ARQUIVO PARA A HISTÓRIA DA TEORIA DOS NÚMEROS E DA LÓGICA

Editor Geral: John A. Fossa

SOBRE NÚMEROS AMIGÁVEIS

volume 9

Leonhard Euler

edufrn

Sobre Números Amigáveis

Leonhard Euler

Fabricio Possebon
John A. Fossa
Sarah Mara Silva Leôncio
(TRADUÇÃO E COMENTÁRIO)

Sobre Números Amigáveis

edufrn
Editora da UFRN

Coordenadoria de Processos Técnicos
Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN /
Biblioteca Central Zila Mamede

Euler, Leonhard.
Sobre números amigáveis [recurso eletrônico] / Leonhard Euler ; John A. Fossa, Sarah Mara S. Leôncio, Fabricio Possebon tradução e comentário. – Natal, RN: EDUFRN, 2015.
PDF

ISBN 978-85-425-0524-5

1. Teoria dos números. 2. Lógica matemática. 3. Matemática – números amigáveis. I. Fossa, John A. II. Leôncio, Sarah M. S. III. Fabrício Possebon. IV. Título.

CDD 512.7
RN/UF/BCZM 2015/68 CDU 511

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Com a publicação do presente trabalho, damos continuidade à série *Arquivo para a História da Teoria dos Números e da Lógica*. As referidas áreas, além de serem altamente interessantes do ponto de vista matemático, são primordiais em dois sentidos. Em primeiro lugar, são primordiais no sentido histórico, pois, embora fossem tematizadas matematicamente somente mais tarde, essas duas áreas da matemática foram as primeiras a serem utilizadas em larga escala pelo homem. Em segundo lugar, são primordiais no sentido arquitetônico, pois fornecem os primeiros princípios e métodos, sobre os quais toda a matemática contemporânea é edificada. As características aqui lembradas seriam justificativas suficientes para investigar com seriedade a história das duas áreas; não obstante, há pelo menos mais uma razão importante para se empenhar nesse empreendimento, a saber, a história das referidas áreas pode fornecer ao professor de matemática inestimáveis recursos para o ensino dessa ciência. Assim sendo, esperamos que a presente série contribua tanto para esclarecer melhor a história da Teoria dos Números e da Lógica, quanto para possibilitar mais uso dessa história no ensino da matemática.

Observamos ainda que ligamos a Teoria dos Números com a Lógica na presente série porque sempre foram ligadas ao longo da história. Foi, por exemplo, dentro do contexto da Teoria dos Números que as importantíssimas técnicas lógicas de indução matemática e boa ordenação foram desenvolvidas e, se por "números" entendemos não somente os naturais ou os inteiros, mas suas várias extensões, há um ponto em que a Lógica e a Teoria dos Números se confundam. Assim, não tentaremos entender essas duas áreas de matemática como sendo bem delimitadas e estreitamente compartamentalizadas dentro dessa ciência. De fato, um dos distintivos mais admiráveis da matemática é a maneira em que suas subáreas interagem de formas inesperadas. Desta forma, compreenderemos a Teoria dos Números e a Lógica de maneira bastante lata, situando-as, sempre que possível, dentro do contexto matemático maior; na verdade, nem sempre atentaremos para os limites dessa ciência, pois, quando apropriado, situaremos as referidas áreas dentro do contexto cultural maior das sociedades onde as achamos, pois a matemática é uma parte – uma parte importante – da cultura maior e só podemos alcançar uma boa compreensão de uma ou outra se compreendemos como as duas se inter-relacionam.

O presente volume contém uma tradução de três artigos de Leonhard Euler sobre os números amigáveis, isto é, pares de números (x, y), tais que os divisores próprios (as "partes alíquotas") de x somam a y e os de y somam a x. Também contém um ensaio introdutório que aborda a história dos números amigáveis antes de Euler e tenta esclarecer alguns dos pontos referente aos três artigos traduzidos.

John A. Fossa
Editor Geral dos *Arquivos*

INTRODUÇÃO À HISTÓRIA DOS NÚMEROS AMIGÁVEIS

John A. Fossa

Na presente Introdução, faremos, primeiro, um pequeno esboço da história dos números amigáveis até a época de Euler e, depois, uma rápida análise dos três trabalhos do próprio Euler sobre esse assunto. Os referidos artigos de Euler portam o mesmo título, a saber, *De numeris amicabilius* ("Sobre números amigáveis"), embora sejam bastante diferentes em conteúdo e apresentação. O primeiro, E100[1], publicado na revista *Nova acta eruditorum* em 1747, não passa de uma nota sobre seus resultados referente a esse assunto, mas também contém uma tabela de trinta pares de números amigáveis. Embora haja alguns erros, esse resultado é notável, visto que somente três pares foram conhecidos até então. O segundo artigo, E152, foi publicado na revista *Opuscula varii argumenti* em 1750. Trata-se de um artigo extenso em que Euler descreve seus métodos com certos pormenores e contém uma tabela com 61 itens. Finalmente, o terceiro e último artigo de Euler sobre números amigáveis, E798, foi publicado em *Commentationes*

[1] Os números usados para identificar os trabalhos de Euler são devidos a Gustav Eneström (1856-1923). Representam um esforço no sentido de identificar a ordem cronológica da composição dos mesmos.

arithmeticae em 1849 e, portanto, depois do seu falecimento. Nele, Euler investiga os números amigáveis de forma mais sucinta. Argumentaremos que E798 foi, de fato, seu primeiro artigo sobre o referido assunto.

Números Perfeitos e Números Amigáveis

O conceito de *número perfeito* pode ser dado de forma bastante elegante de forma funcional. Assim, seja **N** o conjunto dos números naturais (inteiros positivos) e seja σ:**N**→N a função definido por $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$, ou seja, σ é a soma de todos os números naturais que dividem[2] o argumento *n*. Assim, um numero[3] *n* será perfeito se, e somente se, $\sigma(n) = 2n$. Apesar da sua elegância, porém, a formulação funcional carece do impacto psicológico da formulação histórica: um número perfeito é qualquer número que é igual à soma das suas *partes alíquotas*. Uma parte alíquota[4] de um número *n* é qualquer número *d* menor que *n* que o divide (isto é, $d, n \in \mathbf{N}$, $d < n$ e $d|n$).

Poderemos, no entanto, recuperar uma formulação funcional mais parecida como a formulação histórica, pondo $\varsigma(n) = \sigma(n)-n$. Então, a condição que defina números perfeitos será dada como $\varsigma(n) = n$. Exemplificamos com $n = 6$, o menor

[2] Observe que a notação $d|n$ significa "*d* divide *n*".
[3] Por *número* (sem qualificação), sempre entenderemos, na presente *Introdução*, "número natural".
[4] As partes alíquotas eram também chamadas de "divisores próprios".

número perfeito. Os divisores (naturais) de 6 são 1, 2, 3 e 6. Logo, $\sigma(6) = 1+2+3+6 = 12 = 2\times6$. Alternativamente, $\varsigma(6) = \sigma(6)-6 = 12-6 = 6$.

Aliado ao referido conceito, temos o conceito de *números amigáveis* que podem ser definidos como pares de números m e n que satisfazem a condição de que $\varsigma(m) = n$ e $\varsigma(n) = m$. Desta forma, os números são amigáveis em pares e dizemos que "m e n são amigáveis" ou, alternativamente, que "m é amigável a n". Assim, deverá ser claro que, se m for amigável a n e u for amigável a v, não será necessariamente o caso de que m é amigável a u. (Há, porém, casos de *ternos* amigáveis). A formulação histórica, equivalente à formulação funcional, é a seguinte: dois números são amigáveis se cada um é igual à soma das partes alíquotas do outro. O exemplo mais fácil de um par de números amigáveis é o seguinte:

$$\varsigma(220) = 1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 = 284$$

$$\varsigma(284) = 1+2+4+71+142= 220$$

e, portanto, 220 e 284 formam um par de números amigáveis.

Uma das vantagens do uso da função σ é que o seguinte resultado é quase imediato:

m e n são amigáveis se, e somente se, $\sigma(m) = m+n = \sigma(n)$.

Como Euler (E152, §XIX) observou, todo número perfeito é amigável a si mesmo. Isto é, por hipótese, $\sigma(n) = 2n$;

logo, $\sigma(n) = n+n = \sigma(n)$ e, portanto, pelo resultado enunciado no parágrafo anterior, n é amigável a si mesmo.

Números Amigáveis na Bíblia?

Há vários estudiosos que afirmam que o conceito de números amigáveis aparece na Bíblia. As explanações que investigamos, porém, não são convincentes. Aqui abordaremos algumas dessas explicações para ilustrar o tipo de argumento usado.

O argumento mais frequente na literatura se refere aos versos 32:14-16 de *Gênesis*,(ver *Bíblia Sagrada*, sem data) em que Jacob presenteia, como gesto de amizade, seu irmão Esaú com 220 animais:

> E Jacob passou a noite naquele lugar. De tudo o que possuía, Jacob escolheu um presente para seu irmão Esaú: duzentas cabras e vinte bodes, duzentas ovelhas e vinte cordeiros, trinta camelos de leite, com suas crias, quarenta vacas e dez touros, vinte jumentas e dez jumentinhos.

O argumento, então, é que Jacob usou os números amigáveis 220 e 284 como um talismã para conquistar a amizade do seu irmão. Segundo R' Eliezer Bulka (2011, p. 1),

> Apparently it was known to the ancients that in order to gain the love of kings and princes, a person would give one of a pair of amicable numbers as a present, keeping the other number for himself. This is so that the factors of the number given add up to the number kept, and the factors of the number

> kept add up to the number given. So this is what Yaakov did. He sent Esav 220 goats, and kept 284 for himself.

Bulka atribui essa interpretação ao R' Nachshon Gaon, um rabino do século IX.

Há, no entanto, vários problemas com essa interpretação (além do fato de que teria sido mais amigável mandar 284 animais para Esaú e ficar com 220 para si!). Em primeiro lugar, embora mandasse 220 cabras (e bodes) e 220 ovelhas (e cordeiros), também mandou 30 camelos fêmeas (mais um número não especificado de filhotes), 50 vacas (e touros) e 30 jumentos e esses outros números não são amigáveis. Em segundo lugar, a análise dos fatores de números não parece ter sido característico do misticismo numérico dos Hebreus. Finalmente, o número 284 não é mencionado na passagem.

Ainda segundo Bulka (2011), R' Nachshon Goan resolveu o último problema mencionado no parágrafo anterior por alegar que em *Gênesis* 32:21, onde Jacob diz que mandaria os presentes antes de si mesmo, há uma referência velada ao número 284. A palavra hebraica para "si mesmo" (אכפרה) é dividida em duas partes, uma das quais tem o valor 285, enquanto a outra indica uma redução. Assim, reduzindo 285 por uma unidade, obtém-se 284. Isto, sim, é um raciocínio típico do misticismo hebraico que provém do sistema de numeração dos hebreus. O referido sistema usa as letras do alfabeto como numerais. Dessa forma, o valor de uma palavra é determinado pela soma dos valores das letras nela ocorridas. Mesmo assim, a arbitrariedade do procedimento torna o argumento pouco convincente.

Um outro uso de números amigáveis é proposta por Harav Yitzchak Ginsburg, um importante interprete do misticismo bíblico. Nasceu nos Estados Unidos em 1944, emigrou para Israel em 1965. Sua interpretação, conforme explicada pelo Gal Einai Institute (sem data), da afinidade entre as três montanhas místicas (Hermon, Grizim e Eval), começa por calcular os seguintes valores para os nomes das montanhas: Hermon = 304, Grizim = 260 e Eval = 112. Em seguida, estes valores são considerados como uma série (finita) e analisados usando a técnica[5] das diferenças das diferenças:

Eval		Grizim		Hermon
112		260		304
	148		44	
		–104		

O número –104 é considerado a base constante das séries. Assim, –104 pode ser iterado quantas vezes que sejam necessárias na última linha, o que permite a extensão das primeiras duas linhas, da seguinte forma:

[5] A referida técnica foi usada pelos pitagóricos; ver Erickson e Fossa (2009).

112 260 304 244 80
148 44 –60 –164
–104 –104 –104

Finalmente, os números da primeira linha são dispostos numa “parábola” da seguinte forma:

304
260 244
112 80

Assim, 244 é chamado “a reflexão oculta” de Grizim, enquanto 60 é “a reflexão oculta” de Eval. Observa-se que 112+304+80 = 496, um número perfeito, e 260+244 = 504, a soma dos números amigáveis 220 e 284. Mas, 496 é o valor do nome *livyatan* (Leviathan ou leviatã), que é quebrado em duas partes para formar, ao acrescentar uma letra (romanizada pelo *ch*), a frase *livyat chen*, “um par gracioso”. A frase tem o valor 504, a soma, como já observamos, dos números amigáveis 220 e 284. De novo, porém, o argumento não é muito convincente, dadas as arbitrariedades envolvidas na interpretação.

Apenas mencionamos o fato de que os números amigáveis são também usados como uma chave interpretativa bíblica por determinar posições relativas de palavras que supostamente teriam alguma relação oculta. Assim, o interprete procura a ducentésima vigésima letra ou palavra de um verso ou capítulo para compará-la com a ducentésima octogésima quarta de outro. Os detalhes não são importantes para nossos propósitos. O que é importante é que o interprete encara seus resultados como um código inerente às palavras bíblicas oriundas de inspiração divina. Desta maneira, não se trata da aplicação consciente de uma teoria matemática à elaboração das escrituras sagradas pelo autor inspirado e, em consequência, não há evidência alguma de que os antigos hebreus conheceram o conceito dos números amigáveis.

Os Pitagóricos

A primeira referência histórica ao conceito de números amigáveis que temos ocorre no tratado *In Nicomachi mathematicam introductionem* de Jâmblico (250 AD - 330 AD). Na tradução dada por Dickson (1952, p. 38), vemos que Jâmblico atribuiu o conhecimento desse conceito não somente aos primeiros pitagóricos, mas também ao próprio Pitágoras:

> According to Iamblichus (pp. 47-48), "certain men steeped in mistaken opinion thought that the perfect number was called Love by the Pythagoreans on account of the union of different elements and affinity which exists in it; for they call certain other numbers, on the contrary, amicable numbers, adopting virtues and social qualities to numbers, as 284 and 220, for the parts of each have the power to generate the other, according to the rule of friendship, as Pythagoras affirmed. When asked what is a

friend, he replied, ‘another I,’ which is shown in these numbers. Aristotle so defined a friend in his Ethics.”

A citação atesta claramente que Jâmblico (ver a Figura 1) conheceu o menor par de números amigáveis (220, 284). No entanto, a atribuição desse conhecimento aos primeiros pitagóricos é inverossímil.

Figura 1. Jâmblico.
Fonte: Apollon Rising (2008).

Em primeiro lugar, observamos que há uma grande afinidade entre o conceito de números perfeitos e o de números amigáveis e, portanto, esperar-se-ia que quem abordasse os primeiros também mencionaria os segundos. No entanto, embora os números perfeitos fossem abordados por vários matemáticos antes de Jâmblico, *nenhum* deles mencionou os números amigáveis. De certa forma, isto é natural em Euclides, pois ele tem um teorema sobre a composição de números perfeitos (a saber: se $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}$ é primo, então $(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1})2^{n-1}$ é perfeito – Proposição IX.36), mas não tem um teorema comparável sobre os amigáveis, o que poderia justificar a ausência destes nos seus *Elementos*. Outros autores, porém, como Têon de Smirna (c. 100 AD) ou Nicômaco de Gerasa (c. 100 AD), faziam listas exaustivas de diferentes categorias de números e, portanto, a ausência de números amigáveis nas suas obras é estranha.

Em segundo lugar, o menor par de números amigáveis contém números relativamente grandes. Isto significa que, por um lado, a descoberta fortuita deles seria dificultada e, por outro lado, uma busca sistemática para eles requeria cálculos extensivos. Ainda mais, dada a complexidade do conceito de números amigáveis, que relaciona dois números, cada um com a soma dos divisores do outro, a aquisição do referido conceito, condição necessária para o empreendimento de uma busca sistemática, não seria um passo óbvio a partir dos números perfeitos.

Finalmente, embora tenhamos a autoridade de Jâmblico para a ciência, por parte dos primeiros pitagóricos, de números amigáveis, também sabemos que os pitagóricos tardios tendiam a atribuir suas próprias descobertas à figura quase mitológica de Pitágoras. Assim, o depoimento do pitagórico Jâmblico não é inteiramente confiável.

Face essas considerações, podemos concluir que o mais provável é que o conceito de números amigáveis foi descoberto na segunda metade do século III, possivelmente pelo próprio Jâmblico. Ainda mais, toda a evidência que temos parece indicar que somente um par de números amigáveis foi conhecido na Antiguidade, a saber, o já mencionado (220, 284).

Figura 2. Nicômaco.
Fonte: O'Connor e Robertson (2008d).

Parece-nos, no entanto, que a descoberta de números amigáveis poderia ter acontecido, de forma natural, na investigação numérica de uma conjectura de Nicômaco (ver a Figura 2). Na sua *Introdução à Aritmética*, ele afirma que

> ... but the perfect numbers are easily enumerated and arranged with suitable order; for only one is found among the units, 6, only one other among the tens, 28, and a third in the rank of the hundreds, 496 alone, and a fourth within the limits of the thousands, that is, below ten thousand, 8,128. NICOMACHUS OF GERASA (1938, p. 209.)

Essa afirmação é predicada na suposição de que a fórmula de Euclides gera todos os números perfeitos, a qual foi afirmada, porém não demonstrada, por Nicômaco.[6] Assim, Jâmblico (ou outro interessado) poderia ter tentado investigar a veracidade da suposição por calcular a soma das partes alíquotas dos números[7] entre 28 e 496. Teria sido um projeto ambicioso, mas inteiramente fatível, especialmente se feito em equipe. Ao tabular os resultados, a relação recíproca entre as somas das partes alíquotas de 220 e 284 teria sido observada, o que ocasionaria a descoberta de números amigáveis.

Observamos explicitamente que o cenário oferecido no parágrafo anterior é uma conjectura interessante e até provável, no entanto, não há qualquer evidência histórica concreta de que, de fato, aconteceu.

Seja isto como for, depois da publicação do *In Nicomachi mathematicam introductionem* de Jâmblico, os números amigáveis – ou melhor, o par de números amigáveis

[6] Euclides, por sua vez, não fez – pelo menos nos seus *Elementos* – essa suposição.
[7] Embora não tivesse sido logicamente correto, é possível que só fossem investigados os números pares entre 28 e 496, pois se achava que não há números perfeitos ímpares. (Isto é ainda uma questão em aberta.)

