{PAL}(u) = \{\varepsilon, a, b, bb, abba, bab, bbabb, abbabba, aa\}.$$

D'autre part, le mot $v = aababbaa$ n'est pas plein, puisque

$$\text{PAL}(v) = \{\varepsilon, a, b, aa, bb, aba, bab, abba\}.$$

On vérifie par ailleurs que tout mot de la forme $(ab)^n$ contient les antipalindromes de la forme ε et $(ab)^m$ et $(ba)^m$, pour tout $1 \leq m \leq n$.

Le problème de caractériser de façon simple les mots pleins est ouvert, par contre, on vérifie facilement le fait suivant.

Proposition 3. Soit w un mot non vide sur $\{a, b\}$. Alors $|\text{ANTIPAL}(w)| = |w|$ si et seulement si $w = \alpha\overline{\alpha}^n$ ou $\alpha\overline{\alpha}^n\alpha$ pour une certaine lettre $\alpha \in \{a, b\}$ et un certain entier $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Nous démontrons la contraposée. Supposons qu'il existe une lettre β telle que $\beta\beta \in \text{FACT}(w)$. Par la Proposition 2, il existe au plus un nouvel antipalindrome à chaque indice et il n'en existe aucun à l'indice 1. Soit p le préfixe de w tel que soit $\beta\beta$ ou $\overline{\beta\beta}$ est un suffixe de p et $|p|_{\beta\beta} + |p|_{\overline{\beta\beta}} = 1$. Alors $\text{PLAS}(p) = \varepsilon$ qui n'est clairement pas unioccurrent dans p. Or, $|p| \neq 1$, ce qui nous permet de conclure que $|\text{ANTIPAL}(w)| \neq |w|$.

($\Leftarrow$) D'une part, supposons que $w = (\alpha\overline{\alpha})^n$. Alors

$$\text{ANTIPAL}(w) = \{\varepsilon\} \cup \{(\alpha\overline{\alpha})^m \mid 1 \leq m \leq n\} \cup \{(\overline{\alpha}\alpha)^m \mid 1 \leq m \leq n-1\}.$$

D'autre part, supposons que $w = (\alpha\overline{\alpha})^n\alpha$. Alors

$$\text{ANTIPAL}(w) = \{\varepsilon\} \cup \{(\alpha\overline{\alpha})^m \mid 1 \leq m \leq n\} \cup \{(\overline{\alpha}\alpha)^m \mid 1 \leq m \leq n\}.$$

Dans les deux cas, nous obtenons que $|\text{ANTIPAL}(w)| = |w|$.

2.3 Mots périodiques

La complexité palindromique des mots périodiques est entièrement caractérisée.

Théorème 2. (Allouche, Baake, Cassaigne et Damanik, 2003; Brlek, Hamel, Nivat et Reutenauer, 2004) Soit w un mot non vide. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents.

(i) w est un produit de deux palindromes.

(ii) $|\text{PAL}(w^\omega)| = \infty$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons que $w = uv$, où u et v sont deux palindromes, $uv \neq \varepsilon$. Alors $(uv)^n u$ est un palindrome, pour tout entier $n \geq 0$, et est également un préfixe de w^ω, de sorte que $|\text{PAL}(w^\omega)| = \infty$.

(i) $\Leftarrow$ (ii) Supposons que w^ω admette une infinité de palindromes. Soit p un palindrome satisfaisant $|p| > 2|w|$. Alors $p = xw^ky$, où x est un suffixe de w, y est un préfixe de w

et $k \geq 1$ est un entier. Comme $p = \widetilde{p} = \widetilde{y}\widetilde{w}^k\widetilde{x}$, nous avons que $\widetilde{w}$ est un facteur de w^ω et donc un facteur de ww. Ainsi, $ww = u\widetilde{w}v$, où u est un préfixe de ww, v est un suffixe de ww et $|u| + |v| = |w|$. En particulier, $w = uv$. On en tire $ww = uvuv = u\widetilde{w}v$ et donc $\widetilde{w} = vu$, de sorte que $w = \widetilde{u}\widetilde{v} = uv$. Ceci signifie que $u = \widetilde{u}$ et $v = \widetilde{v}$, c'est-à-dire que w est un produit de deux palindromes. □

Le Théorème 2 se généralise aux antipalindromes. Il suffit de remplacer le symbole $\widetilde{}$ par $\widehat{}$ et le mot "palindrome" par "antipalindrome" dans la démonstration.

Théorème 3. Soit w un mot non vide. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents.

(i) w est un produit de deux antipalindromes.

(ii) $|\textsc{Antipal}(w^\omega)| = \infty$. □

Ces deux théorèmes ont une conséquence immédiate.

Corollaire 1. Soit w un mot sur $\{a, b\}$. Si w s'écrit comme le produit de deux palindromes (respectivement antipalindromes), alors tout conjugué de w s'écrit comme le produit de deux antipalindromes (respectivement antipalindromes) également.

Démonstration. Nous traitons le cas où w est le produit de deux palindromes (le cas où il s'agit d'un produit de deux antipalindromes est similaire).

Soit u un conjugué de w. Alors il existe des mots x et y tels que $w = xy$ et $u = yx$. Par le théorème 2, w^ω possède une infinité de palindromes. Or, $w^\omega = (xy)^\omega$ est un suffixe de $u^\omega = (yx)^\omega = y(xy)^\omega$, de sorte que u^ω possède également une infinité de palindromes. On en conclut que u est le produit de deux palindromes, toujours par le théorème 2.

2.4 Mots sturmiens

En combinatoire des mots, la famille des mots sturmiens est sans contredit la plus connue et la plus étudiée. Il existe plusieurs définitions équivalentes.

Définition 7. (Lothaire, 1983, chapitre 2) Soient $\rho, \alpha \in [0, 1)$ deux nombres réels tels que α est irrationnel. Un mot infini $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0\mathbf{w}_1 \cdots$ est dit *sturmien* s'il est défini par

$$\mathbf{w}_n = \begin{cases} a & \text{si } \lfloor \rho + (n+1)\alpha \rfloor - \lfloor \rho + n\alpha \rfloor = 0 \\ b & \text{sinon} \end{cases}$$

ou par

$$\mathbf{w}_n = \begin{cases} a & \text{si } \lceil \rho + (n+1)\alpha \rceil - \lceil \rho + n\alpha \rceil = 0 \\ b & \text{sinon} \end{cases}$$

En outre, $\mathbf{w}$ est dit *sturmien standard* si $\rho = 0$.

Les mots sturmiens possèdent de nombreuses propriétés remarquables. Ils correspondent en particulier aux mots apériodiques dont la complexité factorielle est minimale. Plus précisément, tout mot sturmien $\mathbf{s}$ satisfait $F_{\mathbf{s}}(n) = n + 1$ pour $n \geq 0$ (Lothaire, 1983, chapitre 2). Ils sont également caractérisés par une propriété d'équilibre.

Théorème 4. (Lothaire, 1983, chapitre 2) Un mot $\mathbf{w}$ apériodique est sturmien si et seulement s'il est *équilibré*, c'est-à-dire que pour tout $u, v \in \text{FACT}(w)$, nous avons $-1 \leq |u|_1 - |v|_1 \leq 1$. □

La complexité palindromique des mots sturmiens est déjà connue.

Théorème 5. (Droubay et Pirillo, 1999) Soit s un mot sturmien. Alors la complexité palindromique de s est donnée par

$$P_s(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases},$$

où $n \in \mathbb{N}$. □

Exemple 10. Considérons le mot de Fibonacci

$$w = abaababaabaababaababa \cdots$$

Les premiers facteurs palindromiques de w sont donnés dans le tableau 2.1. D'autre part, l'arbre des palindromes de w est donné à la figure 2.1. En particulier, chaque palindrome

Longueur	Facteurs palindromiques
0	ε
1	a, b
2	aa
3	aba, bab
4	$baab$
5	$aabaa$, $ababa$

Tableau 2.1: Facteurs palindromiques du mot de Fibonacci.

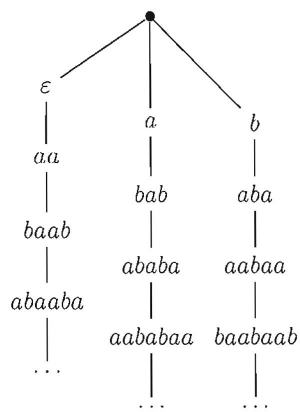


Figure 2.1: Arbre des palindromes du mot de Fibonacci

de longueur n peut être étendu de façon unique à un palindrome de longueur $n+2$. Par exemple, aba peut être étendu par a donnant le palindrome $aabaa$, mais ne peut être étendu par b, puisque $babab$ n'est pas un facteur du mot w.

Pour tout mot sturmien s, l'arbre des palindromes de s possède exactement trois branches infinies et aucune branche finie. Cette remarque se traduit par la proposition suivante :

Proposition 4. Soient s un mot sturmien et $p, q \in \mathrm{PAL}(s)$, où $|p| \geq |q|$. Supposons qu'il existe un mot r non vide tel que $r \preceq p$ et $r \preceq q$. Alors $q \preceq p$.

Démonstration. Nous procédons par l'absurde, c'est-à-dire que nous supposons que q n'est pas un palindrome central de p. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que r est le plus long palindrome central commun de p et de q. Par hypothèse, r est non vide et $r \neq p, q$. Par conséquent, il existe deux lettres distinctes α et β telles que $\alpha r \alpha$ est palindrome central de p et $\beta r \beta$ est palindrome central de q. Ceci contredit la propriété d'équilibre du mot sturmien s, puisqu'on aurait alors $|\alpha r \alpha|_\alpha - |\beta r \beta|_\alpha = 2 > 1$. □

La propriété d'équilibre des mots sturmiens nous permet également de décrire leur complexité antipalindromique.

Théorème 6. Soit $\mathbf{w}$ un mot sturmien. Alors $|\text{ANTIPAL}(\mathbf{w})| < \infty$.

Démonstration. Supposons que $\mathbf{w}$ admette une infinité d'antipalindromes. Notons que si $u \in \text{FACT}(\mathbf{w})$ est un antipalindrome, alors $aa \notin \text{FACT}(u)$, puisqu'alors on aurait $bb \in \text{FACT}(u)$, contredisant la propriété d'équilibre de $\mathbf{w}$ ($|bb|_b - |aa|_b = 2 > 1$). On en conclut que les seuls antipalindromes de $\mathbf{w}$ sont de la forme $(\alpha\overline{\alpha})^n$, où $n \in \mathbb{N}$ et α est une lettre de A. Comme $\mathbf{w}$ contient une infinité d'antipalindromes, alors pour tout entier $n \in N$, $(\alpha\overline{\alpha})^n \in \text{FACT}(\mathbf{w})$, pour une certaine lettre α. Or, tout mot sturmien est uniformément récurrent (Lothaire, 1983, chapitre 2), ce qui signifie que tout préfixe de $\mathbf{w}$ est contenu dans un mot de la forme $(\alpha\overline{\alpha})^n$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $\mathbf{w} = (ab)^\omega$ ou $\mathbf{w} = (ba)^\omega$. Ceci est absurde, puisque $\mathbf{w}$ est sturmien et donc apériodique. □

2.5 Mot de Thue-Morse

Le mot de Thue-Morse est un excellent exemple d'interaction entre palindromes et antipalindromes, comme en témoigne la proposition suivante.

Proposition 5. Soit $\mu : \{a, b\} \rightarrow \{a, b\}$ le morphisme défini par $a \mapsto ab$ et $b \mapsto ba$ et soit $\mathbf{t} = \mu(\mathbf{t})$ le mot de Thue-Morse.

(i) Pour tout entier pair $n \geq 0$, $\mu^n(a)$ et $\mu^n(b)$ sont des palindromes.

(ii) Pour tout entier impair $n \geq 1$, $\mu^n(a)$ et $\mu^n(b)$ sont des antipalindromes.

Démonstration. Remarquons que le résultat peut être déduit de (Brlek, 1989), mais, par souci de complétude, nous préférons présenter ici une démonstration complète.

La démonstration se fait par récurrence sur n.

Cas de base. Pour $n = 0$, nous avons $\mu^0 = \mathrm{ID}$. Alors $\mathrm{ID}(a) = a$ et $\mathrm{ID}(b) = b$ sont bien des palindromes. Pour $n = 1$, nous avons bien que $\mu^1(a) = ab$ et $\mu^1(b) = ba$ sont des antipalindromes.

Induction. Supposons le résultat vrai pour tout $1 \leq m < n$ et montrons qu'il est également vrai pour n. Nous distinguons deux cas.

1. Supposons que n est pair. Alors $\mu^n = \mu^2(\mu^{n-2}(a))$. Par hypothèse d'induction, $\mu^{n-2}(a)$ et $\mu^{n-2}(b)$ sont des palindromes et donc

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu^n(a)} &= \widetilde{\mu^{n-2}(a)}\widetilde{\mu^{n-2}(b)}\widetilde{\mu^{n-2}(b)}\widetilde{\mu^{n-2}(a)} \\ &= \mu^{n-2}(a)\mu^{n-2}(b)\mu^{n-2}(b)\mu^{n-2}(a) = \mu^n(a), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\mu^n(a)$ est un palindrome. Par symétrie, $\mu^n(b)$ est également un palindrome.

