Tarifications stables dans les monopoles multiproduits avec marchés séparés*

Vincent Iehlé†

August 2003‡

Cahier de la MSE 2003.98, Série Bleue

Stable pricings in multiproduct monopolies with discrimination

Abstract

We provide some existence results of stable pricings for natural monopoly as defined in the theory of contestable markets. The main addings are based on the assumption of separated markets and the possibilities of entries. We borrow tools from cooperative game theory. Following the work of Bendali et al. (Revista de Matematicas Aplicadas, 2000), we make full use of parameterized cores of games with side payments to characterize subsidy free and sustainable pricings. *Journal of Economic Literature* Classification Numbers: C71, L11, L12.

Keywords: natural monopoly, contestable markets, multiproduct firms, sustainability, subsidy free prices.

Résumé

Dans le cadre de la théorie des marchés contestables, nous proposons d'étendre certains résultats d'existence de tarification stable dans les monopoles naturels multiproduits. Les extensions portent sur la possibilité de marchés séparés et sur la modélisation de l'entrée sur le marché. On utilise le formalisme de la théorie des jeux coopératifs pour aborder ces problèmes d'existence. Suivant le travail de Bendali et al. (Revista de Matematicas Aplicadas, 2000), on utilisera notamment des cœurs de jeux paramétrés par les prix pour mettre en évidence des tarifications soutenables et subsidy free. *Journal of Economic Literature* Classification Numbers : C71L11, L12.

Mots-clés : monopole naturel, marchés contestables, firmes multiproduits, soutenabilité, prix sans subventions croisées.

*Cet article est une version révisée d'un mémoire de DEA soutenu à l'Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne en 2001. Je remercie Jean-Marc Bonnisseau qui a motivé et encadré ce travail.

†CERMSEM-CNRS UMR 8095, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, Maison des Sciences Economiques, 106-112 boulevard de l'Hôpital 75647 Paris Cedex 13, France. E-mail: iehle@univ-paris1.fr.

‡This version: April, 2004.

1 Introduction

Cette note est une petite contribution à la théorie des marchés contestables, paradigme développé dans les années soixante-dix par Bailey, Baumol, Panzar et Willig [1, 11] [1]. Le point nouveau qui donne un éclairage supplémentaire sur la littérature existante concerne principalement l'hypothèse de prix différenciés sur des marchés séparés [2]. Cette marge de manœuvre supplémentaire que nous laissons aux firmes permet de montrer l'existence de tarifications satisfaisant certaines propriétés de stabilité (suivant la terminologie des marchés contestables, il s'agit principalement de tarifications *subsidy free* et *sustainable*). Par ailleurs, on élargit les possibilités d'entrées pour les firmes grace à une articulation à deux niveaux, elles choisissent une part de marché parmi un groupe d'agents et un panier de biens, tandis qu'habituellement les analyses ont tendance à traiter isolément les biens et les agents. Pour ce faire, nous proposons un traitement systématique, englobant une large classe de modèles, à partir du formalisme des jeux coopératifs avec paiements latéraux. La méthode consiste à paramétrer des cœurs de cost games par des prix pour prouver l'existence de certaines tarifications stables [3][4].

Un marché où les contraintes de production sont données et communes à toutes les firmes, entraîne l'apparition d'un monopole naturel lorsque la production au moindre coût d'un vecteur de biens nécessite la présence d'une seule et même firme. Elle dispose d'un avantage par rapport à toute autre combinaison de firmes engagées dans la même production. On peut caractériser ce type de marché, analogue à la présence de rendements croissants dans la technologie de production, par l'existence d'une fonction de coût sous-additive :

$$C(y) + C(y') \geq C(y + y')$$

On exhibe des conditions suffisantes pour l'existence de tarifications stables dans un monopole naturel. Ce type de positionnement peut survenir lors d'une ouverture à la concurrence. En effet, l'ouverture d'un marché ne correspond pas forcément à une situation de cohabitation entre plusieurs firmes. La firme

[1] Il faut également associer au développement de la théorie les travaux suivants, Faulhaber [7], Faulhaber et Levinson [8], Sharkey [16, 17, 18], en particulier pour les questions de tarification stable. On renvoie également le lecteur aux ouvrages de référence qui couvrent de manière exhaustive la théorie, Baumol et al. [2] et Sharkey [19].

[2] Nous emploierons alternativement les termes de discrimination ou de marchés séparés. La notion de discrimination ne fait pas ici référence à une position abusive du monopole en place mais plutôt à sa capacité à maintenir séparés plusieurs marchés (géographiques par exemple) sur lesquels il intervient et à pratiquer une politique tarifaire différenciée. C'est la teneur de l'approche moderne à la Phlips [12].

[3] La fonction caractéristique est en fait la fonction de coût, une allocation dans ce jeu correspond alors à un vecteur décrivant les recettes associées. Les inégalités qui définissent les conditions de réalisabilité sont inversées par rapport à l'usage du fait de l'analyse à partir des fonctions de coût, voir Section 4.2.

[4] A titre d'exemple, nous nous limiterons au cas du transport ferroviaire en France qui s'inscrit parfaitement dans le processus et le cadre réglementaire que nous cherchons à décrire. La dérégulation du marché de l'éléctricité peut fournir aussi un terrain d'application, notamment dès que l'on distingue les producteurs des transporteurs, ces derniers étant confrontés à des choix similaires.

en place peut protéger son marché par le biais d'une tarification, au quel cas elle reste seule fournisseur du marché et l'ouverture du marché a servi de force disciplinante en abaissant la tarification initiale. C'est ce mécanisme que les notions de stabilité entendent capturer. Dans le cas contraire, la firme n'a pas la possibilité de choisir une telle tarification et la question de partage du marché entre plusieurs fournisseurs indépendants doit alors se poser.

Dans cet article, on se concentre sur les notions de tarifications subsidy free et soutenables. Une tarification est dite subsidy free si toute entrée sur une partie du marché n'est pas strictement bénéficiaire à ce prix fixé. La notion plus forte de soutenabilité impose, elle, que l'entrée bénéficiaire est impossible y compris à d'autres niveaux de tarifications. Les auteurs, précédemment cités, ont largement contribué au développement de la théorie après en avoir posé les principaux concepts et bases formelles que nous reprendrons. Ils se sont néanmoins limités à l'analyse d'une tarification pour des firmes qui ne différencient pas leur clientèle ou leurs marchés locaux. Dans ce cadre très général, des conditions suffisantes d'existence d'un prix stable n'ont pu être mises en évidence. En généralisant une approche par les jeux dûe à Bendali et al. [3], nous prouvons l'existence sous des hypothèses de marché *régulier* et de fonction de coût *fair sharing* (on utilise également une condition technique de bord).

L'approche par les jeux coopératifs des problèmes de monopoles naturels n'est pas nouvelle. Faulhaber [7] propose déjà des résultats d'existence pour des tarifications subsidy free en reprenant le formalisme des jeux coopératifs, notamment en introduisant la notion de cost games. Nous étudierons les cœurs de ces jeux. En plus, nous utilisons une paramétrisation par les prix qui, elle, semble plus originale et inhabituelle dans ce cadre économique. La tarification subsidy free est alors vue comme un point fixe de cette famille de cœurs paramétrés [5].

En outre, dans le cas de fonctions caractéristiques définies à partir des fonctions de coût, la notion de coalition correspond habituellement à une partie de l'ensemble des biens disponibles sur le marché. Ici, notre approche place sur le même plan les agents et les biens en généralisant la notion de coalition au cas de partie d'agents et de biens, appelé sous-marché

Dans la Section 2, on présente le modèle de marché contestable et les notions de stabilité que nous allons étudiées . Dans la Section 3, on énonce les résultats d'existence de tarifications. Ces résultats sont obtenus en corollaires plus ou moins directs de résultats renvoyés en Appendice où l'on présente le cadre formel des jeux coopératifs avec paiements latéraux, ainsi qu'un lemme d'existence et ses corollaires basés sur une paramétrisation de polytopes. En Appendice, nous prouvons également quelques propriétés classiques liées à la stabilité. Avant cela, nous revenons ci-dessous sur les points marquants associés à notre modèle de marché contestable, précisément les firmes multiproduits avec discrimination, les notions d'entrée, la problématique de la déréglementation.

[5]Ce type d'outil mathématique a déjà été utilisé dans la littérature des marchés contestables, Sharkey [16, 17] et Ten Raa [13, 14], l'originalité tient ici à la possibilité d'utiliser directement les cœurs en tant que correspondance. La notion de cœur apparaît naturellement dès que l'on étudie des tarifications de type subsidy free.

