

*Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos
Aplicados a la Economía y la Gestión*

Facultad de Ciencias Económicas - Universidad de Buenos Aires

La Teoría de los Eventos Extremos, aplicación para evaluación de riesgos¹.

Dra. Casparri, María Teresa.
Directora

Investigador Alcalde Bessia, Federico.
Autor

Junio 2005

1. Introducción.

Históricamente, la teoría en valores extremos se remonta a los comienzos de 1709 cuando Nicolás Bernoulli planteó el problema de la distancia media máxima desde el origen de “n” puntos distribuidos aleatoriamente en un línea recta de distancia fija t. Mientras que Fréchet en 1927 identificó una distribución límite posible para valores máximos, Fisher y Tippett en 1928² demostraron que las distribuciones de valores extremos pueden ser sólo de tres tipos. Pero recién en 1943, Gnedenko, da los fundamentos rigurosos para esta teoría y presenta las condiciones necesarias y suficientes para la convergencia débil.

En 1958, Gumbel³ fue el primero en llamar la atención sobre las posibles aplicaciones de la teoría formal de los valores extremos para algunas distribuciones. El primer problema que se trató tiene que ver con fenómenos meteorológicos. Esto ocurrió en 1941.

En la actualidad, el marco de aplicación de la teoría de valores extremos es extenso. En particular, en el campo que nos interesa, economía, finanzas y seguros tiene su auge a fines de la década del noventa. En el presente trabajo, a partir del caso univariado de la Teoría de los Valores Extremos, se llega al bivariado presentando, luego, una aplicación a modo de ejemplo.

1.1 Teoría de los Valores Extremos (EVT⁴).

Valores extremos se denomina a los valores inusuales causados por eventos raros. Pueden definirse, también, como eventos de baja probabilidad de ocurrencia pero de alto impacto.

En el análisis clásico de datos, los valores extremos son llamados *outliers* y, generalmente, son ignorados en el estudio. Esto significa que los datos son analizados de forma de hacerlos uniformes a los efectos de ajustar un modelo a ellos. Esto es correcto si se buscan estimadores de los casos comunes por lo que, no debe importar si se quitan los valores extremos. Pero si se busca describir los eventos que no suceden comúnmente, entonces es incorrecto.

El potencial de la teoría de los valores extremos aplicada a problemas de índole financiera ha sido reconocido recientemente. El final de la última década ha sido caracterizado por la inestabilidad en los

¹ El presente trabajo se desarrolla en el marco del proyecto UBACyT E012: “Evolución de riesgos financieros extremos en mercados emergentes con énfasis en la Argentina”.

² Fisher, R.A. and Tippett, L.H.C., “*Limiting forms of the frequency distributions of the largest or smallest member of a sample*”. Proc. Camb. Phil. Soc. 24, 1928, Pag. 180–190.

³ Emil Julius Gumbel, matemático alemán, pacifista y anti-nazi que desarrolló las distribuciones de EVT y las presentó en su trabajo de 1958.

⁴ Por su sigla en inglés: Extreme Value Theory. De aquí en adelante, se utilizará esa sigla.

mercados financieros a nivel mundial. Esto motivó la revisión de los modelos de evaluación de riesgos existentes y llevó a la búsqueda de metodologías apropiadas que puedan hacer frente a estos riesgos y sus consecuencias. La pregunta típica que se intenta responder es: "Si las cosas van mal, ¿qué tan malas pueden ser?" Por lo que, el problema que se presenta es poder modelar valores extremos a partir de la información disponible.

El acuerdo de Basilea II busca proporcionar medidas de reducción del riesgo pidiendo a las instituciones financieras que calculen el *Value at Risk* para percentiles altos y mantener suficiente capital económico para afrontar eventos de baja probabilidad. Para la industria aseguradora, donde la mayor parte del riesgo se presenta en el balance, la diversificación entre espacios geográficos y riesgos, y los mercados de reaseguro son instrumentos de reducción del riesgo para asegurarse de que la compañía no entrará en quiebra ante un evento extremo. Las compañías, de hecho, se ven afectadas por estos riesgos extremos y necesariamente, deben ser modelados para tomar previsión de las posibles pérdidas.

Los métodos estadísticos para evaluar eventos extremos necesitan poder medir suficientemente bien la cola de la distribución que se analiza. La Teoría de los Valores Extremos (EVT) es la que se encarga de este análisis. La EVT no solo genera modelos para la muestra que se está utilizando, también puede ser utilizada para extrapolar la probabilidad de un evento aún más extremo que queda fuera de toda muestra posible. Sin embargo, dado que la EVT se basa en argumentos asintóticos y el tamaño de las muestras suele ser muy pequeño, se debe trabajar con prudencia en estos temas.

2. Caso Univariado.

2.1 Existencia.

Comenzamos exponiendo las leyes de los valores extremos en el límite que expusieron Fisher and Tippett en 1928 y generalizo Gnedenko en 1943⁵. Supongamos que X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias idénticamente distribuidas (i.i.d.) con función de distribución \mathbf{F} y sea $M_n = \max \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[M_n \leq x] = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = 0$$

para cualquier x con $\mathbf{F}(x) < 1$.

Si se estandariza (en el sentido de la estandarización de variables normales) a partir de dos sucesiones $\psi_n > 0, \mu_n$, que luego funcionarán como parámetros de escala y forma, se llega a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\frac{M_n - \mu_n}{\psi_n} \leq x\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(\psi_n x + \mu_n) = G(x)$$

donde \mathbf{G} es una función de distribución límite no degenerada.

De esta forma, hemos visto que existe, al menos teóricamente, una distribución que se puede asignar a la variable aleatoria "máximo".

⁵ Gnedenko, B.V., "Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire". Ann. Math. 44, 1943, pág. 423-453

2.2 Distribución de valores extremos generalizada.

Las distribuciones de valores extremos generalizados son de la forma:

$$G(x) = \exp \left[- \left\{ 1 + \xi \frac{x - \mu}{\psi} \right\}_+^{-\frac{1}{\xi}} \right] \quad x_+ = \left\{ 1 + \xi \frac{x - \mu}{\psi} \right\} > 0$$

Con $x_+ = \max \{x, 0\}$ y $-\infty < \mu, \xi < \infty$, $0 < \psi < \infty$.

El dominio de las distribuciones para $\xi < 0$ es $x > \mu + \frac{\psi}{\xi}$ y para $\xi > 0$ es $x < \mu + \frac{\psi}{\xi}$. El límite de $\xi \rightarrow 0$ se corresponde con el caso de la distribución de Gumbel. Cuando $\xi > 0$ es el caso de la distribución de Fréchet y cuando $\xi < 0$ es el caso de la Weibull⁶.