2. Supposons que n est impair. De la même façon, nous avons

$$\mu^n(a) = \mu^2(\mu^{n-2}(a)) = \mu^{n-2}(a)\mu^{n-2}(b)\mu^{n-2}(b)\mu^{n-2}(a).$$

Par hypothèse d'induction, $\mu^{n-2}(a)$ et $\mu^{n-2}(b)$ sont des antipalindromes. Alors

$$\begin{aligned} \widehat{\mu^n(a)} &= \widehat{\mu^{n-2}(a)}\widehat{\mu^{n-2}(b)}\widehat{\mu^{n-2}(b)}\widehat{\mu^{n-2}(a)} \\ &= \mu^{n-2}(a)\mu^{n-2}(b)\mu^{n-2}(b)\mu^{n-2}(a) = \mu^n(a), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\mu^n(a)$ est un antipalindrome. De la même façon, nous obtenons que $\mu^n(b)$ est un antipalindrome. □

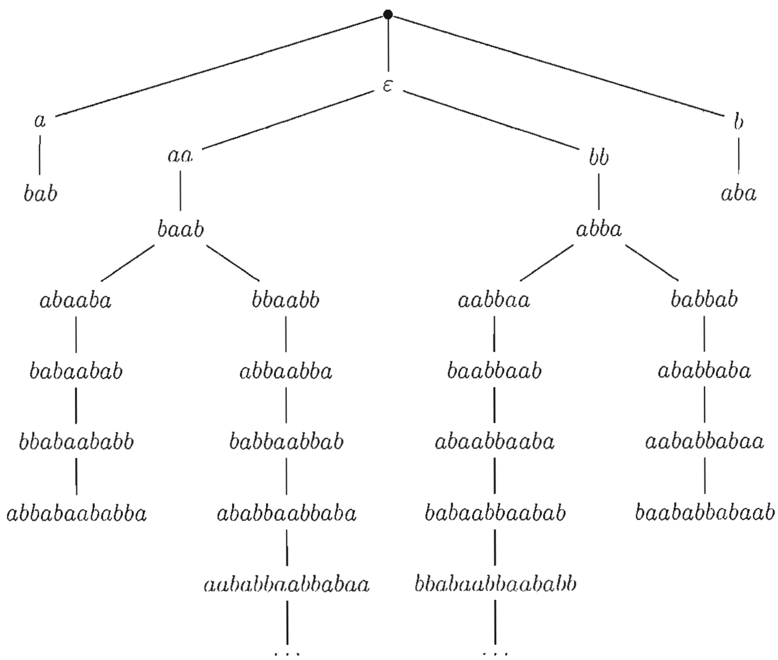


Figure 2.2: Arbre des palindromes du mot de Thue-Morse.

Les arbres des palindromes et des antipalindromes de $\mathbf{t}$ sont représentés aux figures 2.2 et 2.3. Remarquons qu'ils admettent un axe de symétrie, étant donné que le langage de $\mathbf{t}$ est stable sous la complémentation, c'est-à-dire que $p \in \textsc{Pal}(\mathbf{t})$ entraîne $\overline{p} \in \textsc{Pal}(\mathbf{t})$ tandis que $p \in \textsc{Antipal}(\mathbf{t})$ entraîne $\overline{p} \in \textsc{Antipal}(\mathbf{t})$.

Le lemme qui suit décrit certaines propriétés combinatoires des palindromes apparaissant dans $\mathbf{t}$. Dans un premier temps, nous introduisons la définition suivante. Nous disons d'un mot v qu'il est un *ancêtre de w par rapport au morphisme θ* s'il existe un préfixe de bloc x et un suffixe de bloc y tel que $xwy = \theta(v)$. Nous désignons l'ensemble des ancêtres de w par $\textsc{Ancêtres}(w)$. De plus, w est dit *centré* (par rapport à v) si $|x| = |y|$.

Soit v un ancêtre de w tel que $xwy = \theta(v)$ comme ci-haut. Soient $p, s \in A^*$ tel que $w = ps$. Nous disons qu'il y a une *barre* entre p et s, noté $p|s$, s'il existe $v_1, v_2 \in A^*$ tels que $v = v_1 v_2$, $xp = \theta(v_1)$ et $sy = \theta(v_2)$.

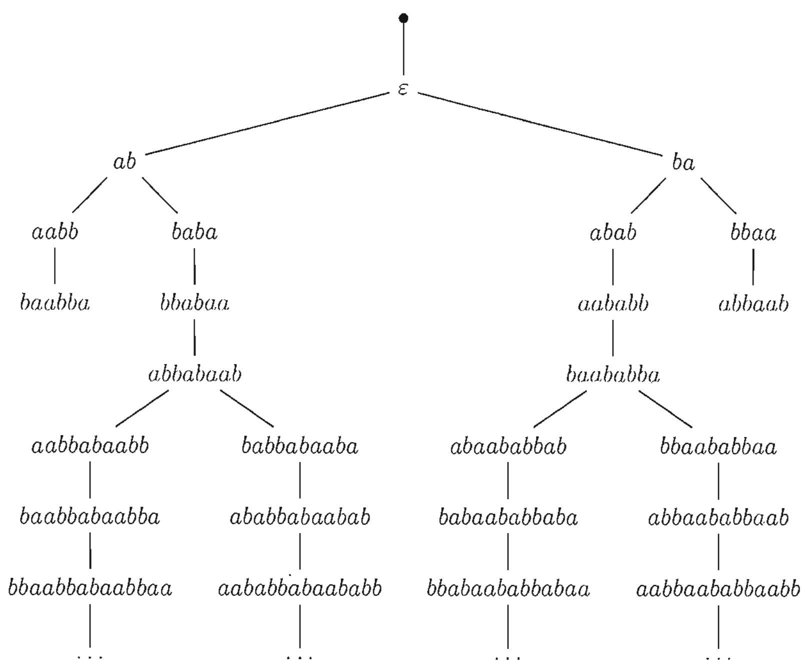


Figure 2.3: Arbre des antipalindromes du mot de Thue-Morse.

Lemme 1. (Blondin Massé, Brlek et Labbé, 2008) Soit $u \in \textsc{Pal}(\mathbf{t})$. Alors les propositions suivantes sont satisfaites.

(i) Si $|u| \geq 4$, alors $|u|$ est paire.

(ii) Si $|u| \geq 4$, alors tous les ancêtres v de u sont des palindromes et u est centré par rapport à v.

(iii) Si $|u| = 4$, alors u admet exactement deux ancêtres.

(iv) Si $|u| > 4$, alors u admet exactement un ancêtre.

Démonstration. (i) Nous procédons par l'absurde, c'est-à-dire que nous supposons qu'il existe un palindrome u de longueur $|u| \geq 4$ impaire qui est facteur de $\mathbf{t}$. Alors il existe un palindrome v et un mot z tels que $u = zv\widetilde{z}$ et $|v| = 5$. Or, les seuls palindromes de longueur 5 sur l'alphabet binaire sont

$$aaaaa, aabaa, ababa, abbba, baaab, babab, bbabb, bbbbb.$$

Clairement, aucun d'entre eux n'est facteur de $\mathbf{t}$.
(ii) Soit v un ancêtre de u. Alors $xuy = \theta(v)$, où x et y sont des mots tels que $|x|, |y| \leq 3$. Comme $|u| \geq 4$, $|u|$ est paire, par (i), de sorte qu'il existe des lettres α, β et un mot z tels que $u = z\alpha\beta\beta\alpha\widetilde{z}$. Il y a quatre barres possibles :

$$\text{(a) } xz|\alpha\beta\beta\alpha\widetilde{z}y \quad \text{(b) } xz\alpha|\beta\beta\alpha\widetilde{z}y \quad \text{(c) } xz\alpha\beta|\beta\alpha\widetilde{z}y \quad \text{(d) } xz\alpha\beta\beta|\alpha\widetilde{z}y.$$

Les cas (b) et (d) sont impossibles, puisqu'aucun bloc du morphisme θ ne commence ni ne termine par $\beta\beta$. Dans les deux autres cas, nous avons $|xz| \equiv |\widetilde{z}y| \bmod 4$, et donc $|x| = |y|$, c'est-à-dire que u est centré par rapport à v. Ensuite, soient xp le préfixe de longueur 4 de $\theta(v)$ et $\widetilde{p}y$ le suffixe de longueur 4 de $\theta(v)$, où p est un certain mot non vide. En particulier, xp et $\widetilde{p}y$ sont des palindromes puisqu'ils sont des blocs de $\mathbf{t}$. Par ailleurs, puisque p est non vide, les mots xp et $\widetilde{p}y = \widetilde{y}p$ doivent correspondre au même bloc, de sorte que $x = \widetilde{y}$. On en conclut que $\theta(v) = xu\widetilde{x}$ est un palindrome. En dernier lieu, $\theta(v) = \widetilde{\theta(v)} = \widetilde{\theta}(\widetilde{v}) = \theta(\widetilde{v})$. Mais θ est un morphisme injectif, d'où $v = \widetilde{v}$ est un palindrome, tel que voulu.

(iii) Les seuls palindromes de longueur 4 sont $abba$ et $baab$. Les ancêtres de ces deux palindromes sont donnés par $\textsc{Ancêtres}(abba) = \{a, bb\}$ et $\textsc{Ancêtres}(baab) = \{b, aa\}$. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in A$ et $z \in A^*$ tels que $u = z\gamma\alpha\beta\beta\alpha\gamma\tilde{z}$. Nous savons de (ii) que $|\textsc{Ancêtres}(u)| \leq 2$ (voir les cas (a) et (c)). Maintenant, si $\gamma = \alpha$, nous avons $xz|\alpha\alpha\beta\beta\alpha\alpha\tilde{z}\tilde{x}$, ce qui est absurde puisqu'aucun bloc ne commence par $\alpha\alpha$. D'autre part, si $\gamma = \beta$, alors nous avons $xz\beta\alpha\beta|\beta\alpha\beta\tilde{z}\tilde{x}$, ce qui est aussi absurde, puisqu'aucun bloc ne commence avec $\beta\alpha\beta$. Dans les deux cas, nous concluons que $|\textsc{Ancêtres}(u)| = 1$. $\square$

Théorème 7. (Blondin Massé, Brlek et Labbé, 2008) La complexité palindromique du mot de Thue-Morse satisfait la récurrence suivante :

(i) $P_{\mathbf{t}}(0) = 1$, $P_{\mathbf{t}}(1) = P_{\mathbf{t}}(2) = P_{\mathbf{t}}(3) = P_{\mathbf{t}}(4) = 2$,

(ii) $P_{\mathbf{t}}(2n+1) = 0$, pour tout $n \geq 2$, et

(iii) $P_{\mathbf{t}}(4n) = P_{\mathbf{t}}(4n-2) = P_{\mathbf{t}}(n) + P_{\mathbf{t}}(n+1)$, pour tout $n \geq 2$.

Démonstration. (i) Nous avons $\textsc{Pal}_0(\mathbf{t}) = \{\varepsilon\}$, $\textsc{Pal}_1(\mathbf{t}) = \{a, b\}$, $\textsc{Pal}_2(\mathbf{t}) = \{aa, bb\}$, $\textsc{Pal}_3(\mathbf{t}) = \{aba, bab\}$ et $\textsc{Pal}_4(\mathbf{t}) = \{abba, baab\}$ étant donné que $\mathbf{t}$ n'admet aucun chevauchement.

(ii) L'énoncé découle directement du Lemme 1.

(iii) Supposons que $n \geq 2$. Dans un premier temps, nous montrons que $P_{\mathbf{t}}(4n) = P_{\mathbf{t}}(4n-2)$. Soit $p \in \textsc{Pal}_{\mathbf{t}}(4n-2)$. Alors par le Lemme 1, il existe un unique u et un unique x de longueur $|x| \in \{1, 3\}$ tel que $\theta(u) = \tilde{x}px$. Considérons la fonction $f : \textsc{Pal}_{\mathbf{t}}(4n-2) \to \textsc{Pal}_{\mathbf{t}}(4n)$ définie par $p \mapsto x_0px_0$, où x_0 est la première lettre de x. Montrons que f est une bijection.

Supposons d'abord que $f(p_1) = f(p_2)$. Alors il existe des lettres α et β telles que $\alpha p_1 \alpha = \beta p_2 \beta$, de sorte que $p_1 = p_2$, c'est-à-dire que f est injective. D'autre part, pour chaque palindrome p de longueur $4n$, il existe des mots uniques u et x tels que $|x| \in \{0, 2\}$ et $\theta(u) = \tilde{x}px$. Nous avons $f(\alpha^{-1}p\alpha^{-1}) = p$, où α est la première lettre de x. Nous concluons que f est bien une bijection.

Il reste à démontrer que $P_{\mathbf{t}}(4n) = P_{\mathbf{t}}(n) + P_{\mathbf{t}}(n+1)$. Soit $p \in \mathrm{PAL}_{\mathbf{t}}(4n)$. Toujours par le Lemme 1, il existe un unique x et un unique palindrome u tel que $\theta(u) = \widetilde{x}px$, où p est centré dans $\theta(u)$, $|x| \in \{0, 2\}$ et $|u| \in \{n, n+1\}$. Considérons la fonction $g : \mathrm{PAL}_{\mathbf{t}}(4n) \to \mathrm{PAL}_{\mathbf{t}}(n) \cup \mathrm{PAL}_{\mathbf{t}}(n+1)$ définie par $p \mapsto u$. Nous montrons que g est une bijection. Dans un premier temps, soient $p, q \in \mathrm{PAL}_{\mathbf{t}}(4n)$ tels que $g(p) = g(q)$. Alors p et q sont centrés dans $\theta(g(p)) = \theta(g(q))$, ce qui revient à dire que $p = q$. Pour montrer que g est surjective, supposons que $u \in \mathrm{PAL}_{\mathbf{t}}(n) \cup \mathrm{PAL}_{\mathbf{t}}(n+1)$. Si $|u| = n$, alors $u = g(\theta(u))$. D'autre part, si $|u| = n+1$, alors $u = g(\widetilde{x}^{-1}\theta(u)x^{-1})$. Ceci montre que g est injective et termine l'établissement de la récurrence. □

Le Théorème 7 nous permet de déduire aisément la complexité palindromique de $\mathbf{t}$. La démonstration doit tenir compte de plusieurs cas et est un peu technique, mais elle n'est fondée que sur des conditions arithmétiques.

Corollaire 2. (Blondin Massé, Brlek et Labbé, 2008) La complexité palindromique du mot de Thue-Morse est donnée par :

$$P_{\mathbf{t}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2 & \text{si } 1 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair et } n \geq 5 \\ 4 & \text{si } n \text{ est pair et } 4^k + 2 \leq n \leq 3 \cdot 4^k, \text{ pour } k \geq 1 \\ 2 & \text{si } n \text{ est pair et } 3 \cdot 4^k + 2 \leq n \leq 4^{k+1}, \text{ pour } k \geq 1 \end{cases}$$

Démonstration. Nous montrons le résultat par récurrence sur n.

Cas de base. Les cas où $0 \leq n \leq 4$ sont donnés explicitement dans l'énoncé du Théorème 7.

Induction. Supposons le résultat vrai pour tout m tel que $4 \leq m < n$ et montrons que le résultat est également vrai pour n. Il y a trois cas possibles.

1. Supposons que n est impair. Alors, par le Lemme 1, nous avons $P_{\mathbf{t}}(n) = 0$, tel que

voulu. Notons que nous n'avons pas besoin d'appliquer l'hypothèse de récurrence dans ce cas.

2. Supposons que n est pair et $4^k + 2 \leq n \leq 3 \cdot 4^k$, pour un certain entier $k \geq 1$. En particulier, n n'est pas de la forme 4^ℓ ni $4^\ell - 2$ pour un certain entier ℓ. Il y a deux sous-cas à considérer.