1.1 Firme multiproduit, discrimination et entrées à deux voies

Les cadre général du modèle intègre trois aspects pertinents, la firme produit plusieurs biens, elle maintient séparés plusieurs marchés, et enfin les entrées sont organisées autour d'une double articulation. Habituellement dans ce type de littérature sur la tarification dans les monopoles, l'analyse est principalement centrée autour des biens. Les stratégies d'entrées concernent le choix d'un ensemble de biens pour lequel la firme entrante estime posséder un avantage sur la firme en place. On peut néanmoins s'intéresser aux groupes de consommateurs (vu comme des marchés) et les considérer également comme des entités stratégiques. On pourra ainsi associer simultanément les deux notions. Un sous-marché désigne un groupe de marchés visés par la firme et un ensemble de biens de la gamme commerciale sur lequel elle se positionne, si bien que les firmes entrantes ont ici la possibilité de jouer sur deux tableaux dans le choix de leur positionnement. Elles peuvent décider de proposer une tarification à une certaine fraction d'agents et/ou de se concentrer sur un certaine gamme de produits [6]. Par ailleurs, on suppose que la firme est en mesure de discerner plusieurs paquets de demandes (les différents marchés). Cette possibilité facilite son entrée potentielle sur un marché puisqu'elle peut adapter une tarification spécialement à destination d'une certaine classe de clients[7].

Le choix de la firme multiproduit s'impose naturellement y compris pour des marchés de monopoles naturels qui, à première vue, semblent plutôt se focaliser sur la production d'un seul bien. En fait, l'aspect multiproduit se dégage dès que l'on atteint un niveau de différenciation suffisamment élevé[8]. Pour ce type de marché multiproduit, la fonction de coût peut prendre des formes spécifiques, étudiées plus précisément dans Baumol et al. [2]. Il faut en particulier différencier plusieurs types de synergie lorsqu'une multiplicité de biens sont produits et discerner plusieurs sources de rendements croissants, ainsi on définit des notions de rendements d'échelles, qui portent sur la quantité globale, des notions de rendements d'envergure, qui portent sur des synergies transversales entre les biens. La définition de sous-additivité donnée plus haut prend en compte implicitement tous ces aspects de rendements croissants. La connaissance de la structure des coûts est ainsi primordiale dans ce type d'approche, nous ne traiterons pas de cette question qui se situe en amont de notre analyse. On se concentre principalement sur l'approche par les jeux et on renvoie le lecteur aux ouvrages [2, 19] pour une synthèse de résultats sur la théorie de la firme.

[6]Dans le cas de la SNCF, les groupes d'agents se répartissent entre différentes catégories socio-professionnelles, les classes d'âges..., les différents biens correspondent aux choix des destinations, à des billets avec abonnements, aux périodes, type de standing...).

[7]Effectivement, on ne peut, a priori, obtenir de tarifications stables dans le sens défini plus haut sans hypothèse de discrimination mais avec demandes individualisées, à moins de poser des hypothèses très restrictives sur les fonctions de demandes et de coût, voir [7, 8, 11, 18].

[8]Dans le cas de la SNCF, chaque destination constitue ainsi un bien produit à part entière de l'activité transport. Les biens ainsi définis par leur caractérisitiques physiques et leurs contingences spatio-temporelles sont relativement proches. Voir Siroen [21] pour une analyse spatiale de la discrimination-différenciation des marchés contestables.

1.2 Stabilité et déréglementation

La question de l'ouverture des monopoles naturels à la concurrence intéresse depuis longtemps les régulateurs qui doivent proposer des recommandations efficaces et avantageuses socialement. Néanmoins, les notions de stabilité que nous avons choisies n'entrent pas forcément dans cette logique. Faulhaber ([7] p.967) le note déjà dans son article en rejetant toute association entre tarification subsidy free et efficacité ou bien être social :

> "Note, however, that a subsidy free price structure is not necessarily welfare maximizing ; nor are we entitled to assume that such prices are socially superior on grounds of social justice".

Le type de situation monopolistique qui nous occupe ne doit rien à l'Etat, elle est advenue naturellement du seul fait des conditions technologiques. La question de l'ouverture du marché se pose alors crucialement mais les réponses sont loin d'être unanimes en terme de bien être social. La difficulté tient au fait que le monopole est plus efficace en terme de production par rapport à tout autre combinaison de firmes, il semble dès lors souhaitable qu'il garde sa position d'unique fournisseur du marché. D'un autre côté, comment garantir qu'il n'utilise pas sa position dominante au dépens du consommateur en pratiquant une politique tarifaire prohibitive ? C'est ce type de dilemme qui survient dans les dossiers de déréglementation, l'Etat lui-même ne sachant pas la nature réelle des coûts du monopole ne peut a priori savoir si les prix pratiqués sont excessifs. Plusieurs cas récents de tentative d'actions en justice ont montré que la question n'était pas tranchée par les régulateurs [9].

Baumol et al. [2] propose avec la théorie des marchés contestables une première réponse dans un cadre théorique. Leur point de vue consiste à considérer l'ouverture du marché comme une force disciplinante qui agit sur le monopole naturel en place, en imposant notamment une baisse de prix. Il s'en suit que le monopole répond à la menace d'ouverture en se positionnant sur des tarifications inattaquables, du type que nous allons étudiées. Le modèle et les conclusions de ces auteurs ont eux-mêmes fait l'objet de nombreuse critiques et d'approches alternatives, voir Siroen [21], Encaoua [5] et Encaoua et Moreaux [6]. En premier lieu, les hypothèses du modèle de marché contestable où de telles tarifications stables sont exhibées, sont très limitatives. Plusieurs études empiriques ont montré que l'ouverture de marché où certaines de ces hypothèses n'étaient pas satisfaites (par exemple, la possibilité d'innover), pouvait conduire à une baisse de bien être. Les hypothèses faites sur le mode de concurrence des firmes sont, elles aussi, sujettes à caution, en particulier l'absence de réaction de la firme en place face aux actions des firmes entrantes, une réponse est apportée dans Encaoua et Moreaux [6] grace à une approche par les jeux non coopératifs.

Néanmoins, le modèle de marché contestable formalisé par Baumol. et al. reste à ce jour, une tentative réussie pour expliquer la structure industrielle qui peut se dégager d'un marché contestable. La situation soutenable peut être vue

[9] Voir le procès intenté contre ATT dans les années quatre-vingt, la firme fut accusée d'utiliser des systèmes de subventions croisées, in Encaoua [5].

comme le point de convergence du processus de concurrence qui s'engage après l'ouverture d'un marché. Enfin, si l'aspect normatif des tarifications stables n'est pas tranché, le caractère prédictif leur donne toute leur importance aux yeux des régulateurs. Après avoir vérifié si certaines propriétés de stabilité sont assurés sur le marché, ces derniers peuvent en effet prévoir si l'on doit attendre des forces du marché un démantèlement du marché de monopole naturel ou bien un statu quo [10]. Les résultats qui suivent apportent une réponse de ce type.

2 Le modèle

[11] Le cadre économique que nous choisissons est celui d'un marché contestable multiproduit où les firmes peuvent séparer certains marchés, nous décrivons ici rapidement les hypothèses de base du marché contestable. On suppose ainsi qu'il existe un marché de biens sur lequel seul un petit nombre d'entreprises peut réaliser une activité de production viable. Cette restriction est liée à la présence de fonction de coût sous-additive qui rend plus efficace la production d'une certaine quantité de biens par une seule firme plutôt que par une combinaison de firmes. De là, on s'intéresse à la structure industrielle qui peut se dégager sur ce marché.

> **Hypothèse 1** Le marché contestable est défini par un ensemble fini indexé de biens L et un ensemble fini et indexé de demandes individualisées N qui représentent les agents par un léger abus de terminologie [12]. Pour chaque agent $a \in N$, la fonction de demande D_a est une fonction continue, définie sur $\mathbb{R}_+^{LN}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^L$ [13].

Par ailleurs, les analyses de marchés contestables assument que la technologie de production est accessible à toutes les firmes, c'est à dire que l'avantage que peut tirer un monopole naturel sur ses concurrents ne correspond pas à un avance technologique mais à une structure particulière de la production qui est inhérente au marché en question (la présence de rendements de croissants est exogène) et toute firme entrante peut en bénéficier.

---

[10] Voir Concurrence et régulation des marchés, in Les Cahiers Français, no. 313, La Documentation Française, (2003).

[11] Quelques notations usuelles que nous emploierons ici : $X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}$. Ordre partiel vectoriel : pour tout $x, y \in E$, espace vectoriel de dimension L, $x \geq y$ si pour tout $k = 1...L$, $x_k \geq y_k$, $x > y$ si pour tout $k = 1...L$, $x_k \geq y_k$ et il existe j tel que $x_j > y_j$, $x \gg y$ si pour tout $k = 1...L$, $x_k > y_k$. Soit X un ensemble fini indexé, on note $\mathbb{R}^X$ l'espace Euclidien dont les composantes sont indexés par les éléments de X, par un léger abus de notation on pose $\mathbb{R}^{XY} := (\mathbb{R}^X)^Y$. Pour tout partie non vide S d'un ensemble fini et indexé X, E_S désigne le sous-espace $\mid S \mid$-dimensionnel de $\mathbb{R}^X$ défini par $\{x \in R^X \mid x_i = 0,\ i \notin S\}$. On notera également x^S la projection d'un élément de $\mathbb{R}^X$ sur E_S. On note $<_S$ l'ordre partiel restreint à E_S, i.e. $p' <_S p$ si et seulement et si $p'_i \leq p_i$ pour tout $i \in S$ avec au moins une inégalité stricte. On note $\cdot$ le produit scalaire usuel.