2.3 Eventos por sobre un límite (events over the threshold⁷).

Si suponemos un valor límite x_0 .

$$\begin{aligned} F_{x_0}(x) &= P[X \leq x_0 + x / X > x_0] \\ &= \frac{F(x_0 + x) - F(x_0)}{1 - F(x_0)}, \quad (x > 0) \end{aligned}$$

Se buscan constantes de escala $\{c_{x_0}\}$ y se define $x_F = \sup \{x : F(x) < 1\}$ de forma que,

$$\lim_{x_0 \rightarrow x_F} |F_{x_0}(x) - H(x)| = 0$$

donde \mathbf{H} es una función de distribución no degenerada de la forma

$$H(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\psi} \right)_+^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\psi}\right) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

donde $\psi > 0$ y $-\infty < \xi < \infty$.

Esta es la función de distribución Generalizada de Pareto presentada por Pickands en 1975⁸. No debe confundirse en este caso el valor de x que se está utilizando ya que, como puede verse más arriba, x es un número por sobre el valor límite elegido, x_0 .

⁶ Véase el apéndice II para su forma.

⁷ No se utiliza la traducción literal, como se suele hacer, porque no la consideramos apropiada para lo que se intenta describir.

⁸ Pickands, J., "Statistical inference using extreme order statistics". Ann. Statist. 3, 1975, pág. 119-131

2.4 Aplicaciones del caso univariado.

La interpretación de las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n expuestas antes, puede ser:

- Rendimientos negativos o positivos diarios sobre activos financieros de alta o baja frecuencia.
- Pérdidas operacionales.
- Reclamos sobre siniestros por catástrofes.
- Pérdidas crediticias.

Estos riesgos pueden surgir tanto de datos observados como de simulaciones a través de métodos de Monte Carlo por lo difícil de la obtención de datos. Hay situaciones en las cuales, a pesar de poder hacer la simulación por modelos estocásticos, la complejidad del sistema es tal que no conocemos exactamente a la función distribución de probabilidades por lo cual deben realizarse hipótesis simplificadoras que, muy bien sabemos, en muchos casos serán irreales.

2.5 Métodos de aplicación del caso univariado.

La aplicación del caso univariado de valores extremos se puede agrupar en tres categorías (Smith, Zhang, 2003):

- (i) los métodos de muestra máxima, utilizando los tres tipos de distribuciones de valores extremos presentadas en el apéndice,
- (ii) los métodos de valor límite (*peaks over the threshold*, POT), utilizando todos los excedentes por sobre un límite, modelando comúnmente a través de la distribución generalizada de Pareto,
- (iii) y los procesos de punto en los cuales todos los valores y los puntos en el tiempo por sobre un valor límite se dibujan sobre un proceso de punto bidimensional y se ajustan varios modelos.

Respecto a los métodos POT, se pueden distinguir dos tipos de análisis. Hay modelos semiparamétricos construidos a través del estimador de Hill y los modelos completamente paramétricos basados en la distribución generalizada de Pareto. Este último se utiliza con mayor frecuencia por su simplicidad tanto en la exposición como en la implementación.

3. Caso Bivariado.

3.1 Existencia.

Se supone $\mathbf{X}_i = \langle X_{i1}, \dots, X_{iD} \rangle$, $i = 1, 2, \dots$ una sucesión de vectores aleatorios D-dimensionales idénticamente distribuidos. Para cada $d \in \{1, \dots, D\}$, sea $M_{nd} = \max \{X_{id}, 1 \leq i \leq n\}$.

Si existen dos sucesiones de estandarización $\mu_{nd} > 0, \psi_{nd}$, se tiene como en el caso univariado una distribución \mathbf{G} D-dimensional tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{M_{nd} - \mu_{nd}}{\psi_{nd}} \leq x_d \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(\psi_{nd} x_d + \mu_{nd}) = G(x_d) \quad 1 \leq d \leq D$$

Entonces, \mathbf{G} se llama distribución de probabilidades multivariada de valores extremos. Pickands, de Haan y Resnick, Deheuvels dieron, en los setenta, las representaciones generales para estas distribuciones.

3.2 Caracterización de las funciones de distribución de valores extremos bivariadas.

Cualquier distribución de valores extremos puede ser escrita de la siguiente forma:

$$G(x_1; x_2) = \exp \left\{ - (y_1 + y_2) \cdot A \left[\frac{y_1}{(y_1 + y_2)} \right] \right\}$$

para alguna función A definida en el intervalo $[0;1]$ y para y_1, y_2 de la forma:

$$y_i(x_i) = \left[\left\{ 1 + \xi_i \frac{x_i - \mu_i}{\psi_i} \right\}_+^{\frac{-1}{\xi_i}} \right], \quad i = 1, 2$$

con $x_+ = \max\{x, 0\}$ y $-\infty < \mu, \xi < \infty$, $0 < \psi < \infty$. Si se desea $\xi_i = 0$, entonces y_i se define por continuidad: $\lim_{\xi_i \rightarrow 0} y_i$.

A se llama función de dependencia. Se tiene que $A(0)=A(1)=1$ y convexa con lo cual $\max(w, 1-w) \leq A(w) \leq 1$, $0 \leq w \leq 1$. Con el máximo y el mínimo valor que puede tomar A se obtiene la dependencia o la independencia respectivamente.

En cada función de distribución bivariada, las marginales univariadas de valores extremos son de la forma $G(x_i) = \exp(-y_i)$. Si $y_i \leq 0$, el valor de x_i es más grande que el punto más alto (si $\xi_i < 0$), o más chico que el valor más bajo (si $\xi_i > 0$), de la marginal i -ésima.

3.3 Algunas distribuciones de valores extremos bivariadas.

- Función de Distribución Logística Bivariada.

La distribución logística bivariada (Gumbel, 1960) con parámetro γ es

$$G(x_1; x_2) = \exp \left\{ - \left(\left[\left\{ 1 + \xi_1 \frac{x_1 - \mu_1}{\psi_1} \right\}_+^{\frac{-1}{\xi_1}} \right]^{\frac{1}{\gamma}} + \left[\left\{ 1 + \xi_2 \frac{x_2 - \mu_2}{\psi_2} \right\}_+^{\frac{-1}{\xi_2}} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \right)^\gamma \right\}$$

donde $0 < \gamma \leq 1$. Este es un caso especial de la distribución logística asimétrica bivariada. La dependencia se obtiene cuando el límite de γ se aproxima a cero y la independencia cuando γ es uno.

Si hacemos tender $\xi_1 \rightarrow 0$, $\xi_2 \rightarrow 0$ (el resultado es el mismo sin importar el orden), obtendremos:

$$G(x_1; x_2) = \exp \left\{ - \left(\left[e^{\frac{x_1 - \mu_1}{\psi_1}} \right]^{\frac{1}{\gamma}} + \left[e^{\frac{x_2 - \mu_2}{\psi_2}} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \right)^\gamma \right\}$$

Para el caso en que γ es uno tenemos, como dijimos, independencia y es el caso en el que x_1 y x_2 tienen distribución de Gumbel:

$$G(x_1; x_2) = \exp\left\{-e^{\left\{\frac{x_1 - \mu_1}{\psi_1}\right\}}\right\} \cdot \exp\left\{-e^{\left\{\frac{x_2 - \mu_2}{\psi_2}\right\}}\right\} = G(x_1) \cdot G(x_2)$$

- Función de Distribución Logística Asimétrica Bivariada.