   (a) Supposons que $n = 4m$, pour un certain entier m. Alors $4^{k-1} + 2 \leq m \leq 3 \cdot 4^{k-1}$ (puisque n et donc m n'est pas une puissance de 4). En particulier, $4^{k-1} + 2 \leq m + 1 \leq 3 \cdot 4^{k-1}$. De plus, par le Théorème 7, nous avons $P_{\mathrm{t}}(n) = P_{\mathrm{t}}(4m) = P_{\mathrm{t}}(m) + P_{\mathrm{t}}(m+1)$ et comme exactement un des entiers parmi m et $m+1$ est pair et l'autre impair, nous trouvons $P_{\mathrm{t}}(m) = 4, P_{\mathrm{t}}(m+1) = 0$ ou $P_{\mathrm{t}}(m) = 0, P_{\mathrm{t}}(m+1) = 4$ et donc $P_{\mathrm{t}}(n) = 4$.

   (b) Supposons maintenant que $n = 4m - 2$, pour un certain entier m. Alors $4^{k-1} + 2 \leq m \leq 3 \cdot 4^{k-1}$ (puisque n n'est pas de la forme $4^\ell - 2$ pour un certain entier ℓ) et $P_{\mathrm{t}}(n) = P_{\mathrm{t}}(4m-2) = P_{\mathrm{t}}(m) + P_{\mathrm{t}}(m+1)$. Par le même raisonnement, on conclut que $P_{\mathrm{t}}(n) = 4$.

3. Supposons finalement que n est pair et $3 \cdot 4^k + 2 \leq n \leq 4^{k+1}$, pour un certain entier $k \geq 1$. Alors n n'est pas de la forme $3 \cdot 4^\ell$ ni $3 \cdot 4^\ell - 2$ pour un certain entier ℓ. Il y a encore une fois deux sous-cas à examiner.

   (a) Supposons que $n = 4m$, pour un certain entier m. Alors $3 \cdot 4^{k-1} + 2 \leq m \leq 4^k$, puisque m ne peut être de la forme $3 \cdot 4^\ell$ pour un certain ℓ. L'hypothèse d'induction s'applique et donc $P_{\mathrm{t}}(n) = P_{\mathrm{t}}(4m) = P_{\mathrm{t}}(m) + P_{\mathrm{t}}(m+1) = 2$, puisque $P_{\mathrm{t}}(m) = 0$ ou $P_{\mathrm{t}}(m+1) = 0$.

   (b) Supposons que $n = 4m - 2$, pour un certain entier m. Par un raisonnement semblable, nous parvenons à la même conclusion. $\square$

2.6 Suites de Rote

Nous avons mentionné plus haut que les mots sturmiens étaient exactement ceux dont la complexité factorielle est donnée par $F(n) = n + 1$. De la même façon, les suites de complexité $F(n) = 2n$ ont été étudiées (Rote, 1994).

Nous disons d'un mot infini w de complexité $F_w(n) = 2n$ qu'il est une *suite de Rote stable par complémentation* (SRSC) si pour tout mot $v \in \text{FACT}(w)$, nous avons également $\overline{v} \in \text{FACT}(w)$. L'objectif de cette section est de calculer explicitement la complexité palindromique des SRSC. Pour cela, nous introduisons l'opérateur Δ.

Définition 8. Soient $A = \{0, 1\}$ un alphabet binaire et $w \in A^*$. Alors $\Delta(w)$ est le mot $v = v_1 v_2 \cdots v_{|w|-1}$ défini par

$$v_i = (w_{i+1} - w_i) \bmod 2.$$

Exemple 11. Nous avons $\Delta(011001) = 10101$ et $\Delta(011101110) = 10011001$.

Il existe une relation importante entre les mots sturmiens et les SRSC, comme en témoigne le théorème suivant.

Théorème 8. (Rote, 1994) Un mot r est une suite de Rote stable par complémentation (SRSC) si et seulement si $\Delta(r)$ est un mot sturmien. □

Nous ne présentons pas la démonstration ici, car elle exigerait l'introduction d'une théorie que nous ne souhaitons pas présenter dans ce mémoire. Par contre, il s'agit d'un résultat très utile pour démontrer que les suites de Rote sont pleines.

Nous démontrons d'abord des propriétés simples de l'opérateur Δ.

Proposition 6. Soient $u, v \in A^*$ deux mots non vides et $\alpha \in A$.

(i) $\Delta(u\alpha v) = \Delta(u\alpha)\Delta(\alpha v)$.

(ii) $\Delta(u) = \Delta(v)$ si et seulement si $u = v$ ou $u = \overline{v}$.

(iii) $\Delta(u)$ est un palindrome si et seulement si u est un palindrome ou un antipalindrome, pour $|u| \geq 2$.

(iv) $\Delta(u)$ est un palindrome impair avec lettre centrale 1 si et seulement si u est un antipalindrome, pour $|u| \geq 2$.

Démonstration. (i) Écrivons $u = u_1u_2\cdots u_{|u|}$ et $v = v_1v_2\cdots v_{|v|}$. Alors

$$\begin{aligned}
\Delta(u\alpha v) &= \Delta(u_1u_2\cdots u_{|u|}\alpha v_1v_2\cdots v_{|v|}) \\
&= (u_2 - u_1)\cdots(\alpha - u_{|u|})(v_1 - \alpha)(v_2 - v_1)\cdots(v_{|v|} - v_{|v|-1}) \\
&= \Delta(u_1u_2\cdots u_{|u|}\alpha)\Delta(\alpha v_1v_2\cdots v_{|v|}) \\
&= \Delta(u\alpha)\Delta(\alpha v),
\end{aligned}$$

où la différence est prise modulo 2.
(ii) Posons $u = u_1u_2\cdots u_m$ et $v_1v_2\cdots v_n$, où $m = |u|$ et $n = |v|$.
($\Rightarrow$) Supposons que $\Delta(u) = \Delta(v)$. Par (i), nous avons

$$\Delta(u_1u_2)\Delta(u_2u_3)\cdots\Delta(u_{m-1}u_m) = \Delta(v_1v_2)\Delta(v_2v_3)\cdots\Delta(v_{n-1}v_n).$$

En particulier, $m = n$ et $u_{i+1} - u_i \equiv v_{i+1} - v_i \bmod 2$, pour $1 \leq i \leq n-1$. Il y a deux cas possibles.

Supposons que $u_1 = v_1$. Alors par induction, $u_i = v_i$ pour $1 \leq i \leq n$, c'est-à-dire que $u = v$.

Supposons que $u_1 \neq v_1$. Alors par induction, $u_i \neq v_i$ pour $1 \leq i \leq n$, c'est-à-dire que $u = \overline{v}$.

($\Leftarrow$) Supposons que $u = v$ ou $u = \overline{v}$. Dans le premier cas, il est clair que $\Delta(u) = \Delta(v)$. Pour le second, il suffit de remarquer que, pour $1 \leq i \leq n-1$, nous avons

$$v_{i+1} - v_i \equiv (1 - u_{i+1}) - (1 - u_i) \equiv u_i - u_{i+1} \equiv u_{i+1} - u_i \bmod 2,$$

c'est-à-dire que $\Delta(u_iu_{i+1}) = \Delta(v_iv_{i+1})$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et donc $\Delta(u) = \Delta(v)$.
(iii) La démonstration se fait par récurrence sur $|u|$.

Cas de base. Il suffit d'énumérer tous les facteurs sur A de longueur 2 et 3, comme l'illustre le tableau 2.2.

Induction. Écrivons $u = u_1u_2\cdots u_n$, où $n = |u|$. Par (i), nous avons donc

$$\Delta(u) = \Delta(u_1u_2)\Delta(u_2\cdots u_{n-1})\Delta(u_{n-1}u_n).$$

($\Rightarrow$) Supposons que $\Delta(u)$ est un palindrome. Alors $\Delta(u_1u_2) = \Delta(u_{n-1}u_n)$ et, par hypothèse d'induction, nous avons que $v = u_2\cdots u_{n-1}$ est un palindrome ou un antipalindrome. Si v est un palindrome, alors $u_2 = u_{n-1}$. Par conséquent, $u_2 - u_1 \equiv u_n - u_{n-1} \bmod 2$ entraîne que $u_2 - u_{n-1} \equiv u_n - u_1 \bmod 2$ et donc $u_1 \equiv u_n \bmod 2$, c'est-à-dire que u est un palindrome. Si v est un antipalindrome, alors $u_2 = 1 - u_{n-1}$. Il vient $u_2 - u_{n-1} \equiv u_n - u_1 \bmod 2$ et donc $u_n - u_1 \equiv 1 \bmod 2$, c'est-à-dire que u est un antipalindrome.
($\Leftarrow$) Supposons que u est un palindrome ou un antipalindrome. Si u est un palindrome, alors $u_2\cdots u_{n-1}$ est aussi un palindrome et donc $\Delta(u_2\cdots u_{n-1})$ est un palindrome, par hypothèse d'induction. De plus, $u_1 = u_n$ et $u_2 = u_{n-1}$ et donc

$$\begin{aligned}\Delta(u_1u_2) &= (u_2 - u_1) \bmod 2\\ &= (u_{n-1} - u_n) \bmod 2\\ &= (u_n - u_{n-1}) \bmod 2\\ &= \Delta(u_{n-1}u_n),\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\Delta(u)$ est un palindrome, tel que voulu. De la même façon, si u est un antipalindrome, alors $\Delta(u_2\cdots u_{n-1})$ est un palindrome, par l'hypothèse d'induction. De plus, $u_1 = 1 - u_n$ et $u_2 = 1 - u_{n-1}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\Delta(u_1u_2) &= (u_2 - u_1) \bmod 2\\ &= ((1 - u_{n-1}) - (1 - u_n)) \bmod 2\\ &= (u_n - u_{n-1}) \bmod 2\\ &= \Delta(u_{n-1}u_n),\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\Delta(u)$ est un palindrome, tel que voulu.

w	$\Delta(w)$
00	0
01	1
10	1
11	0

w	$\Delta(w)$	w	$\Delta(w)$
000	00	100	10
001	01	101	11
010	11	110	01
011	10	111	00

Tableau 2.2: Effet de l'opérateur Δ sur les mots binaires de longueur 2 et 3.

(iv) ($\Rightarrow$) Supposons que $\Delta(u)$ est un palindrome impair avec lettre centrale 1. Nous savons de (ii) que u est soit un palindrome, soit un antipalindrome. Montrons que u est un antipalindrome. Tout d'abord, comme $\Delta(u)$ est impair, nous avons que $n = |u|$ est pair. Écrivons $u = u_1u_2 \cdots u_n$. Or, la lettre centrale de $\Delta(u)$ est 1, de sorte que $\Delta(u_{n/2}u_{n/2+1}) = 1$, c'est-à-dire que $u_{n/2} \neq u_{n/2+1}$. On en conclut que u ne peut être un palindrome : il s'agit donc d'un antipalindrome, tel que voulu.
($\Leftarrow$) Écrivons $u = u_1u_2 \cdots u_n$, où $n = |u|$ et supposons que u est un antipalindrome. Nous savons de (ii) que $\Delta(u)$ est un palindrome. De plus, comme tout antipalindrome est de longueur paire, alors $|\Delta(u)|$ est impair. D'autre part, $u_{n/2} \neq u_{n/2+1}$ et donc $\Delta(u_{n/2}u_{n/2+1}) = 1$, tel que voulu. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème qui nous intéresse.

Théorème 9. (Berthé et Vuillon, 2001; Allouche, Baake, Cassaigne et Damanik, 2003) Soit $\mathbf{r}$ une suite de Rote stable par complémentation (SRSC). Alors la complexité palindromique de $\mathbf{r}$ est donnée par

$$P_{\mathbf{r}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 2 & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Démonstration. Par le Théorème 8, $\Delta(\mathbf{r})$ est un mot sturmien. Il est clair que $P_{\mathbf{r}}(0) = 1$, puisqu'il n'existe qu'un palindrome de longueur 0, soit ε, qui est bien facteur de $\mathbf{r}$. Soit $n \geq 1$ un entier et $p \in \mathrm{PAL}_n(\mathbf{r})$. Nous avons deux cas à considérer.

(a) Supposons que n est pair. Alors $|\Delta(p)|$ est impair. De plus, la lettre centrale de $\Delta(p)$ doit être 0, sinon, par la Proposition 6(iv), p serait un antipalindrome (et donc ne pourrait pas être un palindrome). De plus, par le Théorème 5 et la proposition 4, il n'existe qu'un seul palindrome de longueur $n-1$ avec lettre centrale 0. Nous en concluons que les seuls palindromes de $\mathbf{r}$ de longueur n sont p et $\overline{p}$, par la Proposition 6(ii), c'est-à-dire que $P_{\mathbf{r}}(n) = 2$.

(b) Supposons maintenant que n est impair. Alors $|\Delta(p)|$ est pair. Toujours par le Théorème 5 et la Proposition 4, il existe un unique palindrome de longueur $n-1$. Les palindromes de $\mathbf{r}$ de longueur n sont donc donnés par p et $\overline{p}$ encore une fois, d'où $P_{\mathbf{r}}(n) = 2$.

Autrement dit, il y a une correspondance entre les palindromes de longueur n de $\mathbf{r}$ et ceux de longueur $n-1$ de $\Delta(\mathbf{r})$. □

Il est facile de déduire la complexité antipalindromique des SRSC.

Théorème 10. Soit $\mathbf{r}$ une suite de Rote stable par complémentation. Alors la complexité antipalindromique de $\mathbf{r}$ est donnée par

$$A_{\mathbf{r}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair}, \\ 2 & \text{si } n \text{ est pair et } n \geq 2. \end{cases}$$

Démonstration. Dans un premier temps, notons que ε est le seul antipalindrome de longueur 0 et $\varepsilon \in \text{FACT}(\mathbf{r})$. En outre, il n'existe aucun antipalindrome de longueur impaire, d'où $A_{\mathbf{r}}(n) = 0$ pour tout entier impair $n \geq 1$. Finalement, pour tout entier $n \geq 2$, nous avons que w et $\overline{w}$ sont des antipalindromes de longueur n de $\mathbf{r}$ si et seulement si $\Delta(w) = \Delta(\overline{w})$ est un palindrome de longueur $n-1$ avec lettre centrale 1. Or, pour chaque entier $n \geq 2$, il existe exactement un palindrome de longueur $n-1$ dans $\Delta(\mathbf{r})$, puisque $\Delta(\mathbf{r})$ est sturmien. On en conclut que $A_{\mathbf{r}}(n) = 2$ pour tout entier pair $n \geq 2$. □

CHAPITRE III

DÉFAUT ET LACUNES

Dans le chapitre 2, il a été démontré que tout mot fini w contenait au plus $|w| + 1$ palindromes distincts et que certains mots, appelés pleins, atteignaient cette borne, alors que d'autres ne l'atteignaient pas. Nous avons également remarqué que les mots sturmiens sont pleins (Droubay, Justin et Pirillo, 2001), mais il est facile d'exhiber des exemples de mots qui ne sont pas pleins (par exemple, $aababbaa$). Il semble donc naturel d'introduire une mesure de plénitude palindromique.