[12] Au lieu d'utiliser la terminologie d'agent, il vaudrait mieux parler de groupes de consommateurs ou de marché séparé à qui on associe la même la même fonction de demande. Dès lors, A est l'ensemble des classes que la firme peut discerner, (ce qui est visible).

[13] On se place dans le cadre le plus général de demandes qui dépendent de l'ensemble du plan de tarification proposé au marché, i.e. la demande de l'agent i, D_i, dépend du prix p_j proposé à l'agent j.

Hypothèse 2 Toutes les firmes, qui ont accès au marché contestable, sont dotées de la même technologie de production, matérialisée par une fonction de coût C, fonction continue définie sur $\mathbb{R}_+^L$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ [14].

Plus précisément, nous nous concentrerons principalement sur cette notion de tarification dans un cadre où les firmes ont, en sus, la possibiblité de différencier par les prix les différents marchés qu'elle maintient séparés. Les firmes entrantes disposent du même avantage. La stratégie d'une firme est donc complètement résumée par la tarification qu'elle propose et le choix des sous-marchés sur lesquels elle va intervenir.

Hypothèse 3 L'espace des prix de chaque firmes est $\mathbb{R}_+^{LN}$, c'est à dire que les firmes sont en mesure de fixer un prix pour tous les marchés séparés.

Reprenons le scénario chronologiquement pour fixer les notations. On suppose qu'il existe une firme en place en situation de monopole qui contrôle plusieurs marchés séparés qu'elle fournit en biens. Nous noterons N l'ensemble fini et indexé d'agents, et L l'ensemble fini et indexé de biens produits par la firme avec une technologie de production décrite par la fonction de coût C (pour tout $d \in \mathbb{R}_+^L$, $C(d)$ est le coût induit pour produire le panier d). On impose à la firme d'être *full supplier*, c'est à dire qu'elle est dans l'obligation de fournir intégralement la demande induite par le prix qu'elle a fixé sur le marché, nous noterons D la fonction de demande (pour tout $a \in N$, $D_a(p) \in \mathbb{R}_+^L$ (resp. $D_a(p)_b$) est le vecteur des demandes des clients de type a (la demande pour le type a en bien b) lorsque la firme pose un prix $p \in \mathbb{R}_+^{LN}$), on notera également $D_a(p)^B \in E_+^B$ la projection du vecteur de demande sur le panier composé des biens B, pour $B \subseteq L$ [15].

On suppose maintenant que le marché, anciennement protégé, est ouvert à la concurrence sans contraintes particulières. On parle alors de libre entrée, les firmes entrantes ne sont soumises à aucun coût d'entrée ou de sortie, elles peuvent par ailleurs choisir d'entrer sur une part de marché particulière, que ce soit au niveau de la clientèle (i.e. une partie de l'ensemble N) ou de l'offre commerciale (i.e. une partie de l'ensemble L). La seule contrainte liée à leur activité concerne l'obligation d'être full supplier, tout comme la firme en place. Notons $\mathcal{N}$, l'ensemble des parties non vides de N, et $\mathcal{L}$ l'ensemble des parties non vides de L, les firmes entrantes peuvent donc choisir à la fois un segment

[14] Depuis peu, l'activité de transport ferroviaire en France a été scindée en deux entités, d'une part, l'infrastructure (le réseau en place qui correspond aux coûts fixes) a été confiée à Réseau Ferré de France (RFF) tandis que l'exploitation commerciale est restée l'exclusivité de la SNCF. Dans le cas d'une ouverture du marché, la SNCF pourrait cohabiter avec plusieurs nouveaux entrants qui pourront utiliser le même réseau (fourni par RFF), l'entrée se fera donc à coût fixe presque nul puisqu'il s'agit seulement pour les entrants de commercialiser du service-transport. On peut par ailleurs trouver une source de sous-additivité des coûts dans l'exploitation commerciale du fait de la structure d'un réseau ferré qui dessert plusieurs destinations sur un même trajet.

[15] Voir Mirman et al [9] ou Baumol et al. [2] pour des analyses en partial supplier, i.e. des marchés où les firmes peuvent fournir un niveau $d \leq D(p)$ lorsqu'elles posent un prix p.

de clientèle dans $\mathcal{N}$ et se positionner sur certains biens dans $\mathcal{L}$, nous poserons, par abus de notation, AB un élément de $\mathcal{NL} := \{(S,T) \mid S \in \mathcal{N},\ T \in \mathcal{L}\}$ ainsi la firme entrante, en se positionnant sur les sous-marchés $AB \in \mathcal{NL}$, s'engage à fournir la demande de tous les marchés $a \in A$ pour tous les biens $b \in B$.

La concurrence se fait alors par les prix. Dans le cas de la solution dite de soutenabilité qui correspond à une impossibilité d'entrée par le biais d'une tarification stratégique, la firme entrante doit répondre aux critères suivants : elle choisit les sous-marchés $AB \in \mathcal{NL}$, une tarification p' et distribue les biens d_{ab}, $ab \in AB$. La firme est full supplier, i.e. $d_{ab} = D_a(p')_b$, elle assure un équilibre budgétaire, i.e. les recettes induites par les ventes des paniers d_{ab} couvrent le coût associée à la production des ces biens, et la tarification est préférée par les clients de la coalition A sur le panier B, i.e. $p'_a <_B p_a$ pour tout $a \in A$.

2.1 Tarifications stables

Nous sommes maintenant en position de présenter formellement les critères de stabilité qui vont nous occuper dans la suite de ce travail. On reprend l'articulation habituelle pour ce type de littérature. Ainsi, dans un premier temps on définit la notion de tarification subsidy free, critère de stabilité interne qui assure qu'il n'existe pas de subventions croisées sur le marché. Dans un second temps, on introduit la notion de soutenabilité, critère externe, qui correspond à la clé de voute de la théorie des marchés contestables [16].

Egalement, on se focalise sur deux types d'entrée. L'entrée à une voie où les firmes entrantes ont le choix de leurs marchés mais s'engage à fournir tous les biens. L'entrée à deux voies correspond au modèle décrit précédemment où les firmes entrantes choisissent leurs sous-marchés parmi les marchés et les biens simultanément. Les possibilités d'entrée étant plus simples dans le cas d'entrée à deux voies, la tarification stable est, elle, plus difficile à atteindre pour la firme en place, i.e. l'existence d'une tarification stable avec entrée à deux voies implique l'existence de la tarification stable avec entrée à une voie.

Définition 1 (Subsidy free) Un prix $p \in \mathbb{R}_+^{LN}$ est subsidy free avec entrée à

[16] On se focalise principalement sur les tarifications subsidy free et soutenables alors qu'il existe d'autres notions relativement proches, selon la terminologie en vigueur il s'agit de tarifications anonymous equitable et supportable, voir [13].

une voie si [17] :

$$\begin{cases} \sum_{a\in N} p_a \cdot d_a = C(\sum_{a\in N} d_a) \\ d_a = D_a(p) \text{ pour tout } a \in N. \\ \sum_{a\in A} p_a \cdot d_a \leq C(\sum_{a\in A} d_a) \text{ pour tout } A \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

Un prix $p \in \mathbb{R}_+^{LN}$ est subsidy free avec entrée à deux voies si :

$$\begin{cases} \sum_{a\in N} p_a \cdot d_a = C(\sum_{a\in N} d_a) \\ d_a = D_a(p) \text{ pour tout } a \in N. \\ \sum_{a\in A} p_a \cdot d_a^B \leq C(\sum_{a\in A} d_a^B) \text{ pour tout } AB \in \mathcal{NL}. \end{cases}$$

Du point de vue des agents (dans le cas d'entrée à deux voies) pris comme un système auto-organisé, il s'agit d'un prix qui induit une implémentation $(p_a \cdot d_a)_{a\in N}$ correspondant à la dépense des agents, la contribution individuelle dans le paiement total correspond exactement à la demande induite par le prix (la firme est full supplier). Par ailleurs, le vecteur $(p_a \cdot D_a(p))_{a\in N}$ vérifie la condition d'absence de subventions croisées. C'est à dire que, pour tout $AB \in \mathcal{NL}$, le coût associé à la demande de ces sous-marchés est plus cher que ce qui est payé effectivement par le groupe $\sum_{a\in A} p_a \cdot D_a(p)^B$.

Du point de vue de la firme, il s'agit d'un prix budgétairement réalisable tel qu'il n'existe pas de secteur bénéficiaire pour en financer un autre, qui, lui, est déficitaire. C'est pourquoi on parle de stabilité interne, aucune fraction interne (une filiale par exemple) à la firme ne peut "réclamer" légitimement un dû particulier du fait d'une contribution trop grande. Par ailleurs, on retrouve cette notion de subventions croisées au centre de polémique sur des pratiques anti-concurentielles lié à l'abus du pouvoir de monopole, la tarification subsidy free peut ainsi constituer un premier critère devant être vérifié par un monopole naturel [18]. Notons enfin, que ce premier concept apparaît très attrayant pour un régulateur du fait de son caractère pratique. Il est en effet relativement aisé de vérifier qu'un prix est subsidy free (nombre fini d'inégalités). Nous allons voir que ce n'est pas le cas pour le concept de soutenabilité que nous introduisons maintenant de manière formelle [19].