La distribución logística asimétrica de parámetro γ y parámetros de posición t_1 y t_2 es

$$G(x_1; x_2) = \exp\left\{-\left((1-t_1)y_1 + (1-t_2)y_2 + \left[\left(t_1 y_1\right)^{\frac{1}{\gamma}} + \left(t_2 y_2\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^\gamma\right)\right\}$$

Donde $0 < \gamma \leq 1$ y $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$. La independencia se obtiene cuando $\gamma = 1$ y $t_1 = 0$ o $t_2 = 0$. La dependencia se obtiene en el límite cuando $t_1 = t_2 = 1$ y γ tiende a cero.

- Función de Distribución Husler-Reiss. (Husler and Reiss, 1989)

La distribución de Husler-Reiss con parámetro γ es

$$G(x_1; x_2) = \exp\left\{\left(-y_1 \cdot N\left\{\frac{1}{\gamma} + \gamma \frac{\left[\ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right)\right]}{2}\right\} - y_2 \cdot N\left\{\frac{1}{\gamma} + \gamma \frac{\left[\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\right]}{2}\right\}\right)\right\}$$

Donde $N\{\}$ es una normal estándar y γ es mayor a cero. La independencia se logra cuando γ tiende a cero y la dependencia cuando γ tiene a infinito.

- Función de Distribución Bilogística.

La distribución bilogística de parámetros α y β es

$$G(x_1; x_2) = \exp\left\{-\left(y_1 \cdot q^{(1-\alpha)} + y_2 \cdot (1-q)^{(1-\beta)}\right)\right\}$$

donde $q = q(y_1, y_2; \alpha, \beta)$ es la raíz de la ecuación

$$(1-\alpha) \cdot y_1 \cdot (1-q)^\beta - (1-\beta) \cdot y_2 \cdot q^\alpha = 0$$

y $0 < \alpha, \beta < 1$. Cuando α es igual a β el modelo bilogístico es equivalente al modelo logístico con parámetro de dependencia α . La dependencia se obtiene en el límite cuando α y β tienden a cero y la independencia cuando α igual a β tiende a uno o cuando α ó β está fijo y el otro tiende a uno.

- Función de Distribución de Coles-Tawn.

La distribución de Coles-Tawn con parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ es

$$G(x_1; x_2) = \exp \left\{ - \left(y_1 \cdot [1 - B(q; \alpha + 1, \beta)] + y_2 \cdot B(q; \alpha, \beta + 1) \right) \right\}$$

$$q = \frac{\alpha \cdot y_2}{\alpha \cdot y_2 + \beta \cdot y_1}$$

donde $B(q; \alpha, \beta)$ es la distribución beta evaluada en q con parámetros α y β .

3.4 Eventos por sobre un límite (events over the threshold) para el caso bivariado⁹.

Si suponemos un vector de valores límite $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$ y tomamos el vector aleatorio $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$ con función de distribución \mathbf{F} :

$$P[X \leq \mathbf{x}_0 + \mathbf{x} / X > \mathbf{x}_0] = F_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})$$

$$= \frac{F(x_0; y_0) - F(x + x_0; y + y_0)}{1 - F(x_0; y_0)}, \quad (x, y > 0)$$

Se buscan constantes de escala $\{c_{x_0, y_0}\}$ y se define $\mathbf{x}_F = \sup \{\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) < 1\}$ de forma que,

$$\lim_{x_0, y_0 \rightarrow \mathbf{x}_F} |F_u(c_n \mathbf{x}) - H(\mathbf{x})| = 0$$

donde \mathbf{H} es una función de distribución no degenerada de la forma

$$H(\mathbf{x}) = \frac{-\ln G(\mathbf{x}_0) + \ln G(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x})}{-\ln G(\mathbf{x}_0)}$$

donde \mathbf{G} es una función de distribución de valores extremos.

Esta es la función bivariada de distribución Generalizada de Pareto.

Para ver un ejemplo, si la aplicamos al caso de la distribución bivariada logística para el caso en que tenemos límites $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$ y variable aleatoria $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$ que son los excesos por sobre el límite anterior obtenemos:

⁹ Para una exposición clara y concisa, véase: Tajvidi, Nader, "Multivariate generalised Pareto distributions", Octubre de 1996. Este trabajo también contiene las generalizaciones de las distribuciones presentadas aquí y un detalle de la función de independencia \mathbf{A} .

$$P[X \leq \mathbf{x}_0 + \mathbf{x} / X > \mathbf{x}_0] = H(x, y) =$$

$$= \frac{\left\{ \left[\left[\left\{ 1 + \xi_1 \frac{x_0 - \mu_1}{\psi_1} \right\}^{\frac{-1}{\xi_1}} \right]^{\frac{1}{\gamma}} + \left[\left\{ 1 + \xi_2 \frac{y_0 - \mu_2}{\psi_2} \right\}^{\frac{-1}{\xi_2}} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \right]^\gamma - \left[\left[\left\{ 1 + \xi_1 \frac{(x_0 + x) - \mu_1}{\psi_1} \right\}^{\frac{-1}{\xi_1}} \right]^{\frac{1}{\gamma}} + \left[\left\{ 1 + \xi_2 \frac{(y_0 + y) - \mu_2}{\psi_2} \right\}^{\frac{-1}{\xi_2}} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \right]^\gamma \right\}}{\left\{ \left[\left[\left\{ 1 + \xi_1 \frac{x_0 - \mu_1}{\psi_1} \right\}^{\frac{-1}{\xi_1}} \right]^{\frac{1}{\gamma}} + \left[\left\{ 1 + \xi_2 \frac{y_0 - \mu_2}{\psi_2} \right\}^{\frac{-1}{\xi_2}} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \right]^\gamma \right\}}$$

con $x \geq 0, y \geq 0$.