Définition 9. (Brlek, Hamel, Nivat et Reutenauer, 2004) Soit w un mot fini. Alors le *défaut de* w, noté $D(w)$, est donné par

$$D(w) = |w| + 1 - |\textsc{Pal}(w)|.$$

Soit $\mathbf{w}$ un mot infini. Alors

$$D(\mathbf{w}) = \sup\{D(v) \mid v \in \textsc{Fact}(\mathbf{w})\}.$$

Définition 10. (Blondin Massé, Brlek et Labbé, 2008) Soient w un mot fini et i un entier tel que $1 \leq i \leq |w|$. Nous disons que i est une *lacune* de w si

$$|\textsc{Pal}(\textsc{Pref}_i(w))| = |\textsc{Pal}(\textsc{Pref}_{i-1}(w))|.$$

De plus, nous disons que w est *fin-lacunaire* s'il possède $|w|$ comme lacune.

Remarquons que le nombre de lacunes d'un mot est égal à son défaut, puisque la démonstration du Théorème 1 nous assure que chaque préfixe d'un mot fini admet un unique palindrome suffixe unioccurrent.

i	p_i	PLPS(p_i)	Unioccurrent ?	$\lvert\textsc{Pal}(p_i)\rvert$	Lacune ?
0	ε	ε	oui	1	non
1	b	b	oui	2	non
2	ba	a	oui	3	non
3	baa	aa	oui	4	non
4	$baab$	$baab$	oui	5	non
5	$baaba$	aba	oui	6	non
6	$baabab$	bab	oui	7	non
7	$baababb$	bb	oui	8	non
8	$baababba$	$abba$	oui	9	non
9	$baababbaa$	aa	non	9	oui
10	$baababbaab$	$baab$	non	9	oui

Tableau 3.1: Lacunes du mot $w = baababbaab$.

Exemple 12. Considérons le mot $w = baababbaab$ et soit p_i le préfixe de longueur i de w. Le tableau 3.1 dresse la liste des préfixes de w, des plus longs palindromes suffixes de ces préfixes et du nombre de palindromes présents dans chacun des p_i. Ceci nous permet de déduire que $D(w) = 2$, puisqu'il admet deux lacunes.

Proposition 7. (Blondin Massé, Brlek et Labbé, 2008) Soient $u, v \in A^*$ tel que $v \in \textsc{Fact}(u)$ et $\alpha \in A$. Les propriétés suivantes sont vérifiées.

(i) $D(u) = D(\widetilde{u})$.

(ii) $D(u) \leq D(u\alpha)$ et $D(u) \leq D(\alpha u)$.

(iii) $D(v) \leq D(u)$.

(iv) si u est plein, alors v est plein.

Démonstration. (i) Nous avons que $p \in \textsc{Pal}(u)$ si et seulement s'il existe deux mots x et y tels que $u = xpy$. Or, $\widetilde{u} = \widetilde{y}\widetilde{p}\widetilde{x} = \widetilde{y}p\widetilde{x}$, c'est-à-dire que $p \in \textsc{Pal}(u)$ si et seulement si $p \in \textsc{Pal}(\widetilde{u})$. On en conclut que $|\textsc{Pal}(u)| = |\textsc{Pal}(\widetilde{u}|$ et donc

$$D(u) = |u| + 1 - |\textsc{Pal}(u)| = |\widetilde{u}| + 1 - |\textsc{Pal}(\widetilde{u})| = D(\widetilde{u}).$$

(ii) Nous savons de la démonstration du Théorème 1 que $0 \leq \textsc{Pal}(u\alpha) - \textsc{Pal}(u) \leq 1$. Il vient

$$\begin{aligned} D(u\alpha) - D(u) &= (|u\alpha| + 1 - |\textsc{Pal}(u\alpha)|) - (|u| + 1 - |\textsc{Pal}(u)|) \\ &= |u| + |\alpha| + 1 - |\textsc{Pal}(u\alpha)| - |u| - 1 + |\textsc{Pal}(u)| \\ &= |\textsc{Pal}(u)| - |\textsc{Pal}(u\alpha)| + 1 \\ &= -(|\textsc{Pal}(u\alpha)| - |\textsc{Pal}(u)|) + 1 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

de sorte que $D(u) \leq D(u\alpha)$. Le deuxième cas se démontre de façon symétrique.

(iii) La démonstration se fait par récurrence sur $|u|$.

Cas de base. Si $|u| = 0$, alors $u = v = \varepsilon$. Dans ce cas, $D(v) = D(u) = 0$ et donc $D(v) \leq D(u)$.

Induction. Supposons que $|u| = n + 1$ et que le résultat est vrai pour tout mot de longueur n. Si $v = u$, alors la conclusion est immédiate. Sinon, nous pouvons écrire $u = xvy$, où x et y sont des mots, $xy \neq \varepsilon$. Supposons que $x \neq \varepsilon$ et soit α la première lettre de x et x' tels que $x = \alpha x'$. Alors $u = \alpha x'vy$. Par hypothèse d'induction, nous avons $D(v) \leq D(x'vy)$. Mais par (ii), $D(v) \leq D(x'vy) \leq D(\alpha x'vy) = D(u)$, tel que voulu. Le cas $y = \varepsilon$ se traite de façon similaïre.

(iv) Si u est plein, alors $D(u) = 0$ et par (iii), $D(v) \leq D(u) = 0$, de sorte que $D(v) = 0$, c'est-à-dire que v est plein. $\square$

L'algorithme 1 permet de calculer le défaut palindromique d'un mot fini quelconque.

D'autre part, il est possible de calculer les lacunes d'un mot, en modifiant légèrement l'algorithme 1 (voir algorithme 2).

Algorithme 1 Calcul du défaut palindromique

```
fonction DEFAUT(w : MOT)
    D ← 0
    pour chaque u ∈ PREF(w) faire
        v ← PLPS(u)
        si v n'est pas unioccurrent dans u alors
            D ← D + 1
        fin si
    fin pour
    retourner D
fin fonction
```

Nous terminons avec la proposition suivante, qui s'avère très utile pour démontrer si un mot infini est plein ou non. Nous présentons ici une démonstration semblable à celle proposée dans le Théorème 2.14 de (Bucci, De Luca, Glen et Zamboni, 2008).

Proposition 8. Soit w un mot fini. Alors les énoncés suivants sont équivalents.

(i) w est plein.

(ii) Pour tout $u \in \textsc{Pal}(w)$, si v est un mot de retour complet de u dans w, alors $v \in \textsc{Pal}(w)$.

Démonstration. (i) ($\Rightarrow$) (ii) En procédant par l'absurde, supposons que w est plein et qu'il existe un palindrome u de w et un mot de retour complet v de u qui n'est pas un palindrome. Rappelons qu'alors u est un préfixe et un suffixe de v. De plus, par la Proposition 7, v est plein également. Soit p le plus long palindrome suffixe de v. Nous savons que $|v| > |p| \geq |u|$. Ceci signifie que u est également un préfixe de p et donc $|w|_{|u|} \geq 3$, contredisant la définition de mot de retour complet.

(i) ($\Leftarrow$) (ii) Supposons que w n'est pas plein. Alors il existe un préfixe y de w dont le plus long palindrome suffixe p n'est pas unioccurrent dans y. Choisissons le suffixe z de y tel que $|z|_{|p|} = 2$. Alors z est un mot de retour complet de p dans w et donc z est un

Algorithme 2 Calcul des lacunes palindromiques

fonction LACUNES(w : MOT)
  $L \leftarrow \emptyset$
  pour chaque $u \in$ PREF(w) **faire**
    $v \leftarrow$ PLPS(u)
    si v n'est pas unioccurrent dans u **alors**
      $L \leftarrow L \cup \{|u|\}$
    fin si
  fin pour
  retourner L
fin fonction

palindrome. Or, z est un suffixe de y et $|z| > |p|$, contredisant le fait que p est le plus long palindrome suffixe de y. □

3.1 Points fixes de morphismes conjugués

Soit M l'ensemble des points fixes de morphisme primitif. Le problème de déterminer si un mot fixé par un morphisme primitif $\varphi \in M$ est plein ou non est ouvert. Nous montrons dans cette section que le problème peut être simplifié en ce sens que le défaut est préservé par les points fixes de morphismes conjugués.

Proposition 9. (Blondin Massé, Brlek et Labbé, 2008) Soient φ et ψ deux morphismes conjugués. Alors il existe un mot u tel que $\varphi(v)u = u\psi(v)$, pour tout mot $v \in A^*$.

Démonstration. Soit $v = v_1 v_2 \cdots v_n \in A^*$, où $v_i \in A$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi(v)u &= \varphi(v_1 v_2 \cdots v_n)u \\
&= \varphi(v_1)\varphi(v_2)\cdots\varphi(v_{n-1})\varphi(v_n)u \\
&= \varphi(v_1)\varphi(v_2)\cdots\varphi(v_{n-1})u\psi(v_n) \\
&= \ldots \\
&= \varphi(v_1)u\psi(v_2)\cdots\psi(v_{n-1})\psi(v_n) \\
&= u\psi(v_1)\psi(v_2)\cdots\psi(v_{n-1})\psi(v_n) \\
&= u\psi(v)
\end{aligned}$$

tel que voulu. □

Lemme 2. (Blondin Massé, Brlek et Labbé, 2008) Soient φ, φ', ψ, ψ' des morphismes.

(i) Si $\varphi \triangleleft \varphi'$ et $\psi \triangleleft \psi'$, alors $(\varphi \circ \psi) \triangleleft (\varphi' \circ \psi')$.

(ii) Si $\varphi \triangleleft \varphi'$ et $\psi \triangleleft \psi'$, alors $(\varphi \circ \psi') \bowtie (\varphi' \circ \psi)$.

(iii) Si $\varphi \bowtie \varphi'$ et $\psi \bowtie \psi'$, alors $(\varphi \circ \psi) \bowtie (\varphi' \circ \psi')$.

Démonstration. (i) Par définition de morphismes conjugués, nous avons qu'il existe des mots u et v tels que $\varphi(\alpha)u = u\varphi'(\alpha)$ et $\psi(\alpha)v = v\psi'(\alpha)$, pour tout $\alpha \in A$. Il vient

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \psi)(\alpha) \cdot (u\varphi'(v)) &= (\varphi \circ \psi)(\alpha) \cdot \varphi(v)u \\
&= \varphi(\psi(\alpha)v)u \\
&= u\varphi'(v\psi'(\alpha)) \\
&= u\varphi'(v) \cdot (\varphi' \circ \psi')(\alpha).
\end{aligned}$$

(ii) Soient u et v les mots utilisés dans la partie (i). Nous distinguons deux cas.

1. Supposons que $|u| \leq |\varphi(v)$. Alors $u^{-1}\varphi(v) = \varphi'(v)u^{-1}$ et alors

$$\begin{aligned} u^{-1}\varphi(v) \cdot (\varphi \circ \psi')(\alpha) &= u^{-1}\varphi(v\psi'(\alpha)) \\ &= \varphi'(\psi(\alpha)v)u^{-1} \\ &= (\varphi' \circ \psi)(\alpha) \cdot \varphi'(v)u^{-1} \\ &= (\varphi' \circ \psi)(\alpha) \cdot u^{-1}\varphi(v), \end{aligned}$$

   c'est-à-dire que $(\varphi' \circ \psi) \triangleleft (\varphi \circ \psi')$.

2. Supposons que $|u| \geq |\varphi(v)|$. Alors

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \psi')(\alpha) \cdot (\varphi(v))^{-1}u &= (\varphi(v))^{-1}\varphi(v) \cdot (\varphi \circ \psi')(\alpha) \cdot uu^{-1} \cdot (\varphi(v))^{-1}u \\ &= (\varphi(v))^{-1} \cdot \varphi(v\psi'(\alpha))u \cdot u^{-1}(\varphi(v))^{-1}u \\ &= (\varphi(v))^{-1} \cdot u\varphi'(\psi(\alpha)v) \cdot (\varphi(v)u)^{-1}u \\ &= (\varphi(v))^{-1}u \cdot (\varphi' \circ \psi)(\alpha) \cdot \varphi'(v)(u\varphi'(v))^{-1}u \\ &= (\varphi(v))^{-1}u \cdot (\varphi' \circ \psi)(\alpha), \end{aligned}$$

   c'est-à-dire que $(\varphi \circ \psi') \triangleleft (\varphi' \circ \psi)$.

(iii) Si $\varphi \triangleleft \psi$ et $\varphi' \triangleleft \psi'$, alors, par (i), nous obtenons $(\varphi \circ \varphi') \triangleleft (\psi \circ \psi')$. Si $\varphi' \triangleleft \varphi$ et $\psi \triangleleft \psi'$, alors par (ii), nous trouvons $(\varphi \circ \psi) \bowtie (\varphi' \circ \psi')$. Les deux autres cas sont obtenus en permutant φ et ψ et φ' et ψ'. □

Proposition 10. (Blondin Massé, Brlek et Labbé, 2008) Soient φ et φ' deux morphismes primitifs conjugués, $\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{u})$ et $\mathbf{v} = \varphi(\mathbf{v})$. Alors $\textsc{Fact}(\mathbf{u}) = \textsc{Fact}(\mathbf{v})$.