(220, 284) – foram incluídos em textos ocultos contendo feitiços com fins de ganhar a simpatia de outros e até com fins afrodisíacos. Também apareceram em textos astrólogos e em certos talismãs. Tais manifestações, porém, encerram pouco de interesse matemático.

Thabit ibn Qurra

Al-Sabi Thabit ibn Qurra al-Harrani (ver a Figura 3) nasceu[8] em 836, na importante cidade mesopotâmica de Harran, no que é hoje a parte sudeste da Turquia, na fronteira com a Síria. Sua língua materna era, de fato, siríaco, mas era também fluente em árabe e grego. Era um sabeu, ou seja, membro de uma religião antiga que idolatrava as estrelas e que foi fortemente influenciada pelo conhecimento grego. Embora os sabeus fossem conquistados pelos árabes em 639, não foram forçados a adotar o islamismo. Assim, Thabit foi educado nas tradições eruditas da sua religião e, eventualmente, foi para Bagdá, onde se tornou um eminente astrônomo, matemático e médico. Faleceu em Bagdá em 901.

[8] A informação biográfica sobre Thabit ibn Qurra foi retirada de O'Connor e Robertson (1999).

Figura 3. Thabit ibn Qurra.
Fonte: O'Connor e Robertson (2008e).

Thabit foi ativo na transmissão do conhecimento grego para o mundo árabe, participando numa tradução de *Os Elementos* de Euclides e ainda traduzindo a *Introdução à Aritmética* de Nicômaco. Assim, conheceu o conceito de números perfeitos dessas fontes. Provavelmente também conheceu a *In Nicomachi mathematicam introductionem* de Jâmblico, mas mesmo se não a conheceu, certamente sabia dos números amigáveis a partir dos seus estudos astronômicos (astrológicos). Não se limitou, porém, a repetir o já banal fato de que 220 e 284 são amigáveis, mas descobriu e demonstrou um teorema, parecido com o de Euclides para os números perfeitos, sobre a composição de números amigáveis.

Seguindo Dickson (1952, p. 39) e utilizando notação algébrica moderna, podemos expressar o teorema de Thabit da seguinte maneira:

> Sejam
> $$\begin{aligned} x &= t + 2^n \\ y &= t - 2^{n-1} \\ t &= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n \\ z &= (2^{n+1} + 2^{n-2})2^{n+1} - 1, \end{aligned}$$
> com $n \geq 2$. Então, se x, y e z são primos, $2^n xy$ e $2^n z$ são amigáveis.

Ainda podemos eliminar o parâmetro *t* e simplificar as expressões para *x* e *y*. Com efeito,

$$\begin{aligned} x &= t + 2^n \\ &= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n + 2^n \\ &= (2^{n+1} - 1) + 2^n \\ &= 2 \cdot 2^n + 2^n - 1 \\ &= (2 + 1)2^n - 1 \\ &= 3 \cdot 2^n - 1\,. \end{aligned}$$

De modo análogo, $y = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$. O terceiro número, *z*, também se simplifica, de forma óbvia, a $z = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$. Desta forma, os três números *x*, *y* e *z* só dependam dos valores de *n*. A Tabela 1 dá os valores dos três números *x*, *y* e *z*, bem como os números amigáveis gerados, para os primeiros seis valores de *n*.

Condições				**Amigáveis**	
n	x	y	z	$2^n xy$	$2^n z$
2	11	5	71	220	284
3	23	11	287 NP	---	---
4	47	23	1151	17296	18416
5	95 NP	47	4607 NP	---	---
6	191	95 NP	18431 NP	---	---
7	383	191	73727	9363584	9437056

Tabela 1. Valores calculados pela regra de Thabit.

Legenda: NP = não é um número primo.

A Tabela 1 mostra que nem todo valor de n produz números primos para x, y e z e, portanto, nem todo valor de n produz números amigáveis. Visto que os números envolvidos crescem exponencialmente, a dificuldade na aplicação do teorema de Thabit é determinar se os três números x, y e z são todos primos. Historicamente, isto seria feito usando tabelas de números primos, que por sua vez eram preparadas usando o crivo de Eratóstenes. De fato, o próprio Euler (E100, p. 268) menciona essa dificuldade, causada pelo fato de que as tabelas da sua época se limitaram a primos menores que 100.000, mas na época de Thabit determinar primos da ordem de 10.000 teria sido difícil. É interessante observar que, segundo Hogendijk (1985), Thabit, no seu tratado sobre os números amigáveis, não mencionou os pares de números amigáveis gerados por $n = 4$ e $n = 7$. Assim, em face da referida dificuldade sobre a determinação da primalidade de números relativamente grandes, pode-se questionar se, ou não, Thabit conheceu esses dois pares.

O próprio Hogendijk (1985) argumenta que a demonstração que Thabit deu para seu teorema indica que ele conheceu o par (17296, 18416). A referida demonstração utiliza um caso especial de tal forma a deixar claro como proceder em qualquer outro caso. Esse procedimento era muito comum no mundo antigo, inclusive em Euclides, devido à falta de um simbolismo matemático adequado. Mas, o caso especial que Thabit usou na sua demonstração é precisamente o de $n = 4$, o que gera o par (17296, 18416) de números amigáveis e, portanto, segundo Hogendijk (1985), é bastante provável que Thabit conheceu esse par. O mesmo autor, no entanto, acha que é improvável que Thabit conhecesse o par gerado por $n = 7$.

Na ausência de evidência documental, temos de nos satisfazer com o que é o mais provável e, de fato, o argumento de Hogendijk (1985) é bastante sugestivo. Não obstante, ainda parece-nos provável que Thabit conheceu tanto o par gerado por $n = 4$, quanto o gerado por $n = 7$, pois, visto que o conceito de números amigáveis era de interesse ao Thabit e visto que ele estava de posse de uma regra para gerar tais números, é bastante provável que ele a usaria para tentar descobrir tantos pares quantos possíveis. Os casos $n = 3$, 5 e 6 são muito fáceis, pois 7 é obviamente um fator de 287 e 5 é obviamente um fator de 95. Nesses casos, portanto, as condições do teorema não são satisfeitas e, assim, o mesmo não é aplicável.

No caso de $n = 4$, devemos perguntar como Thabit determinaria que 1151 é primo. Há, parece, só duas opções (equivalentes): ou fez um crivo de Eratóstenes para o número 1151, ou mostrou que 1151 não tem um divisor primo menor ou igual à sua raiz quadrada. A segunda opção parece mais fácil, pois assim só precisaria fazer um crivo até 33 e mostrar que nenhum dos onze primos menores que 33 divide 1151.

Para o caso $n = 7$, o processo indicado no parágrafo anterior, embora trabalhoso, ainda é factível. Para mostrar que 73727 é primo, seria necessário fazer um crivo até o número 271 (que é primo), o que não seria difícil. O crivo forneceria 58 possíveis fatores primos de 73727 e, assim, seria necessário mostrar (por cálculo direto) que nenhum deles é de fato um fator desse número. O próprio Thabit, é claro, não teria feito os cálculos; para tanto, ele teria um grupo de assistentes.

O mesmo processo dificilmente geraria novos números amigáveis para Thabit, além dos três pares constantes na Tabela 1, pois Sarah Mara Silva Leôncio, aluna do presente autor e participante na tradução de E100 e E152, verificou, usando os recursos computacionais do *software* Maple, que, para $8 \leq n \leq 200$, as condições do teorema não são satisfeitas. Mesmo assim, o teorema de Thabit é válido, como ele próprio demonstrou. Podemos, no entanto, validar o teorema por calcular a soma das partes alíquotas dos dois números dados no teorema. Para tanto, lembramos que a soma das partes alíquotas de um número *n* é $\sigma(n) - n$. Ainda mais, visto que os divisores de 2^n são $1, 2, 2^2, \cdots, 2^n$, o valor de $\sigma(2^n)$ é nada mais do que a soma de uma progressão geométrica, enquanto $\sigma(p) = p + 1$, sempre que p é primo. Assim, a única propriedade especial que usaremos da função σ é que ela é uma função multiplicativa[9]. Em primeiro lugar, mostramos que a soma das partes alíquotas de $2^n xy$ é igual ao número $2^n z$:

$$
\begin{aligned}
\sigma(2^n xy) - 2^n xy &= \sigma(2^n)\sigma(x)\sigma(y) - 2^n xy \\
&= (2^{n+1} - 1)3 \cdot 2^n 3 \cdot 2^{n-1} - 2^n(3 \cdot 2^n - 1)(3 \cdot 2^{n-1} - 1) \\
&= 9 \cdot 2^{2n-1}(2^{n+1} - 1) - 2^n(9 \cdot 2^{2n-1} - 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 2^{n-1} + 1) \\
&= 9 \cdot 2^{3n} - 9 \cdot 2^{2n-1} - 9 \cdot 2^{3n-1} + 3 \cdot 2^{2n} + 3 \cdot 2^{2n-1} - 2^n \\
&= 18 \cdot 2^{3n-1} - 9 \cdot 2^{2n-1} - 9 \cdot 2^{3n-1} + 6 \cdot 2^{2n-1} + 3 \cdot 2^{2n-1} - 2^n \\
&= 9 \cdot 2^{3n-1} - 2^n \\
&= 2^n(9 \cdot 2^{2n-1} - 1) \\
&= 2^n z
\end{aligned}
$$

Finalmente, mostramos que a soma das partes alíquotas de $2^n z$ é igual ao número $2^n xy$:

[9] Isto é $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$, sempre que *m* e *n* são primos entre si. A demonstração dessa propriedade é bastante fácil. De fato, Thabit demonstrou um caso especial dessa propriedade (ver Brentjes e Hogendijk, 1989).

$$
\begin{aligned}
\sigma(2^n z) - 2^n z &= \sigma(2^n)\sigma(z) - 2^n z \\
&= (2^{n+1} - 1)(z + 1) - 2^n z \\
&= (2^{n+1} - 1)9 \cdot 2^{2n-1} - 2^n(9 \cdot 2^{2n-1} - 1) \\
&= 2^n(9 \cdot 2^{2n-1} - 9 \cdot 2^{n-1} + 1) \\
&= 2^n(9 \cdot 2^{2n-1} - 6 \cdot 2^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} + 1) \\
&= 2^n(9 \cdot 2^{2n-1} - 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 2^{n-1} + 1) \\
&= 2^n(3 \cdot 2^n - 1)(3 \cdot 2^{n-1} - 1) \\
&= 2^n xy.
\end{aligned}
$$

Claramente, a demonstração de Thabit não procedeu dessa maneira. Na verdade, a regra de Thabit para números amigáveis é, como já mencionamos, muito parecida com a de Euclides para números perfeitos (Proposição IX.36), o que poderia nos levar a suspeitar que tanto a regra de Thabit quanto a sua demonstração foram inspiradas da referida proposição euclidiana. A suspeita foi confirmada pela análise de Brentjes e Hogendijk (1989).

Fermat

Depois do trabalho de Thabit, os números amigáveis foram mencionados em vários textos árabes, mas, neles[10], a menção explícita do par (17296, 18416) só ocorre no século XIV. A partir de, pelo menos, o século XV, o conceito de números amigáveis ocorre em textos astrológicos europeus, sendo mencionado, porém, somente o par (284, 220). Este mesmo par, segundo Dickson (1952), é também mencionado por vários matemáticos, incluindo Nicolas Chuquet (1445-1500),

[10] Hogendijk (1985), no entanto, indica que muitos importantes textos árabes foram perdidos ou ainda não foram analisados.

Michael Stifel (1486-1567), Girolamo Cardano (1501-1576) e Tartaglia (Nicolo Fontana, 1499-1557). Foi só com Fermat (ver a Figura 4), porém, que o par (17296, 18416) foi conhecido pelos europeus.

Figura 4. Fermat.
Fonte: O'Connor e Robertson (2008c).

Pierre de Fermat (1601-1665) foi um oficial do governo francês e um matemático amador que se interessou por muitas questões da Teoria dos Números. Foi, de fato, seu interesse por essa ciência que fez com que a mesma se tornaria, eventualmente, um ramo reconhecido da matemática. Em especial, afirmou, em várias cartas, que havia descoberto não somente um novo[11] par de números amigáveis, a saber, (17296, 18416), mas também um método geral que gerasse um número infinito de tais pares de números. Fazia essa afirmação, por exemplo, em Fermat (1894, p. 72), numa carta a Roberval[12]:

> C'est aussi par là que j'ai trouvé des nombres infinis qui font la même chose que 220 et 284, c'est-à-dire que les parties du premier égalent le second et celles du second le premier. De quoi si vous voulez voir um exemple pour tâter la question, ces deux y satisfont:
>
> 17296 et 18416.
>
> Je m'assure que vous m'avouerez que cette question et celles de sa sorte sont très malaisées; j'en envoyai il y a quelque temps la solution à M. de Beaugrand.

É interessante observar que Fermat não usa aqui o nome "números amigáveis" para essa "questão difícil", mas afirma explicitamente que ele descobriu um número infinito de soluções. Infelizmente, todas as cartas contendo a descrição do seu método foram perdidas, embora uma descrição do mesmo fosse preservada pelo monge francês Marin Mersenne (1588-1648).

A referida descrição de Mersenne é convenientemente reproduzida[13] em Fermat (1894, p. 22):

---

[11] Como veremos mais adiante, Fermat não conhecia o trabalho de Thabit.

[12] Gilles Personne de Roberval (1602-1675), matemático francês. O Beaugrand mencionado na citação é o pouco conhecido matemático francês Jean Beaugrand (c. 1590-1640).

[13] A obra original de Mersenne, da qual a citação foi retirada, é a *Seconde Partie de l'Harmonie Universelle*, publicado em 1637.

> Quant aux deux nombres dont les parties aliquotes se refont mutuellement, il faut aussi mettre les nombres qui se suivent depuis 2 en progression géométrique:
>
> 2, 4, 8, 16, etc.
>
> et puis il faut écrire des nombres triples dessous
>
> 6, 12, 24, 48,
>
> desquels l'unité étant ôtée, restent
>
> 5, 11, 23, 47,
>
> qu'il faut mettre dessus. Il faut enfin multiplier 6 par 12 en ôtant l'unité pour avoir 71; et 12 par 24, moins l'unité, pour produire 2871; et 24 pour 48, moins l'unité, pour avoir 1151, qu'il faut disposer comme on les voit ici, jusqu'à l'infini
>
> 5, 11, 23, 47,
> 2, 4, 8, 16,
> 6, 12, 24, 48,
> 71, 287, 1151,
>
> Lorsque l'un des nombres du dernier ordre avec son oppose et le precedent du premier ordre seront nombres premiers, l'on trouvera des nombres semblables à ceux dont il est question. … et ainsi des autres jusques à l'infini.

Aqui, vemos que Mersenne seguiu Fermat no sentido de não usar o termo "números amigáveis" e de afirmar que, se estendermos as linhas da sua tabela à infinidade, acharemos um número infinito de pares desse tipo de número.

Para deixar o método de Fermat mais claro, numeramos, na Figura 5, as linhas da tabela na ordem da sua construção, indicamos, de forma algébrica, o n-ésimo elemento de cada linha e, ainda, acrescentamos uma linha referente aos valores de n. Assim, a linha (*i*) é simplesmente a progressão dupla, a partir de 2 (não a partir de 1), enquanto linha (*ii*) contém os elementos da linha (*i*) multiplicados por três e a linha (*iii*) contém os elementos de linha (*ii*) diminuídos pela unidade. Tudo isto é explicitamente explicado na descrição de Mersenne. Em contraste, a construção de linha (*iv*) e o cálculo de pares de números amigáveis são apenas exemplificados. Dos exemplos dados de elementos da linha (*iv*), a sua construção é clara, pois o n-ésimo elemento dessa linha é 1 a menos do produto dos n-ésimo e $(n-1)$-ésimo elementos da linha (*iii*).

Referente ao cálculo de números amigáveis, Mersenne dá dois exemplos[14]: um para $n = 2$, resultando no par (220, 284), e um para $n = 4$, resultando no par (17296, 18416). O cálculo para $n = 4$ é ilustrado na Figura 5. Procura-se, na linha (*iii*), um número primo que é precedido, na mesma linha (*iii*), por outro número primo. Assim, o quarto elemento de linha (*iii*) é o número primo 47 e o elemento anterior nessa mesma linha é 23, também primo. Então, é necessário determinar se, ou não, o elemento correspondente da linha (*iv*) é primo. No exemplo, o quarto elemento da linha (*iv*) é o número primo 1151. Sendo assim, um par de números amigáveis é dado pelo produto do referido elemento de linha (*i*) com os dois primos da linha (*iii*) e o produto desse mesmo elemento da linha (*i*) com o primo da linha (*iv*). Como ilustrado na Figura 5, temos que $16 \times 23 \times 47$ e 16×1151 são números amigáveis.

[14] Para não fazer uma citação demasiadamente comprida, os exemplos não foram mantidos na citação feita no texto.

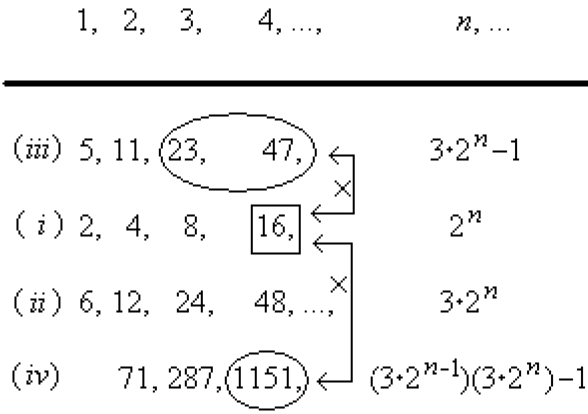

Figura 5. O Método de Fermat.