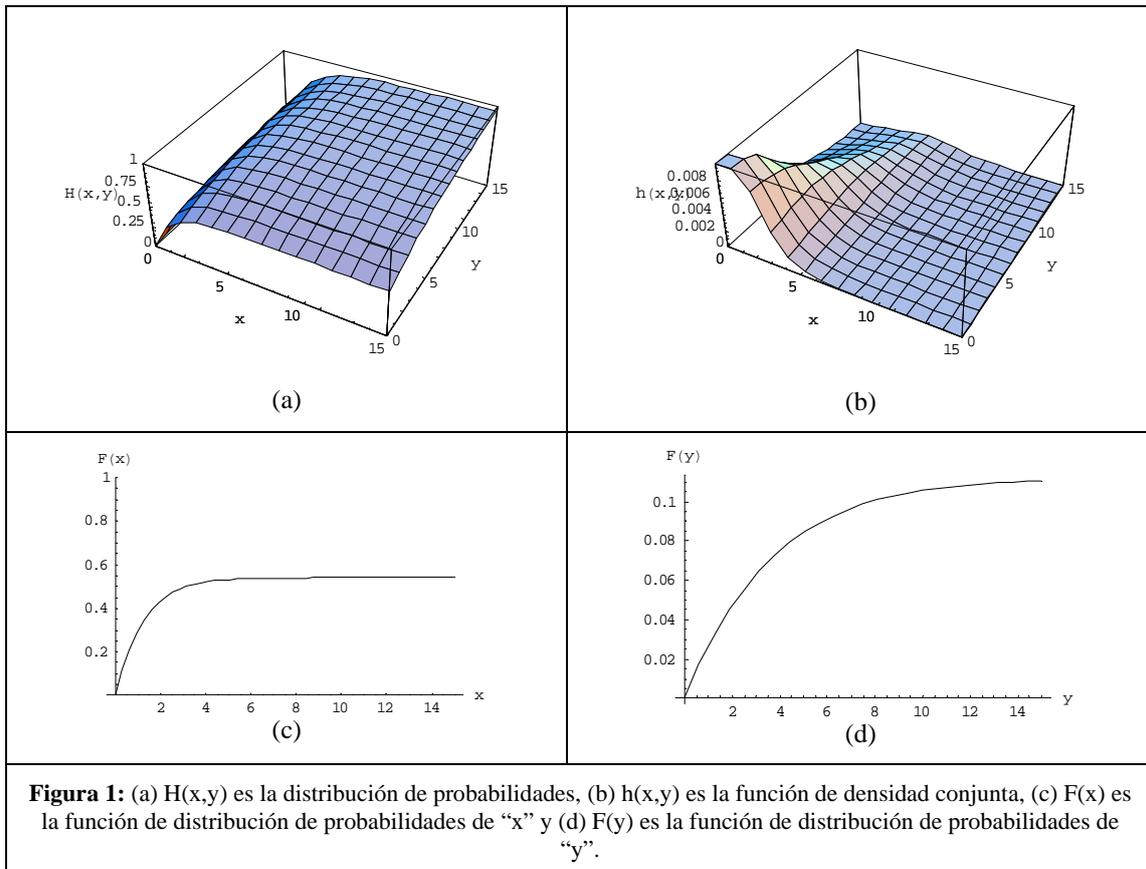
La función de densidad, las funciones de distribución de cada variable y las de densidad marginales de las variables aleatorias se obtendrán haciendo:

$$h(x, y) = \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x \partial y} ; \quad F(x) = H(x, 0) \quad ; \quad F(y) = H(0, y)$$

$$f(x) = \frac{dH(x, 0)}{dx} \quad ; \quad f(y) = \frac{dH(0, y)}{dy}$$

Para ver un ejemplo numérico simple y sus gráficas¹⁰, hacemos:

$$\gamma = \frac{1}{2}, x_0 - \mu_1 = -1, \psi_1 = 2, \xi_1 = 0.1, y_0 - \mu_2 = 1, \psi_2 = 7, \xi_2 = -0.01$$



¹⁰ Los gráficos y los cálculos se realizaron utilizando el *Mathematica* v5.1

Si hacemos tender $\xi_1 \rightarrow 0$, $\xi_2 \rightarrow 0$ (el resultado es el mismo sin importar el orden), obtendremos:

$$P[X \leq \mathbf{x}_0 + \mathbf{x} / X > \mathbf{x}_0] = H(x, y) = 1 - \frac{\left(e^{-\left(\frac{x+x_0-\mu_1}{\psi_1}\right)\frac{1}{\gamma}} + e^{-\left(\frac{y+y_0-\mu_2}{\psi_2}\right)\frac{1}{\gamma}} \right)^\gamma}{\left(e^{-\left(\frac{x_0-\mu_1}{\psi_1}\right)\frac{1}{\gamma}} + e^{-\left(\frac{y_0-\mu_2}{\psi_2}\right)\frac{1}{\gamma}} \right)^\gamma}$$

La función de densidad, las funciones de distribución de cada variable y las de densidad marginales de las variables aleatorias son:

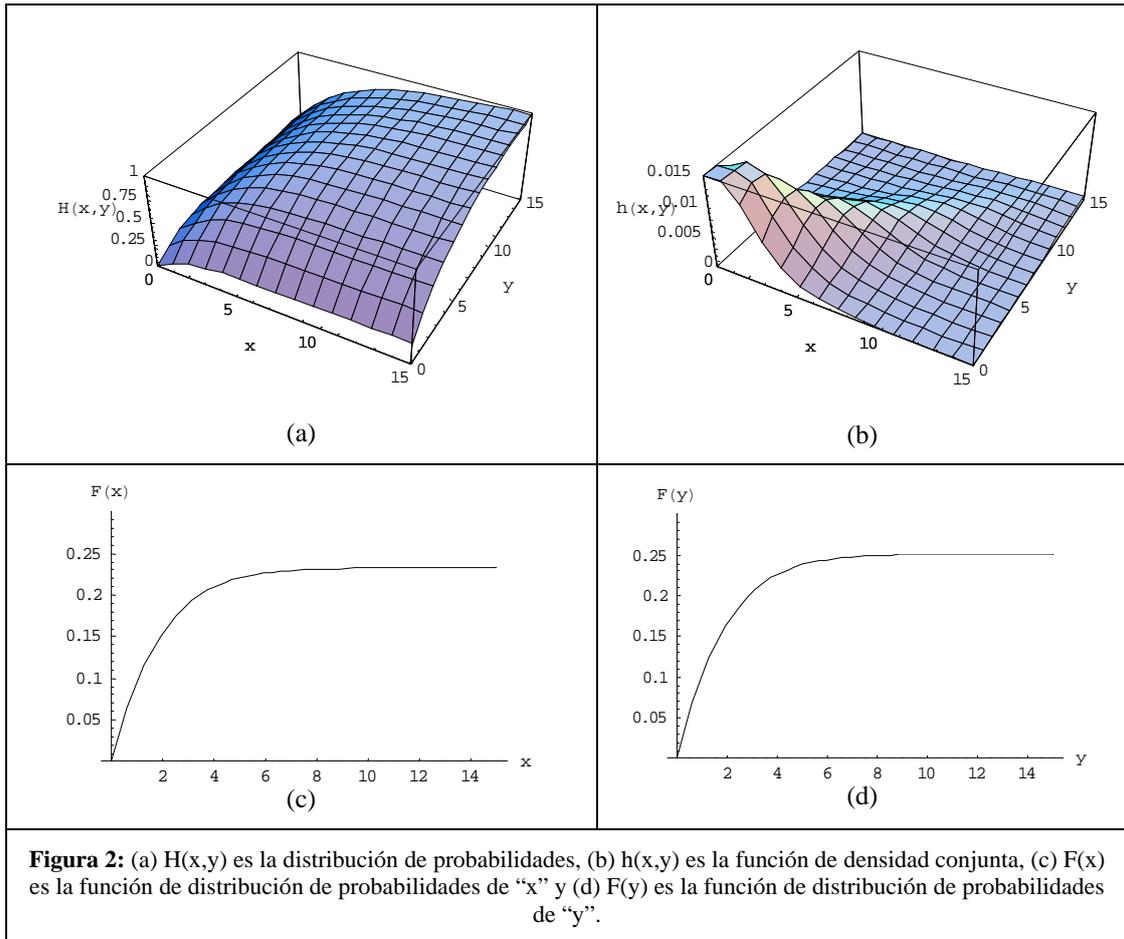
$$h(x, y) = \frac{(\gamma-1) \cdot e^{-\left(\frac{x+x_0-\mu_1}{\psi_1}\right)\frac{1}{\gamma}} \cdot e^{-\left(\frac{y+y_0-\mu_2}{\psi_2}\right)\frac{1}{\gamma}} \left(e^{-\left(\frac{x+x_0-\mu_1}{\psi_1}\right)\frac{1}{\gamma}} + e^{-\left(\frac{y+y_0-\mu_2}{\psi_2}\right)\frac{1}{\gamma}} \right)^{\gamma-2}}{\psi_1 \psi_2 \gamma \left(e^{-\left(\frac{x_0-\mu_1}{\psi_1}\right)\frac{1}{\gamma}} + e^{-\left(\frac{y_0-\mu_2}{\psi_2}\right)\frac{1}{\gamma}} \right)^\gamma}$$