Démonstration. Par hypothèse et par le Lemme 2(i), pour tout entier k, il existe w tel que $\varphi^k(\alpha)w = w\varphi'^k(\alpha)$, pour tout $\alpha \in A$. Dans un premier temps, nous montrons que $\varphi^k(\alpha)w$ est facteur de $\mathbf{u}$ et de $\mathbf{v}$. Puisque φ est primitif, il existe $x \in A^*$ et $\mathbf{z} \in \Sigma^\omega$ tels que $\mathbf{u} = x\alpha\mathbf{z}$. Il vient

$$\mathbf{u} = \varphi^k(x)\varphi^k(\alpha)\varphi^k(\mathbf{z}) = \varphi^k(x)\varphi^k(\alpha)w\varphi'^k(\mathbf{z}).$$

On en déduit que $\varphi^k(\alpha)w$ est facteur de $\mathbf{u}$. De la même façon, il existe $x \in A^*$ et $\mathbf{z} \in \Sigma^\omega$ tels que $\mathbf{v} = x\alpha\mathbf{z}$, et donc

$$w\mathbf{v} = w\varphi'^k(x)\varphi'^k(\alpha)\varphi'^k(\mathbf{z}) = \varphi^k(w)\varphi'^k(\alpha)\varphi'^k(\mathbf{z}).$$

Comme $\mathbf{v}$ est récurrent, nous pouvons choisir x de sorte que $|\varphi^k(x)| \geq |w|$. Par conséquent, $w\varphi'^k(\alpha)$ est facteur de $\mathbf{v}$. Ceci montre que $\varphi^k(\alpha)$ et $\varphi'^k(\alpha)$ sont facteurs de $\mathbf{u}$ et de $\mathbf{v}$ pour tout entier $k \geq 0$.

Soit $f \in \textsc{Fact}(\mathbf{u})$. Alors $f \in \textsc{Fact}(\varphi^k(\mathbf{u}_0))$, où $\mathbf{u}_0$ est la première lettre de $\mathbf{u}$ et k est un entier. Par ce qui précède, $f \in \textsc{Fact}(\mathbf{v})$. Réciproquement, si $f \in \textsc{Fact}(\mathbf{v})$, alors $f \in \textsc{Fact}(\mathbf{u})$, par un raisonnement semblable. On en conclut que $\textsc{Fact}(\mathbf{u}) = \textsc{Fact}(\mathbf{v})$. □

La Proposition 10 a deux conséquences immédiates.

Corollaire 3. (Blondin Massé, Brlek et Labbé, 2008) Soient φ et ψ deux morphismes primitifs conjugués, k, ℓ deux entiers et $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux mots tels que $\mathbf{u} = \varphi^k(\mathbf{u})$ et $\mathbf{v} = \psi^\ell(\mathbf{v})$. Alors $\textsc{Fact}(\mathbf{u}) = \textsc{Fact}(\mathbf{v})$.

Démonstration. Par le Lemme 2, $\varphi^{k\ell} \bowtie \psi^{k\ell}$. En outre, $\mathbf{u} = \varphi^{k\ell}(\mathbf{u})$ et $\mathbf{v} = \psi^{k\ell}(\mathbf{v})$. Par la Proposition 10, on en tire $\textsc{Fact}(\mathbf{u}) = \textsc{Fact}(\mathbf{v})$. □

Corollaire 4. (Blondin Massé, Brlek et Labbé, 2008) Soit φ un morphisme primitif, $\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{u})$ et $\mathbf{v} = \varphi(\mathbf{v})$. Alors $\textsc{Fact}(\mathbf{u}) = \textsc{Fact}(\mathbf{v})$.

Démonstration. Il s'agit d'appliquer la Proposition 10 avec $\varphi' = \varphi$. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème principal de cette section.

Théorème 11. (Blondin Massé, Brlek et Labbé, 2008) Soient φ et ψ deux morphismes conjugués et supposons qu'il existe des entiers k et ℓ et des mots $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ tels que $\varphi^k(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ et $\psi^\ell(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$. Alors $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ ont les mêmes complexités palindromiques et antipalindromiques. En outre, $D(\mathbf{u}) = D(\mathbf{v})$.

Démonstration. Les deux premières affirmations sont claires. Pour la troisième, il suffit de remarquer que, par le Corollaire 3, nous avons

$$D(\mathbf{u}) = \sup\{D(w) \mid w \in \textsc{Fact}(\mathbf{u})\} = \sup\{D(w) \mid w \in \textsc{Fact}(\mathbf{v})\} = D(\mathbf{v}). \quad \square$$

3.2 Mots périodiques

Avant de s'attaquer au problème de caractériser les mots pleins et les mots ayant un défaut fixé, il est convenable de considérer le cas des mots périodiques. Le théorème suivant fournit un algorithme optimal permettant de calculer le défaut d'un mot périodique.

Théorème 12. (Brlek, Hamel, Nivat et Reutenauer, 2004) Soient w un mot primitif et symétrique tel que $w = uv$, où $|u| \geq |v|$ et $u, v \in \text{PAL}(A^*)$. Soit $W = w^\omega$ et p le préfixe de W de longueur $|uv| + \lfloor(|u| - |v|)/3\rfloor$. Alors $D(W) = D(p)$.

Pour démontrer le théorème, nous avons besoin d'un lemme simple, mais très utile.

Lemme 3. (Brlek, Hamel, Nivat et Reutenauer, 2004) Supposons que $w = xy = yz$ est un palindrome. Alors il existe des palindromes u et v et un entier $i \geq 0$ tels que

(i) $x = uv$, $y = (uv)^i u$, $z = vu$.

(ii) $xyz = (uv)^{i+2}u$ est un palindrome.

Démonstration. Une solution de l'équation $xy = yz$ sur le monoide libre est donnée par

$$x = uv, y = (uv)^i u, z = vu.$$

Comme $w = xy = (uv)^{i+1}u$ est un palindrome, on en déduit que u et v sont des palindromes, de même que $xyz = (uv)^{i+1}u$. □

Remarque 1. Une conséquence immédiate du Lemme 3 est que si deux occurrences d'un même palindrome se chevauchent dans un mot, alors le mot contenant les deux occurrences est également un palindrome.

Démonstration. (du Théorème 12) Il suffit de démontrer que pour tout préfixe P de W de longueur au moins $|uv| + \lfloor(|u| - |v|)/3\rfloor$, PLPS$(P)$ est unioccurrent dans P. Il y a trois cas à considérer.

1. Supposons que $|P| > |uvuv|$. Il y a deux sous-cas à vérifier.

   (i) $P = (uv)^k y$ pour un certain entier $k \geq 2$ et $y \in \textsc{Pref}(u)$. Alors $\widetilde{y}(vu)^{k-1}vy$ est un suffixe palindromique de P. En particulier, si p est le plus long palindrome suffixe de P, alors $|p| \geq |\widetilde{y}(vu)^{k-1}vy| = 2|y| + (k-1)|u| + k|v|$. En procédant par l'absurde, supposons que p n'est pas unioccurrent dans P. Alors comme

   $$|P| = |y| + k|u| + k|v| \leq 4|y| + 2(k-1)|u| + 2k|v| = 2|p|,$$

   la seconde occurrence de p doit chevaucher l'occurrence suffixe de p, donnant lieu à un plus long palindrome suffixe de P par le Lemme 3. Ceci contredit la maximalité de p. Ainsi, p est bien unioccurrent dans P.

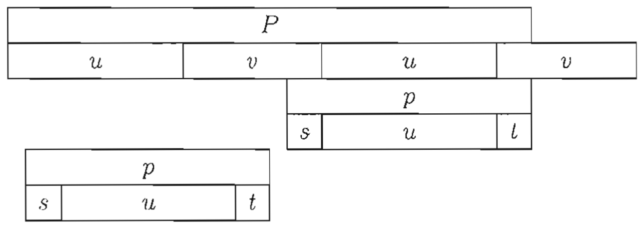
   (ii) $P = (uv)^k uy$ pour un certain entier $k \geq 2$ et $y \in \textsc{Pref}(v)$. De la même façon, $\widetilde{y}(uv)^{k-1}uy$ est un suffixe palindromique de P et un raisonnement semblable montre que le plus long palindrome suffixe de P est unioccurrent dans P.

2. Supposons maintenant que $|uvu| < |P| < |uvuv|$. Alors on peut écrire $P = uvut$, où t est un préfixe propre de v. En particulier, $\widetilde{t}$ est un suffixe propre de v et alors $\widetilde{t}ut$ est un suffixe palindromique de P. Par conséquent, si p est le plus long palindrome suffixe de P, alors $|p| \geq |\widetilde{t}ut| = 2|t| + |u|$.

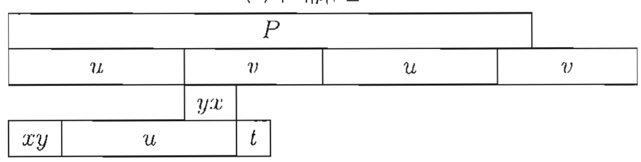
   Nous procédons encore une fois par l'absurde, c'est-à-dire que nous supposons que p n'est pas unioccurrent dans P. Remarquons encore une fois que deux occurrences de p ne peuvent se chevaucher, ce qui entraîne que $2|p| < |uvuv|$. En particulier, $p = sut$, pour un certain suffixe s de v (nous ne pouvons avoir $|s| > |v|$, car alors $|p| > 2|u| + 2|v|$). Finalement, remarquons que, puisque p n'est pas unioccurrent dans P, alors sut est un facteur de uv. Un schéma illustrant la situation est donné à la figure 3.1a.

   Maintenant, nous avons que le Lemme 3 s'applique (puisqu'il y a chevauchement de u dans uv), de sorte qu'il existe des palindromes x et y tels que $u = (xy)^i x$, pour un certain entier $i \geq 0$ (voir figure 3.1b).

   Remarquons que yxt est un préfixe de v et donc $\widetilde{t}xy$ est un suffixe de v. Ceci entraîne que $\widetilde{t}xy(xy)^i xt = \widetilde{t}xyut$ est un suffixe de P. Or, $|s| < |xy|$, contredisant le fait que



(a) $|P|_{|p|} \geq 2$.



(b) Application du Lemme 3.

Figure 3.1: Illustration schématique de la démonstration du Théorème 12.

$p = sut$ est le plus long palindrome suffixe de P. Ainsi, p est bien unioccurrent dans P.

3. Il reste à considérer le cas $|uv| + \lfloor(|u| - |v|)/3\rfloor < |P| < |uvu|$. Alors $P = uvs$, pour un certain préfixe s de u tel que $|s| > \lfloor(|u| - |v|)/3\rfloor$. Soit p le plus long palindrome suffixe de P. En utilisant des arguments similaires aux deux premiers cas, nous remarquons que $\widetilde{s}vs$ est un suffixe palindromique de P, de sorte que

$$|p| \geq |v| + 2|s|. \tag{3.1}$$

D'autre part, en procédant par l'absurde, supposons que p apparaisse au moins deux fois dans P. Comme les deux occurrences ne peuvent se chevaucher (sinon nous obtiendrions un palindrome plus long), la seconde occurrence de p doit être complètement contenue dans le préfixe $u\widetilde{s}^{-1}$ de P. Ceci entraîne que

$$|p| \leq |u| - |s|. \tag{3.2}$$

En combinant les inégalités (3.1) et (3.2), il vient $|v| + 2|s| \leq |u| - |s|$, c'est-à-dire

$$|s| \leq \frac{|u| - |v|}{3},$$

contredisant le fait que $|s| > \lfloor(|u| - |v|)/3\rfloor$. $\square$

La borne donnée dans le Théorème 12 n'est pas exacte, en particulier lorsque le mot périodique est plein, mais elle est quasi-optimale dans le sens suivant.

Théorème 13. (Brlek, Hamel, Nivat et Reutenauer, 2004) Soient w un mot fini et $W = w^\omega$. Alors il existe un conjugué w' de w tel que $D(W) = D(w')$.

Démonstration. Soit φ le morphisme défini par $\varphi(\alpha) = w$ pour tout $\alpha \in A$. Clairement, $\varphi(W) = W$. Par conséquent, pour chaque $w' \in [w]$, le morphisme φ' défini par $\varphi'(\alpha) = w'$ pour tout $\alpha \in A$ est conjugué à φ, de sorte que, par le Théorème 11, nous avons $D(W) = D(w) = D(w')$. Il est alors possible de choisir w' convenablement pour que $\lfloor(|u| - |v|)/3\rfloor = 0$ dans l'énoncé du théorème 12. □

Exemple 13. Soient $w = aaababbaabbabaaa$ et $W = w^\omega$. Dénotons par $W(i)$ la i-ème lettre de W (en commençant par 0). De plus, soit $H(i)$ la longueur du plus long palindrome suffixe de $W(0)W(1)\cdots W(i)$ et $G(i)$ défini par

$$G(i) = \begin{cases} H(i) & \text{si le plus long palindrome suffixe est unioccurrent,} \\ * & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors les premières lacunes de W sont décrites dans la table 3.2. Nous voyons dans ce cas que la dernière et unique lacune est 8 alors que le Théorème 12 prescrit de calculer le défaut du préfixe de longueur 20 de W. D'autre part, si nous considérons le mot $u = aaabaacaabaaa \cdot c$, nous remarquons que $D(u) = 1$. Maintenant, toujours par le même théorème, nous avons $D(u^\omega) = D(uaaab) = 3$. Ainsi, il est insuffisant de se restreindre à u, il faut observer le comportement de u suivi d'un préfixe d'une certaine longueur.

Exemple 14. Considérons le mot $w = uv = aaabaaa \cdot bb$, où $u = aaabaaa$ et $v = bb$ sont deux palindromes. Les conjugués de w sont

$$\begin{array}{llll} aaabaaa \cdot bb, & aabaa \cdot abba, & aba \cdot aabbaa, & b \cdot aaabbaaa, \\ aaabbaaa \cdot b, & aabbaa \cdot aba, & abba \cdot aabaa, & bb \cdot aaabaaa, \\ baaabaaab. & & & \end{array}$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
W(i)	a	a	a	b	a	b	b	a	a	b	b
H(i)	1	2	3	1	3	3	2	4	2	4	6
G(i)	1	2	3	1	3	3	2	4	$*$	4	6
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
W(i)	a	b	a	a	a	a	a	a	b	a	
H(i)	8	10	12	14	16	4	5	6	8	10	
G(i)	8	10	12	14	16	4	5	6	8	10	

Tableau 3.2: Lacunes du mot $w = aaababbaabbabaaa$.

Il suffit donc de prendre le mot $w' = aabaa \cdot abba$ pour avoir $D(w') = D(w)$, par le Théorème 12.

Le Théorème 12 permet de résoudre le problème de construction d'un mot infini ayant un défaut fixé.