Quando comparamos a Figura 5 com a Tabela 1, vemos que os elementos da linha (*iii*) e da linha (*iv*) da referida figura são encontrados, respectivamente, na coluna dos *y* e na coluna dos *z* da Tabela 1. Ainda mais, na referida tabela, o *n*-ésimo elemento da coluna dos *x* é o (*n*+1)-ésimo elemento da coluna dos *y*. Isto indica que o método de Fermat é equivalente ao método de Thabit. Isto é, de fato, demonstrado pela representação algébrica. Com efeito, para Fermat, os *n*- e (*n*–1)-ésimos elementos da linha (*iii*) devem ser primos, bem como o *n*-ésimo elemento da linha (*iv*). Mas, esses números são, respectivamente, $3 \cdot 2^2 - 1 = x,\ 3 \cdot 2^{n-1} - 1 = y$ e $(3 \cdot 2^{n-1})(3 \cdot 2^n) - 1 = 9 \cdot 2^{2n-1} - = z$, o três números que precisam ser primos no método de Thabit. O cálculo dos números amigáveis é o mesmo nos dois métodos, pois temos $(3 \cdot 2^{n-1} - 1)(3 \cdot 2^2 - 1)2^n = 2^n xy$ e $[(3 \cdot 2^{n-1})(3 \cdot 2^n) - 1]2^n = 2^n z$.

Visto que os dois métodos são estritamente equivalentes, seria interessante perguntar se Fermat chegou a conhecer, diretamente ou indiretamente, o trabalho de Thabit. Tudo indica, no entanto, que Fermat não teve esse conhecimento. Em primeiro lugar, o próprio Fermat representou seu método como descoberta própria e nenhum contemporâneo seu duvidou disso. Em particular, Mersenne, que mantinha correspondência extensiva com a comunidade científica da época, estaria numa posição de saber se houve algum contato maior com o mundo árabe sobre a teoria dos números amigáveis. Ele, contudo, também representou o método como sendo originário com Fermat.

Em segundo lugar, os tratados árabes mais teóricos sobre os números amigáveis, como o de Thabit, não foram conhecidos na Europa. De fato, os textos árabes que tratavam de números amigáveis e que foram conhecidos na Europa foram textos de astrologia ou magia. Mas, esses textos não somente não continham métodos teóricos, mas também se limitavam a mencionar o par (220, 284) e, portanto, não foram fontes que poderiam transmitir o método de Thabit para Fermat. Observamos que algo parecido ocorria com a aritmética de modo geral, pois os textos científicos dos árabes sobre esse assunto demoraram a ser conhecidos na Europa, enquanto seus textos sobre a aritmética comercial foram difundidos relativamente cedo.

Finalmente, o método de Fermat seria, por assim dizer, uma abordagem natural para quem, tanto como Fermat quanto como Thabit, conhecia Proposição IX.36 de *Os Elementos* de Euclides sobre números perfeitos. Mesmo assim, as diferenças de apresentação do referido método pelos dois matemáticos indicam que se trata de um caso de descoberta independente. De fato, veremos mais adiante que outro contemporâneo de Fermat, René Descartes, também descobriu o mesmo método.

Lembramos que havíamos conjecturado que Thabit, embora ele não o mencionasse, provavelmente conheceu um terceiro par de números amigáveis, o gerado por $n = 7$. Visto que o método de Fermat é equivalente ao de Thabit, será que podemos transportar, *ipso fato*, nossa conjectura para Fermat? Aqui tudo parece indicar que Fermat não conhecia o referido par. De fato, a descoberta de novos pares de números amigáveis inspirava uma pequena competição entre os matemáticos da época de Fermat e, portanto, se Fermat havia efetivamente calculado um terceiro par, teria certamente se gabado do feito entre os colegas. Ainda mais, Fermat, ao contrário de Thabit, era um matemático amador e, assim, não contava com uma equipe de calculadores para fazer as longas operações aritméticas enfadonhas que seriam necessárias para calcular o terceiro par. Finalmente, lembramos a grande diferença entre as atitudes do cientista árabe e o amador francês. Thabit, profundamente influenciado pela cultura grega, acreditava que a matemática revela as verdades ocultas sobre a estrutura do universo e, portanto, o conhecimento de uma maior quantidade de números amigáveis poderia ser uma chave para a compreensão do mundo. Para Fermat, em contraste, os números amigáveis eram apenas curiosidades[15] matemáticas e o tamanho relativamente grande já do segundo par certamente faria com que eles perdessem a fascinação psicológica do primeiro par (220, 284). Sendo assim, podemos conjecturar que enquanto Thabit não poupasse esforços para calcular mais pares de números amigáveis, Fermat pensaria que o esforço de fazer os cálculos não valeria a pena, especialmente dada a sua suposição de que ele estava de posse de um método que poderia gerar um número infinito de pares desses números.

Antes de passarmos para uma descrição da participação de Descartes na procura de números amigáveis, ainda devemos observar que, visto a equivalência entre o método de Fermat e o de Thabit, a suposição de Fermat de que o mesmo forneceria um número infinito de pares desses números parece altamente

[15] O abandono do termo “números amigáveis” na correspondência de Fermat e seus contemporâneos poderá ser um reflexo dessa mudança de atitude.

duvidosa. De fato, já vimos que, para $n \leq 200$, o mesmo gera apenas três pares de números amigáveis e, portanto, a suposição de Fermat carece não somente de sustento teórico, mas também de apoio empírico. Parece que Fermat confiou no que ele acreditava ser "intuitivamente óbvio" sobre o seu método, o que ilustra os perigos de descuidar da importância das demonstrações no processo da verificação de proposições matemáticas.

Descartes

René Descartes (1596-1650) é conhecido historicamente pelas suas contribuições tanto à matemática (especialmente referente ao desenvolvimento da geometria analítica), quanto à filosofia (especialmente em relação ao racionalismo). Ao exemplo de Fermat, Descartes (ver a Figura 6) descobriu um "novo" par de números amigáveis, bem como um método para descobri-los. Seu método, no entanto, não é essencialmente diferente do de Fermat, o que Descartes explicitamente reconheceu, nem, portanto, do de Thabit, e seu novo par é o gerado para o valor $n = 7$ no método de Thabit. Documentaremos essas afirmações a seguir.

Figura 6. Descartes.
Fonte: O'Connor e Robertson (2008a).

Numa carta ao Mersenne, Descartes (1898, p. 93-94) dá a seguinte regra[16] para achar números amigáveis:

[16] Na citação mantemos a ortografia do original. A própria regra é dada em latim, em vez de francês. Assim, damos a seguinte tradução dessa regra: seja tomado 2, ou qualquer outro número produzido apenas pela multiplicação de 2, de tal modo que três vezes o mesmo, menos a unidade, seja um número primo; de forma semelhante, seja seis vezes o mesmo, menos a unidade, um número primo; e, finalmente, seja dezoito vezes seu quadrado, menos a unidade, um número primo; e esse último número primo será prolongado pelo duplo do número original, o que fará assim um número cujas partes alíquotas darão algum número, que terá, vice-versa, partes alíquotas iguais ao primeiro. Assim, por assumir os três números 2, 8, 64, obtenho os seguintes pares de números; e um número infinito de outros podem ser achados pelo mesmo método

284 cujas partes alíquotas são	220, e vice versa.
18416	17296
9437056	9363584

> Leur autre queſtion eſt ce probleſme: trouuer vne infinité de nombres, leſquels eſtant pris deux a deux, l'vn eſt eſgal aux parties aliquotes de l'autre, & reciproquement l'autre eſt égal aux parties aliquotes du premier. A quoy ie ſatisfais par cete regle: ſi ſumatur binarius, vel quilibet alius numerus ex ſolius binarij multiplicatione productus, modo ſit telis vt ſi tollatur vnitas ab eius triplo, fiat numerus primus; item, ſi tollatur vnitas ab eius ſextuplo, fiat numerus primus; & denique ſe tollatur vnitas ab eius quadrati octodecuplo, fiat numerus primus; ducaturque hic vltimus numerus primus per duplum numeri aſſumpti, fiet numerus cuius partes aliquotæ dabunt alium numerum, qui vice verſa partes alíquotas habebit æquales numero præcedenti. Sic aſſumendo três números 2, 8 & 64, habeo hæc tria paria numerorum; aliaque infinita poſſunt inueniri eodem modo
>
> 284 cuius partes aliquotæ sunt 220, & vice verſa.
> 18416 17296
> 9437056 9363584

Assim, Descartes começa com ou 2, ou com um número cujo único fator primo é 2, ou seja, uma potência de 2. Seja t esse número. Então, impõe a condição de que $3t-1, 6t-1$ e $18t^2-1$ sejam todos números primos. Sempre que isto acontecer, $(18t^2-1)2t$ será um de um par de números amigáveis. O seu amigo será achado, presumivelmente (a descrição de Descartes não é muito clara sobre esse ponto), por somar as partes alíquotas do número achado, isto é, de $(18t^2-1)2t$.

Na Tabela 2, exibimos os resultados obtidos pelo método de Descartes para os primeiros seis valores de t. Como já mencionamos, Descartes parece ter indicado que o outro número amigável de cada par seria obtido através de determinar as partes alíquotas do número dado (na última coluna) de Tabela 2.

Seria mais fácil, no entanto, utilizar os valores já dados na tabela, pois o outro elemento do par é dado por $(3t-1)(6t-1)2t$.

Condições				**O Amigo**
t	$3t-1$	$6t-1$	$18t^2-1$	$(18t^2-1)2t$
2	5	11	71	284
4	11	23	287 NP	---
8	23	47	1151	18416
16	47	95 NP	4607 NP	---
32	95 NP	191	18431 NP	---
64	191	383	73727	9437056

Tabela 2. Valores calculados pela regra de Descartes.

Legenda: NP = não é um número primo.

Se compararmos a Tabela 2 com a Tabela 1, veremos que o método de Descartes parece ser estritamente equivalente ao de Thabit e, portanto, ao de Fermat. Para mostrar que isso é de fato o caso, basta observar que $t = 2^{n-1}$, para os valores de *n* dados na Tabela 1. Assim, $3t-1 = 3 \cdot 2^{n-1} - 1 = y$, enquanto $6t-1 = 6 \cdot 2^{n-1} - 1 = 3 \cdot 2^n - 1 = x$ e $18t^2 - 1 = 18 \cdot (2^{n-1})^2 - 1 = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1 = z$. Em consequência, o cálculo dos números amigáveis é dado por $(18t^2-1)2t = 2^n z$ e $(3t-1)(6t-1)2t = 2^n xy$.

Como Fermat, Descartes não teve conhecimento da obra de Thabit, mas numa carta, também para Mersenne, que data apenas uns dois meses depois da carta contendo seu método, ele reconheceu que o seu método é equivalente ao de Fermat. Nas próprias palavras de Descartes (1898, p. 148):

> Le methode de Monſieur de Fermat pour trouuer deux nombres tels que les parties aliquotes de l'vn ſoient reciproquement égales à l'autre, ſe rapporte à la mienne, & n'a rien de plus ny de moins; ...

Mais uma vez, porém, tanto os documentos históricos, quanto as diferenças de apresentação, indicam que Descartes e Fermat descobriram o método de forma independente. Mesmo assim, Descartes teve a paciência de calcular os valores para $t = 64$ e, desse modo, foi reconhecido (entre os europeus) como o descobridor do terceiro par de números amigáveis.

Observamos ainda que, embora Descartes afirmasse que o seu método forneceria um número infinito de pares de números amigáveis, não há, pelas razões já expostas, motivos para aceitar essa afirmação.

van Schooten

Embora vários outros matemáticos do século XVII mencionassem o conceito de números amigáveis, o único outro sobre o qual achamos referência, antes de Euler, que desenvolveu um método “próprio” para descobrir esse tipo de número foi o matemático holandês Frans van Schooten (1615-1660). Filho de um matemático com nome idêntico ao seu, van Schooten (ver a Figura 7) é conhecido como divulgador das ideias de Descartes sobre a geometria analítica e como editor das obras matemáticas de François Viète (1540-1603). Em 1657, van Schooten publicou *Exercitationum mathematicarum libri quinque* (Exercícios matemáticos em cinco livros) que conteve, como apêndice, um importante tratado sobre a probabilidade, escrito por seu aluno, Christian Huygens (1629-1695). É, no entanto, com o quinto livro do corpo do texto de van Schooten que nos interessaremos, pois é nesse lugar que ele expôs o seu método para achar números amigáveis.

Figura 7. van Schooten.
Fonte: O’Connor e Robertson (2008f).

Antes de prosseguir para a explicação de van Schooten, porém, seria interessante observar que Ed Sandifer[17] (2006a, p. 1) relatou que o propósito dos *Exercitationum* foi o de explicar como se acha números amigáveis. No entanto, o referido texto de van Schooten é, de fato, uma grande introdução, contendo mais do que 500 páginas, à aritmética, geometria e álgebra. Nele, os números amigáveis compõem apenas um dos tópicos discutidos no quinto livro, cujo próprio título, "Trinta Miscelâneas Seções", não parece apoiar a tese de que o tópico em questão era o tópico central do texto.

Voltemos agora a nossa atenção para o método de van Schooten, que consiste em relacionar elementos, a, da progressão dupla com três primos ímpares distintos x, y, z, de tal forma que ax e ayz sejam números amigáveis. Expressou cada caso em termos de uma equação algébrica e determinou os valores que a satisfazem, determinando assim os vários pares de números amigáveis correspondentes a cada caso.

Como o primeiro caso, van Schooten (ver Schooten[18], 1657, p. 420) considerou $a = 4$. Nesse caso, os números amigáveis terão a forma $4x$ e $4yz$. Visto que x é um primo diferente de 2, as partes alíquotas de $4x$ são 1, 2, 4, x e $2x$. Desta forma, dada a definição de números amigáveis, temos

[17] Ver também Sandifer (2006).

[18] Nas referências, o nome do autor é dado, conforme o original, em latim: Francisci à Schooten.

$$1 + 2 + 4 + x + 2x = 7 + 3x = 4yz.$$

Simplificando obtemos $\quad x = \frac{4yz-7}{3}$

ou seja $\quad 4x = \frac{16yz-28}{3}.$

De forma semelhante, as partes alíquotas de $4yz$ são 1, 2, 4, y, $2y$, $4y$, z, $2z$, $4z$, yz e $2yz$. Assim, temos

$$7 + 7y + 7z + 3yz = 4x = \frac{16yz - 28}{3}$$

ou seja $\quad 16yz - 28 = 21 + 21y + 21z + 9yz.$

Van Schooten então resolveu, separadamente[19], para y e z:

$7yz - 21y = 21z + 49$	$7yz - 21z = 21y + 49$
$(z-3)y = 3z + 7$	$(y-3)z = 3y + 7$
$y = \frac{3z+7}{z-3}$	$z = \frac{3y+7}{y-3}$
$y = 3 + \frac{16}{z-3}$	$z = 3 + \frac{16}{y-3}$

Neste ponto, van Schooten simplesmente afirmou que o valor de z deve ser 5. Explicitaremos o seu pensamento. Para y ser um número primo, é necessário que também seja inteiro. Assim, z–3 deve ser um divisor de 16. Além disto, z deve ser um

[19] Esse procedimento é claramente desnecessário.

número primo maior que 3, tal que $z-3 \leq 16$ ou seja, $z \leq 19$. As possibilidades podem ser organizadas da seguinte maneira, onde ND indica que $z-3$ não divide 16:

z	$z-3$	$\frac{16}{z-3}$	y
5	2	8	11
7	4	4	7
11	8	2	5
13	10	ND	---
17	14	ND	---
19	16	1	4

Para o valor $z = 7$, temos que $y = 7$, o que contradiz a condição de que y e z são distintos. Para o valor $z = 19$, y não é primo. Assim, só resta $z = 5$ e $y = 11$, pois o contrário ($z = 11$ e $y = 5$) não é um caso distinto deste.

Agora basta usar os valores de y e z para calcular o valor de x e, em seguida, os números amigáveis:

$$x = \frac{4yz - 7}{3} = \frac{4 \cdot 11 \cdot 5 - 7}{3} = 71$$

$$4x = 4 \cdot 71 = 284$$

$$4yz = 4 \cdot 11 \cdot 5 = 220.$$

Assim, o procedimento mostra que o único par de números amigáveis que tem a forma $(4x, 4yz)$, sendo x, y, z primos ímpares distintos é (284, 220).

No intuito de mostrar que (284, 220) é o menor par de números amigáveis, van Schooten começou a investigar os casos em que a, nas fórmulas ax e ayz, é um elemento da progressão dupla e menor que 4. Assim, investigou primeiro o caso em que $a = 2$, obtendo a equação

$$y = 1 + \frac{4}{z-1}$$

e mostrou que, dada a condição de que y e z são primos ímpares distintos, essa equação não tem solução.

Em seguida, van Schooten nem menciona o caso em que $a = 1$, pois é óbvio que o número primo x (que só tem a unidade como parte alíquota) não pode ser amigo de um produto de dois primos. Mas, ainda procurou pares de números amigáveis tendo as formas $(2x, yz)$ e (xy, xyz). Mostrou que não há pares de números amigáveis tendo estas formas e concluiu, em consequência desse resultado, que (284, 220) é o menor par do referido tipo de número.

Em seguida, van Schooten investigou vários casos em que o elemento a da progressão dupla é maior que 4. Assim, para $a = 8$, $a = 32$ e $a = 64$, não há solução, enquanto, para $a = 16$, obtemos o par (18416, 17296) e, para $a = 128$, obtemos (9437056, 9363584). Ainda finalizou a sua discussão de números amigáveis por citar a regra de Descartes e mostrar, como exemplos, os cálculos, segundo a referida regra, para os três casos em que se acha pares de números amigáveis.

De certa forma, podemos dizer que van Schooten não avançou a teoria dos números amigáveis além do ponto que já havia alcançado por Thabit e redescoberto por Fermat e Descartes. No entanto, sua abordagem foi muito importante, porque, em vez de oferecer apenas uma regra a ser seguida para calcular pares de números amigáveis, aplicava a álgebra à descoberta desse tipo de número. Ao fazer isto, abriu a possibilidade de que os vários casos investigados fornecessem mais do que um par do tipo procurado (embora essa possibilidade não foi realizada) e estabeleceu um método sistemático para exaurir todas as possibilidades de cada caso. Foi, no entanto, limitado referente à natureza dos casos investigados. Euler, como veremos a seguir, utilizou essa mesma metodologia de aplicar a álgebra à questão e investigar sistematicamente os casos resultantes, mas, seu procedimento foi mais abstrato e mais habilidoso do que o de van Schooten e, com isso, descobriu muito mais pares desses números.