$$F(x) = H(x, 0) = 1 - \frac{\left(e^{-\left(\frac{x+x_0-\mu_1}{\psi_1}\right)\frac{1}{\gamma}} + e^{-\left(\frac{y_0-\mu_2}{\psi_2}\right)\frac{1}{\gamma}} \right)^\gamma}{\left(e^{-\left(\frac{x_0-\mu_1}{\psi_1}\right)\frac{1}{\gamma}} + e^{-\left(\frac{y_0-\mu_2}{\psi_2}\right)\frac{1}{\gamma}} \right)^\gamma} ; f(x) = \frac{dH(x, 0)}{dx} = \frac{e^{-\left(\frac{x+x_0-\mu_1}{\psi_1}\right)\frac{1}{\gamma}} \left(e^{-\left(\frac{x+x_0-\mu_1}{\psi_1}\right)\frac{1}{\gamma}} + e^{-\left(\frac{y_0-\mu_2}{\psi_2}\right)\frac{1}{\gamma}} \right)^{\gamma-1}}{\psi_1 \left(e^{-\left(\frac{x_0-\mu_1}{\psi_1}\right)\frac{1}{\gamma}} + e^{-\left(\frac{y_0-\mu_2}{\psi_2}\right)\frac{1}{\gamma}} \right)^\gamma}$$

$$F(y) = H(0, y) = 1 - \frac{\left(e^{-\left(\frac{x_0-\mu_1}{\psi_1}\right)\frac{1}{\gamma}} + e^{-\left(\frac{y+y_0-\mu_2}{\psi_2}\right)\frac{1}{\gamma}} \right)^\gamma}{\left(e^{-\left(\frac{x_0-\mu_1}{\psi_1}\right)\frac{1}{\gamma}} + e^{-\left(\frac{y_0-\mu_2}{\psi_2}\right)\frac{1}{\gamma}} \right)^\gamma} ; f(y) = \frac{dH(0, y)}{dy} = \frac{e^{-\left(\frac{y+y_0-\mu_2}{\psi_2}\right)\frac{1}{\gamma}} \left(e^{-\left(\frac{x_0-\mu_1}{\psi_1}\right)\frac{1}{\gamma}} + e^{-\left(\frac{y+y_0-\mu_2}{\psi_2}\right)\frac{1}{\gamma}} \right)^{\gamma-1}}{\psi_2 \left(e^{-\left(\frac{x_0-\mu_1}{\psi_1}\right)\frac{1}{\gamma}} + e^{-\left(\frac{y_0-\mu_2}{\psi_2}\right)\frac{1}{\gamma}} \right)^\gamma}$$

Para ver un ejemplo numérico simple y sus gráficas, hacemos:

$$\gamma = \frac{2}{5}, x_0 - \mu_1 = -0.1, \psi_1 = 4, y_0 - \mu_2 = -0.2, \psi_2 = 4$$



Con estos ejemplos numéricos podemos apreciar también que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} H(x, y) = \lim_{y \rightarrow \infty, x \rightarrow \infty} H(x, y) = 1$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(x, y) \, dx \, dy = 0.515539$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0.232759$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F(y) = 0.251702$$

4. Aplicación para la evaluación de riesgos.

Supóngase que se desea modelar el comportamiento de dos activos que pertenecen a la misma industria, con lo cual, puede esperarse que covaríen frente a eventos importantes. Por ejemplo, piénsese en compañías de gas. Luego de cierto evento extremo que afecte a toda la producción de gas, los precios de ambos activos caerán y, por lo tanto, la posesión de dichos activos en una cartera no puede ser modelada como si fuesen independientes y debe asignárseles una probabilidad al movimiento de ambos. Otro ejemplo simple, aplicado a la evaluación de riesgos financieros, es el de una compañía aseguradora que tiene entre sus pólizas un campo con cierto producto sembrado. Si una mala cosecha depende de las condiciones climáticas, la evaluación de la reserva a mantener también dependerá de ello. Supongamos que este producto pierde mayor rendimiento a partir de si llueve más de 1100 mm y con un viento de 40Km/h. En ese caso, no se perdería toda la cosecha, ¿cuánto habría que reservar si llovieran 2200mm y el viento soplará a 80km/h? Esa es la pregunta que se intenta responder mediante el uso de la teoría de los valores extremos para el caso bivariado.

Armemos un ejemplo simple. Supongamos dos activos Z1 y Z2 que sabemos que están sometidos a los mismos riesgos y los tenemos en cartera. Se quiere saber cuál será la probabilidad de que ambos superen en 0,1 un valor de precio máximo de 0,6¹¹. Por un lado, se modelarán sus valores extremos como si fuesen independientes. Luego, se modelarán suponiendo una distribución bivariada de valores extremos. Se compararán los resultados obtenidos y, a continuación, agregaremos un tercer activo, Z3, de forma de poder describir el valor de los parámetros estimados.