Exemple 15. Considérons le palindrome $w = a^{d+1}babba^{d+1}bbaba^{d+1}$, où $d \in \mathbb{N}$. Par le Théorème 12, nous avons

$$D(w^\omega) = D(a^{d+1}babba^{d+1}bbaba^{d+1}a^{d+1}babb) = d,$$

puisque $a^{d'+1}babba^{d'+1}$ admet comme plus long suffixe palindromique $a^{d'+1}$, pour tout $0 \leq d' \leq d$, qui n'est pas unioccurrent.

3.3 Mots sturmiens

À la section 2.4, nous avons énoncé un théorème décrivant la complexité palindromique des mots sturmiens. L'objectif de la présente section est de démontrer que ces mots sont pleins, un résultat établi par Droubay, Justin et Pirillo (Droubay, Justin et Pirillo, 2001). Encore une fois, comme la famille des mots sturmiens ne font pas l'objet principal de ce mémoire, nous utilisons certaines propriétés utiles de ces suites sans en présenter la démonstration.

Définition 11. (Droubay, Justin et Pirillo, 2001) Nous disons d'un mot infini $\mathbf{w}$ qu'il a la propriété *Pi* si pour tout $u \in \textsc{Pal}(\mathbf{w})$, la première occurrence de u est facteur central d'un palindrome préfixe de $\mathbf{w}$.

Nous utilisons sans démonstration le fait suivant, qui suffit à démontrer le théorème principal de cette section.

Proposition 11. (Droubay, Justin et Pirillo, 2001) Tout mot sturmien standard satisfait la propriété *Pi*. □

Théorème 14. (Droubay, Justin et Pirillo, 2001) Tout mot sturmien standard est plein.

Démonstration. Soient $\mathbf{w}$ un mot sturmien et u un préfixe de $\mathbf{w}$. Nous allons montrer que le plus long palindrome suffixe de u est unioccurrent dans u. La démonstration se fait par récurrence sur $|u|$.

Cas de base. Si $|u| = 0$, alors nous avons en effet que ε est unioccurrent dans ε. Si $|u| = 1$, alors u est une lettre, qui est un palindrome unioccurrent.

Induction. Supposons maintenant que le théorème est satisfait pour tout préfixe de $\mathbf{w}$ de longueur au plus $|u| - 1$ et écrivons $u = u'\alpha$, où α est une lettre et u' un mot. Par hypothèse d'induction, il existe un palindrome p unioccurrent dans u' tel que $u' = vp$, où v est un mot. Nous distinguons deux cas.

1. Supposons que u' n'est pas un palindrome. La propriété *Pi* entraîne que $vp\widetilde{v}$ est un préfixe de $\mathbf{w}$ et donc α est la première lettre de $\widetilde{v}$. Par conséquent, $\alpha v \alpha$ est un palindrome suffixe de u et unioccurrent dans u, puisque v est unioccurrent dans u'.

2. Supposons maintenant que u' est un palindrome. Si α est unioccurrente dans u, alors α est le plus long palindrome suffixe de u. Sinon, soit $v\alpha$ le préfixe de u tel que α est unioccurrente dans $v\alpha$.

   Nous démontrons d'abord que v est un palindrome. Si $v = \varepsilon$, alors v est un palindrome. Supposons donc que $v \neq \varepsilon$. Par hypothèse d'induction, il existe des mots v' et v'' tels que $v = v'v''$, où v'' est un palindrome unioccurrent dans v. Par le même argument présenté plus haut, si $v' \neq \varepsilon$, nous concluons que α n'est pas unioccurrent dans $v\alpha$, une contradiction, de sorte que $v = v''$ est un palindrome.

Soit $q\alpha$ le plus long préfixe de u tel que q est un palindrome. Comme u est un palindrome, alors αq est un suffixe de v et donc $\alpha q \alpha$ est un suffixe palindromique de w.

Montrons que $\alpha q \alpha$ est unioccurrent dans w. Supposons le contraire et écrivons $u = x\alpha q \alpha y$, où x et y sont des mots et $\alpha q \alpha$ est unioccurrent dans $x\alpha q \alpha$. Nous montrons d'abord que $\ell = x\alpha q$ est un palindrome. Encore une fois par contradiction, nous supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe t et z tels que $\ell = tz$, où z est un palindrome unioccurrent dans ℓ et $t \neq \varepsilon$. En particulier, $|z| > |q|$ puisque q est à la fois préfixe et suffixe de ℓ et donc n'est pas unioccurrent dans ℓ. On en tire que $\alpha q \alpha$ et $\alpha z \alpha$ sont tous deux des palindromes suffixes unioccurrents dans $\ell\alpha$, ce qui est absurde. Ainsi, ℓ est bien un palindrome, et comme il est préfixe de u', alors $\alpha \ell \alpha$ est un suffixe palindromique de u.

Nous parvenons enfin à la contradiction finale que ℓ est un palindrome, $|\ell| > |q|$, $\alpha \ell \alpha$ et $\alpha q \alpha$ sont tous deux des palindromes suffixes de u, ce qui contredit la maximalité de q. Ainsi, $\alpha q \alpha$ est bel et bien unioccurrent dans u, tel que voulu. □

Corollaire 5. (Droubay, Justin et Pirillo, 2001) Tout mot sturmien est plein.

Démonstration. Soit $\mathbf{s}$ un mot sturmien et $u \in \text{FACT}(\mathbf{s})$. Alors il existe un mot sturmien standard $\mathbf{w}$ tel que $u \in \text{FACT}(\mathbf{w})$ (Lothaire, 1983, chapitre 2). Or, par le Théorème 14, u est plein.

3.4 Mot de Thue-Morse

Le mot de Thue-Morse $\mathbf{t}$ est un exemple intéressant pour lequel la complexité palindromique est infinie, de même que son défaut. Dans cette section, nous donnons une caractérisation complète de ses lacunes. Rappelons tout d'abord que $\mathbf{t}$ est fixé par le morphisme $\theta : \{a, b\}^* \to \{a, b\}^*$ défini par $\theta(a) = abba$ et $\theta(b) = baab$.

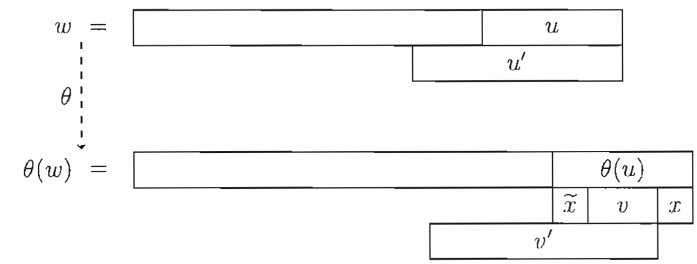


Figure 3.2: Illustration schématique de la démonstration du Lemme 4.

Lemme 4. (Blondin Massé, Brlek et Labbé, 2008) Soient $w \neq \varepsilon$ un préfixe de $\mathbf{t}$ et u un suffixe palindromique de w. De plus, supposons que u est un ancêtre d'un mot $v \neq \varepsilon$ tel que $\theta(u) = \widetilde{x}vx$, pour un certain mot x, $|x| \leq 3$. Alors $u = \mathrm{PLPS}(w)$ si et seulement si $v = \mathrm{PLPS}(\theta(w)x^{-1})$.

Démonstration. Un schéma illustrant les idées de la démonstration se trouve à la figure 3.2.

($\Rightarrow$) Nous procédons par contradiction. Supposons que v' est un suffixe palindromique de $\theta(w)x^{-1}$ et $|v'| > |v|$. Puisque $|\widetilde{x}vx|$ est divisible par 4, nous avons que $|v|$ est pair, de sorte que $|v| \geq 2$ et $|v'| \geq 3$. De plus, il est impossible d'avoir $|v'| = 3$, puisqu'alors on aurait $v' = \alpha^3$ pour une certaine lettre α. Par conséquent, $|v'| \geq 4$. Par le Lemme 1(ii), v' est centré et admet un ancêtre u' qui est un palindrome et qui est suffixe de w. Ceci entraîne que $\theta(u') = \widetilde{x}v'x$ est un suffixe palindromique de $\theta(w)$. Mais $|v'| > |v|$ de sorte que $|\theta(u')| = |\widetilde{x}v'x| > \widetilde{x}vx| = |\theta(u)|$. Ainsi, $|u'| > |u|$, contredisant la supposition que $u = \mathrm{PLPS}(w)$.

($\Leftarrow$) En utilisant encore une fois une argumentation par contradiction, supposons au contraire que u' est un suffixe palindromique de w, où $|u'| > |u|$. Alors $\theta(u')$ est un suffixe palindromique de $\theta(w)$. De plus, il existe un palindrome v' tel que $\theta(u') = \widetilde{x}v'x$. Mais $|u'| > |u|$ et donc $|\widetilde{x}v'x| = |\theta(u')| > |\theta(u)| = |\widetilde{x}vx|$. Ainsi, $|v'| > |v|$. Ceci contredit $v = \mathrm{PLPS}(\theta(w)x^{-1})$. $\square$

Lemme 5. (Blondin Massé, Brlek et Labbé, 2008) Soit w un préfixe de $\mathbf{t}$. Alors

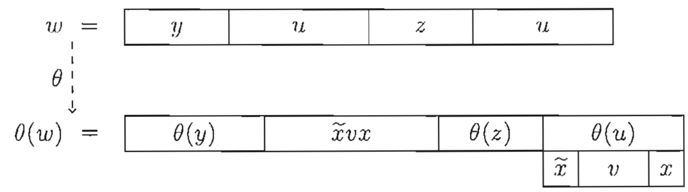


Figure 3.3: Illustration schématique de la démonstration du Lemme 6

(i) $|\mathrm{PLPS}(w)| = 1$ si et seulement si $|w| \in \{1, 2\}$.

(ii) $|\mathrm{PLPS}(w)| = 3$ si et seulement si $|w| \in \{5, 6\}$.

Démonstration. (i) ($\Leftarrow$) Nous avons bien $|\mathrm{PLPS}(a)| = |\mathrm{PLPS}(ab)| = 1$. ($\Rightarrow$) Nous montrons que si $|w| \geq 3$, alors $|\mathrm{PLPS}(w)| \geq 2$. Le cas $|w| = 3$ est vérifié, puisque $\mathrm{PLPS}(abb) = 2$. Supposons maintenant que $|w| \geq 4$ et soit α la dernière lettre de w. Alors un des mots de l'ensemble $\{\alpha\alpha, \alpha\beta, \alpha\beta\beta\alpha\}$ est un suffixe de w, où $\beta \neq \alpha$ est une lettre. On en conclut que $|\mathrm{PLPS}(w)| \geq 2$.
(ii) ($\Leftarrow$) Nous avons bien $|\mathrm{PLPS}(abbab)| = |\mathrm{PLPS}(abbaba)| = 3$. ($\Rightarrow$) Soit y l'ancêtre de w tel que $wx = \theta(y)$, où x est un mot satisfaisant $|x| \leq 3$. Dans un premier temps, supposons que $|y| \leq 3$. Alors $|w| \leq 12$ et donc w est un préfixe de $abbabaabbaab$. Les seules possibilités pour avoir $|\mathrm{PLPS}(w)| = 3$ sont $|w| = 5$ ou $|w| = 6$. Maintenant, supposons que $|y| \geq 4$ et soit $u = \mathrm{PLPS}(w)$. Alors $u \in \{aba, bab\}$. De plus, $\textsc{Ancêtres}(aba) = \{ab, ba\} = \textsc{Ancêtres}(bab)$. Par conséquent, soit ab soit ba est un suffixe de y, de sorte qu'il existe un mot $s \in \{bab, baab, aba, abba\}$ qui est suffixe de y. Aussi, $\widetilde{x}^{-1}\theta(s)x^{-1}$ est un suffixe palindromique de w. Or, $|\widetilde{x}^{-1}\theta(s)x^{-1}| \geq 6$, contredisant le fait que $|\mathrm{PLPS}(w)| = 3$. □

Lemme 6. (Blondin Massé, Brlek et Labbé, 2008) Soit w un préfixe de $\mathbf{t}$ tel que $|w| \geq 8$ et soit x un suffixe de $\theta(w)$ tel que $|x| \leq 3$. Alors w est fin-lacunaire si et seulement $\theta(w)x^{-1}$ est fin-lacunaire.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Soit $u = \mathrm{PLPS}(w)$. Puisque w est fin-lacunaire, u est uniocccurrent dans w. Ceci signifie que $w = yuzu$ pour un certain mot y et un certain mot non vide z. Mais $\theta(u)$ est un palindrome, de sorte qu'il existe un palindrome v tel que $\theta(u) = \widetilde{x}vx$. Par le Lemme 4, nous avons $v = \mathrm{PLPS}(\theta(w)x^{-1})$. En particulier, $\theta(w)x^{-1}$ est fin-lacunaire, puisque v n'est pas unioccurrent dans $\theta(w)x^{-1} = \theta(y)\widetilde{x}vx\theta(z)\widetilde{x}v$.

($\Leftarrow$) Soit $v = \mathrm{PLPS}(\theta(w)x^{-1}$. Dans un premier temps, supposons que $|v| > 4$. Par le Lemme 1, v est centré par rapport à $\theta(u)$, où u est l'unique ancêtre palindromique de v, c'est-à-dire que $\widetilde{x}vx = \theta(u)$. Puisque $\theta(w)x^{-1}$ est fin-lacunaire, on en déduit qu'il existe un mot y et un mot non vide y satisfaisant $\theta(w) = \theta(y)\widetilde{x}vx\theta(z)\widetilde{x}vx$ et $w = yuzu$. Ceci signifie que u n'est pas unioccurrent dans w. Or, par le Lemme 6, $u = \mathrm{PLPS}(w)$. On en conclut que w est fin-lacunaire.

Maintenant, supposons que $|v| \leq 4$. Par le Lemme 5, nous avons $|v| \in \{2, 4\}$. Alors $v \in \{aa, bb, abba, baab\}$. De plus, si u est un ancêtre de v, alors $u \in U = \{a, b, aa, bb\}$. Par le Lemme 6, $u = \mathrm{PLPS}(w)$. En outre, comme $|w| \geq 8$, chacun des mots dans U apparaît dans w. Par conséquent, u n'est pas unioccurrent dans w et w est bien fin-lacunaire. □

Remarque 2. Le Lemme 6 s'interprète comme suit. Soit $i \in \mathbb{N}$. Alors i est une lacune de $\mathbf{t}$ si et seulement si tous les entiers de l'intervalle $[4i, 4i+3]$ sont des lacunes de $\mathbf{t}$. En particulier, si $i, j \in \mathbb{N}$ et $i \leq j$, alors tous les entiers de l'intervalle $[i, j]$ sont des lacunes si et seulement si tous les entiers de l'intervalle $[4i, 4j + 3]$ sont des lacunes.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat principal. Pour tout $n \in \mathbb{N}^+$, soit $I(n)$ le n-ième intervalle de lacunes de $\mathbf{t}$, $L(n)$ le premier entier dans $I(n)$ et $\ell(n)$ la longueur de $I(n)$.