---

[17] Faulhaber et Levinson [8] ont étudié un modèle similaire de firme multiproduit et groupes de consommateurs, sans hypothèse de discrimination, i.e. avec notre formalisme, un prix $p \in \mathbb{R}_+^L$ vérifiant :

$$\begin{cases} p \cdot \sum_{a\in N} D_a(p) = C(\sum_{a\in N} D_a(p)) \\ p \cdot \sum_{a\in A} D_a(p) \leq C(\sum_{a\in A} D_a(p)) \text{ pour tout } A \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

Dans le cas de la SNCF, la firme entrante s'engage à fournir les mêmes destinations que la firme en place, par contre elle peut se positionner sur une fraction particulière de la clientèle. Dans le cas d'entrées à deux voies, elle peut se positionner éventuellement sur les destinations avantageuses.

[18] L'industrie aéronautique fournit un bon exemple de tarification qui n'est pas subsidy free. On pouvait en effet retrouver ce type de pratique dans les tarifications de vente d'avions Boeing où la gamme des gros porteurs 747 pour lesquels la firme possédait un avantage monopolisitique étaient tarifé à un prix très élevé ce qui permettait de brader le reste de la gamme qui, elle, était soumise à une pression concurrentielle plus forte.

[19] Voir Bendali et al. [3] pour un algorithme exhibant toutefois des tarifications soutenables.

Lorsqu'une déréglémentation intervient, i.e. des firmes entrantes (les concurrents) ont la possibilité (le droit) d'entrer sur le marché, on peut également supposer qu'elles sont en position de fixer les prix par elles-mêmes sans suivre la tarification en place tel que le décrit les définitions précédentes. C'est la teneur de la tarification soutenable où les firmes choisissent une tarification préférée par les agents du sous marché. On choisit, pour cette notion de préférence, un critère simple, le prix p' est préféré à p pour un agent a si $p'_a < p_a$ [20].

Définition 2 (Soutenabilité) [21] Un vecteur prix $p \in \mathbb{R}_+^{LN}$ est soutenable pour l'entrée à une voie si :

1. $\sum_{a \in N} p_a \cdot d_a = C(\sum_{a \in N} d_a)$.
2. $d_a = D_a(p)$ pour tout $a \in N$.
3. Il n'existe pas $(A \in \mathcal{N}, p' \in \mathbb{R}_+^{LN})$ tels que :

$$\begin{cases} \sum_{a \in A} p'_a \cdot d'_a = C(\sum_{a \in A} d'_a) \\ d'_a = D_a(p') \text{ pour tout } a \in N. \\ p'_a < p_a \text{ pour tout } a \in A. \end{cases}$$

Un vecteur prix $p \in \mathbb{R}_+^{LN}$ est soutenable pour l'entrée à deux voies si :

1. $\sum_{a \in N} p_a \cdot d_a = C(\sum_{a \in N} d_a)$.
2. $d_a = D_a(p)$ pour tout $a \in N$.
3. Il n'existe pas $(AB \in \mathcal{NL}, p' \in \mathbb{R}_+^{LN})$ tels que :

$$\begin{cases} \sum_{a \in A} p'_a \cdot {d'}_a^B = C(\sum_{a \in A} {d'}_a^B) \\ d'_a = D_a(p') \text{ pour tout } a \in N. \\ p'_a <_B p_a \text{ pour tout } a \in A. \end{cases}$$

[20]Relations de préférences. Implicitement, nous avons considéré des firmes qui, tout en discernant les agents et leurs demandes (hypothèse de discrimination), n'utilisent pas complètement cette information pour rentrer sur le marché. On utilise dans ce papier, la relation de préférence sur les prix **partielle** : le prix p' est préféré p par A, noté $\mathbf{p'} \succ_{\mathbf{A}}^{\mathbf{part.}} \mathbf{p}$ si et seulement si : $p'_x < p_x$ pour tout $x \in A$. $\succ_{\mathbf{A}}^{\mathbf{part.}}$ exprime en fait un critère de décision simpliste qui subordonne la préférence d'une tarification par rapport à une autre à l'ordre partiel des prix. Economiquement, ce cas peut correspondre à la situation d'un marché sur lequel la firme entrante n'a pas d'information sur les fonctions de demande. Elle ne dispose alors que d'une stratégie grossière, positionner ses prix adressés à une coalition dans l'orthant inférieur par rapport aux vecteur prix de la firme en place.

On peut toutefois intégrer des stratégies d'entrée plus élaborées qui prennent en compte les préférences des agents. Dans le cadre d'analyses en équilibre partiel, les fonctions de demandes peuvent se déduire comme suit : $D_x(p) := \text{argmax}\{v_x(d) - p_x \cdot d_x \mid d_x \in \mathbb{R}_+^L\}$ où v_x est une fonction concave. Les conditions nécessaires d'optimalité pour les solutions intérieures nous donnent alors : $\nabla v_x(d_x) = p_x$ Cette demande est bien indépendante du revenu initial. On note S le surplus du consommateur (Voir Vives [22] ch.3 pour les propriétés de la fonction de surplus S.) : $S(p)_x := v_x(D(p)) - p_x \cdot D(p)_x$. Les agents fixent ici leurs demandes indépendamment. La fonction D_x dépend seulement de p_x. On peut alors définir une relation de préférence sur les prix **complète** : le prix p' est préféré à p par A, noté $\mathbf{p'} \succ_{\mathbf{A}}^{\mathbf{comp.}} \mathbf{p}$ ssi : $S(p')_x > S(p)_x$, pour tout $x \in A$. Cette relation définit un ordre total dans l'espace des prix en se fondant beaucoup plus directement sur les préférences des agents et plus particulièrement sur le surplus du consommateur. La relation suppose ici que l'information concernant le marché est parfaite. Les firmes entrantes disposent alors de possibilités plus larges en termes de stratégies.

[21]Les définitions diffèrent légèrement selon les auteurs, voir Baumol et al. [11], Mirman et al. [9] ou Ten Raa [14].

La première condition garantit un équilibre budgétaire, la deuxième est une condition de full supplier. La troisième modélise explicitement la notion de stabilité : aucune firme ne peut s'accaparer les sous-marchés AB, pour tout $AB \in \mathcal{NL}$, en proposant une tarification préférée et en restant viable.

La condition de soutenabilité est beaucoup plus forte que celle de subsidy free. Si la définition de tarification subsidy free peut être vue comme un critère interne, la soutenabilité, elle, assure une stabilité externe, le marché est protégé intégralement de toute concurrence venant de l'extérieur, après une ouverture liée au processus de déréglementation, par exemple. Ainsi un tel positionnement peut apparaître souhaitable aux yeux de la firme en place, et on retrouve l'idée de force disciplinante de la contestabilité qui impose aux firmes d'abaisser leur prix jusqu'à ce seuil limite.

3 Existence de tarifications stables

A partir des résultats de l'Appendice (notions de cost games et polytopes paramétrés), on propose dans cette section de donner quelques théorèmes d'existence pour les tarifications stables dans des cas d'entrée à deux voies ou à voie simple. Autant que faire se peut, on relie ces résultats à la littérature existante, dans un second temps.

On commence par traiter le cas de tarification susidy free, puis on déduit l'existence de tarification soutenable dans un cadre plus restrictif, dit de marché régulier.

Ces résultats exhibent des conditions suffisantes d'existence de tarification en ramenant le problème à une condition sur les cœurs des cost games. Ils nécessitent en effet une propriété particulière de la fonction de coût qui doit vérifier qu'un partage équitable est possible pour toute structure de demande :

Définition 3 La fonction de coût C vérifie la propriété de fair sharing sur $\mathcal{N}$ (resp. sur $\mathcal{NL}$) si pour tout $d_a \in \mathbb{R}_+^L$, $a \in N$, il existe $q \in \mathbb{R}_+^L$ (resp. $q \in \mathbb{R}_+^{LN}$) tel que :

$$\begin{cases} \sum_{a\in N} q_a = C(\sum_{a\in N} d_a) \\ \sum_{a\in A} q_a \leq C(\sum_{a\in A} d_a) \text{ pour tout } A \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

$$(resp. \begin{cases} \sum_{a\in N} q_a = C(\sum_{a\in N} d_a) \\ \sum_{ab\in AB} q_{ab} \leq C(\sum_{a\in A} d_a^B) \text{ pour tout } AB \in \mathcal{NL}. \end{cases})$$

3.1 Tarification subsidy free

On énonce tout d'abord un résultat d'existence pour une tarification subsidy free dans le cas d'un marché avec firmes multiproduits qui entrent sur le marché N à une voie.