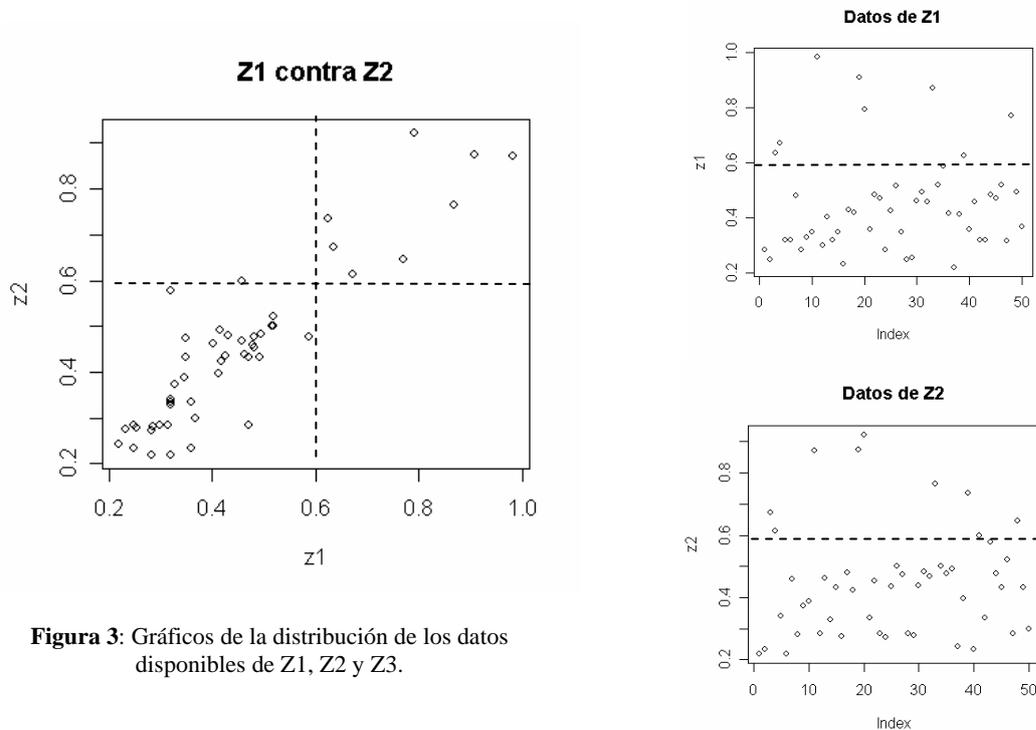


Figura 3: Gráficos de la distribución de los datos disponibles de Z1, Z2 y Z3.

Al inicio del trabajo se debe hacer un análisis descriptivo de los datos. En la figura 3 vemos la distribución de los precios que toman los activos Z1 y Z2 y la línea punteada marcada nos indica el valor límite elegido para la modelización.

4.1 Ejemplo 1: Supuesto de independencia de las variables aleatorias.

Los parámetros obtenidos de la estimación para las distribuciones generalizadas de Pareto independientes referidas a los precios de cada uno de los activos son por el método de máxima verosimilitud y utilizando *packages* referidos al tema para el *software* R¹²:

Parámetros	Z1	Z2
ξ_i	-0,9622	-1,3651
ψ_i	0,3688	0,4406

Analíticamente será:

$$H(Z1) = 1 - \left(1 + \frac{-0,9622 \cdot Z1}{0,3688} \right)_+^{-\frac{1}{-0,9622}} ; H(Z2) = 1 - \left(1 + \frac{-1,3651 \cdot Z2}{0,4406} \right)_+^{-\frac{1}{-1,3651}}$$

¹¹ Las tablas con los datos utilizados se adjuntan en el apéndice I.

¹² R es un lenguaje similar al S-Plus dedicado a temas estadísticos. Es software con licencia GNU. Se puede encontrar información en: <http://www.r-project.org>

Con lo que, la probabilidad de que se obtenga un pico de 0,1 por sobre el precio de 0,6 para Z1 y para Z2 es:

$$P[Z1 > 0,6 + 0,1 \text{ y } Z2 > 0,6 / Z1, Z2 > 0,6] = \\ P[Z1 > 0,6 + 0,1 / Z1 > 0,6].P[Z2 > 0,6 + 0,1 / Z2 > 0,6] = [1 - H_{Z1}(0,1)].[1 - H_{Z2}(0,1)] = \\ (1 - 0.269626).(1 - 0.23787) = 0.556639$$

Nótese que en este caso, el parámetro de forma (ξ_i) lleva signo negativo, lo que está indicando que estamos evaluando valores mayores que el límite que hemos elegido. Además, véase que si, para el caso de Z1 por ejemplo, se asigna un valor de Z1 igual a 0,4 no estará definido el valor de la función para números reales y, utilizando la definición que se dio al principio, deberá dársele probabilidad de ocurrencia uno a ese evento.

4.2 Ejemplo 2: Supuesto de distribución bivariada de las variables aleatorias. Dependencia.

En el supuesto de aplicar una distribución bivariada logística para los activos en conjunto, los parámetros obtenidos de la estimación para la distribución logística bivariada referida a los precios de cada uno de los activos resulta:

Parámetros	Z1	Z2
ξ_i (forma)	0.16493	0.08096
μ_i (posición)	0.35973	0.36202
ψ_i (escala)	0.11446	0.12214
γ (dependencia)	0.30675	

En este caso, vale analizar con detenimiento el valor que asume gamma. Como describimos al principio, gamma habla sobre el nivel de dependencia de las variables descriptas. El valor de 0,30675 estimado representa dependencia significativa entre las variables. Si hacemos un análisis descriptivo de los datos, el coeficiente de correlación entre los conjuntos de datos de Z1 y Z2 asume un valor de 0,94. Lo cual, habla de una alta correlación positiva. De acuerdo a ello, si hubiésemos querido estimar los parámetros de forma, escala y posición de la distribución con un parámetro de dependencia fijo, este último debería haber sido lo suficientemente bajo.

La distribución bivariada generalizada de Pareto será:

$$P[Z \leq (0,6;0,6) + \mathbf{z} / Z > (0,6;0,6)] = H(Z1, Z2) =$$

$$= 1 - \frac{\left\{ - \left[\left\{ 1 + 0.16493 \frac{(0,6 + Z1) - 0.35973}{0.11446} \right\}^{\frac{-1}{0.16493}} \right]^{0.30675} + \left[\left\{ 1 + 0.08096 \frac{(0,6 + Z2) - 0.36202}{0.12214} \right\}^{\frac{-1}{0.08096}} \right]^{0.30675} \right\}}{\left\{ - \left[\left\{ 1 + 0.16493 \frac{0,6 - 0.35973}{0.11446} \right\}^{\frac{-1}{0.16493}} \right]^{0.30675} + \left[\left\{ 1 + 0.08096 \frac{0,6 - 0.36202}{0.12214} \right\}^{\frac{-1}{0.08096}} \right]^{0.30675} \right\}}$$

Con lo que, la probabilidad de que se obtenga un pico de 0,1 por sobre el precio de 0.6 para z1 y para z2 es:

$$P[Z1 > 0,6 + 0,1 \text{ y } Z2 > 0,6 + 0,1 / Z1, Z2 > 0,6] = [1 - H_{Z1,Z2}(0,1)] = 1 - 0.304346 = 0.695654$$

Entonces, la probabilidad de que Z1 y Z2 excedan en 0,1 el valor de 0,6 dado que estamos por arriba de 0,6.

Las probabilidades independientes serán:

$$1 - F_{Z1}(0,1) = 1 - 0.271161 = 0.728839$$

$$1 - F_{Z2}(0,1) = 1 - 0.0197669 = 0.980233$$

Si comparamos los resultados obtenidos, se ve claramente que la probabilidad en el caso de suponer distribuciones independientes de 0,556639 es menor que la probabilidad bajo el supuesto de una distribución conjunta de 0,695654, con lo cual, se tomarán distintas previsiones según el caso que se elija para la modelización de los riesgos.