Théorème 15. (Blondin Massé, Brlek et Labbé, 2008) Les fonctions L et ℓ satisfont les récurrences suivantes :

(i) $L(1) = 8$ et $L(2) = 24$,

(ii) $L(n) = 4L(n-2)$, pour $n \geq 3$,

(iii) $\ell(1) = \ell(2) = 2$ et

(iv) $\ell(n) = 4\ell(n-2)$, pour $n \geq 3$.

Démonstration. Dans un premier temps, si nous considérons le préfixe de longueur 32 de $\mathbf{t}$, nous remarquons que les seules lacunes sont 8, 9, 24 et 25, de sorte que $L(1) = 8$, $L(2) = 24$ et $\ell(1) = \ell(2) = 2$. Maintenant, pour tout préfixe de $\mathbf{t}$ de longueur au moins 32, nous pouvons utiliser le Lemme 6. Par la Remarque 2, nous avons donc que $[L(i), L(i)+\ell(i)-1]$ est un intervalle de lacunes si et seulement si $[4L(i), 4L(i)+4\ell(i)-1]$ est un intervalle de lacunes, ce qui établit la récurrence. Par ailleurs, il est clair que les intervalles $I(n)$ donnés par $L(n)$ et $\ell(n)$ sont croissants et disjoints deux à deux. $\square$

Nous en déduisons une formule close pour L et ℓ.

Théorème 16. (Blondin Massé, Brlek et Labbé, 2008) Les fonctions L et ℓ sont données par

$$L(n) = \begin{cases} 2^{n+2} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 2^{n+2} + 2^{n+1} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

et

$$\ell(n) = \begin{cases} 2^{n} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 2^{n-1} & \text{si } n \text{ est pair,} \end{cases}$$

Démonstration. La démonstration se fait par induction généralisée sur n.

Cas de base. Nous avons $L(1) = 8 = 2^3$, $L(2) = 24 = 2^4 + 2^3$, $\ell(1) = 2 = 2^1$ et $\ell(2) = 2 = 2^1$, tel que voulu.

Induction. Nous supposons le résultat vrai pour tout $1 \leq m < n$ et nous montrons qu'il l'est également pour $n \geq 3$. Supposons d'abord que n est pair. Alors $n-2$ est pair également de sorte que

$$\begin{aligned} L(n) &= 4L(n-2) \\ &= 4(2^n + 2^{n-1}) \\ &= 2^{n+2} + 2^{n+1}, \\ \ell(n) &= 4\ell(n-2) \\ &= 4(2^{n-3}) \\ &= 2^{n-1}. \end{aligned}$$

D'autre part, si n est impair, $n-2$ est impair et

$$\begin{aligned} L(n) &= 4L(n-2) \\ &= 4(2^n) \\ &= 2^{n+2}, \\ \ell(n) &= 4\ell(n-2) \\ &= 4(2^{n-2}) \\ &= 2^n, \end{aligned}$$

tel que voulu. □

3.5 Suites de Rote

Nous avons décrit la complexité palindromique des SRSC à la section 2.6. L'objectif de cette section est de démontrer que ces mots sont pleins. Pour cela, nous avons besoin d'un résultat important dont nous ne présentons pas la démonstration.

Théorème 17. (Vuillon, 2001) Un mot binaire infini $\mathbf{w}$ est sturmien si et seulement si pour chaque facteur non vide u de $\mathbf{w}$, $|\textsc{RetourComplet}_{\mathbf{w}}(u)| = 2$. □

Avant de démontrer que les SRSC sont pleines, nous démontrons le lemme suivant.

Lemme 7. Soit $\mathbf{r}$ une suite de Rote stable par complémentation et $u \in \text{PAL}(\mathbf{r})$. Alors il existe un palindrome r_1 et un antipalindrome r_2 tels $u \in \text{PREF}(r_1) \cap \text{PREF}(r_2)$ et

$$\text{RETOURCOMPLET}_{\mathbf{r}}(\Delta(u)) = \{\Delta(r_1), \Delta(r_2)\}.$$

Démonstration. Nous savons du Théorème 8 que $\Delta(\mathbf{r})$ est sturmien.

Dans un premier temps, remarquons que $\Delta(u)$ est un palindrome, par la Proposition 6. Par le Théorème 17, $\Delta(u)$ admet deux mots de retour complet et, comme $\Delta(\mathbf{r})$ est plein, ces deux mots doivent être des palindromes. Soient r_1 et r_2 les deux mots admettant u comme préfixe et tels que $\Delta(r_1)$ et $\Delta(r_2)$ sont les deux mots de retour complet de $\Delta(u)$. À noter que r_1 et r_2 sont uniques par la Proposition 6(ii). En outre, par la Proposition 6(iii), r_1 et r_2 sont des palindromes ou des antipalindromes.

Montrons que r_1 et r_2 ne peuvent être tous deux des antipalindromes. En effet, supposons le contraire. Alors $\Delta(r_1)$ et $\Delta(r_2)$ sont des palindromes de longueur impaire avec lettre centrale 1. Par la Proposition 4, on en déduit que $\Delta(r_1) \preceq \Delta(r_2)$ ou $\Delta(r_1) \preceq \Delta(r_2)$. Dans le premier cas, nous aurions $|\Delta(r_2)|_{\Delta(u)} \geq 4$, alors que dans le deuxième, nous aurions $|\Delta(r_1)|_{\Delta(u)} \geq 4$, ce qui contredit le fait que $\Delta(r_2)$ ou $\Delta(r_1)$ sont des mots de retour complet.

D'autre part, r_1 et r_2 ne sont pas tous deux des palindromes. Comme $\mathbf{r}$ est récurrent, il existe un facteur v de $\mathbf{r}$ tel que $u \in \text{PREF}(v)$, $\overline{u} \in \text{SUFF}(v)$ et $|v|_u = |v|_{\overline{u}} = 1$, c'est-à-dire que $\Delta(v)$ est un mot de retour complet de $\Delta(u)$ dans $\Delta(\mathbf{r})$. Or, il est clair que v n'est pas un palindrome, puisqu'il admet u comme préfixe et $\overline{u}$ comme suffixe : il s'agit donc d'un antipalindrome. $\square$

Théorème 18. Toute suite de Rote stable par complémentation est pleine.

Démonstration. Soit $\mathbf{r}$ une SRSC, $u \in \text{PAL}(\mathbf{r})$ et v un mot de retour complet de u dans $\mathbf{r}$. Il suffit de montrer que v est un palindrome.

Tout d'abord, notons que $|v|_u = 2$, mais il est possible que $|v|_{\overline{u}} > 0$. Soit $n = |v|_{\overline{u}}$. Par le Lemme 7, les deux mots de retour de $\Delta(u)$ sont donnés par $\Delta(r_1)$ et $\Delta(r_2)$, où

r_1 est un palindrome, r_2 est un antipalindrome et $u \in \textsc{Pref}(r_1) \cap \textsc{Pref}(r_2)$. Nous en déduisons que

$$v = (r_2 u^{-1})(\overline{r_1} u^{-1})^n \overline{r_2}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \widetilde{v} &= \widetilde{\overline{r_2}}(\widetilde{u^{-1}\overline{r_1}})^n(\widetilde{u^{-1}\overline{r_2}}) \\ &= r_2(u^{-1}\overline{r_1})^n(u^{-1}\overline{r_2}) \\ &= v, \end{aligned}$$

de sorte que v est un palindrome. Ainsi, $\mathbf{r}$ est plein, par la Proposition 8.

CHAPITRE IV

PROBLÈMES OUVERTS

Nous terminons ce mémoire en mentionnant certains problèmes ouverts sur la complexité palindromique et sur le défaut palindromique.

4.1 Conjecture de Hof-Knill-Simon

Un des problèmes les plus généraux dans cette théorie est sans doute la conjecture de Hof-Knill-Simon (Hof, Knill et Simon, 1995). Pour l'énoncer simplement, nous avons besoin des deux définitions suivantes :

Définition 12. (Hof, Knill et Simon, 1995) Soit φ un morphisme sur un alphabet A. Nous disons que φ est *de classe* P, noté $\varphi \in P$, s'il existe des palindromes p et q_α, tels que $\varphi(\alpha) = pq_\alpha$, pour tout $\alpha \in A$.

Définition 13. (Blondin Massé, Brlek et Labbé, 2008) Un morphisme φ est dit *de classe* P' s'il existe un conjugué de φ qui est de classe P.

Exemple 16. Le morphisme de Thue-Morse μ défini par $\mu(a) = ab$ et $\mu(b) = ba$ n'est pas de classe P ni de classe P'. Par contre, μ^2 défini par $\mu^2(a) = abba$ et $\mu^2(b) = baab$ est de classe P (et donc de classe P'). Il suffit de prendre $p = \varepsilon$, $q_a = abba$ et $q_b = baab$ dans la Définition 13. Le morphisme de Fibonacci φ défini par $\varphi(a) = ab$ et $\varphi(b) = a$ est de classe P. Le morphisme φ^2 défini par $\varphi^2(a) = aba$ et $\varphi^2(b) = ab$ n'est pas de classe P, mais de classe P', puisqu'il admet comme conjugué le morphisme φ' défini par $\varphi'(a) = baa$ et $\varphi'(b) = ba$.

Il n'est pas difficile de montrer que tout point fixe d'un morphisme de classe P' contient une infinité de palindromes. Par contre, la réciproque est beaucoup plus difficile à démontrer. Plus précisément, le problème suivant est ouvert :

Conjecture 1. (Hof, Knill et Simon, 1995) Soit φ un morphisme primitif et $\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{u})$ un point fixe. Alors $|\textsc{Pal}(\mathbf{u})| = \infty$ si et seulement s'il existe un morphisme $\psi \in P'$ tel que $\mathbf{u} = \psi(\mathbf{u})$.

Il existe une démonstration constructive de la conjecture de Hof-Knill-Simon dans le cas des alphabets binaires donnant explicitement le morphisme ψ dans l'énoncé (Tan, 2007). Elle est également satisfaite pour les mots périodiques (Allouche, Baake, Cassaigne et Damanik, 2003). En effet, nous savons du Théorème 2 qu'un mot périodique w^ω contient une infinité de palindromes si et seulement si w est le produit de deux palindromes. Or, w^ω est un point fixe du morphisme $\varphi : \alpha \mapsto w$, pour tout $\alpha \in A$, qui est de classe P. En revanche, le cas général demeure non résolu.

4.2 Défaut palindromique des points fixes de morphisme

Nous avons vu à la section 3.2 qu'il existe des mots périodiques dont le défaut est fini, mais non nul. D'autre part, nous n'avons pas encore exhibé d'exemple de points fixes de morphismes non périodiques ayant un défaut fini non nul. Ceci nous amène naturellement à poser la conjecture suivante :

Conjecture 2. (Blondin Massé, Brlek et Labbé, 2008) Soit φ un morphisme primitif et $\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{u})$. Si $0 < D(\mathbf{u}) < \infty$, alors $\mathbf{u}$ est périodique.

Soit M l'ensemble des morphismes admettant au moins un point fixe de morphismes, $\varphi \in M$ et $\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{u})$. Le problème de déterminer si $\mathbf{u}$ est plein ou non en considérant simplement φ est ouvert. Nous savons par le Théorème 11 que tous les points fixes de φ ont le même défaut. D'autre part, il est possible de se restreindre aux morphismes de classe P, du moins pour les alphabets binaires. En effet, si $\mathbf{u}$ est plein, alors il existe un morphisme φ' de classe P' dont $\mathbf{u}$ est un point fixe, par le théorème de Tan pour les alphabets binaires. Par conséquent, par le Théorème 11, il est suffisant d'étudier les morphismes de classe P.

4.3 Codages de rotation

Plus récemment, nous nous sommes intéressés aux codages de rotation (Blondin Massé, Brlek, Labbé et Vuillon, 2008). Il s'agit d'une famille de mots générale incluant entre autres les mots sturmiens et les suites de Rote stables sous complémentation (Berthé et Vuillon, 2001).

Définition 14. Soit $A = \{a, b\}$ un alphabet binaire. Soient $\alpha, \beta, x \in [0, 1)$ des nombres réels. Nous appelons *codage de rotation de paramètres* (x, α, β) le mot $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2\cdots$ noté $R(x, \alpha, \beta)$ et donné par

$$\mathbf{w}_n = \begin{cases} a & \text{si } (x + n\alpha) \bmod 1 \in [0, \beta), \\ b & \text{si } (x + n\alpha) \bmod 1 \in [\beta, 1). \end{cases}$$

Exemple 17. Il est facile de vérifier que $R(0.25, 0.5, 0.5) = (ab)^\omega$. D'autre part, pour tout $\alpha \in [0, 1)$ irrationnel et pour tout $x \in [0, 1)$, nous avons que $R(x, \alpha, \alpha)$ est sturmien (Hedlund et Morse, 1938; Hedlund et Morse, 1940; Berthé et Vuillon, 2001).

En complémentation à une approche de type "combinatoire", les codages de rotation permettent d'étudier des familles de mots par une approche de type "système dynamique" (Hedlund et Morse, 1938; Hedlund et Morse, 1940; Berthé et Vuillon, 2001; Adamczewski, 2002) et il semble que cette façon d'aborder le problème s'adapte particulièrement à la palindromicité (Berthé et Vuillon, 2001). Des observations préliminaires indiquent que tout codage de rotation est plein et nous travaillons actuellement sur la démonstration de ce résultat (Blondin Massé, Brlek, Labbé et Vuillon, 2008).

4.4 Énumération de mots ayant un défaut fixé

Soit $W(k, n, d)$ le nombre de mots de longueur n sur un alphabet de k lettres ayant un défaut d. Le problème de calculer $W(k, n, d)$ ou de déterminer un algorithme efficace permettant de calculer $W(k,n,d)$ n'est pas encore résolu à ce jour, même en fixant k ou d (sauf évidemment le cas $k = 1$, qui est trivial).

Les premières valeurs de $W(k,n,d)$ sont données dans les tableaux 4.1, 4.2, 4.3 et 4.4.

Des identités simples ont été démontrées sur $W(k,n,d)$ pour des cas bien précis. Par exemple, nous avons le fait suivant.