Euler: E100

O primeiro trabalho de Euler sobre números amigáveis (E100) é intitulado, igualmente aos dois trabalhos posteriores sobre o mesmo assunto, *De numeris amicabilius* ("Sobre números amigáveis"). Foi publicado originalmente na revista científica *Nova acta eruditorum* em 1747 e republicado, em 1849, no segundo volume das *Commentationes arithmeticae* (editadas por P. H. Fuss e Nicolaus Fuss) e, em 1915, no segundo volume da primeira série (*Opera Mathematica*) dos *Opera Omnia* de Euler (editados por Ferdinand Rudio). Trata-se de um artigo bastante curto, ocupando apenas duas páginas e meia (uma das quais consiste em uma tabela) da revista *Nova acta*. A tradução apresentada na presente obra apareceu em Fossa e Leôncio (2009).

Figura 8. Euler.
Fonte: O'Connor e Robertson (2008b).

No referido artigo (E100), Euler observou que, apesar de ser um assunto muito interessante, problemas sobre as propriedades de números (ou seja, o que hoje chamamos de Teoria dos Números) não haviam atraído a atenção de muitos matemáticos. Mesmo assim, alguns matemáticos importantes haviam se interessados por questões como a dos números amigáveis. Nesse contexto, mencionou especificamente Descartes e van Schooten, os quais, segundo Euler, gastaram muitos esforços para descobrir exemplos desse tipo de número com parcos resultados. Atribuiu aos dois referidos matemáticos um método para achar números amigáveis da forma $2^n xy$ e $2^n z$, sendo *x*, *y*, *z* números primos que obedeçam as condições de que $z = xy + x + y$ e $2^n(x + y + 2) = xy + x + y + 1$.

Para aplicar as fórmulas mencionadas no parágrafo anterior, Euler apenas indicou que, para cada *n*, devemos procurar valores de *x* e *y* que satisfazem a segunda equação e, em seguida, certificarmos que produzem um número primo para *z*. Para ilustrar melhor como o método funciona, exemplificaremos o mesmo no caso em que $n = 2$. Assim, queremos achar *x*, *y* primos que satisfazem a equação

$$2^2(x + y + 2) = xy + x + y + 1.$$

Simplificando, obtemos

$$y = 3 + \frac{16}{x-3}.$$

As soluções (*x*, *y*) que satisfazem essa equação são: (5, 11), (7, 7) e (11, 5). Quando $x = y$, contudo, $xy + x + y$ não pode ser primo e (11, 5) claramente não é uma solução, no presente contexto, distinto de (5, 11). Assim, calculando o valor de z para $x = 5$, $y = 11$, obtemos $z = xy + x + y = 5 \cdot 11 + 5 + 11 = 71$, que é um número primo. Logo, $(2^2 \cdot 5 \cdot 11, 2^2 \cdot 71) = (220, 284)$ é um par de números amigáveis.

O exemplo mostra claramente que o método citado por Euler é, de fato, o de van Schooten e, portanto, é muito provável que foi a leitura de van Schooten que inspirou Euler a abordar a questão de números amigáveis de forma algébrica. Mesmo assim, observamos que a apresentação de Euler é bastante mais geral do que a de van Schooten e, portanto, Euler já deveria ter desenvolvido seu método mais geral antes de escrever o presente artigo. Essa conclusão é também corroborada pelo fato de que Euler juntou ao E100 uma tabela de "trinta" pares de números amigáveis.

Mais adiante, na presente Introdução, voltaremos a discutir a tabela mencionada no parágrafo anterior em relação aos recursos que Euler usou para calculá-la. No momento, apenas faremos algumas observações. Itens I, II e III da tabela são, respectivamente, o par conhecido na antiguidade, o "descoberto" por Fermat e o "descoberto" por Descartes. São os únicos três pares que foram produzidos pelo método mencionado por Euler em E100. Finalmente, observamos que itens XIII, XXIII e XXIV não são números amigáveis, embora no caso dos itens XXIII e XXIV trata-se de pequenas imprecisões que provavelmente resultaram de erros de composição gráfica. O erro de item XIII, em contraste, ainda não foi esclarecido.

Euler: E152

O segundo artigo de Euler sobre os números amigáveis é E152, publicado originalmente, em 1750, no segundo volume de *Opuscula varii argumenti* e, como E100, republicado nas *Commentationes arithmeticae* e nos *Opera Omnia*. Trata-se de um trabalho extenso em que Euler explicou em detalhes seu método para achar o mencionado tipo de número. Revisaremos o conteúdo desse artigo agora.

Depois de repetir as suas observações de E100 sobre a escassez dos resultados dos seus predecessores, agora mencionando também Stifel (mas curiosamente não Fermat), Euler definiu o conceito de números amigáveis, bem como o da função soma dos divisores, que ele representou por $\int$, um "s" estilizado, representando a palavra[20] *summa* ("soma"). Em seguida, mostrou, efetivamente, que $\int$ é uma função multiplicativa e, em seguida, demonstrou como calcular $\int n$ para qualquer n pertencente ao conjunto dos números naturais. Apesar do fato de que ele havia obtido a fórmula geral para $\int p^k$, onde p é primo e k natural, ainda acrescentou uma tabela de vários desses valores

[20] O mesmo símbolo, usado para representar a integral, tem a mesma origem semântica.

para os primos menores que mil. A referida tabela contém várias erros, que são anotados na tradução.

A procura, propriamente dito, para números amigáveis começa em §XVII, onde o problema é enunciado, e onde Euler mostrou que os números m e n são amigáveis se, e somente se, $\int m = \int n = m + n$. Observe que essa equação significa que a soma de todos os divisores (*não* somente das partes alíquotas) de m é igual à soma dos de n.

Em seguida, Euler pôs um limite na sua investigação, pois observou que não se sabe se há, ou não, números que são primos entre si que também são amigos. Desta forma, restringiu sua investigação a pares que tem um fator comum (seja ele primo ou composto). Sendo então a o fator comum, procura-se números amigáveis tendo as formas algébricas am e an. Sob a condição de que a é coprimo tanto com m, quanto com n, obtêm-se, do resultado do parágrafo anterior, as seguintes consequências:

$$(i.) \qquad \int m = \int n$$

$$(ii.) \qquad \frac{a}{\int a} = \frac{\int m}{m+n} = \frac{\int n}{m+n}$$

$$(ii'.) \qquad a(m+n) = \int a \cdot \int n.$$

Para obter ($i.$), temos da referida fórmula, $\int am = \int an = am + an$; assim, desprezando a segunda equação e utilizando a propriedade multiplicativa da função "soma dos divisores", $\int a \cdot \int m = \int a \cdot \int n$, do qual $\int a$ pode ser cortada.

De forma semelhante, obtém-se (*ii.*), da qual (*ii'.*) é uma consequência imediata.

Destes resultados é fácil derivar as condições enunciadas por Euler em E100. Com efeito, sejam[21] $a = 2^n$, $m = xy$ e $n = z$. Então, por (*i.*), obtemos $\int z = \int xy = \int x \cdot \int y$, ou seja, $z + 1 = (x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1$. Mas, isto se reduz a $z = xy + x + y$. Além disto, temos, por (*ii'.*), $2^n(xy + z) = (2^{n+1} - 1)(x + 1)(y + 1)$. Substituindo a expressão de z que acabamos de mostrar, isto se reduz, sem maiores complicações, a $2^n(x + y + 2) = xy + x + y + 1$.

Observamos, no entanto, que Euler não procedeu da maneira indicada no parágrafo anterior, pois manteve uma postura mais geral para melhor começar a sua investigação por casos. Embora observasse que potências de primos podem ser contidas na decomposição de m e/ou n, ele se limitou a considerar casos da grande categoria em que os dois referidos números são compostos apenas de primos distintos. No caso mais simples, em que m e n são primos distintos, teremos, de (*i.*) e pelo fato de que $\int p = p + 1$ para qualquer primo p, que $m = n$, o que contradiz a hipótese. Assim, nesse caso, não se acha qualquer par de números amigáveis.

---

[21] Há uma ambiguidade nessas fórmulas, pois um dos números amigos é an e $a = 2^n$, embora as duas ocorrências de n se referem a números distintos. Permitimos a ambiguidade para manter a notação de Euler, visto que a mesma é eliminada com a substituição de $n = z$ em an, mas não em 2^n.

O próximo caso a ser considerado, então, contém pares da forma (*apq*, *ar*), onde *p*, *q* e *r* são primos distintos. De novo, por (*i.*), obtemos $r+1=(p+1)(q+1)$. Mas, aqui Euler reduziu o número de variáveis por fazer $x=p+1$ e $y=q+1$. Resolvendo por *p*, *q* e *r*, então, concluiu que, para $(a(x-1)(y-1), a(xy-1))$ ser um par de números variáveis da referida forma, precisamos que $x-1$, $y-1$ e $xy-1$ sejam números primos.

Além disso, precisamos satisfazer a equação (*ii'.*), ou seja, $a(pq+r)=\int ar$. Ao substituir os valores para *p*, *q* e *r* e simplificar (usando (*i.*) e o fato de que $\int(xy-1)=xy$, visto que $xy-1$ é primo), obtemos $xy\int a=2axy-ax-ay$. Ao resolver para *y*, essa equação se reduz a $y=\frac{ax}{(2a-\int a)x-a}$. Para simplificar isto ainda mais, Euler fez a substituição $\frac{a}{2a-\int a}=\frac{b}{c}$, onde $\frac{b}{c}$ é de forma reduzida, o que, depois de um pouco de manipulação algébrica, produz a equação $y=\frac{bx}{cx-b}$. Finalmente, a equação é multiplicando por *c*, dando $cy=\frac{bcx}{cx-b}$, e a variável *x* é eliminado do numerador, dividindo o mesmo pelo denominador, resultando em $cy=b+\frac{b^2}{cx-b}$; isto, ao eliminar a fração, se torna:

$$(iv.)\qquad (cx-b)(cy-b)=b^2.$$

No caso em que $a = 2^n$, temos que $\frac{a}{2a - \int a} = \frac{2^n}{2 \cdot 2^n - (2^{n+1} - 1)} = 2^n$. Desta forma, $b = 2^n$ e $c = 1$. Logo, a equação (*iv.*) torna-se $(x - 2^n)(y - 2^n) = (2^n)^2 = 2^{2n}$. Cada fator do primeiro lado dessa equação deve ser uma potência de 2, pois somente potências de 2 são divisores de 2^{2n}. Logo, $x - 2^n = 2^r$ e $y - 2^n = 2^s$, onde $r+s = 2n$. Assim, Euler fez $r = n+k$ e $s = n-k$, obtendo as seguintes condições:

$$x - 2^n = 2^{n+k}$$

$$y - 2^n = 2^{n-k}.$$

Euler ainda fez mais uma substituição, pondo $n = m+k$, o que transforma as referidas condições nas seguintes:

$$x - 2^{m+k} = 2^{m+2k}$$

$$y - 2^{m+k} = 2^m.$$

Lembrando que, para obter pares de números amigáveis, precisamos fazer que $x - 1$, $y - 1$ e $xy - 1$ sejam números primos, as condições calculadas são usadas para determinar fórmulas para esses três números, resultando nas seguintes:

$$x - 1 = 2^m(2^{2k} + 2^k) - 1,$$

$$y - 1 = 2^m(1 + 2^k) - 1,$$

$$xy - 1 = 2^{2m}(2^{2k+1} + 2^{3k} + 2^k) - 1.$$

Para cada valor de *k*, obteremos uma regra específica que será satisfeita, ou não, para os valores dados a m. No primeiro caso, isto é, *k* = 1, obtemos

$$x - 1 = 2^m(2^2 + 2) - 1 = 6 \cdot 2^m - 1,$$

Regra I $$y - 1 = 2^m(1 + 2) - 1 = 3 \cdot 2^m - 1,$$

$$xy - 1 = 2^{2m}(2^3 + 2^3 + 2) - 1 = 18 \cdot 2^m - 1.$$

Esta é a regra dada por Descartes, que já sabemos satisfeita por *m* = 1, 3 e 6 e que fornece os três pares de números amigáveis conhecidos antes da época de Euler.

Para os valores *k* = 2, 3, 4, e 5 nenhum par de números amigáveis foi produzido porque, para os valores de *m* investigados, nem todos os três números $x - 1$, $y - 1$ e $xy - 1$ foram números primos.

Assim, Euler voltou à equação (*iv.*), substituindo novos valores para *a*. A partir do valor atribuído para *a*, Euler sempre calculou $\frac{a}{2a - \int a}$ para determinar *b* e *c*, escolhendo *a* com o intuito de fazer *c* = 1 ou uma potência de 2. Em seguida, procurou os fatores do quadrado perfeito b^2 e por intermédio deles definiu os números $x - 1$, $y - 1$ e $xy - 1$. Visto que o procedimento é, em cada novo caso, parecido com o já exposto e sendo a exposição de Euler é bastante clara, prescindiremos dos detalhes, nos limitando a situar a descoberta de cada novo par de números amigáveis no texto de E152 através de uma série de tabelas. Nas referidas tabelas, organizadas pelas formas algébricas dos números amigáveis obtidos, identificamos o parágrafo do texto de E152 em que Euler explica cada regra, os pares de números amigáveis associados a cada regra, bem como o parágrafo do texto em que cada par aparece e o lugar em que o mesmo aparece na tabela dado no artigo E100.

A Tabela 3 refere ao que Euler chamou de “Problema 1” (§XXVII) e consiste em doze pares de números amigáveis que têm a forma (*apq*, *ar*), onde *p*, *q* e *r* são primos distintos, sendo todos eles coprimos com *a*. Observamos que Euler não achou qualquer par através da Regra II.

Regra	**§**	**Amigos**	**§**	**Item de E100**
I	XXIX	$2^2 \cdot 5 \cdot 11$ e $2^2 \cdot 71$	XXXI	I
		$2^4 \cdot 23 \cdot 47$ e $2^4 \cdot 1151$	XXXIII	II
		$2^7 \cdot 191 \cdot 383$ e $2^7 \cdot 73727$	XXXIV	III
II	XL	------	---	---
III	XLVII	$4 \cdot 23 \cdot 5 \cdot 137$ e $4 \cdot 23 \cdot 827$	XLIX	IV
IV	LI	$4 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 389 \cdot 509$ e $4 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 198899$	LIV	---
V	LVI	$3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 19$ e $3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 239$	LVII	V
		$3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 17$ e $3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 107$	LVIII	VI
		$3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 41$ e $3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 251$	LIX	VII
		$3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 569$ e $3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 17099$	LXI	---
		$3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 89$ e $3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2699$	LXII	---
		$3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 461$ e $3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19403$	LXIII	---
		$3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 53 \cdot 1889$ e $3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 102059$	LXIV	---

Tabela 3. Números amigáveis da forma (*apq*, *ar*).

O segundo problema que Euler considerou em E152 (§LXVI) é o de achar pares de números amigáveis da forma (*apq*, *ars*), onde *p*, *q*, *r*, *s* são primos distintos, coprimos com o termo comum *a*. Para tanto, a estratégia básica do Problema 1 é usada, mas, em vez de achar um quadrado perfeito a factorar, ele achou um número da forma $PQ = b^2(\alpha+\beta)^2 - 2bc\alpha\beta$, onde $\frac{b}{c}$ é a forma reduzida de $\frac{a}{2a-\int a}$ e $p = \alpha x - 1$, $q = \beta y - 1$, $r = \beta x - 1$, $s = \alpha y - 1$, e $\alpha\beta xy$ é a soma dos divisores de *pq* (ou *rs*). Os números amigáveis[22], então, serão $(a(\alpha x-1)(\beta y-1), a(\beta x-1)(\alpha y-1))$, onde $x = \frac{P+b(\alpha+\beta)}{c\alpha\beta}$ e $y = \frac{Q+b(\alpha+\beta)}{c\alpha\beta}$. Substituindo, obteve

$$p = \frac{P + b\alpha + (b-c)\beta}{c\beta}, \quad q = \frac{Q + b\beta + (b-c)\alpha}{c\alpha}$$

$$r = \frac{P + b\beta + (b-c)\alpha}{c\alpha}, \quad s = \frac{Q + b\alpha + (b-c)\beta}{c\beta}$$

Assim, o método consiste em calcular *b* e *c* a partir do valor suposto para *a* e atribuir valores para α e β, o que permite o cálculo do produto PQ. As várias maneiras de fatorar esse produto em P e Q são investigadas com o intuito de fazer *p*, *q*, *r* e *s* primos.

A Tabela 4 sistematiza os quarto pares desse tipo calculados por Euler referente ao Problema 2; nela, suprimos a

[22] Para mais detalhes, ver §LXVI.

coluna referente à “regra” utilizada porque Euler não usou essa terminologia para os mencionados itens.

Amigos	**§**	**Item de E100**
$2^2 \cdot 5 \cdot 131$ e $2^2 \cdot 17 \cdot 43$	LXVIII	VIII
$2^8 \cdot 383 \cdot 9203$ e $2^8 \cdot 1151 \cdot 3067$	LXIX	---
$3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 47$ e $3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 31$	LXX	XXII
$3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 71$ e $3^3 \cdot 5 \cdot 31 \cdot 17$	LXXI	XX

Tabela 4. Números amigáveis da forma (apq, ars).

Visto que os cálculos necessários na solução do Problema 2 produzem poucos números amigáveis, mas requerem muitos esforços, Euler abandonou essa abordagem, generalizando um pouco o problema. Procurou, então, pares de números amigáveis da forma (apq, afr), onde, como sempre, p, q e r são primos distintos e coprimos com a, mas onde f poderá ser composto. Mesmo sendo composto, no entanto, f é tido como coprimo com a e r de tal forma que $\int afr = \int a \int f \int r$. Isto é denominado Problema 3 (§LXXIII).

A solução procede da mesma forma em que foi feita nos problemas anteriores, pondo $\frac{a}{2a-\int a} = \frac{b}{c}$, enquanto $\int f = gh$. Ao fazer várias substituições algébricas, obteve $e = bf - bgh + cgh$ e

PQ = *bbgh*+*be*(*f*–1), de tal forma que $x = \frac{P+bg}{e}$ e $y = \frac{Q+bh}{e}$; quando *f* é primo, essas expressões se simplificam um pouco. As várias maneiras de fatorar $\int f$ como *gh* e de fatorar PQ são investigadas com o intuito de obter os três primos *p*, *q* e *r*. Para mais detalhes, veja §LXXIII. Euler ainda reformulou o método (veja §. LXXXVIII.), mas a reformulação não é essencialmente diferente da primeira versão.