Proposition 1 *Sous les hypothèses* [22]

1. *Pour tout $a \in N$, $p \in \mathbb{R}_+^{LN}$ on a $D_a(p) \gg 0$.*
2. *Il existe $\lambda > 0$, tel que pour tout $d \in \mathbb{R}_+^L$, $C(d) \leq \lambda \min\{d_b \mid b \in L\}$.*
3. *La fonction de coût est fair sharing sur $\mathcal{N}$.*

Il existe une tarification subsidy free avec entrée simple.

Preuve. On pose, pour tout $A \in \mathcal{N}$ et $p \in \mathbb{R}_+^{LN}$, $\psi_A(p) = C(\sum_{a \in A} D_a(p))$ et $\phi_a(p) = D_a(p)$. Il reste à vérifier l'hypothèse 1. de la Proposition 6 de l'Appendice, on remarque pour cela que :

$$\min\{D_a(p)_b \mid b \in L\} \sum_{b \in L} p_{ab} \leq p_a \cdot D(p)_a \leq C(D_a(p)) \leq \lambda \min\{D_a(p)_b \mid b \in L\}$$

On voit immédiatement que $\sum_{b \in L} p_{ab} \leq \lambda$, nous notons $\mathcal{K}_a$, le pavé induit, i.e. $\mathcal{K}_a = [0, \lambda]^L$. On peut alors appliquer la Proposition 6 aux fonctions définies plus haut ce qui donne le résultat. □

Reprenons le cas du modèle d'entrée à deux voies. On obtient symétriquement au résultat précédent, la proposition suivante :

Proposition 2 *Sous les hypothèses :*

1. *Pour tout $a \in N$, $p \in \mathbb{R}_+^{LN}$ on a $D_a(p) \gg 0$.*
2. *Il existe $\lambda > 0$, tel que pour tout $b \in L$, tout $d \in \mathbb{R}_+^L$, $C(d^{\{b\}}) \leq \lambda d_b$.*
3. *La fonction de coût est fair sharing sur $\mathcal{NL}$.*

Il existe une tarification subsidy free avec double entrée.

Preuve. On utilise la Proposition 7 de l'Appendice et les arguments de la preuve précédente. □

Les conditions 1. et 2. des résultats constituent une condition technique de bord, on peut néanmoins tenter d'interpréter l'hypothèse de majoration. On peut voir λ comme un prix limite. La condition nous dit alors que, pour toute demande sur un sous-marché quelconque, il existe un prix λ tel que le client paie l'achat du bien plus cher que ce qu'il ne coûte réellement à l'entreprise. En d'autres termes, la firme peut s'assurer un profit positif pour tout niveau de demande émanant d'un sous-marché.

La condition 3. est indépendante des fonctions de demandes et porte seulement sur la fonction de coût. Elle assure que sur le marché entier, il existe une répartion équitable du coût de la demande parmi les clients, au sens où, pour ce type de répartititon des coûts, aucune coalition ne peut s'assurer un surplus de

[22]La condition 3. est en fait une condition de non vacuité du cœur d'un cost game associé. Elle peut s'écrire (voir Appendice) : pour toute prix $p \in \mathbb{R}_+^{LN}$, pour toute famille balancée $\mathcal{S}$ et ses coefficients $(\gamma_S)_{S \in \mathcal{S}}$,

$$\sum_{A \in \mathcal{S}} \gamma_A C(\sum_{a \in A} d_a) \geq C(\sum_{a \in \mathcal{N}} d_a).$$

richesse si elle décide de se fournir seule. On obtient un prix subsidy free à partir de cette propriété sur les coûts, les deux notions étant liées. En effet, un prix subsidy free est une tarification vérifiant la propriété de fair sharing et telle que les recettes et les demandes associées aux sous-marchés soient toutes les deux induites par ce prix. Inversement, le programme vérifé pour la propriété de fair sharing correspond en fait à du subsidy free pour des demandes constantes.

Sharkey [18] et Baumol et al. [2] ont étudié ce type de fonctions coût et ont proposé des conditions suffisantes pour que la condition 3. soit vérifiée. On peut notamment utiliser une hypothèse dite de *cost complementarities* :

$$C(x+z) - C(x) \geq C(x+y+z) - C(x+y) \text{ pour tout } x, y, z \geq 0$$

On renvoie le lecteur à ces références pour une justification économique.

3.2 Tarification soutenable

Nous réalisons un lien avec la soutenabilité en introduisant une hypothèse de marché régulier qui nous permet alors de tirer partie des propositions, cette manière de procéder est relativement habituelle dans la littérature (par exemple Bendali et al. [3], Mirman et al. [9] ou Ten Raa [14]).

Nous imposons une condition suffisante pour que le prix ne soit jamais dominé, la condition porte sur la fonction de profit. Pour atteindre la stabilité, on force ainsi le la tarification subsidy free en contrôlant les effets prix. Comme précédemment, on traite les deux types d'entrée.

On définit la fonction de profit associée à chaque coalition :

$$\Pi_{AB} : \, p \longrightarrow \sum_{a \in A} p_a \cdot D_a(p)^B \; - \; C(\sum_{a \in A} D_a(p)^B)$$

Définition 4 Le marché est régulier si pour toute coalition S (partie de N ou de NL suivant le cas d'entrée considéré), la propriété suivante est vérifiée :

$$\mathcal{K} \cap \{\Pi_S > 0\} = \mathcal{K} \cap (\{\Pi_S = 0\} + \mathbb{R}^{LN}_{++})$$

La notion de régularité est une version affaiblie de l'hypothèse habituelle de croissance du profit. On impose seulement que les profits restent positifs sur un certain ensemble lié aux prix subsidy free. On fait alors correspondre les deux ensembles de tarification sur $\mathcal{K}$ sous l'hypothèse de régularité. Le lemme suivant est vrai pour les deux types d'entrée que nous considérons dans cet article.

Lemme 1 *Sous l'hypothèse de marché régulier, les deux affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *p est subsidy free.*
2. *p est stable.*

Preuve. On vérifie le lemme pour le cas des entrées à une voie.

2. $\Rightarrow$ 1. Supposons par l'absurde que p ne vérifie pas 1., i.e. : il existe $A \in \mathcal{N}$ tel que $\sum_{a\in A} p_x \cdot d_x > C(\sum_{x\in A} d_x)$ où $d_a = D_a(p)$ pour tout $a \in A$. La fonction de demande est bornée en 0, donc : $\sum_{a\in A} p_a \cdot d_a < C(\sum_{a\in A} d_a)$ en $p = 0$. Par continuité des fonctions de demandes et de coût : il existe $p' <_A p$ tel que $\sum_{a\in A} p'_a \cdot d'_a = C(\sum_{a\in A} d'_a)$ où $d'_a = D_a(p')$ pour tout $a \in N$. On en déduit que le prix p n'est pas soutenable, ce qui est une contradiction. .

1. $\Rightarrow$ 2. (on traite le cas avec entrée simple, le cas avec entrée à deux voies est symétrique). Puisque le prix p est subsidy free, il suffit de vérifier qu'aucune coalition ne peut bloquer ce prix p. La condition d'absence de subventions croisées et la régularité du marché implique que pour tout $A \in \mathcal{N}$ et $p' <_A p$ on a $\sum_{a\in A} p'_x \cdot d'_a < C(\sum_{a\in A} d'_a)$ si $d'_a = D_a(p')$ pour tout $a \in A$. Donc le vecteur prix p est soutenable. □

Dans Bendali et al. [3], les auteurs supposent que la demandes sont strictement décroissantes par rapport au prix. Dans Mirman et al. [9] une hypothèse plus faible est utilisée, ils supposent une croissance stricte des profits par raport aux prix. L'hypothèse de régularité est la plus faible, on se limite d'une part à un espace de prix borné (le pavé $\mathcal{K}$), par ailleurs, l'hypothèse de stricte positivité du profit reste consistante pour des firmes dont les profits suivent un "courbe en cloche".

Théorème 1 *Si le marché est régulier et sous les hypothèses de la Proposition 1 (resp. Proposition 2), il existe une tarification soutenable avec entrée à une voie (resp. à deux voies).*

Ce résultat généralise le modèle de Bendali et al. [3] au cas multidimensionnel. Ces auteurs considèrent le cas où les coalitions se résument à l'ensemble des parties non vides d'agents, et le nombre de biens produits par chaque firme du marché est réduit à 1. La condition de majoration 2. de la Proposition 2 s'écrit, dans le résultat de Bendali et al. (avec nos notations), avec une norme euclidienne :

$$\exists \lambda' > 0,\ \forall p \in \mathbb{R}^N_+,\ C(d) \leq \lambda' N(D(p))$$

où N désigne la norme euclidienne. On peut vérifier que la condition que nous utilisons est bien équivalente au sens des normes, dans le cas unidimensionnel, dès que C est sous additive et $D \geq 0$. On améliore donc leur résultat d'existence grace à l'hypothèse de régularité affaiblie (ils supposent des demandes strictement décroissantes).

Nous terminons cette section par quelques remarques concernant la littérature existante.