Proposition 12. (Blondin Massé, Brlek, Frosini, Labbé et Rinaldi, 2008) Soit $M(k,d)$ la longueur des plus courts mots sur un alphabet à k lettres (chacune des lettres doit apparaître) dont le défaut est $d > 0$, s'ils existent. Alors

$$M(k,d) = \begin{cases} k+d+5 & \text{si } k = 2 \text{ et } d = 1, \\ k+d+6 & \text{si } k = 2 \text{ et } d \geq 2, \\ k+d & \text{si } k \geq 3. \quad \square \end{cases}$$

Remarquons en particulier que le cas d'un alphabet binaire doit être traité différemment de celui des alphabets à trois lettres ou plus. Une explication intuitive à cette coupure est que la plénitude en palindromes est beaucoup plus "facile à casser" lorsqu'on dispose de plus de deux lettres. Autrement dit, on peut "facilement" choisir une lettre de sorte que le plus long palindrome suffixe de plusieurs préfixes ne soit pas unioccurrent. Par contre, dans le cas d'un alphabet binaire, ce choix est limité de sorte que nous sommes "forcés" de construire de nouveaux palindromes lorqu'on ajoute une lettre au début ou à la fin d'un mot et le nombre de tels mots est par conséquent plus "difficile" à construire.

Nous terminons cette section en dressant une liste de quelques questions sur la fonction $W(k,n,d)$.

(1) Nous remarquons du tableau 4.1 qu'il semble y avoir un plus grand nombre de mots pleins que de mots lacunaires pour toute longueur, dans le cas d'un alphabet binaire. Il est donc naturel de conjecturer que $W(2,n,0) \geq W(2,n,d)$, pour $n \geq 0$ et $d \geq 1$. D'autre part, ce fait ne semble pas être reproduit dans le cas des alphabets à trois

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	64	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	128	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	252	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	488	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	932	76	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	1756	216	64	12	0	0	0	0	0	0	0	0
12	3246	580	202	56	12	0	0	0	0	0	0	0
13	5916	1416	592	204	52	12	0	0	0	0	0	0
14	10618	3264	1566	660	212	52	12	0	0	0	0	0
15	18800	7152	3916	1856	768	212	52	12	0	0	0	0
16	32846	15036	9262	4952	2308	844	220	56	12	0	0	0
17	56704	30552	20868	12460	6488	2784	896	256	52	12	0	0
18	96702	60416	45092	29808	17238	8284	3240	1024	276	52	12	0

Tableau 4.1: Premières valeurs de la suite $W(k,n,d)$ pour $k=2$ fixé.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	75	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	201	36	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	513	162	48	6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1269	600	252	60	6	0	0	0	0	0	0	0
8	3033	1968	1092	390	72	6	0	0	0	0	0	0
9	7047	5940	4086	1962	552	90	6	0	0	0	0	0
10	15903	16830	13788	8334	3300	774	114	6	0	0	0	0
11	35031	45054	43332	31164	16026	5274	1122	138	6	0	0	0
12	75291	115434	127218	107250	66882	29100	8496	1596	168	6	0	0

Tableau 4.2: Premières valeurs de la suite $W(k,n,d)$ pour $k=3$ fixé.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	64	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	232	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	784	216	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	2464	1248	360	24	0	0	0	0	0	0	0	0
7	7336	5712	2712	600	24	0	0	0	0	0	0	0
8	20776	22536	15240	5928	1032	24	0	0	0	0	0	0
9	56464	80112	70824	40056	12792	1872	24	0	0	0	0	0

Tableau 4.3: Premières valeurs de la suite $W(k,n,d)$ pour $k=4$ fixé.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	125	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	565	60	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	2345	720	60	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	8905	5340	1320	60	0	0	0	0	0	0	0	0
7	31505	30120	14040	2400	60	0	0	0	0	0	0	0
8	104625	142840	102120	36540	4440	60	0	0	0	0	0	0

Tableau 4.4: Premières valeurs de la suite $W(k,n,d)$ pour $k=5$ fixé.

lettres ou plus. Au contraire, il semblerait qu'on ait plutôt $W(k,n,0) \leq W(k,n,1)$, pour $k \geq 3$ et $n \geq 8$.

(2) Est-ce que la limite suivante

$$\lim_{n\to\infty} \frac{W(k,n,0)}{k^n}$$

existe, pour une valeur de k fixée et, le cas échéant, quelle est sa valeur ? Autrement dit, quelle est la densité de mots pleins par rapport aux mots non pleins ?

(3) Est-il vrai que $W(2,d,d+8) = 12$ pour $d \geq 3$, que $W(3,d,d+3) = 6$ pour $d \geq 1$, que $W(4,d,d+3) = 24$ pour $d \geq 1$ et $W(5,d,d+3) = 60$ pour $d \geq 1$? Pourquoi ?

4.5 Complexité et défaut f-palindromiques

La notion de complexité f-palindromique a été introduite dans le Chapitre 2. Notons que de nombreuses propriétés des palindromes sont partagées par les f-palindromes. Par ailleurs, un f-palindrome est de longueur impaire seulement si sa lettre centrale est fixée par f.

L'étude de la combinatoire des f-palindromes semble donc naturelle, de même que la complexité f-palindromique des mots infinis ainsi que leur défaut f-palindromique.

CONCLUSION

L'objectif de ce travail était de présenter les complexités palindromique et antipalindromique ainsi que le défaut palindromique de certaines familles de mots bien connues. C'est pourquoi nous nous sommes intéressés à la présence de palindromes et d'antipalindromes dans les mots finis et infinis. Nous avons survolé certains résultats connus et nous en avons également présentés de nouveaux. Nous nous sommes attardés à la notion de défaut palindromique d'un mot, qui est en quelque sorte une mesure de sa plénitude en palindromes. Nous rappelons rapidement sous forme de liste ce qui a été présenté.

1. Un mot périodique $\mathbf{w} = w^\omega$ admet une infinité de palindromes si et seulement si w est un produit de deux palindromes. De la même façon, $\mathbf{w}$ admet une infinité d'antipalindromes si et seulement si w est un produit de deux antipalindromes. De plus, si $\mathbf{w}$ contient une infinité de palindromes, alors $D(\mathbf{w}) < \infty$.

2. Pour tout mot sturmien $\mathbf{s}$, nous avons
$$P_{\mathbf{s}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 2 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$
D'autre part, $|\textsc{Antipal}(\mathbf{s})| < \infty$ et $D(\mathbf{s}) = 0$.

3. Le mot de Thue-Morse $\mathbf{t}$ admet une infinité de palindromes et une infinité d'antipalindromes, mais son défaut est infini. Une description exacte des lacunes de $\mathbf{t}$ a été donnée.

4. Les suites de Rote stables par complémentation contiennent une infinité de palindromes et une infinité d'antipalindromes. Elles sont également pleines.

Des observations préliminaires indiquent que les codages de rotation, qui sont en quelque sorte une généralisation des mots sturmiens et des suites de Rote, sont également pleins.

Il n'en demeure pas moins que la caractérisation sous forme générale des mots pleins reste ouverte et il reste évidemment de nombreuses avenues à explorer en ce qui concerne la palindromicité, la f-palindromicité et le défaut des mots infinis.

RÉFÉRENCES

A. Aberkane et S. Brlek. *Suites de même complexité que celle de Thue-Morse*, Actes des Journées Montoises d'informatique théorique (9-11 septembre 2002, Montpellier, France) (2002) 85-89.

B. Adamczewski. *Codages de rotations et phénomènes d'autosimilarité*, Journal de Théorie des nombres, Bordeaux **14** (2002) 351-386.

J.P. Allouche. *Schrödinger operators with Rudin-Shapiro potentials are not palindromic*, Journal of Mathematical Physics **38** (1997) 1843-1848.

J.P. Allouche, M. Baake, J. Cassaigne et D. Damanik. *Palindrome complexity*, Theoretical Computer Science **292** (2003) 9–31.

J.P. Allouche and J. Shallit. *The ubiquitous Prouhet-Thue-Morse sequence*, Sequences and their applications (Singapore, 1998), Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Springer, London (1999) 1-16.

J.P. Allouche et J. Shallit. *Sums of digits, overlaps, and palindromes*, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science **4** (2000) 1–10.

J.P. Allouche et J. Shallit. *Automatic sequences : theory, applications, generalizations*, Cambridge University Press, 2003.

M. Baake. *A note on palindromicity*, Letters in Mathematical Physics **49** (1999) 217-227.

A. Bergeron-Brlek, S. Brlek, A. Lacasse, X. Provençal, *Patterns in smooth tilings*, Actes de la 4e conférence internationale sur les mots (WORDS 2003), Turku, Finlande, 10-13 septembre 2003, TUCS General Publication no 27, août 2003, 370-381.

J. Berstel. *Axel Thue's work on repetitions in words*, Actes de la 4e conférence sur les séries formelles et la combinatoire algébrique, Montréal, vol. 11, 65–80. Publications du LaCIM, UQÀM, 1992.

V. Berthé, S. Brlek et P. Choquette. *Smooth words over arbitrary alphabets*, Theoretetical Computer Science **341** (2005) 293-310.

V. Berthé et L. Vuillon. *Palindromes and two-dimensional Sturmian sequences*, Journal of Automata, Language and Combinatorics, **6** (2001) 121-138.

A. Blondin Massé, S. Brlek, A. Glen et S. Labbé. *On the Critical Exponent of Generalized Thue-Morse Words*, Discrete Mathematic and Theoretical Computer Science **9**:1 (2007) 293–304.

A. Blondin Massé, S. Brlek et S. Labbé. *Palindromic lacunas of the Thue-Morse word*, Actes de la 6e conférence internationale sur la génération aléatoire et exhaustive de structures combinatoires et la combinatoire bijective (GASCOM 2008), Bibbiena, Arezzo, Italie, 16-20 juin 2008, 53-67.

A. Blondin Massé, S. Brlek, A. Frosini, S. Labbé et S. Rinaldi. *Reconstructing words from a fixed palindromic length sequence*, Actes de la 5e conférence internationale d'informatique théorique, Milan, Italie, 8-10 septembre 2008, accepté.

A. Blondin Massé, S. Brlek, S. Labbé et L. Vuillon. *Codings of rotation are full*, en préparation.

S. Brlek. *Enumeration of factors in the Thue-Morse word*, Discrete and Applied Mathematics **24** (1989) 83–96.

S. Brlek et S. Dulucq, A. Ladouceur et L. Vuillon. *Combinatorial properties of smooth infinite words*, Theoretical Computer Science **352** (2006) 306-317.

S. Brlek, J.-M Fédou et X. Provençal. *On the Tiling by Translation Problem*, Discrete Applied Maths (2008), doi:10.1016/j.dam.2008.05.026 .

S. Brlek, S. Hamel, M. Nivat et C. Reutenauer. *On the palindromic complexity of infinite words*, dans J. Berstel, J. Karhumäki, D. Perrin Eds, Combinatorics on words with applications, Int. J. of Found. Comput. Sci. **15**:2 (2004) 293–306.

S. Brlek, G. Labelle et A. Lacasse. *The Discrete Green Theorem and some Applications in Discrete Geometry*, Theoretical Computer Science **346** no. 2-3 (2005) 200-225.

S. Brlek, J.-O. Lachaud et X. Provençal. *Combinatorial view of digital convexity*, dans David Coeurjolly, Isabelle Sivignon, Laure Tougne, Florent Dupont (Eds.), Actes de conférence de la 14e conférence internationale sur la géométrie discrète et l'imagerie numérique (DGCI 2008), 16-18 avril 2008, Lyon, France, Springer LNCS 4992 (2008) 57-68.

S. Brlek et A. Ladouceur. *A note on differentiable palindromes*, Theoretical Computer Science, **302** (2003) 167-178.

S. Brlek, G. Melançon et G. Paquin. *Properties of the extremal infinite smooth words*, Actes des Journées Montoises d'informatique théorique (8-11 septembre 2004, Liège, Belgique) (2004) 291-303.

M. Bucci, A. De Luca, A. Glen et L.Q. Zamboni. *A connection between palindromic and factor complexity using return words*, Advances In Applied Mathematics, en presse.

A. de Luca, S. Varricchio. *Some combinatorial properties of the Thue-Morse sequence and a problem in semigroups*, Theoretical Computer Sciences, **63(3)** (1989) 333–348.

X. Droubay, J. Justin et G. Pirillo. *Episturmian words and some constructions of de Luca and Rauzy*, Theoretical Computer Science **255** (2001) 539–553.

X. Droubay et G. Pirillo. *Palindromes and Sturmian words*, Theoretical Computer Science, vol. 223, **1-2** (1999) 73–85.

A. Ehrenfeucht, K.P. Lee et G. Rozenberg. *Subword Complexities of Various Classes of Deterministic Developmental Languages without Interactions*, Theoretical Computer Science **1(1)** (1975) 59-75.

A. Glen, J. Justin, S. Widmer et L.Q. Zamboni. *Palindromic richness*, European Journal of Combinatorics, en presse

G.H. Hedlund et M. Morse. *Symbolic dynamics I*, American Journal of Mathematics **60** (1938) 815-866.

G.H. Hedlund et M. Morse. *Symbolic dynamics II*, American Journal of Mathematics **62** (1940) 1-42.

A. Hof, O. Knill et B. Simon. *Singular continuous spectrum for palindromic Schrödinger operators*, Communications in Mathematical Physics **174** (1995) 149–159.

W. Kolakoski. *Self generating runs, problem 5304*, American Mathematical Monthly **72** (1965), 674.

J. Justin et L. Vuillon. *Return words in Sturmian and episturmian words*, RAIRO Theoretical Informatics and Applications, **34** (2000), 343–356.

M. Lothaire. *Combinatorics on Words*, Addison-Wesley, 1983.

M. Lothaire. *Algebraic Combinatorics on Words*, Cambridge University Press, 2002.

B. Parvaix *Contribution à l'étude des mots sturmiens*, Ph.D., Université du Québec à Montréal, Publications du LaCIM, Vol. 26, 1998

G. Rote. *Sequences with subword complexity 2n*, Journal of Number Theory **46** (1994) 196–213.

B. Tan. *Mirror substitutions and palindromic sequences*, Theoretical Computer Science **389**:1-2 (2007), 118–124.

L. Vuillon. *A characterisation of Sturmian words by return words*, European Journal of Combinatorics, **22** (2001), 263–275.

W.D. Weakley. *On the number of C^ω-words of each length*, Journal of Combinatorial Theory Series A **51** (1) (1989) 55-62.

INDEX