Entre os pares de números amigáveis fornecidos por esse método, Euler achou $(4 \cdot 17 \cdot 43,\ 4 \cdot 5 \cdot 131)$, em §LXXVIII, e ($3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 71$, $3^3 \cdot 5 \cdot 31 \cdot 17$), em §XCVIII, que já eram dados como soluções ao Problema 2; as outras duas soluções achadas referente ao Problema 2 não reapareceram na discussão de Problema 3. Os quatorze pares novos gerados pelo presente método são sistematizados na Tabela 5.

Amigos	***f***	**§**	**Item de E100**
4·13·107 e 4·5·251	5	LXXVIII	IX
4·43·2267 e 4·5·13·1187	5·13	LXXXII	---
8·23·59 e 8·17·79	17	LXXXVI	X
8·383·1907 e 8·11·23·2543	11·23	LXXXVII	---
8·467·1151 e 8·11·23·1871			---
8·647·719 e 8·11·23·1619			---

16·167·1103 e 16·17·10303	17	LXXXX	XII
16·239·383 e 16·17·5119			XIV
16·149·191 e 16·19·1439	19	LXXXXI	---
16·103·107 e 16·23·467	23	LXXXXII	---
16·89·127 e 16·23·479			---
16·53·607 e 16·23·1367			XI
16·53·79 e 16·47·89	47	LXXXXIV	---
16·809·51071 e 16·17·167·13679	17·167	XCVI	---

Tabela 5. Números amigáveis da forma (*apq*, *afr*), sendo que *f* pode ser composto.

Observamos ainda que, no §XCV, Euler afirmou que (16·1409·129503, 16·17·151·66739) será um par de números amigáveis, caso 129503 for um número primo. O referido número, contudo, sendo igual a 11·11773, não é primo. No entanto, o par não é listado na tabela de números amigáveis dado em E100, nem no catálogo dado no fim do artigo em aprecio (E152).

Também observamos que, na sua justificativa para reformular Problema 2 (§LXXIII), Euler mencionou que (2^4·19·8563, 2^4·83·2039) seria um par de números amigáveis, de difícil cálculo, dado pelos valores $\alpha = 5$ e $\beta = 21$, ou $\alpha = 1$ e $\beta = 102$. No entanto, é fácil verificar, por cálculo direto, que o mencionado par não é amigável. De fato, usando esses valores para α e β, se obtém $(2^4\cdot 19\cdot 8567,\ 2^4\cdot 83\cdot 2039)$, onde $8567 = 13\cdot 659$ e, portanto não primo. O suposto[23] par de números amigáveis $(2^4\cdot 19\cdot 8563,\ 2^4\cdot 83\cdot 2039)$ consta como item XIII da lista dada em E100, mas não consta no catálogo de E152. Assim, podemos conjecturar que depois de fazer os cálculos, ao verificar se 8567 constava na tabela de números primos, Euler, ou seus assistentes, confundiu os números, o que seria facilitado pela semelhança dos dois primos mais pertos, 8563 e 8573, com 8567. Talvez mais provável ainda, pode ser que a lista de números primos usada por Euler tivesse, erroneamente, o número 8567. Em qualquer caso, o erro resultaria.

No Problema 4 (§XCIX), procura-se pares de números amigáveis da forma (*agpq*, *ahr*), onde p, q e r são primos distintos, enquanto g e h podem ser compostos, mas, como sempre, coprimos com os primeiros para garantir que a multiplicidade da função $\int$ pode ser usado livremente. Os números b e c são calculados como anteriormente e $\frac{\int g}{\int h} = \frac{m}{n}$. Agora $e = b(mh+ng)-(2b-c)m\int h$ e o número a ser fatorado é $nnbbgg+nb(h-g)e = \mathrm{MN}$, dando $x = \frac{M+nbg}{e}$ e $y = \frac{N+nbg}{e}$ (ver §XCIX). Euler, apesar de afirmar que o método é profícuo, só

[23] Deve ser claro que, apesar de 8563 ser primo, não é o número gerado pelo método e, por isso, o referido par não é amigável.

deu dois exemplos de pares de números amigáveis calculados pelo mesmo (ver a Tabela 6). Em ambos os exemplos, tomou *g* e *h* como primos, o que lhe permitiu uma representação paramétrica fácil de *g*, *h*, *e* e MN. Através da investigação dos valores do parâmetro, ele achou, em cada caso, os três primos *p*, *q* e *r* que precisava para formar os pares de números amigáveis.

Amigos	***g***	***h***	**§**	**Item de E100**
$10 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 673$ e $10 \cdot 7 \cdot 60659$	23	7	CV	XXV
$3^2 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 17 \cdot 397$ e $3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 21491$	23	7	CVI	---

Tabela 6. Números amigáveis da forma (*agpq*, *ahr*).

No Problema 5 (§CVIII), o último formulado em E152, Euler mudou o seu ponto de vista, pois, em vez de considerar o termo comum dado, ele supôs que outros fatores do par fossem dados e procurou o termo comum para o qual o par seria amigável. Especificamente, procurou pares de números amigáveis da forma (*zap*, *zbq*), onde *p*, *q* são números primos e *a*, *b* quaisquer números dados, enquanto *z* é o termo comum desconhecido. Como sempre, embora implicitamente, supôs *a*, *b* coprimos com *p*, *q* para poder usar a propriedade multiplicativa da função ∫.

Assim, considerou $\frac{\int a}{\int b} = \frac{m}{n}$, sendo o segundo membro uma fração irredutível. Por (*i*.), tem-se que $\int a \cdot (p+1) = \int b \cdot (q+1)$. Euler então pôs $p+1 = nx$ e $q+1 = mx$, o que lhe permitiu calcular uma expressão para a razão $\frac{z}{\int z}$ em termos de *a*, *b*, *m*, *n* e uma incógnita *x*. A expressão é igualada à fração reduzida $\frac{r}{s}$. Depois de um pouco de manipulação algébrica, chegou as seguintes condições:

1. $s \geq \int r$
2. $\frac{z}{\int z} > \frac{1}{2}$, ou seja, *z* é um número deficiente
3. $s < 2r$, ou seja, *r* é um número deficiente.

Em relação à condição (2.), temos $\int z < 2z$, ou seja, $\int z - z < z$ e, assim, a soma das partes alíquotas de *z* é menor do que o próprio *z*, o que é a definição de "número deficiente". Considerações semelhantes se aplicam à condição (3).

Finalmente, Euler analisou a fração $\frac{r}{s}$. Se $s = \int r$, então *r* = *z*. Se, porém, $s > \int r$, os fatores (potências de primos) de *z* são extraídos um a um por comparar a fração com a referida expressão para $\frac{z}{\int z}$. O processo termina quando se acha uma fração da forma $\frac{u}{\int u}$. Para detalhes, veja §CVIII. Os pares de números amigáveis novos são sistematizados na Tabela 7.

Amigos	a	b	§	Item de E100
$3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 163 \cdot 5 \cdot 977$ e $3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 163 \cdot 5867$	5	1	CX	---
$3^2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 887$ e $3^2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 7103$	7	1	CXI	---
$3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 53 \cdot 11 \cdot 211$ e $3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 53 \cdot 2543$	11	1	CXII	---
$16 \cdot 67 \cdot 37 \cdot 2411$ e $16 \cdot 67 \cdot 227 \cdot 401$	37	227	CXIV	---
$32 \cdot 37 \cdot 12671$ e $32 \cdot 227 \cdot 2111$				XVI
$3^2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 47$ e $3^2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 227 \cdot 7$				---
$3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 1583$ e $3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 227 \cdot 263$				XXIII
$3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 79 \cdot 1103$ e $3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 367$	79	$11 \cdot 19$	CXV	XXVII
$3^2 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 79 \cdot 1103$ e $3^2 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 367$				XXIX
$3^2 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 359$ e $3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 59 \cdot 179$	$17 \cdot 19$	$11 \cdot 59$	CXVI	XXX

Tabela 7. Números amigáveis da forma (*zap*, *zbq*).

Visto que o presente problema é, por assim dizer, a inversa dos problemas anteriores, alguns dos pares de números amigáveis já achados pelos métodos anteriores são achados de novo aqui. Isto aconteceu com os pares contidos nas linhas I, IV, V, VI, VII e VIII da tabela dado em E100. De fato, o par menor (220, 284) é achado duas vezes, uma para $a = 5$, $b = 1$ e uma para $a = 11$, $b = 1$.

A Lista de E100

Das Tabelas 3-7 da seção anterior, vimos que Euler calculou, no seu segundo trabalho sobre números amigáveis (E152), 42 pares distintos desse tipo de número. Deles, 21 se encontram na lista de 30 pares dada em E100. Itens I, II, e III da lista, como já vimos, são os pares calculados por Thabit, ou, nos termos dos contemporâneos de Euler, os que foram descobertos, respectivamente, pelos antigos, por Fermat e por Descartes. Isto deixa nove itens da lista que não foram explicados por Euler em E152. Abordaremos esses itens agora.

Em primeiro lugar, observamos que o item XIII não é um par de números amigáveis. Isto foi discutido na seção anterior e, portanto, não carece de mais explanações aqui.

A Tabela 8 relaciona os itens da lista dada em E100 com os métodos usados a calculá-los em E152. A entrada 1(r1), por exemplo, indica que Euler usou o método de Problema 1, Regra 1. Os itens calculados tanto por um dos métodos de 1 a 4, quanto o método "inverso" 5, são indicados. O símbolo *** indica que o item pertence à lista de E100, mas não aparece em E152 como um exemplo calculado (poderá aparecer no catálogo de números amigáveis no final de E152). Observe que, embora item XIII não é um par de números amigáveis, a explicação dada por Euler indica que ele usou tanto o método de Problema 2, quanto o de Problema 3, para calculá-lo.

Bloco 1		Bloco 2		Bloco 3		Bloco 4	
Item	**Prob.**	**Item**	**Prob.**	**Item**	**Prob.**	**Item**	**Prob.**
		VIII	2; 3; 5				
		IX	3				
		X	3				
		XI	3				
I	1(r1); 5	XII	3				
II	1(r1)	XIII	2: 3				
III	1(r1)	XIV	3	XXIV	***	XXVII	5
IV	1(r3); 5	XV	***	XXV	4	XXVIII	***
V	1(r5); 5	XVI	5	XXVI	***	XXIX	5
VI	1(r5); 5	XVII	***			XXX	5
VII	1(r5); 5	XVIII	***				
		XIX	***				
		XX	2; 3				
		XXI	***				
		XXII	2				
		XXIII	5				

Tabela 8. Método de solução dos itens da lista de E100.

A tabela *sugere* que Euler estruturou a sua lista pela ordem dos problemas. Isto é muito claro em relação aos primeiros sete itens, pois sua ordem segue a ordem dos subcasos, denominados de “regras” por Euler. Parece que há, no entanto, uma inversão da ordem dos métodos referentes ao Problema 2 e ao Problema 3. Também é necessário explicar o fato de que o método do Problema 5 não se limite ao Bloco 4 da tabela. Lembramos, porém, que o referido método é um “método inverso” que necessitava de um novo ponto de vista, ou seja, necessitava de um novo começo e isso acarretou que vários pares, já calculados por um dos métodos anteriores, reapareceram nos cálculos feitos segundo o método do Problema 5. Assim, é inteiramente possível que os itens anômalos XVI e XXIII foram primeiramente calculados usando, respectivamente, o método do Problema 3 e o do Problema 2; depois seriam calculados pelo método do Problema 5, sendo que Euler simplesmente não incluiu os primeiros cálculos nos seus exemplos em E152. Dessa forma, podemos *conjecturar* que os oito itens na lista de E100 foram calculados pelo método referente ao bloco em que aparecem na Tabela 8. A conjectura é consoante com a forma de cada um desses oito itens, embora devamos observar que essa consideração não é determinativa visto que a forma dos itens não é única.

Passaremos agora a fazer algumas observações específicas sobre os oito itens da lista de E100 que não aparecem em E152.

Item XV é ($2^5\cdot59\cdot1103$, $2^5\cdot79\cdot827$) e a sua forma poderá ser (*apq*, *afs*), de tal maneira a indicar o uso do método do Problema 3. Assim, teríamos $a = 32$, $b = 32$ e $c = 1$, enquanto $gh = 80$. Desta forma, $e = 48$, PQ = 201728 = 64·3152 e temos

$$x = \frac{64+32\cdot16}{48} = 12, \quad y = \frac{3152+32\cdot5}{48} = 69$$

e

$$p = hx-1 = 5\cdot12-1 = 59$$

$$q = gy-1 = 16\cdot69-1 = 1103$$

$$r = xy-1 = 12\cdot69-1 = 827.$$

O mesmo par resulta do método do Problema 2 tomando a sua forma como (*apq*, *ars*), quando se coloca $\alpha = 3$, $\beta = 4$, o que é Caso V discutido por Euler em §LXVII.

Item XVII, sendo ($2^5\cdot53\cdot10559$, $2^5\cdot79\cdot7127$), também tem a forma (*apq*, *afs*) e, portanto, poderia ser resolvido pelo método do Problema 3. Aqui, temos, de novo, $a = b = 32$, $c = 1$ e $gh = 80$; desta forma, ainda temos $e = 48$ e PQ = 201728. Esta vez, porém, fatoramos *gh* como 40·2 e PQ como 16·12608, o que resulta em $x = 27$ e $y = 264$, os quais geram os três primos $p = 53$, $q = 10558$ e $r = 7127$. Ao usar o método do Problema 2, achamos PQ = 4527616 e $\alpha = 27$, $\beta = 40$. Estes valores, que precisam ser conjeturados, para α e β são, contudo, relativamente altos e não são contemplados por Euler em E152. Assim parece mais provável que ele havia usado o Problema 3.

Para o item XVIII, ou seja ($2^6\cdot79\cdot11087$, $2^6\cdot383\cdot2309$), a situação é a mesma dos dois casos anteriores. Resolvendo pelo método do Problema 3, temos $a = b = 64$, $c = 1$ e $gh = 384$. Assim, temos $e = 320$ e PQ = 9396224. Esse produto pode ser fatorado, da forma requerida, em duas maneiras: P = 128, Q = 73408 com $g = 48$, $h = 8$, ou P = 64, Q = 146816 com $g = 24$, $h = 16$. No primeiro caso, $x = 10$, $y = 231$, enquanto no segundo, $x = 5$, $y = 462$. Todas as duas fatorações fornecem o par sob consideração. Isto ilustra o fato de que frequentemente há várias fatorações que dão o mesmo resultado (contudo, não anotaremos as fatorações alternativas nas análises restantes). Podemos usar o método do Problema 2 para gerar esse par por escolher $\alpha = 5$, $\beta = 24$.

Em item XIX $((2^2\cdot 11)\cdot 17\cdot 263, (2^2\cdot 11)\cdot 43\cdot 107)$, o termo comum, 44, não é simplesmente uma potência de um só primo. Mesmo assim, usando o método do Problema 3, $\frac{a}{2a-\int a} = \frac{11}{1} = \frac{b}{c}$ e, assim, $c = 1$, um resultado que Euler sempre procura, pois simplifica os cálculos. Temos também que $b = 11$ e $gh = 44 = 22\cdot 2$. Assim, $e = 33$ e PQ = 20570 = 55·374. Desta forma, $x = 9$ e $y = 12$. Ao usar o método do Problema 2, a solução seria dada pelos valores $\alpha = 9$, $\beta = 22$.

A posição de item XXI na Tabela 8 indica que Euler usou o método do Problema 2 para gerá-lo. De fato, o referido item, $((3^2\cdot 5\cdot 13)\cdot 29\cdot 79, (3^2\cdot 5\cdot 13)\cdot 11\cdot 199)$, tem a mesma parte comum do Exemplo 3 do parágrafo §LXX, onde ele mostra que para esse valor de a obtemos $b = 15$ e $c = 2$. O par é gerado ao escolher $\alpha = 2$, $\beta = 5$, o que é item VII do parágrafo §LXVII de E152. Usando as fórmulas deduzidas no referido parágrafo, obtemos PQ = 10425 = 15·695. Interessantemente, o par gerado é item XXI, mas com a ordem trocada. Isto não parece significativo, mas, em qualquer caso, poderíamos inverter a ordem por tomar $\alpha = 5$, $\beta = 2$. É também fácil calcular esse item usando o método do Problema 3, pois temos $gh = 12$ e, portanto, $e = 9$ e PQ = 4050 = 30·135. A solução é dada pela fatoração $g = 4$, $h = 3$.

A forma do item XXIV $((3^2\cdot 5)\cdot 31\cdot 89,\ (3^2\cdot 5)\cdot 7\cdot 11\cdot 29)$, bem como a sua posição na tabela de E100, indica que deveríamos usar o método do Problema 4 para calculá-lo. Para tanto, obtemos, a partir do valor $a = 3^2\cdot 5$, que $b = 15$ e $c = 4$. Pomos $\frac{\int g}{\int h} = \frac{1}{4}$, de tal maneira que $m = 1$ e $n = 4$. Observamos que isto seria uma escolha muito natural, pois, nos seus exemplos em E152, Euler optou para $m = 1$, $n = 3$ (Caso I, §CI) e m=3, $n = 1$ Caso II, §CIV). De qualquer forma, visto que $\frac{\int g}{\int h} = \frac{1}{4}$ é de forma reduzida, pomos $\frac{\int g}{\int h} = \frac{1k}{4k}$ e temos, supondo g e h primos, $g = k–1$ e $h = 4k–1$. Assim, $e = 16k–75$, MN = $16\cdot 225(k–1)^2+60(3k)e = (ex–60(k–1))(ey–60(k–1))$ e

$$x = \frac{\mathrm{M}+60(k-1)}{e}, \quad y = \frac{\mathrm{N}+60(k-1)}{e}.$$

Para $k = 8$, obtemos $e = 53$ e MN = 216·1170, de tal forma que $x = 12$ e $y = 30$, o que fornece o par procurado.

Item XXVI $(2^3\cdot 31\cdot 11807,\ 2^3\cdot 11\cdot 163\cdot 191)$ se situa no limite entre os itens resolvidos pelo método do Problema 4 e os resolvidos pelo método do Problema 5. No primeiro caso, teríamos $\frac{\int g}{\int h} = \frac{3}{8} = \frac{m}{n}$, enquanto, no segundo, teríamos $\frac{\int a}{\int b} = \frac{2}{123} = \frac{m}{n}$. Isto indica que deveríamos usar o método do Problema 4. Aqui, temos $b = 8$ e $c = 1$, com $g = 3k-1$ e $h = 8k-1$. Assim, para $k = 4$, $e = 8$ e MN $= 608\cdot 832$, o que fornece $x = 164$, $y = 192$; esses valores geram o par procurado.