4.3 Ejemplo 3: Supuesto de distribución bivariada de las variables aleatorias. Independencia.

Agreguemos ahora un tercer activo Z3 y modelemos su comportamiento asociado a Z1 para ver qué sucede con el parámetro γ . Los parámetros obtenidos de la estimación para la distribución logística bivariada referida a los precios de cada uno de los activos viene dada por:

Parámetros	Z1	Z3
ξ_i (forma)	0.1910	-0.2944
μ_i (posición)	0.4079	0.3571
ψ_i (escala)	0.1477	0.1692
γ (dependencia)	0.9992	

El valor de γ estimado es 0,9992 representa independencia significativa entre las variables. Si hacemos un análisis descriptivo de los datos, el coeficiente de correlación entre los conjuntos de datos de Z1 y Z3 asume un valor de -0,6. Lo cual, habla de una correlación negativa. De acuerdo a ello, si hubiésemos querido estimar los parámetros de forma, escala y posición de la distribución con un parámetro de dependencia fijo, no queda claro que valor tomará.

5. Comentarios finales.

El modelado por teoría de los valores extremos es una herramienta útil para la toma de decisiones. Proporciona información adicional a la que puede obtenerse directamente de los datos. Según se esté modelando para casos univariados o para casos bivariados, la estimación diferirá en el resultado. El uso del caso univariado puede ser útil en situaciones en las que la simplicidad del problema que se arriba justifica su uso. En el caso bivariado, la estimación se hace más compleja. Sin embargo, el uso de software apropiado (*R*, *S-Plus* para dar algunos ejemplos) simplifica el camino y ayuda a obtener resultados de forma más abundante aconsejándose hacer repetidas pruebas sobre los datos que se quiere estimar. En el presente trabajo se ha utilizado métodos paramétricos de estimación. Entre otros, el de máxima verosimilitud utilizando programas *R* y *Mathematica*.

Es de destacarse que existen procesos estocásticos para valores extremos y formas múltiples de distribuciones.

Apéndice I: Datos utilizados en los ejemplos y salidas del R.

Precios de los activos Z1, Z2 y Z3.

N	Z1	Z2	Z3	18	0,417839	0,424765	0,318792	36	0,414873	0,492711	0,457829
1	0,283147	0,220169	0,431981	19	0,908343	0,873711	0,172812	37	0,218411	0,242593	0,562178
2	0,248063	0,234221	0,371922	20	0,791724	0,922641	0,348191	38	0,413781	0,398036	0,412879
3	0,635388	0,672389	0,423189	21	0,357821	0,334894	0,452781	39	0,625127	0,735309	0,327812
4	0,671291	0,612891	0,192781	22	0,482171	0,451918	0,237812	40	0,353898	0,234587	0,456921
5	0,319486	0,341235	0,468292	23	0,469812	0,283489	0,247812	41	0,457181	0,597319	0,218912
6	0,318912	0,218311	0,457818	24	0,283712	0,271893	0,351781	42	0,318384	0,334571	0,491828
7	0,478785	0,457892	0,234879	25	0,424605	0,436909	0,321912	43	0,319281	0,578231	0,481781
8	0,284712	0,280053	0,467811	26	0,516974	0,501282	0,481281	44	0,481727	0,476227	0,391879
9	0,328192	0,372891	0,291781	27	0,347591	0,472811	0,491791	45	0,471913	0,431822	0,401822
10	0,347183	0,381938	0,327818	28	0,247122	0,283711	0,691029	46	0,518283	0,520594	0,371289
11	0,983195	0,871272	0,102738	29	0,253271	0,276837	0,632798	47	0,314892	0,285222	0,651813
12	0,298172	0,283271	0,381627	30	0,462146	0,438183	0,412768	48	0,769822	0,647707	0,451281
13	0,401824	0,462721	0,481982	31	0,494041	0,481982	0,401882	49	0,491783	0,432818	0,582171
14	0,318482	0,327847	0,678129	32	0,457912	0,467129	0,445781	50	0,368321	0,299142	0,671292
15	0,349183	0,432191	0,652768	33	0,868461	0,765808	0,217812				
16	0,232138	0,274392	0,481782	34	0,519305	0,501282	0,182389				
17	0,429847	0,480407	0,418929	35	0,587829	0,475911	0,178921				

Estadística Descriptiva:

N = 50	Z1	Z2	Z3
Media	0,447127	0,445923	0,407725
Desvío Estándar	1,551976	1,495826	1,009887
Correlación	Corr(Z1;Z2) = 0,944801079		Corr(Z1;Z3) = -0,60769

Salidas del R al hacer el ajustamiento por Máxima Verosimilitud.

Ajustamiento de la Pareto a Z1.

Call: fpot(x = z1, threshold = 0.6)
Deviance: -14.98144

Threshold: 0.6
Number Above: 8
Proportion Above: 0.16

Estimates
scale shape
0.3688 -0.9622

Standard Errors
scale shape
2e-06 2e-06

Optimization Information
Convergence: successful
Function Evaluations: 110
Gradient Evaluations: 13

Ajustamiento de la Pareto a Z2.

Call: fpot(x = z2, threshold = 0.6)
Deviance: -20.16641

Threshold: 0.6
Number Above: 8
Proportion Above: 0.16

Estimates
scale shape
0.4406 -1.3651

Standard Errors
scale shape
2e-06 2e-06

Optimization Information
Convergence: successful
Function Evaluations: 109
Gradient Evaluations: 9

Ajustamiento de la Logística para Z1 y Z2.

Call: fbvevd(x = z12, model = "log")
Deviance: -174.4932
AIC: -160.4932

Estimates
loc1 scale1 shape1 loc2 scale2 shape2
dep
0.35973 0.11446 0.16493 0.36202 0.12214
0.08096 0.30675

Standard Errors
loc1 scale1 shape1 loc2 scale2 shape2
dep
0.01810 0.01453 0.09435 0.01915 0.01488
0.09144 0.04779

Dependence Structure
Dependence One: 0.7630811
Dependence Two: 0.9102647
Asymmetry: 0

Optimization Information
Convergence: successful
Function Evaluations: 58
Gradient Evaluations: 16

Ajustamiento de la Logística para Z1 y Z3.

Call: fbvevd(x = z13, model = "log")
Deviance: -93.79106
AIC: -79.79106

Estimates
loc1 scale1 shape1 loc2 scale2 shape2
dep
0.4079 0.1477 0.1910 0.3571 0.1692 -
0.2944 0.9992

Standard Errors
loc1 scale1 shape1 loc2 scale2 shape2
dep
0.026897 0.026033 0.188988 0.024925
0.027087 0.202870 0.000002

Dependence Structure
Dependence One: 0.001137544
Dependence Two: 0.001640925
Asymmetry: 0

Optimization Information
Convergence: successful
Function Evaluations: 116
Gradient Evaluations: 9

Apéndice II: Distribuciones.