Remarque 1 Le modèle d'entrée à deux voies est relativement souple. On peut en effet se ramener au cadre des modèles sans discrimination, avec demandes globales, monoproduit avec discrimination, multiproduit mais positionnement sur la gamme entière... Ces modèles sont obtenus comme des cas particuliers du notre. Par exemple, si N est un singleton, on retrouve le modèle canonique de Baumol et al. [2] de firmes multiproduits avec demandes globales. Dans ce cadre, les coalitions correspondent à certaines gammes de produits sur laquelle la firme entrante peut se positionner. Similairement, si on impose que $\mathcal{L} = \{L\}$, l'entrée se fait seulement par rapport à un positionnement sur certaines classes de clients, mais la firmes s'engagent à fournir la même gamme de produits, c'est à dire à proposer des offres pour les marchés éventuellement déficitaires [23].

Remarque 2 Il existe une littérature plus abondante pour le modèle de firme multiproduit avec demande globale, la tarification subsidy free pour ce type d'entrée et de marché a été étudiée par Faulhaber [7]. Dans Faulhaber, le résultat général est obtenu pour des demandes inélastiques (indépendance par rapport aux prix), le problème de tarification subsidy free se ramène alors à la non vacuité du cœur du cost game induit, c'est à dire à l'existence de fonction de coût fair sharing. Dans le cas général de demandes élastiques, il montre qu'il n'existe pas a priori de tarifications subsidy free, voir son contre-exemple. Faulhaber et Levinson [8] donnent un résultat de tarifications *anonymous equity* pour des demandes indépendantes entre elles et sous des hypothèses de convexité de la fonction de coût. Un argument de point fixe très proche du notre mène au résultat.

Les conditions de soutenabilité ont été étudiées par Panzar et Willig [11], Mirman et al. [9] et Ten Raa [14]. Le résultat le plus général a été proposé dans Ten Raa [14] qui montre l'existence de soutenabilité sous des hypothèses de convexité de la fonction de coût (hypothèse de coût complémentaire) et d'indépendance des biens.

Remarque 3 Un argument de point fixe a déjà été utilisé pour dériver l'existence d'un prix *anonymous equitable*, Ten Raa [13], la correspondance nécessitait des conditions plus fortes, La condition 1. des Propositions 1 et 2 est remplacée par : il existe un seuil de consommation $\epsilon > 0$ tel que $D(p) \gg \epsilon$ et la demande est normale. Posons P la correspondance suivante :

$$P(d) = \left\{ s \in E \mid \sum_{x \in X} s_x \cdot d_x = C(\sum_{x \in X} d_x);\ \forall S \in \mathcal{X} \sum_{x \in S} s_x \cdot d_x \leq C(\sum_{x \in S} d_x) \right\}$$

Les éléments de cette correspondance sont appelés *core pricing*. L'hypothèse introduite implique l'existence d'un compact convexe $\mathcal{E}$ tel que le *core pricing* soit défini de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. D'après la semi continuité de D, il existe un compact convexe $\mathcal{F}$ qui contient $D(\mathcal{E})$. On définit alors une correspondance F de $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ dans lui-même : $F(p, d) = P(d) \times D(p)$, cette correspondance admet un point fixe, qui est exactement la tarification *anonymous equitable*.

Remarque 4 Comme cela est noté dans Sharkey [18], l'étude des cost games pour appréhender les notions de tarifications stables fait abstraction des fonctions de demandes. Pour prendre en compte ces préférences individuelles, on

[23] Dans le cas de la SNCF, il s'agirait d'une ouverture à la concurrence qui protègerait les petites lignes déficitaires du réseau.

peut alors généraliser le cost game, ainsi au lieu de considérer comme fonction caractéristique la fonction de côut, on peut intégrer à cette dernière le surplus du consommateur. Sharkey définit de cette manière des *benefit games* et des *welfare games*. L'existence de tarifications stables est alors garantie, tout en assurant un équilibre entre les hypothèses sur la technologie de production et celles portant sur les préférences. Les fonctions caractérisitiques prennent alors la forme suivante, par exemple pour le cas des *benefit games* : $v_T = \max_{S \in X} \left\{ \sum_{i \in T} u_i(S) - C(S) \right\}$. Les résultats de la Section 4 sur les polytopes paramétrés permettent également de traiter ces généralisations des cost games où les fonctions de coût prennent en compte les préférences des agents.

4 Appendice

4.1 Quelques propriétés immédiates

Sans surprise, on retrouve quelques propriétés déjà mises en exergue dans le cas non discriminé (voir [2, 19]), les trois propositions suivantes donnent ainsi un premier aperçu des notions de stabilité qui nous occupent ici. On énonce les propriétés pour le cas d'entrée à une voie, le lecteur peut vérifier que l'on peut obtenir symétriquement les mêmes résultats dans le cas d'entrée à deux voies.

La fonction de coût est sous-additive en y si, pour tout P une partition de N, on a : $\sum_{A \in P} C(\sum_{i \in A} y_i) \geq C(\sum_{i \in N} y_i)$ pour tout $y_i \in R_+^L$, $i \in N$.

Nous avons la condition nécessaire suivante qui rend bien cohérente notre approche par la théorie des marchés contestables dans les monopoles naturels.

Proposition 3 *Si p est un prix subsidy free, la fonction de coût est sous-additive en $D(p)$.*

Preuve. Il suffit de vérifier la sous-additivité pour une partition de N de type $\{A, B\}$
Si p est subsidy free pour D, le vecteur $(p_a \cdot D_a(p))_{a \in N}$ vérifie la condition "no cross subsidies" pour A et B donc :

$$\sum_{a \in A \cup B} p_a \cdot D_a(p) \leq C(\sum_{a \in A} D_a(p)) + C(\sum_{a \in B} D_a(p))$$

et par hypothèse on a :

$$\sum_{a \in A \cup B} p_a \cdot D_a(p) = C(\sum_{a \in A \cup B} D_a(p))$$

Donc C est bien sous-additive en $D(p)$. $\square$

Le prix p est non dominé si il n'existe pas de prix $p' < p$ qui assure un équilibre budgétaire sur le marché total, i.e. : $\sum_{a \in N} p'_a \cdot d'_a \geq C(\sum_{a \in N} d'_a)$ où $d'_a = D_a(p')$ pour tout $a \in N$.

Nous précisons la notion de stabilité grace aux deux conditions nécessaires suivantes :

Proposition 4 *Supposons que la recette $p \cdot D_a(p)$ soit définie en 0 alors, si le prix p est soutenable, les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *Le prix p est subsidy free.*
2. *p est non dominé.*

Preuve. 1. Voir Lemme 1.

2. Evident d'après la définition de la soutenabilité. □

Les demandes sont indépendantes si, pour tout $A \in \mathcal{N}$, $p' \in \mathbb{R}_+^{LN}$ on a $D_a(p_A, p'_{N\setminus A}) = D_a(p)$ pour tout $a \in A$. Les biens sont indépendants si pour tout p et p', tels que $p'_a < p_a$, pour $a \in N$, on a $D_a(p') \geq D_a(p)$.

Proposition 5 *Si les demandes sont indépendantes, si les biens sont aussi indépendants et si la fonction de coût est convexe (voir Section 4.2) alors un prix p non dominé et subsidy free est soutenable.*

Preuve. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une coalition $A \in \mathcal{N}$ et un vecteur $p'_a <_A p_a$ pour tout $a \in A$, tels que l'équilibre budgétaire soit réalisé. Par hypothèse on a :

$$\begin{cases} \sum_{a\in N} p_a \cdot D_a(p) = C(\sum_{a\in N} D_a(p)) \\ \forall A \in \mathcal{N} \;\; \sum_{a\in A} p_a \cdot D_a(p) \leq C(\sum_{a\in A} D_a(p)) \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations on obtient :$\sum_{a\in N\setminus A} p_a \cdot D_a(p) \geq C(\sum_{a\in N} D_a(p)) - C(\sum_{a\in A} D_a(p))$ $(*)$. Puisque les biens sont indépendants, la convexité de C nous donne par ailleurs : $C(\sum_{a\in A} D_a(p) + \sum_{a\in N-A} D_a(p)) - C(\sum_{a\in A} D_a(p)) \geq C(\sum_{a\in A} D_a(p') + \sum_{a\in N-A} D_a(p)) - C(\sum_{a\in A} D_a(p'))$.