Finalmente, o item XXVIII ($2^3\cdot 47\cdot 2609$, $2^3\cdot(11\cdot 59)\cdot 173$) é obtido ao utilizar o método do Problema 5. Para tanto, a (= 47) e b (= $11\cdot 59$) são conhecidos e procuram-se os primos p, q e o termo comum z. Mas, $\frac{\int 47}{\int 11\cdot 59} = \frac{1}{15}$, de tal forma que $m = 1$ e $n = 15$. Isto é típico dos exemplos desse método que Euler nos apresentou, pois sempre escolheu a e b de tal forma que $\int b$ seja um múltiplo de $\int a$ (de fato, escolheu $b = 11\cdot 59$ no exemplo dado em parágrafo §CXVI). Assim, pomos $p = 15x-1$ e $q = x-1$, fazendo com que $\frac{z}{\int z} = \frac{2^3\cdot 3^2\cdot 5x}{677x-348}$. Visto que z deve ser deficiente e 6 é um número perfeito, eliminamos 9, pondo $x = 9r+3$. Obtemos $\frac{z}{\int z} = \frac{2^3\cdot 5(9r+3)}{677r+187}$. Mas, 40 é um número abundante; logo, eliminamos 5, pondo $r = 5s-1$. Isto nos dá $\frac{z}{\int z} = \frac{2^3(45s-6)}{677s-98}$. Visto que s deve ser par, pomos $s = 2t$, obtendo $\frac{z}{\int z} = \frac{2^3\cdot(90t-6)}{1354t-98}$. Compondo estas mudanças de variáveis, temos $x = 9r+3 = 9(5s-1)+3 = 9(5\cdot 2t-1)+3 = 90t-6$. Substituindo, nas equações para p e

q, obtemos $p = 1350t–91$ e $q = 90t–7$. Para $t = 1$, p e q são primos, mas $\frac{z}{\int z} = \frac{2^2 \cdot 41}{157}$, o que não satisfaz a condição de que $s \geq \int r$. Para $t = 2$, $p = 2609$, $q = 173$ e $\frac{z}{\int z} = \frac{2^3}{15}$, ou seja, $z = 2^3$. Assim, o par procurado é gerado pelo método.

Não podemos afirmar que Euler calculou esses oito pares da forma aqui indicada, pois não somente há a indeterminação em relação ao método usado, mas também indeterminações referentes à aplicação de cada método. A análise feita desses oito itens, contudo, mostra que os métodos de Euler são suficientes para gerar todos esses pares.

O Catálogo de E152

Ao final de E152, Euler acrescentou um "Catálogo de Números Amigáveis", contendo 61 itens. Destes, 27 itens são da lista apresentada ao final de E100. Os itens de E100 que não aparecem no Catálogo são[24] os de número VIII ($2^2 \cdot 5 \cdot 131, 2^2 \cdot 17 \cdot 43$), IX ($2^2 \cdot 5 \cdot 251, 2^2 \cdot 13 \cdot 107$) e XIII ($2^4 \cdot 19 \cdot 8563, 2^4 \cdot 83 \cdot 2039$). Curiosamente, tanto item VIII, quanto item IX, são mencionados em E152. De fato, item VIII é mencionado quatro vezes, sendo calculado[25] pelos métodos do Problema 2, Problema 3 e do Problema 5, enquanto item IX foi

[24] Os editores das *Commentationes* afirmam que foram quarto, mas a confusão foi esclarecida pelo editor dos *Opera omnia*.
[25] Também foi citado como um exemplo em §XV.

calculado pelo método do Problema 3. Em contraste, item XIII, como já comentamos, não é um par de números amigáveis. Observamos ainda que, em §XCV de E152, Euler calculou o par $(2^4 \cdot 1409 \cdot 129503, 2^4 \cdot 17 \cdot 151 \cdot 66739)$, afirmando que seria amigável caso 129503 seja primo. Com efeito, sendo divisível por 11, o referido número não é primo. Assim, Euler acertou em deixá-lo fora do catálogo.

Dos 34 itens novos apresentados no Catálogo, 22 são discutidos no próprio E152. Dois (os últimos dois) não são gerados pelos métodos explicados no artigo, pois um dos elementos de cada um desses dois pares não é coprimo com a parte comum. Ainda mais, o item XXXIV $(3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 11 \cdot 220499, 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 89 \cdot 29399)$ não é amigável, pois 220499 (= 311·709) não é primo. Analisaremos, de forma sucinta, os nove itens restantes a seguir.

Para item XXXIX, ((2·5)·7·19·107, (2·5)·47·359), usamos o método do Problema 4. Temos b =5, c =1, m = 1, n = 6, g = k–1, h = 6k–1, e = 6k–35. Para k = 8, obtemos MN = 59700 = 50·1194, x = 20 e y = 108.

Para XLVII, (2^3·(11·29)·239, 2^3·191·449), usamos o método do Problema 3. Temos b = 8, c = 1, f = 11·29 e gh = 360, sendo e = 32. Fazendo g = 15, h = 24, obtemos PQ = 104448 = 136·768 e x = 8, y = 30.

Para XLVIII, $(2^3\cdot(29\cdot47)\cdot59\ ,\ 2^3\cdot17\cdot4799)$, usamos o método do Problema 3. Temos $b = 8$, $c = 1$, $f = 29\cdot47$ e $gh = 1440$, sendo $e = 824$. Fazendo $g = 240$, $h = 6$, obtemos PQ = 9070464 = 552·16432 e $x = 3$, $y = 20$.

Para L, $(2^4\cdot(23\cdot47)\cdot9767,\ 2^4\cdot1583\cdot7103)$, usamos o método do Problema 3. Temos $b = 16$, $c = 1$, $f = 23\cdot47$ e $gh = 1152$, sendo $e = 16$. Fazendo $g = 48$, $h = 24$, obtemos PQ = 571392 = 288·1984 e $x = 66$, $y = 148$.

Para LII, $((3^2\cdot7\cdot13)\cdot(5\cdot17)\cdot1187,\ (3^2\cdot7\cdot13)\cdot131\cdot971)$, usamos o método do Problema 3. Temos $b = 9$, $c = 2$, $f = 5\cdot17$ e $gh = 108$, sendo $e = 9$. Fazendo $g = 6$, $h = 18$, obtemos PQ = 15552 = 36·432 e $x = 22$, $y = 54$.

Para LVI, $((3^4\cdot7\cdot11^2\cdot19)\cdot47\cdot7019,\ (3^4\cdot7\cdot11^2\cdot19)\cdot389\cdot863)$, usamos o método do Problema 5. Temos $a = 47$, $b = 389$, $\int a = 48$, $\int b = 390$, $m = 8$ e $n = 65$. Depois de eliminar 5 e 16 da expressão para $\frac{z}{\int z}$, obtemos $x = 80u+28$; para $u = 1$, temos que $p = 65x-1$ e $q = 8x-1$ são números primos, enquanto $\frac{z}{\int z} = \frac{81}{160} = \frac{3^4}{11^2} \cdot \frac{11^2}{2^5\cdot5} = \frac{3^4}{11^2} \cdot \frac{11^2}{7\cdot19} \cdot \frac{7}{2^3} \cdot \frac{13}{2\cdot7}$.

Para LVII, $((3^4\cdot7\cdot11^2\cdot19)\cdot53\cdot6959,\ (3^4\cdot7\cdot11^2\cdot19)\cdot179\cdot2087)$, usamos o método do Problema 5. Temos $a = 53$, $b = 179$, $\int a = 54$, $\int b = 180$, $m = 3$ e $n = 10$. Depois de eliminar 5 e 4 da expressão para $\frac{z}{\int z}$, obtemos $x = 20t-4$; para $t = 35$, temos que $p = 10x-1$ e $q =$

$3x–1$ são números primos, enquanto $\frac{z}{\int z} = \frac{81}{160}$. Assim, z é calculado como para item LVI.

Para LVIII, $((3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19) \cdot 47 \cdot 7019, (3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19) \cdot 389 \cdot 863)$, usamos o método do Problema 5. Os cálculos são idênticos com os feitos para item LVI, exceto para a determinação de z, que se faz da seguinte maneira: $\frac{z}{\int z} = \frac{81}{160} = \frac{3^5}{2^2 \cdot 7 \cdot 13} \cdot \frac{7 \cdot 13}{3 \cdot 2^3 \cdot 5} = \frac{3^5}{2^2 \cdot 7 \cdot 13} \cdot \frac{13}{2 \cdot 7} \cdot \frac{7^2}{3 \cdot 2^2 \cdot 5} = \frac{3^5}{2^2 \cdot 7 \cdot 13} \cdot \frac{13}{2 \cdot 7} \cdot \frac{7^2}{3 \cdot 19} \cdot \frac{19}{2^2 \cdot 5}$. Observamos que a Tabela das Somas de Divisores é um assessório útil para o cálculo alternativo de $\frac{z}{\int z}$. Para um exemplo semelhante calculado pelo próprio Euler, ver a dedução de itens XLI e XLII em §CXV de E152.

Para LVIX, $((3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19) \cdot 53 \cdot 6959, (3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19) \cdot 179 \cdot 2087)$, usamos o método do Problema 5. Os cálculos são idênticos com os feitos para item LVII, sendo z calculado como para item LVIII.

Procedimentos Numéricos

Itens LX e LXI do Catálogo de Números Amigáveis têm formas distintas das dos outros itens do Catálogo porque a parte comum de um dos amigos não é coprimo com a parte restante. Devido a isso, a multiplicidade da função $\int$ não pode ser usada na parte comum e, em consequência, os métodos ensinados nos cinco problemas do texto não são aplicáveis. É possível que Euler houvesse modificado um ou mais dos seus métodos para obter esses dois resultados. Não obstante, achamos isto pouco provável, pois, vista a "satisfação" com que ele apresentou esses itens, presumivelmente teria apresentado o método se o existisse. Assim, parece mais provável que usasse métodos numéricos para calcular os referidos itens. O procedimento que proporemos, como será evidente no que segue, é parecido com o cálculo de z no método do Problema 5 e também faz uso da Tabela das Somas de Divisores. Como veremos, Euler também usou um método relacionado com nossa sugestão em E798. Todo isto poderá aumentar a credibilidade da hipótese de que isto foi, de fato, o procedimento usado por Euler. No entanto, devemos sublinhar que a mesma não passa de uma hipótese.

Para explicar os dois itens, partiremos da suposição de que Euler investigou a possibilidade de haver números amigáveis da forma $(a^m\text{A}, a^{m+n}\text{B})$, onde a é um número primo que não divide A, nem B. Investigaremos apenas o caso em que $a^m = 8$ e $a^{m+n} = 32$.

Para Item LX, $(2^3 \cdot 19 \cdot 41, 2^5 \cdot 199)$, o ponto de partida será a forma $(2^3 \cdot p \cdot q, 2^5 \cdot r)$, onde p, q e r são primos ímpares distintos. Precisamos satisfazer os seguintes dois requisitos:

(*i.*) $\int(2^3 \cdot p \cdot q) = \int(2^5 \cdot r)$

(*ii.*) $2^3 \cdot p \cdot q + 2^5 \cdot r = \int(2^5 \cdot r)$.

Para investigar (*i.*), podemos usar a multiplicidade de $\int$ se não a restringirmos apenas à parte comum (2^3). Assim, obtemos

$$\int 2^3 \int p \int q = \int 2^5 \int r,$$

ou seja,

$$3 \cdot 5 \int p \int q = 3^2 \cdot 7 \int r.$$

Para a igualdade ser satisfeita, precisamos um fator de $3 \cdot 7$ no lado esquerdo e um fator de 5 no lado direito. Assim, pomos $\int p \int q = 3 \cdot 7xy$ e $\int r = 5z$, obtendo

$$(3 \cdot 5) \cdot 3 \cdot 7xy = (3^2 \cdot 7) \cdot 5z.$$

Desta maneira, pomos $\int p = 3 \cdot 7x$ e procuramos, na Tabela de Soma de Divisores, um primo p cujos divisores somam a $3 \cdot 7x$. Achamos $p = 41$, o que faz com que a igualdade se reduz a (pondo $x = 2$ e $t = 2z$)

$$(3 \cdot 5)(2 \cdot 3 \cdot 7)y = (3^2 \cdot 7) \cdot 2 \cdot 5t.$$

Mas, isto significa que $t = y$, de tal forma que $\int q = y$ e $\int r = 2 \cdot 5y$. Assim, $q = y–1$ e $r = 10y–1$. Pondo os valores achados na condição (*ii.*), obtemos

$$2^3 \cdot 41 \cdot (y - 1) + 2^5 \cdot (10y - 1) = 63(2 \cdot 5y).$$

Resolvendo, obtemos $y = 20$, o que fornece os valores procurados, $q = 19$ e $r = 199$.

Para item LXI, $(2^3 \cdot 41 \cdot 467, 2^5 \cdot 19 \cdot 233)$, o ponto de partida será a forma $(2^3 \cdot pq, 2^5 \cdot rs)$, onde p, q, r e s são primos ímpares distintos. As condições agora (devido à presença do quarto número primo ímpar, s) assumem as seguintes formas:

(*i.*) $\int(2^3 \cdot p \cdot q) = \int(2^5 \cdot r \cdot s)$

(*ii.*) $2^3 \cdot p \cdot q + 2^5 \cdot r = \int(2^5 \cdot r \cdot s)$.

Seguindo os passos iniciais do item anterior, obtemos

$$(3 \cdot 5) \cdot 3 \cdot 7xy = (3^2 \cdot 7) \cdot 5tz.$$

Assim, procuramos, na Tabela das Somas de Divisores, um número primo *r* tal que $\int r$ é um múltiplo de 5. O primeiro que achamos é r = 19 e, em consequência, pomos t = 4. Mas, ao colocar 4 no membro esquerdo da equação para manter a igualdade, percebemos que $2 \cdot 3 \cdot 7 = \int 41$ e, assim, pomos x =2 e y = 2u, obtendo

$$(3 \cdot 5)(2 \cdot 3 \cdot 7)2u = (3^2 \cdot 7)(2^2 \cdot 5)z.$$

Isto significa que u = z e, assim, $\int q = 2z$, enquanto $\int s = z$. Logo, q = 2z–1 e s = z–1. Pondo os valores achados na condição (*ii*.), obtemos

$$2^3 \cdot 41(2z - 1) + 2^5 \cdot 19(z - 1) = 63 \cdot 20z.$$

Resolvendo, temos z = 234, o que fornece os valores procurados, q = 467 e s = 233.

Finalmente, observamos que o par de números amigáveis $(2^5 \cdot 37, 2 \cdot 5 \cdot 11^2)$, aparentemente desconhecido por Euler, foi descoberto por B. N. I. Paganini e anunciando nos *Atti della reale accademia delle scienze di Torino*, volume 2, 1866-1867. Várias circunstâncias contribuíram para o romantismo deste episódio, incluindo o fato de que se trata do segundo menor par, bem como o de que Paganini só teve 16 anos na época da descoberta. Ainda mais, o método da descoberta usado não foi revelado, o que levou vários historiadores a supor que a façanha procedeu por tentativa e erro. Isto, no entanto, é bastante inverossímil. Assim, concluímos que o seu método deveria ter composto de uma busca associada a algum procedimento numérico, provavelmente amparado por uma tabela de somas de divisores – possivelmente a do próprio Euler.

Sugerimos o seguinte cenário. Paganini teria observado que, se (A, B) é um par de números amigáveis, frequentemente acontece que há dois primos p e q tais que p divide A, q divide B e $\int p = n \int q$, ou tais que $m \int p = n \int q$, onde m e n são números primos. Isto acontece com frequência devido à condição de que $\int A = \int B$. Talvez depois de um pouco de experimentação, ele teria observado que $\int 11^2 = 7 \cdot 19$, enquanto $\int 37 = 2 \cdot 19$ e, em consequência, teria armado a seguinte equação:

$$7 \cdot (2 \cdot 19) = 2 \cdot (7 \cdot 19).$$

Isto fornece o par $(2^2 \cdot 37, 3 \cdot 11^2)$. Isto, porém, não é um par de números amigáveis porque, embora satisfaça a condição (*i.*), não satisfaz a condição (*ii.*). Assim, prosseguindo, ele procuraria uma soma que é um múltiplo de 7, o que acontece para $3^2 \cdot 7 = \int 2^5$. Ao multiplicar sua equação por 9, obteria

$$(3^2 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 19) = 3 \cdot 6 \cdot (7 \cdot 19),$$

o que fornece o par $(2^5 \cdot 37, 2 \cdot 5 \cdot 11^2)$. Visto que esse par satisfaz também a condição (*ii.*), é amigável.

De novo, a nossa sugestão é apenas uma hipótese. No entanto, faz mais sentido supor que a façanha de Paganini não foi baseada apenas em um incrível golpe de sorte, mas numa busca inteligente associada a algum procedimento numérico – mesmo se o procedimento dele fosse, como é de esperar, menos sofisticado do que o método numérico presumivelmente usado pelo Euler.

Euler: E798

O terceiro artigo de Euler sobre números amigáveis não foi publicado durante a vida de Euler. Foi achado entre seus papéis depois do seu falecimento e publicado pela primeira vez em 1849 no segundo volume das *Commentationes arithmeticae*. Foi republicado nos *Opera omnia* e nos *Opera póstuma*. Há evidência interna de que o artigo é inacabado e, assim, se supõe que o mesmo é uma tentativa tardia de Euler de retomar o material do segundo artigo de forma mais sucinta e mais elegante. No entanto, acredito que uma análise mais profunda de E798 mostra que é, de fato, o primeiro artigo que escreveu sobre os números amigáveis. Presumivelmente, abandonou a tarefa ao mudar sua abordagem por a de E152. Se isto estiver correto, E100 poderá ser considerado uma nota sobre trabalho em andamento, o que explicaria o estranho fato (ver Sandifer, 2006) de que Euler não fez, em E100, comentário algum sobre os métodos usados para calcular os 30 itens nele contidos.

Antes de prosseguir para o referido artigo, porém, é interessante observar que também há evidência externa para o ponto de vista exposto no parágrafo anterior, pois, segundo Eneström (2004), “According to C. G. J. Jacobi, it was read to the Berlin Academy on February 23, 1747.” Assim, parece que, na verdade, o artigo foi produzido na mesma época de E100.