Distribuciones Clásicas.

Normal Estándar.

$$P[X \leq x] = F(x) = \frac{\exp(-\frac{1}{2}e^{x^2})}{\sqrt{2\pi}}, \quad -\infty < x < \infty$$

Distribución Beta Estandarizada de parámetros alpha y beta.

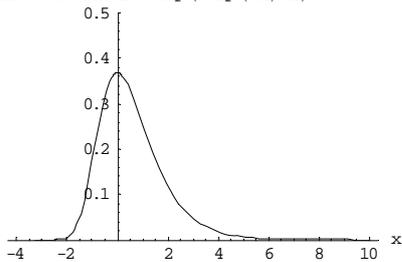
$$P[Q \leq q] = B(q; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta) \cdot q^{\alpha-1} \cdot (1-q)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}, \quad 0 \leq q \leq 1, \alpha > 0, \beta > 0$$

Los tres tipos de distribuciones de eventos extremos (distribuciones G)

Tipo I (*Gumbel*)

$$\Lambda(x) = \exp(-e^{-x}), \quad -\infty < x < \infty$$

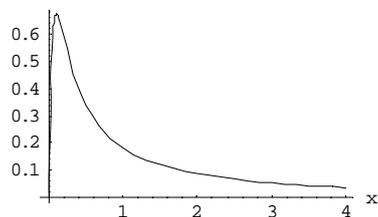
F. de Dens. de Gumbel : $\exp(-\exp(-x)-x)$



Tipo II (*Fréchet*)

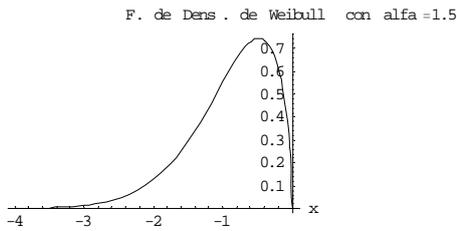
$$\Phi_{\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \exp[-x^{-\alpha}] & \text{si } x > 0, (\alpha > 0) \end{cases}$$

F. de Dens. de Fréchet con alfa = 0.5



Tipo III (*Weibull*)

$$\Psi_{\alpha}(x) = \begin{cases} \exp[-(-x)^{\alpha}] & \text{si } x < 0, (\alpha > 0) \\ 1 & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$



Distribuciones de Valores Extremos Negativas.

Función de Distribución Logística Negativa Bivariada. (Galambos, 1975)

La distribución logística negativa bivariada con parámetro γ es

$$G(x_1; x_2) = e^{\left\{ -y_1 - y_2 + \left[\left(\frac{1}{y_1} \right)^\gamma + \left(\frac{1}{y_2} \right)^\gamma \right]^{\frac{1}{\gamma}} \right\}}$$

donde γ es mayor que cero. Se llega a la independencia cuando γ se aproxima a cero y la dependencia cuando γ tiende a infinito.

Función de Distribución Logística Asimétrica Negativa Bivariada. (Joe, 1990)

La distribución asimétrica logística negativa con parámetros γ , t_1 y t_2 es de la forma:

$$G(x_1; x_2) = e^{\left\{ -y_1 - y_2 + \left[\left(\frac{1}{t_1 y_1} \right)^\gamma + \left(\frac{1}{t_2 y_2} \right)^\gamma \right]^{\frac{1}{\gamma}} \right\}}$$

donde $\gamma > 0$ y $0 < t_1, t_2 \leq 1$. Se logra la independencia cuando el límite de γ , t_1 y t_2 tienden de cero y la dependencia cuando γ tiende a infinito.

Función de Distribución Logística Asimétrica Negativa Bivariada. (Joe, 1990)

La función de distribución logística asimétrica negativa bivariada con parámetros α y β es:

$$G(x_1; x_2) = \exp \left\{ -y_1 - y_2 + y_1 \cdot q^{(1+\alpha)} + y_2 \cdot (1-q)^{(1+\beta)} \right\}$$

donde $q = q(y_1, y_2; \alpha, \beta)$ es la raíz de la ecuación

$$(1 + \alpha) \cdot y_1 \cdot q^\alpha - (1 + \beta) \cdot y_2 \cdot (1 - q)^\beta = 0$$

y $0 > \alpha, \beta > 0$. Cuando α es igual a β el modelo bilogístico negativo es equivalente al modelo logístico negativo con parámetro de dependencia $1/\alpha$. La dependencia se obtiene en el límite cuando α igual a β tiende a cero y la independencia cuando α igual a β tiende a infinito ó cuando α ó β está fijo y el otro tiende a infinito.

6. Bibliografía.

- Bierlaire, Michel, y otros “*Characteristics of Generalized Extreme Value Distributions*”, Institute of Mathematics del Swiss Institute of Technology, Marzo de 2003, Suiza.
- Chavez-Demouli, Valerie, “*Extreme Value Theory can save your neck*”, ETHZ Armin Roehrl, Approximity GMBH, Enero de 2004, Suiza.
- Fisher, R.A. and Tippett, L.H.C., “*Limiting forms of the frequency distributions of the largest or smallest member of a sample*”. Proc. Camb. Phil. Soc. 24, 1928, EEUU, Pág. 180–190.
- Gnedenko, B.V., “*Sur la distribution limite du terme maximum d’une s´erie al´eatoire*”. Ann. Math. 44, 1943, pág. 423-453.
- Kotz, Samuel & Nadarajah, Saralees, “*Extreme value distributions: Theory and Applications*”, George Washington University y University of Nottingham, Octubre de 2000, EEUU.
- McNeil, Alexander J., “*Extreme Value Theory for risk managers*”, Departament Mathematik, ETH Zentrum, Zurich, Mayo de 1999, Suiza.
- Smith, Richard L., “*Notas de clase para la materia statistics 322: environmental statistics*”, University of North Carolina at Chapel Hill, 2005, EEUU.
- Pickands, J., “*Statistical inference using extreme order statistics*”. Ann. Statist. 3, 1975, pág. 119-131
- Smith, Richard L., Zhang, Zhengjun y Weissman, Ishay “*Multivariate extremes, max-stable processes and the analysis of financial risk*”, University of North Carolina, Chapel Hill, Washington University, St. Louis and Technion from Haifa, ICRSA, Mayo de 2003, EEUU.
- Stephenson, Alec, “*A User’s Guide to the evd Package (Version 2.1)*”, Departament of Statistics, Macquarie University, Mayo de 2004, Australia.
- Tajvidi, Nader, “*Multivariate generalised Pareto distributions*”, Octubre de 1996, EEUU.
- Venables, W. N. y Smith, D. M., “*An introduction to R*”, 2005.
- Zhang, Zhengjun “*Multivariate Extremes, Max-Stable Process Estimation and Dynamic Financial Modeling*”, University of North Carolina at Chapel Hill, 2002, EEUU.