Par l'indépendance des demandes on peut écrire : $C(\sum_{a\in A} D_a(p) + \sum_{a\in N-A} D_a(p)) - C(\sum_{a\in A} D_a(p)) \geq C(\sum_{a\in A} D_a(p') + \sum_{a\in N-A} D_a(p'_A, p_{N-A})) - C(\sum_{a\in A} D_a(p')) =$

$C(\sum_{a\in N} D_a(p'_A, p_{N-A})) - C(\sum_{a\in A} D_a(p'))$

On obtient donc : $C(\sum_{a\in N} D_a(p)) - C(\sum_{a\in A} D_a(p)) \geq C(\sum_{a\in N} D_a(p'_A, p_{N-A}) - C(\sum_{a\in A} D_a(p'))$. Mais, comme $\sum_{a\in A} p'_a \cdot D_a(p') = C(\sum_{a\in A} D_a(p'))$, on a :

$$\sum_{a\in A} p'_a \cdot D_a(p') \geq C(\sum_{a\in N} D_a(p'_A, p_{N-A})) - C(\sum_{a\in N} D_a(p)) + C(\sum_{a\in A} D_a(p))$$

On utilise $(*)$ et à nouveau l'hypothèse d'indépendance qui donnent : $\sum_{a\in N} p''_a \cdot D_a(p'') \geq C(\sum_{a\in N} D_a(p''))$ où $p" = (p'_A, p_{N-A})$. Le prix $p"$ domine p, ce qui donne une contradiction. □

4.2 Jeux coopératifs avec paiements latéraux et polytopes paramétrés

Cette section est consacrée à l'approche par les jeux coopératifs avec paiements latéraux. On propose un traitement général sous forme de polytopes paramétrés qui permet d'englober l'ensemble des modèles de tarifications stables, quels que soient les types d'entrée ou les possibilités de discrimination.

Le sens des inégalités se trouvent parfois inversées par rapport aux définitions habituelles du fait d'un raisonnement sur les coûts (on cherche à minimiser). On note $J(X, v)$ le jeu coopératif avec paiements latéraux où X désigne l'ensemble des joueurs et $v : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$ la fonction caractéristique, où $\mathcal{X}$ désigne l'ensemble des parties non vides de X. La fonction v vérifie : $v(\emptyset) = 0$ et $v(A) \leq v(B)$ pour tous $A \subseteq B$. Le jeu est dit sous-additif si : $v(A \cup B) \leq v(A) + v(B)$ pour tous A, B tels que $A \cap B = \emptyset$. Le jeu est dit convexe si : $v(S \cup A) - v(A) \geq v(S \cup B) - v(B)$ pour tous S, A, B tel que $A \subseteq B$. Le vecteur $q \in \mathbb{R}_+^S$ est une imputation sur $S \in \mathcal{X}$ si $\sum_{x \in S} q_x \geq v(S)$, ce vecteur est dominé sur S par q' si q' est une imputation telle que $q' <_S q$. Le coeur du jeu est l'ensemble des imputations sur X qui ne sont dominées sur aucune coalition. On vérifie facilement que l'on peut l'écrire sous la forme $\left\{q \in \mathbb{R}_+^X \mid \sum_{x \in X} q_x = v(X);\ \sum_{x \in S} q_x \leq v(S)\ \forall S \in \mathcal{X}\right\}$. Une famille de coalitions, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$, est balancée s'il existe un vecteur $(\lambda_S)_{S \in \mathcal{S}} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{X}}$ tel que $\sum_{S \in \mathcal{S}} \lambda_S = \mathbf{1}$. Le jeu (X, v) est balancé si pour toute famille balancée $\mathcal{S}$, on a : $\sum_{S \in \mathcal{S}} \lambda_S v(S) \geq v(X)$. On rappelle maintenant la caractérisation donnée par Bondareva et Shapley [4, 15].

Théorème 2 (Bondareva-Shapley(1963-67)) *Le jeu (X, v) a un coeur non vide si et seulement si le jeu est balancé.*

L'idée naturelle du *cost game* est de reprendre ce formalisme en associant à un jeu les données du marché. C'est à dire que la fonction caractéristique dérive directement de la fonction de coût, et les imputations sur la coalition A correspondent alors aux recettes induites par les agents de la coalition qui acceptent de payer la somme q_a, pour tout $a \in A$, la firme, elle, doit faire face au coût induit par les demandes d_a des agens $a \in A$.

Définition 5 (Cost games) Le cost game, noté (N, C, d) (resp. (LN, C, d)), est le jeu qui à d associe le jeu coopératif $J(N, v)$ (resp. $J(LN, v)$) où $v(A) = C(\sum_{a \in A} d_a)$ pour tout $A \in \mathcal{N}$ (resp. $v(AB) = C(\sum_{a \in A} d_a^B)$ pour tout $AB \in \mathcal{NL}$).

L'approche mathématique originale que nous utilisons ici est empruntée à Bendali et al. [3]. Il s'agit de paramétrer par les prix des cost games afin de montrer l'existence d'une tarification spécifique. En effet, en considérant le cœur de ces jeux associés à chaque prix comme l'image d'une correspondance, on obtient le résultat par un argument de point fixe. On énonce ici un lemme d'existence qui étend les résultats de Bendali et al. [3] au cas multidimensionnel [24]. Ces résultats permettent de traiter les deux types d'entrée.

[24]Leur résultat est appliqué à un problème de tarification, ces auteurs restent néanmoins hors champ économique alors que leur travail s'inscrit complètement dans le cadre des marchés contestables puisqu'il montre l'existence d'une tarification soutenable dans un marché à un bien pour des firmes qui discriminent par les prix. Ces auteurs notent par ailleurs que leur traitement formel s'applique également au cas d'une firme multiproduit avec demande globale (donc sans discrimination). Effectivement, il n'y pas d'inconvénient à considérer les joueurs comme des agents ou des biens, ces deux données sont de même nature à l'intérieur d'un cost game.

Soient L et N des ensembles finis indexés. On introduit les fonctions suivantes :

$$\psi_A : \mathbb{R}_+^{LN} \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ pour tout } A \in \mathcal{N}.$$

$$\phi_a : \mathbb{R}_+^{LN} \rightarrow \mathbb{R}_+^{L} \text{ pour tout } a \in N.$$

Un vecteur $p \in \mathbb{R}_+^{LN}$ appartient à $\mathcal{M}$ s'il vérifie :

$$\begin{cases} \sum_{a\in N} p_a \cdot \phi_a(p) = \psi_N(p) \\ \sum_{a\in A} p_a \cdot \phi_a(p) \leq \psi_A(p) \text{ pour tout } A \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

Un vecteur $q \in \mathbb{R}_+^N$ appartient à $\mathcal{M}^p$ pour $p \in \mathbb{R}_+^N$ s'il vérifie :

$$\begin{cases} \sum_{a\in N} q_a = \psi_N(p) \\ \sum_{a\in A} q_a \leq \psi_A(p) \text{ pour tout } A \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

On cherche à prouver que $\mathcal{M}$ est non vide. Il s'agit donc de montrer qu'il existe un vecteur p^* vérifiant la condition : $(p_a^* \cdot \phi_a(p^*))_{a\in N} \in \mathcal{M}^{p^*}$.

Proposition 6 *Sous les hypothèses suivantes :*

1. *Pour tout* $a \in N$ $\{u \in \mathbb{R}_+^L \mid u \cdot \phi_a(p) \leq \psi_{\{a\}}(p),\, p \in \mathbb{R}_+^{LN}\}$ *est un compact, noté* $\mathcal{K}_a$*, on pose* $\mathcal{K} = \prod_{a\in N} \mathcal{K}_a$.
2. *Pour tout* $A \in \mathcal{N}$, $\psi_A(.)$ *est continue sur* $\mathcal{K}$, ϕ *est continue sur* $\mathcal{K}$.
3. *Pour tout* $p \in \mathcal{K}$, $\mathcal{M}^p$ *est non vide.*

$$\mathcal{M} \neq \emptyset.$$

Preuve. On considère maintenant la famille d'ensemble $\mathcal{M}^p$ comme une correspondance définie sur $\mathbb{R}_+^N$:

$$\Gamma(p) = \{q \in R_+^N \mid q \in \mathcal{M}^p\}$$

On introduit ensuite la correspondance suivante :

$$\Gamma^*(p) = \Big\{(u_a)_{a\in N} \in \mathbb{R}_+^{LN} \mid u_a \cdot \phi_a(p) = q_a,\ \forall a \in N \text{ et } q \in \Gamma(p)\Big\}$$

Cette correspondance est à valeurs dans $\mathcal{K}$ sous l'hypothèse 1., il reste alors seulement à prouver que Γ^* admet un point fixe en étudiant la correspondance de $\mathcal{K}$ dans lui-même.