Quando investigamos E798 de perto, vemos que a impressão de ela ser mais elegante provém da sua generalidade. Nesse caso, porém, a generalidade é um defeito, pois implica que é mais difícil gerar pares de números amigáveis por seus métodos. É só quando Euler, em E152, adaptou seus métodos algébricos às possíveis formas algébricas dos números amigáveis, que ele foi capaz de elaborar métodos específicos mais eficazes para gerar os mesmos. Desse modo, quando E798 é lido à luz de E152, aquele parece ser uma versão preliminar deste. De fato, o próprio Euler, em parágrafo §14, indicou sua insatisfação com a generalidade do seu método. Observamos ainda que a notação usada para a soma dos divisores é um tanto primitiva. Usou A para representar a soma dos divisores de a, enquanto usaria $\int a$ em E152. Este é mais flexível e representa melhor a natureza funcional da soma dos divisores.

Em termos dos pares de números amigáveis apresentados em E798, constatamos apenas os seguintes itens, todos constantes na lista de 30 pares dados em E100 (são listados pela numeração da lista de E100):

I	VI	XIV
II	VII	XVI
III	VIII	XIX.
IV	IX	

Os primeiros três são os que eram conhecidos antes de Euler, o que significa que apresentou apenas oito pares novos. Não há par algum em E798 que aparece em E152, mas não em E100. Isto também parece indicar a anterioridade de E798.

O artigo começa com algumas considerações gerais e observações históricas e depois deduz alguns resultados sobre a função soma de divisores e números perfeitos. Em relação a números perfeitos, Euler apresentou e demonstrou a regra de Euclides para esse tipo de número e ainda demonstrou que não há números perfeitos pares exceto os que satisfaçam a regra de Euclides.

A explicação do seu método de gerar números amigáveis começa em parágrafo §10, onde Euler primeiramente formulou a condição geral para o par (a, b) ser amigável, a saber, que as somas dos divisores de cada amigo sejam iguais à soma dos dois amigos. Em termos da notação de E798, isto é A = B = a+b. Em seguida, partiu para uma investigação algébrica da questão através da técnica de mudança de varáveis, semelhante ao procedimento que é usado em E152. Chegou ao resultado de que, para o par (*nax*, *nby*), onde *a* e *b* são coprimos e *x* e *y* primos, ser amigável, devemos ter

$$x + 1 = \frac{(a+b)Bn}{(Ab+Ba)n-ABN} \quad \text{e} \quad y + 1 = \frac{(a+b)An}{(Ab+Ba)n-ABN},$$

onde, para quaisquer *a* e *b* fixos, *n* é escolhido de tal maneira a fazer *x* e *y* primos.

Esse resultado, no entanto, é ainda demasiadamente geral para servir como uma guia efetiva para a busca de números amigáveis. Assim, em §11, ele propôs a simplificação de fazer *a* = 1 e *b* primo, obtendo

$$\frac{x+1}{b+1} = y + 1 = \frac{(1+b)n}{(2n-N)b-(N-n)}.$$

para pares de números amigáveis da forma (*nx*, *nby*). No caso em que $n = 2^k$, se obtém o que Euler chamou do "método de Schooten e de Descartes". Isto, porém, não é inteiramente evidente no texto devido ao fato de que, ao contraste com E152, onde todos os componentes primos dos amigos são parametrizados, um dos próprios componentes (*b*) entra como parâmetro. Assim, explicitaremos o resultado aqui.

Subcaso 1. Seja *n* = 4. Então, temos $\frac{x+1}{b+1} = y + 1 = \frac{4(b+1)}{b-3}$, onde *b* é um primo maior do que 3. Pondo *b* = 5, obtemos *y* = 11 e *x* = 71. Assim, temos que $(nx, nby) = (2^2 \cdot 71, 2^2 \cdot 5 \cdot 11)$.

Subcaso 2. Seja n = 16. Então, temos $\frac{x+1}{b+1} = y + 1 = \frac{16(b+1)}{b-15}$, onde b é um primo maior do que 15. Pondo b = 23, obtemos y = 47 e x = 1151. Assim, temos que $(nx, nby) = (2^4 \cdot 1151, 2^4 \cdot 23 \cdot 47)$.

Subcaso 3. Seja n = 128. Então, temos $\frac{x+1}{b+1} = y + 1 = \frac{128(b+1)}{b-127}$, onde b é um primo maior do que 127. Pondo b = 191, obtemos y = 383 e x = 73727. Assim, temos que $(nx, nby) = (2^7 \cdot 73727, 2^7 \cdot 191 \cdot 383)$.

Ainda mostrou que a escolha n = 92 também gera números amigáveis.

No próximo parágrafo, §12, Euler voltou às equações para x+1 e y+1 e impôs a condição de que a e b sejam números primos, de tal forma que A = a+1 e B = b+1. Assim, fazendo n = 4 e b = 5, calculou, para a = 13, que x = 107 e y = 251. Desta forma, obteve o par de números amigáveis $(2^2 \cdot 13 \cdot 107, 2^2 \cdot 5 \cdot 251)$. Ainda calculou, para a = 17, que x = 43 e y = 131. Desta forma, obteve o par de números amigáveis $(2^2 \cdot 17 \cdot 43, 2^2 \cdot 5 \cdot 131)$. Afirmou que, para n = 44, b = 17 e a = 43, x e y são primos, mas não informou esses valores. Efetivamente, x = 107 e y = 263, gerando assim o par $(2^2 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 107, 2^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 263)$. O peso par é calculado, pela abordagem alternativa, em §16.

Em §13, Euler colocou a = cp e b = dq, onde p e q são primos, enquanto c e d são ou primos ou compostos, que dá números amigáveis da forma *ncpx* e *ndqy*. Para $n = 2$, calculou $\frac{x+1}{2(q+1)} = \frac{y+1}{p+1} = \frac{5p+11q}{3pq-8p-14q-18}$, o que é errado, pois deveria ser $\frac{x+1}{2(q+1)} = \frac{y+1}{p+1} = \frac{5p+11q}{3pq-8p-7q-18}$. Isto acarretou o valor errado para a expressão dessa equação quando $p = 7$, o que deveria ser $\frac{x+1}{2(q+1)} = \frac{y+1}{8} = \frac{35+11q}{14q-74}$. Também calculou uma expressão (correta) para $n = 2 \cdot 7$ e $p = 23$, mas não conseguiu exibir um par de números amigáveis a partir desses cálculos.

Os últimos quatro parágrafos (§14-§17) de E798 são dedicados à explanação de uma outra abordagem na busca de pares de números amigáveis. É essencialmente igual à determinação de *z* (a parte comum) no método de problema 5 de E152, mas a exposição do mesmo em E798 é mais simples e mais clara. De fato, a simplicidade resulta do seu ponto de partida que, em contraste a E152, não se baseia em considerações algébricas, mas em procedimentos numéricos. Isto é, Euler procurou, com a ajuda da tabela de somas de divisores, dois números *v* e *u* tais que V = U. Em seguida, procurou múltiplos deles, isto é, *av* e *au* com *a* coprimo com *v* e *u*, tais que AV = *av*+*au*. Disto, obteve $\frac{\mathrm{A}}{a} = \frac{v+u}{\mathrm{V}} = \frac{m}{n}$, onde a última fração é reduzida. Assim, *n* divide *am* e, portanto, *a*, visto que *n* e *m* são coprimos por hipótese. Pondo $a = nb$ (ou $a = n^k b$), deduziu $\frac{\mathrm{B}}{b} = \frac{m}{\mathrm{N}}$. O processo é iterado, de forma inteiramente semelhante ao processo usado no método de problema 5, até se achar uma fração $\frac{X}{x}$ ou até achar um resultado impossível. Os exemplos de Euler são bastante claros e, portanto, prescindem de mais esclarecimentos aqui.

Conclusão

Embora o conceito de números amigáveis tenha sido conhecido na antiguidade, aparentemente houve apenas um único par desse tipo de número que foi conhecido antes da época de Thabit. Os matemáticos europeus, começando mais ou menos na época de Fermat e não conhecendo o trabalho de Thabit, iniciaram uma busca para mais exemplos. Eles tiveram pouco sucesso até o tempo de Euler, pois haviam descobertos apenas mais dois pares. Euler, em contraste, calculou 65 itens. Destes, 61 constam no catálogo incluído em E152, três constam na lista de E100, mas não no catálogo de E152, e um não consta nem na lista, nem no catálogo, mas é discutido em E152. Esse último, segundo Euler (§XCV), seria amigável caso 129503 fosse primo; no entanto, como vimos, esse número não é primo. Item XIII de E100, um dos três desta lista que não consta no catálogo de E152, não é amigável. O mesmo acontece com item XXXIV do catálogo. Todos os outros 62 itens são pares de números amigáveis. Visto que os três já conhecidos são incluídos entre esses 62 pares, Euler descobriu 59 pares novos.

Sua façanha é certamente uma marca importante na história da matemática, não somente pelo sucesso da busca, mas pela grande desenvoltura com que aplicou métodos algébricos à Teoria dos Números. Com o desenvolvimento de métodos de computação eletrônica, um grande número de novos pares desse tipo de número foi descoberto. No entanto, ainda permanecem em aberto certas questões teóricas, sendo a mais importante a sobre a quantidade de números amigáveis. Euler foi convencido que há um número infinito deles, mas até agora não se sabe se ele tinha, ou não, razão.

Referências

APOLLON RISING. 2008. Disponível em: <http://apollonion.wordpress.com/2008/ 11/02/iamblichus-of-chalis>. Acesso em 27/02/2012.

Bíblia Sagrada. S.d. Disponível em: <www.bibliacatolica.com.br/24/1/32.php>. Acesso em 21/01/2012.

BULKA, R'. Eliezer. Parshas Vayishlach – goats and amicable numbers. 2011. Disponível em: <Baltimorejewishlife.com/torah/parsha-detail.php?SECTION_ID=45&ARTICLE_ID=25574>. Acesso em 21/01/2012.

BRENTJES, Sonja; HOGENDIJK, Jan P. Notes on Thābit ibn Quarra and his rule for amicable numbers. *Historia mathematica*. 1989, v. 16, p. 373-378.

DICKSON, Leonard Eugene. *History of the Theory of Numbers*. Volume I: Divisibility and primality. New York: Chelsea, 1952.

ENESTRÖM, Gustav. The writings of Euler ordered by the year in which he wrote them. Tradução de Greta Perl. 2004. [Originally 1913.] Disponível em: <www.math.dartmouth.edu/~euler/docs/translations/enestrom/Enestrom_Index>. Acesso em 10/07/2012.

ERICKSON, Glenn W.; FOSSA, John A. *Ensaios sobre o Número Nupcial*. In: FOSSA, John A. (Org.). *Matemática e medida: três momentos históricos*. São Paulo: Editora da Livraria da Física / SBHMat, 2009.

EULER, Leonhard. De numeris amicabilibus.*Nova acta eruditorum*, 1747, maio, p. 267-269. [E100.]

______. De numeris amicabilibus. *Opuscula varii argumenti*, 1750, v. 2, p. 23-107. [E152.]

______. De numeris amicabilibus. In *Leonhardi Euleri commentationes arithmeticae collectae*. P. H. Fuss & Nicolaus Fuss (Eds.), q.v., p. 627-636.

FERMAT, Pierre de. *Oeuvres de Fermat*. TANNERY, Paul; HENRY, Charles (Eds.). Tome Deuxième (Correspondance). Paris: Gauthier-Villars, 1894.

FOSSA, John A.; LEÔNCIO, Sarah Mara Silva. "Sobre números amigáveis", de Leonhard Euler: Tradução e Comentário. *Revista brasileira de história da matemática*, 2009, v. 9, n. 17, p. 87-90.

GAL EINAI INSTITUTE. The mystical mountains. S.d. Disponível em: <www.inner.org/parshah/deuteronomy/reeh/reeh_65.php>. Acesso em 20/01/2012.

HOGENDIJK, Jan P. Thabit ibn Qurra and the pair of amicable numbers 17296, 18416. *Historia mathematica*, 1965, v. 12, p. 269-273.

LEÔNCIO, Sarah Mara Silva. Uma análise dos artigos de Euler sobre números amigáveis. Em preparação. Dissertação de Mestrado.PPGECNM da UFRN.

Leonhardi Euleri commentationes arithmeticae collectae. P. H. Fuss & Nicolaus Fuss (Eds.). Petropoli: Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae, 1849. (2 vols.)

Leonhardi Euleri commentationes arithmeticae. Ferdinand Rudio (Ed.). Lipsiae [Leipzig (Alemanha)]: Societatis Scientiarum Naturalium Helveticae, 1915. (2 vol.)

NICOMACHUS OF GERASA, *Introduction to arithmetic*. Tradução de Martin Luther D'Ooge. Ann Arbor: U. of Michigan Press, 1938.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Al-Sabi Thabit ibn Qurra al-Harrani. 1999. Disponível em: <www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Thabit.html>. Acesso em 15/02/2012.

______. Descartes portraits. 2008a. Disponível em: <www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/ Descartes.html>. Acesso em 29/02/2012.

______. Euler portraits. 2008b. Disponível em: <www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/ Euler.html>. Acesso em 29/03/2012.

______. Fermat portraits. 2008c. Disponível em: <www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Fermat. html>. Acesso em 28/02/2012.

______. Nicomachus portrait. 2008d. Disponível em: <www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/ Nicomachus.html>. Acesso em 27/02/2012.

______. Thabit portrait. 2008e. Disponível em: <www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Thabit.html>. Acesso em 27/02/2012.

______. van Schooten portrait. 2008f. Disponível em: <www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Schooten.html>. Acesso em 06/03/2012.

SANDIFER, Ed. Amicable numbers. 2006. Disponível em: <www.maa.org/news/howeulerdidit>. Acesso em 08/03/2012.

______. Odd perfect numbers. 2006a. Disponível em: <www.maa.org/news/howeulerdidit>. Acesso em 08/03/2012.

SCHOOTEN, Francisci à. *Exercitationum mathematicarum libri quinque*. Leydensis [Leiden (Holanda)]: Johandis Elsevirii, 1657.

SOBRE NÚMEROS AMIGÁVEIS

Leonhard Euler

Tradução de: John A. Fossa

Sarah Mara Silva Leôncio

Parece que, nesta época em que a análise matemática está abrindo o caminho para especulações muito profundas, problemas sobre a natureza e propriedades de números foram quase totalmente abandonados pelos geômetras[1] – e, de fato, a maior parte julga que a contemplação dos números nada contribui para a melhoria da análise. Entretanto, a investigação das propriedades dos números sem dúvida frequentemente requer mais argúcia que as mais sutis questões da geometria e assim parece, para essa mesma razão, que as questões aritméticas foram imerecidamente desprezadas por estes. Não obstante, alguns dos mais superiores eruditos, responsáveis pelos maiores desenvolvimentos da análise, julgaram as propriedades dos números de ser não indignas de muito zelo e dedicação. Em relação ao próprio *Descartes*, sabe-se que, embora ele ocupou-se por muito tempo com meditações, não somente sobre a filosofia universal, mas também sobre a

[1] Na época de Euler, esse termo significava *matemáticos*, de forma geral.

matemática, não teve muito sucesso na sua tentativa de desvendar os números amigáveis. Em seguida, *van Schooten* enfrentou a tarefa com maior dedicação. Chama-se então números amigáveis dois números do seguinte tipo: cada um produz o outro quando todas suas partes alíquotas[2] são somadas. Os números 220 e 284 são desse tipo, pois, em primeiro lugar, as partes alíquotas de 220, ou seja, os divisores menores que ele mesmo, $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$, somadas, produzem 284 e, por sua vez, as partes alíquotas do número 284, sendo $1 + 2 + 4 + 71 + 142$, produzem 220. Há, sem dúvida, além desses dois números, muitos outros – e até um número infinito[3] – que tenham essa propriedade. Não obstante, nem *Descartes*, e depois, nem *van Schooten* exibiram mais que três pares dos referidos números, embora parece que não foram poucos os esforços que dedicaram à tarefa. Mas o método, do qual cada um deles fez uso, foi elaborado de tal forma que, usando o mesmo, dificilmente poderiam ser descobertos mais números amigáveis. Para tanto, números deste tipo são dados pelas fórmulas[4] $2^n xy$ & $2^n z$, onde x, y e z denotam números primos; é também necessário que estes

[2] Os divisores positivos do número, excluindo o próprio número.
[3] Ainda está em aberta a questão de se há, ou não, um número infinito de números amigáveis.
[4] Aqui e no que segue, *n* nem sempre é escrito como expoente no texto original. No entanto, o texto, bem como a lista de pares de números amigáveis ao final do artigo, mostram que a intenção de Euler foi que a referida variável fosse compreendida como expoente.

números sejam escolhidos de tal forma que $z = xy + x + y$ seja primo e, ao mesmo tempo, que $2^n(x + y + 2) = xy + x + y + 1$. Para cada valor sucessivo de *n*, portanto, procura-se, em cada caso, números primos *x* e *y*, tais que a última equação seja satisfeita e $xy + x + y$ seja um número primo; então as referidas fórmulas, $2^n xy$ & $2^n z$, produzirão números amigáveis. Compreende-se facilmente, no entanto, que, ao proceder desta maneira para valores maiores de *n*, o valor de $xy + x + y$ logo se tornará tão alto que não será possível discernir por muito tempo se o mesmo seja um número primo, pois a tabela de números primos ainda não foi estendida além de 100000.

Além disto, é evidente que, além da relação apontada, a seguinte questão deve ser considerada cuidadosamente: todos os números amigáveis são compreendidos nas referidas fórmulas? Examinei essa questão e, ao investigá-la com alguns recursos provenientes da natureza da divisão, obtive muitos outros pares de números amigáveis, dos quais comunico aqui trinta, incluindo os três já conhecidos. Apresento-os, porém, decompostos nos seus fatores para que podem ser examinados mais claramente em relação à sua origem e natureza. Eis, então, alguns números amigáveis:

I.[5]	$2^2 \cdot 5 \cdot 11$	&	$2^2 \cdot 71$
II.[6]	$2^4 \cdot 23 \cdot 47$	&	$2^4 \cdot 1151$

[5] Trata-se de 220 e 284, o par conhecido na Antiguidade.
[6] Trata-se de 17296 e 18416, o par dado por Fermat.