Lemme 2 *La correspondance* Γ^* *admet un point fixe.*

Preuve. La correspondance Γ est à valeurs compactes : elle est à valeurs positives par hypothèse, la condition $\sum_{a\in N} q_a = \psi_N(p)$ assure que $\Gamma(p)$ est supérieurement bornée, enfin pour tout $p \in \mathcal{K}$, $\Gamma(p)$ est bien fermé. Elle est aussi à valeurs convexes en tant qu'intersection de demi-espaces affines. Par continuité des fonctions ψ_A pour tout $A \in \mathcal{N}$, la correspondance prend ses valeurs sur un compact. On peut vérifier la semi-continuité supérieure en montrant qu'elle est de graphe fermé. La démonstration est évidente en utilisant la continuité des fonctions ψ_A : soient p^n une suite de $\mathbb{R}_+^N$ convergeant vers un élément q, et q^n des éléments de $\Gamma(p^n)$ convergeant vers q, on a donc les inégalités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{a\in N} q_a^n = \psi_N(p^n) \\ \sum_{a\in A} q_a^n \leq \psi_A(p^n) \text{ pour tout } A \in \mathcal{N}. \end{array} \right.$$

Par la continuité de ψ_A, on obtient par passage à la limite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{a\in N} q_a = \psi_N(p) \\ \sum_{a\in A} q_a \leq \psi_A(p) \text{ pour tout } A \in \mathcal{N}. \end{array} \right.$$

Donc $q \in \Gamma(p)$ et la correspondance est bien de graphe fermé. La correspondance Γ^* est aussi à valeurs compactes et convexes, puisque $\Gamma^*(p)$ est une transformation linéaire de $\Gamma(p)$ et par l'hypothèse 1.. Elle est aussi s.c.s. puisque ϕ est continue. enfin $\Gamma^*(p)$ est non vide pour tout p. On peut appliquer le théorème de Kakutani. □

D'après le lemme précédent, il existe $p^* \in \Gamma^*(p^*)$. □

Le modèle de Bendali et al. [3] correspond au cas où $L = \{1\}$ [25]. Nous décrivons maintenant leur modèle plus précisément car nous l'utiliserons ensuite pour le cas avec entrées à deux voies qui peut se déduire de leur résultat. Soit X un ensemble fini indexé, et $\mathcal{X}$ l'ensemble des parties non vides de cet ensemble. On introduit les fonctions suivantes : $\psi_A : \mathbb{R}_+^X \rightarrow \mathbb{R}_+$ pour tout $S \in \mathcal{X}$, $\phi_x : \mathbb{R}_+^X \rightarrow \mathbb{R}_+$ pour tout $x \in X$.

Un vecteur $p \in \mathbb{R}_+^X$ appartient à $\mathcal{M}_b$ s'il vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{x\in X} p_x \phi_x(p) = \psi_X(p) \\ \sum_{x\in S} p_x \phi_x(p) \leq \psi_S(p) \text{ pour tout } S \in \mathcal{X} \end{array} \right.$$

Un vecteur $q \in R_+^X$ appartient à $\mathcal{M}_b^p$ pour $p \in \mathbb{R}_+^X$ s'il vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{x\in X} q_x = \psi_X(p) \\ \sum_{x\in S} q_x \leq \psi_S(p) \text{ pour tout } S \in \mathcal{X}. \end{array} \right.$$

A partir de ce modèle, on peut déduire facilement un corollaire avec des coalitions généralisées telles que nous les avons définies précédemment.

Soient L et N des ensembles finis indexés, et NL et $\mathcal{NL}$ désignent respectivement l'ensemble des couples d'éléments de ces ensembles et l'ensemble des couples de parties non vides de ces ensembles (voir Section 2). On introduit les fonctions suivantes : $\psi_{AB} : \mathbb{R}_+^{LN} \rightarrow \mathbb{R}_+$ pour tout $AB \in \mathcal{NL}$, $\phi_a : \mathbb{R}_+^{LN} \rightarrow \mathbb{R}_+^L$ pour tout $a \in N$. Un vecteur $p \in \mathbb{R}_+^{LN}$ appartient à $\mathcal{M}_g$ s'il vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{a\in L} p_a \cdot \phi_a(p) = \psi_{LN}(p) \\ \sum_{a\in A} p_a \cdot \phi_a(p)^B \leq \psi_{AB}(p) \text{ pour tout } AB \in \mathcal{NL}. \end{array} \right.$$

[25] Appliqué au cas de la firme, il peut correspondre à une firme monoproduit qui se présente sur un marché X d'agents ou inversement une firme multiproduit qui perçoit une demande globale. Il s'agit donc du cas d'entrée à une voie. Plus précisément, leur résultat est directement formulé avec des fonctions de demandes, le cadre formel que nous adoptons ici est également plus général.

Un vecteur $q \in R_+^{LN}$ appartient à $\mathcal{M}_g^p$ pour $p \in \mathbb{R}_+^{LN}$ s'il vérifie :

$$\begin{cases} \sum_{a \in L} q_a = \psi_{NL}(p) \\ \sum_{a \in A} q_a \leq \psi_{AB}(p) \text{ pour tout } AB \in \mathcal{NL}. \end{cases}$$

Proposition 7 *Sous les hypothèses suivantes :*

1. *Pour tout $p \in \mathbb{R}_+^{LN}$, Pour tout $ab \in NL$, $\{u \in \mathbb{R}_+ \mid u\phi(p)_{ab} \leq \psi_{ab}(p),\ p \in \mathbb{R}_+^{LN}\}$ est un compact, noté $\mathcal{K}_{ab}$, on pose $\mathcal{K} = \prod_{ab \in NL} \mathcal{K}_{ab}$.*
2. *Pour tout $AB \in \mathcal{NL}$, $\psi_{AB}(.)$ est continue sur $\mathcal{K}$, ϕ est continue sur $\mathcal{K}$.*
3. *Pour tout $p \in \mathcal{K}$, $\mathcal{M}_g^p$ est non vide.*

$$\mathcal{M}_g \neq \emptyset.$$

On aurait pu considérer un autre angle d'approche pour obtenir ces trois résultats. En effet, à partir des ensembles $\mathcal{M}_g$ et $\mathcal{M}_g^p$, si on restreint $\mathcal{NL}$ à l'ensemble des parties AL pour tout $A \in \mathcal{N}$, on obtient que $\mathcal{M}_g$ s'écrit :

$$\begin{cases} \sum_{ab \in LN} p_{ab}\phi(p)_{ab} = \psi_{NL}(p) \\ \sum_{ab \in AL} p_{ab}\phi(p)_{ab} \leq \psi_{AL}(p) \text{ pour tout } A \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \sum_{a \in N} p_a \cdot \phi(p)_a = \psi_{NL}(p) \\ \sum_{a \in A} p_a \cdot \phi(p)_a \leq \psi_{AL}(p) \text{ pour tout } A \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

$$= \mathcal{M}.$$

En fait, les trois modèles (et résultats) peuvent se déduire les uns des autres.

Références

[1] W.J. Baumol, E.E. Bailey, and R.D. Willig, *Weak invisible hand theorems on the sustainability of multiproduct natural monopoly*, American Economic Review **67** (1977), 350–365.

[2] W.J. Baumol, J.C. Panzar, and R.D. Willig, *Contestable markets and the theory of industry structure*, 2^{nd} ed., Harcourt Brace Jovanovitch, 1988.

[3] F. Bendali, J. Mailfert, and A. Quillot, *Jeux coopératifs et demandes élastiques*, Revista de Matematicas Aplicadas **21** (2000), no. 2, 19–36, in French.

[4] O.N. Bondareva, *Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games*, Problemy Kibernetica **10** (1963), 119–139, in Russian.

[5] D.Encaoua, *Réglementation et concurrence : quelques éléments de théorie économique*, Economie et Prévison **76** (1986), no. 5, 7–46, in French.

[6] D.Encaoua and M. Moreaux, *Concurrence et monopole naturel*, Annales d'Economie et Statistique **6** (1987), 89–116, in French.

[7] G. Faulhaber, *Cross subsidization : pricing in public enterprises*, American Economic Review **65** (1975), 966–977.

[8] G. Faulhaber and S. Levinson, *Subsidy free prices and anonymous equity*, American Economic Review **65** (1981), 1083–1091.

[9] L.J. Mirman, Y. Tauman, and I. Zang, *Supportability, sustainability and subsidy free prices*, Rand Journal of Economics **16** (1985), 114–126.

[10] G. Owen, *Game theory*, Academic Press, 1982.

[11] J.C. Panzar and R.D. Willig, *Free entry and the sustainability of natural monopoly*, Bell Journal of Economics **8** (1977), 1–22.

[12] L. Phlips, *The economics of price discrimination*, Cambridge University Press, 1983.

[13] T. Ten Raa, *Supportability and anonymous equity*, Journal of Economic Theory **31** (1983), 176–181.

[14] ——, *Resolution of conjectures on the sustainability of natural monopoly*, Rand Journal of Economics **15** (1984), 135–141.

[15] L.S. Shapley, *On balanced sets and cores*, Naval Research Logistics Quarterly **14** (1967), 453–460.

[16] W.W. Sharkey, *Existence of a core when there are increasing returns*, Econometrica **47** (1979), 869–876.

[17] ——, *Existence of sustainable prices for national monopoly outputs*, Bell Journal of Economics **12** (1981), 144–154.

[18] ——, *Suggestions for a game-theoretic approach to public utility pricing and cost allocation*, Bell Journal of Economics **13** (1982), no. 1, 57–68.

[19] ——, *The theory of natural monopoly*, Cambridge University Press, 1984.

[20] ——, *Game theoretic modelling of increasing returns to scale*, Games and Economic Behavior **1** (1989), 370–431.

[21] J.-M. Siroen, *Marchés contestables, différenciation des produits et discrimination des prix*, Revue Economique **44** (1993), no. 3, 569–591, in French.

[22] X. Vives, *Oligopoly pricing*, MIT Press, 1999.