III.[7]	$2^7 \cdot 191 \cdot 383$	&	$2^7 \cdot 73727$
IV.	$2^2 \cdot 23 \cdot 5 \cdot 137$	&	$2^2 \cdot 23 \cdot 827$
V.	$3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 19$	&	$3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 239$
VI.	$3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 17$	&	$3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 107$
VII.	$3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 41$	&	$3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 251$
VIII.	$2^2 \cdot 5 \cdot 131$	&	$2^2 \cdot 17 \cdot 43$
IX.	$2^2 \cdot 5 \cdot 251$	&	$2^2 \cdot 13 \cdot 107$
X.	$2^3 \cdot 17 \cdot 79$	&	$2^3 \cdot 23 \cdot 59$
XI.	$2^4 \cdot 23 \cdot 1367$	&	$2^4 \cdot 53 \cdot 607$
XII.	$2^4 \cdot 17 \cdot 10303$	&	$2^4 \cdot 167 \cdot 1103$
XIII.[8]	$2^4 \cdot 19 \cdot 8563$	&	$2^4 \cdot 83 \cdot 2039$
XIV.	$2^4 \cdot 17 \cdot 5119$	&	$2^4 \cdot 239 \cdot 383$
XV.	$2^5 \cdot 59 \cdot 1103$	&	$2^5 \cdot 79 \cdot 827$
XVI.	$2^5 \cdot 37 \cdot 12671$	&	$2^5 \cdot 227 \cdot 2111$
XVII.	$2^5 \cdot 53 \cdot 10559$	&	$2^5 \cdot 79 \cdot 7127$
XVIII.	$2^6 \cdot 79 \cdot 11087$	&	$2^6 \cdot 383 \cdot 2309$
XIX.	$2^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 263$	&	$2^2 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 107$
XX.	$3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 71$	&	$3^3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 31$
XXI.	$3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 79$	&	$3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 199$
XXII.	$3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 47$	&	$3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 31$
XXIII[9].	$3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 1583$	&	$3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 227 \cdot 263$
XXIV.[10]	$3^2 \cdot 5 \cdot 31 \cdot 89$	&	$3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29$
XXV.	$2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 60659$	&	$2 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 673$
XXVI.	$2^3 \cdot 31 \cdot 11807$	&	$2^3 \cdot 11 \cdot 163 \cdot 191$
XXVII.	$3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 79 \cdot 1103$	&	$3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 367$
XXVIII.	$2^3 \cdot 47 \cdot 2609$	&	$2^3 \cdot 11 \cdot 59 \cdot 173$
XXIX.	$3^3 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 79 \cdot 1103$	&	$3^3 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 367$
XXX.	$3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 59 \cdot 179$	&	$3^2 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 359$

[7] Trata-se de 9363584 e 9437056, o par dado por Descartes.
[8] Trata-se de 2603152 e 2707792, o que não é um par de números amigáveis. Ver a Introdução.
[9] O texto original tem 513 na coluna esquerda. Isto é obviamente um erro de impressão para 5 . 13. Foi corrigido no catálogo de pares de números amigáveis dado em E152 (item XXXIII).
[10] O texto original tem $3^3 \cdot 5 \cdot 31 \cdot 89$ e $3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29$, o que não é um par de números amigáveis. Provavelmente outro erro de impressão, foi corrigido no catálogo de E152 (item XXXVII).

SOBRE NÚMEROS AMIGÁVEIS

Leonhard Euler

Tradução de: Sarah Mara Silva Leôncio

John A. Fossa

Definição.

§. I.

Dois números são chamados amigáveis, se são compostos de tal maneira que a soma das partes alíquotas de um é igual ao outro e, por sua vez, a soma das partes alíquotas do segundo é igual ao primeiro.

Assim, os números 220 e 284 são números amigáveis, pois as partes alíquotas do primeiro, 220, tomadas conjuntamente, 1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110, fazem 284 e as partes alíquotas do número 284, a saber, 1+2+4+71+142, produzem o primeiro número, 220.

Observação.

§. II. Stifel[11], que foi o primeiro a mencionar esse tipo de número[12], parece ter iniciado o estudo do assunto ao encontrar os dois números 220 & 284 por acaso; pois julgou os recursos da análise incapazes de achar mais pares de números desse tipo. Descartes, decerto, tentou adaptar a análise a esse estudo e apresentou uma regra que gerou três pares desses números e, além desses resultados, nem Schooten, que parece ter se empenhado muito nesse sentido, poderia desvendar mais. Depois disto, não se encontra geômetra algum que tenha se empenhando a desenvolver mais essa questão. Visto, contudo, que não há dúvida de que a análise conseguirá resultados não insignificantes sobre esse assunto, se um método for revelado, pelo qual se pode pesquisar melhor mais pares do referido tipo de números, julgo que será de nenhum modo fora de questão e, mais ainda, comunicarei em que medida tenho resolvido essas questões difíceis por certos métodos de investigação. Para tanto, é necessário abordar primeiro a seguinte hipótese.

[11] Nota dos Trad.: Michael Stifel (1487-1567), matemático alemão que inventou os logaritmos, independente de John Napier (1550-1617), comparando uma PA e uma PG.
[12] Nota dos Trad.: O conceito dos números amigáveis foi conhecido na antiguidade. Ver a Introdução.

Hipótese.

§. III. Se n designa um número inteiro positivo qualquer, como os números sempre serão entendidos aqui, então indicarei pelo sinal $\int n$ a soma de todos seus divisores, de modo que o símbolo $\int$ prefixado a algum número indica a soma de todos os divisores do referido número; assim $\int 6 = 1+2+3+6 = 12$.

Corolário 1.

§. IV. Visto que, entre os divisores de um número qualquer, sempre se encontra o próprio número e visto que, ainda mais, as partes alíquotas são idênticas com os divisores exceto o próprio número, é manifesto que a soma das partes alíquotas do número n é expresso por $\int n - n$.

Corolário 2.

§. V. Visto que um número primo não admite outros divisores além da unidade e dele próprio, se n for um número primo, teremos $\int n = 1+n$. Entretanto, no caso de $n = 1$ teremos $\int 1 = 1$, pois a unidade não é propriamente incluída nos números primos.

Lema 1.

§. VI. Se m & n forem números primos entre si, de tal modo que não possuam divisores comuns além da unidade, então $\int mn = \int m \cdot \int n$, ou seja, a soma dos divisores do produto mn é igual ao produto das somas dos divisores de cada um dos números m e n.

Pois, em primeiro lugar, o produto mn tem os divisores individuais de cada um dos fatores m e n; assim, é também divisível pelo produto dos divisores do número m e o dos divisores do número n. De fato, todos esses divisores de mn juntos produzem $\int m$ multiplicado por $\int n$.

Corolário 1.

§. VII. Se cada um dos números m e n for primo, então $\int m = 1+m$ & $\int n = 1+n$, e a soma dos divisores do produto será $\int mn = (1+m)(1+n) = 1+m+n+mn$. Se, além disso, p for um número primo diferente de m e n, então teremos $\int mnp = \int mn \int p = \int m \int n \int p = (1+m)(1+n)(1+p)$. E, assim, a soma dos divisores de qualquer número, que é o produto de qualquer quantidade de números primos distintos, é facilmente determinada.

Corolário 2.

§. VIII. Se m, n & p não forem, de fato, números primos, mas tais que não tenham divisores comuns além da unidade, então mn & p serão números primos entre si e, portanto, $\int mnp = \int mn \int p$. Porém, como temos $\int mn = \int m \int n$, teremos $\int mnp = \int m \int n \int p$.

Observação.

§. IX. A não ser que os fatores *m*, *n*, *p* sejam números primos entre si, a soma dos divisores do produto, conforme indicado pelo lema, não dá certo. Visto que, de acordo com o lema, os vários divisores dos fatores *m*, *n*, *p* são obtidos entre os divisores do produto *mnp,* se tiverem um divisor comum, ele será contado duas vezes entre os divisores do produto; mas, ao procurar a soma dos divisores de qualquer número, nenhum divisor deve ser contado duas vezes. Desta forma, se *m* & *n* forem números primos e $m = n$, não teremos $\int nn = \int n . \int n = (1+n)^2 = 1+2n+nn$, mas $\int nn = 1+n+nn$, pois o divisor *n* não deve ser posto duas vezes. Portanto, como a soma dos divisores de qualquer número, que é um produto de qualquer quantidade de números primos diferentes, é determinada corretamente por este lema, resta estabelecer a regra pela qual a soma dos divisores de um produto contendo fatores iguais pode ser determinada.

Lema 2.

§. X. Seja *n* um número primo, então teremos $\int n^2 = 1 + n + n^2$, $\int n^3 = 1 + n + n^2 + n^3$, $\int n^4 = 1 + n + n^2 + n^3 + n^4$, &, em geral, teremos $\int n^k = 1 + n + n^2 + \cdots + n^k = \frac{n^{k+1}-1}{n-1}$.

Corolário 1.

§. XI. Visto que $\int n = n + 1$, teremos $\int n^2 = \int n + n^2$, ou também $\int n^2 = 1 + n \int n$. De modo semelhante, teremos $\int n^3 = \int n^2 + n^3$, ou também $\int n^3 = 1 + n \int n^2$; e, continuando, $\int n^4 = \int n^3 + n^4$, ou seja[13], $\int n^4 = 1 + n \int n^3$, e assim por diante. E, assim, conhecendo a soma dos divisores de qualquer potencia n^k, determina-se facilmente a soma dos divisores da potencia seguinte n^{k+1}, pois temos $\int n^{k+1} = \int n^k + n^{k+1}$ ou $\int n^{k+1} = 1 + n \int n^k$.

Corolário 2.

§. XII. Para que as somas dos divisores possam ser expressas mais facilmente por fatores, deve-se escrever $\int n^3 = (1 + n)(1 + n^2) = (1 + n^2) \int n$; $\int n^5 = (1 + n^2 + n^4) \int n$; $\int n^7 = (1 + n^2 + n^4 + n^6) \int n = (1 + n^4)(1 + n^2) \int n$; e, assim, as somas dos divisores de potências ímpares sempre podem ser exibidos através de fatores; em contraste, as somas dos divisores das potências pares às vezes serão números primos.

Corolário 3.

§. XIII. Agora uma tabela pode ser facilmente preparada, na qual serão exibidas, não somente as somas dos divisores dos

[13] Nota dos Trad.: No texto original tem $\int n^4 = 1 + \int n^3$, o que é obviamente um erro de composição gráfica.

números primos, mas também as das suas potências. Aqui apresentamos uma Tabela[14] desse tipo, na qual são exibidas as somas dos divisores, expressas por fatores, de todos os números primos não maiores do que mil, bem como suas potências até a terceira e, para os números menores, até potências maiores.

[14] Nota dos Trad.: O original contém vários erros. Observamos que várias entradas na tabela publicada na *Opuscula varii argumenti* são ilegíveis e, assim, usamos a versão publicado nas *Commentationes arithmeticae*. Na tabela apresentada no texto esses erros são corrigidos para fazê-la mais útil ao leitor. No entanto, relacionamos os erros a seguir. Para 5^5, o original tem $2\cdot3^3\cdot7\cdot31$; para 7^{10}, tem o número 329554457, o que não é primo; para 17, tem $2\cdot3^3$; para 37^3, tem $2^2\cdot5\cdot2603$, mas 2603 não é primo; para 41^3, tem $2^2\cdot3\cdot7\cdot29$. Os valores para o primo 79 não constam na tabela; são $\int 79 = 2^4\cdot5$ e $\int 79^2 = 3\cdot7^2\cdot43$ e $\int 79^3 = 2^5\cdot5\cdot3121$. Para 149^3, o original tem $2^2\cdot3\cdot5^2\cdot11\cdot101$ (o correto é $11101 = 17\cdot653$); para 173^2, tem $67\cdot449$; para 283^3, tem $2^2\cdot5\cdot71\cdot8009$; para 359^3, tem $2^4\cdot3^3\cdot5\cdot13\cdot4957$; para 461^3, tem $2^2\cdot3\cdot7\cdot11106261$; para 523^3, tem $2^3\cdot5\cdot7\cdot131\cdot1609$; para 571^3, tem $2^3\cdot11\cdot13\cdot163041$; para 613^2, tem 125461, que não é primo; para 769^3, tem $2^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot71\cdot17393$; para 811, tem $2\cdot7\cdot29$; para 827, tem $2^2\cdot3^3\cdot23$. Todos esses erros, exceto o de 7^{10}, são corrigidos na edição dada na *Opera omnia*; curiosamente, o editor da *Opera omnia* aponta o valor dado para 563^3 como sendo errôneo, mas o mesmo é dado corretamente (embora o texto esteja borrado e de difícil leitura).

Nº.	Soma dos Divisores	Nº.	Soma Divisores	Nº.	Soma Divisores
		3	2^{2}	11	$2^{2}\cdot 3$
2	3	3^{2}	13	11^{2}	$7\cdot 19$
2^{2}	7	3^{3}	$2^{3}\cdot 5$	11^{3}	$2^{3}\cdot 3\cdot 61$
2^{3}	$3\cdot 5$	3^{4}	11^{2}	11^{4}	$5\cdot 3221$
2^{4}	31	3^{5}	$2^{2}\cdot 7\cdot 13$	11^{5}	$2^{2}\cdot 3^{2}\cdot 7\cdot 19\cdot 37$
2^{5}	$3^{2}\cdot 7$	3^{6}	1093	11^{6}	$43\cdot 45319$
2^{6}	127	3^{7}	$2^{4}\cdot 5\cdot 41$	11^{7}	$2^{4}\cdot 3\cdot 61\cdot 7321$
2^{7}	$3\cdot 5\cdot 17$	3^{8}	$13\cdot 757$	11^{8}	$7\cdot 19\cdot 1772893$
2^{8}	$7\cdot 73$	3^{9}	$2^{2}\cdot 11^{2}\cdot 61$	11^{9}	$2^{2}\cdot 3\cdot 5\cdot 3221\cdot 13421$
2^{9}	$3\cdot 11\cdot 31$	3^{10}	$23\cdot 3851$	13	$2\cdot 7$
2^{10}	$23\cdot 89$	3^{11}	$2^{3}\cdot 5\cdot 7\cdot 13\cdot 73$	13^{2}	$3\cdot 61$
2^{11}	$3^{2}\cdot 5\cdot 7\cdot 13$	3^{12}	797161	13^{3}	$2^{2}\cdot 5\cdot 7\cdot 17$
2^{12}	8191	3^{13}	$2^{2}\cdot 547\cdot 1093$	13^{4}	30941
2^{13}	$3\cdot 43\cdot 127$	3^{14}	$11^{2}\cdot 13\cdot 4561$	13^{5}	$2\cdot 3\cdot 7\cdot 61\cdot 157$
2^{14}	$7\cdot 31\cdot 151$	3^{15}	$2^{5}\cdot 5\cdot 17\cdot 41\cdot 193$	13^{6}	5229043
2^{15}	$3\cdot 5\cdot 17\cdot 257$	5	$2\cdot 3$	13^{7}	$2^{3}\cdot 5\cdot 7\cdot 17\cdot 14281$
2^{16}	131071	5^{2}	31	17	$2\cdot 3^{2}$
2^{17}	$3^{3}\cdot 7\cdot 19\cdot 73$	5^{3}	$2^{2}\cdot 3\cdot 13$	17^{2}	307
2^{18}	524287	5^{4}	$11\cdot 71$	17^{3}	$2^{2}\cdot 3^{2}\cdot 5\cdot 29$
2^{19}	$3\cdot 5^{2}\cdot 11\cdot 31\cdot 41$	5^{5}	$2\cdot 3^{2}\cdot 7\cdot 31$	17^{4}	88741
2^{20}	$7^{2}\cdot 127\cdot 337$	5^{6}	19531	17^{5}	$2\cdot 3^{3}\cdot 7\cdot 13\cdot 307$
2^{21}	$3\cdot 23\cdot 89\cdot 683$	5^{7}	$2^{3}\cdot 3\cdot 13\cdot 313$	19	$2^{2}\cdot 5$
2^{22}	$47\cdot 178481$	5^{8}	$19\cdot 31\cdot 829$	19^{2}	$3\cdot 127$
2^{23}	$3^{2}\cdot 5\cdot 7\cdot 13\cdot 17\cdot 241$	5^{9}	$2\cdot 3\cdot 11\cdot 71\cdot 521$	19^{3}	$2^{3}\cdot 5\cdot 181$
2^{24}	$31\cdot 601\cdot 1801$	7	2^{3}	19^{4}	$151\cdot 911$
2^{25}	$3\cdot 2731\cdot 8191$	7^{2}	$3\cdot 19$	19^{5}	$2^{2}\cdot 3\cdot 5\cdot 7^{3}\cdot 127$
2^{26}	$7\cdot 73\cdot 262657$	7^{3}	$2^{4}\cdot 5^{2}$	23	$2^{3}\cdot 3$
2^{27}	$3\cdot 5\cdot 29\cdot 43\cdot 113\cdot 127$	7^{4}	2801	23^{2}	$7\cdot 79$
2^{28}	$233\cdot 1103\cdot 2089$	7^{5}	$2^{3}\cdot 3\cdot 19\cdot 43$	23^{3}	$2^{4}\cdot 3\cdot 5\cdot 53$
2^{29}	$3^{2}\cdot 7\cdot 11\cdot 31\cdot 151\cdot 331$	7^{6}	$29\cdot 4733$	23^{4}	292561
2^{30}	2147483647	7^{7}	$2^{5}\cdot 5^{2}\cdot 1201$	29	$2\cdot 3\cdot 5$
2^{31}	$3\cdot 5\cdot 17\cdot 257\cdot 65537$	7^{8}	$3^{2}\cdot 19\cdot 37\cdot 1063$	29^{2}	$13\cdot 67$
2^{32}	$7\cdot 23\cdot 89\cdot 599479$	7^{9}	$2^{3}\cdot 11\cdot 191\cdot 2801$	29^{3}	$2^{2}\cdot 3\cdot 5\cdot 421$
2^{33}	$3\cdot 43691\cdot 131071$	7^{10}	$1123\cdot 293459$	31	2^{5}
2^{34}	$31\cdot 71\cdot 127\cdot 122921$			31^{2}	3.331
2^{35}	$3^{3}\cdot 5\cdot 7\cdot 13\cdot 19\cdot 37\cdot 73\cdot 109$			31^{3}	$2^{6}\cdot 13\cdot 37$
2^{36}	$223\cdot 616318177$				

$N^{o.}$	Soma Div.	$N^{o.}$	Soma Div.	$N^{o.}$	Soma Div.
37 37^2 37^3	$2\cdot 19$ $3\cdot 7\cdot 67$ $2^2\cdot 5\cdot 19\cdot 137$	73 73^2 73^3	$2\cdot 37$ $3\cdot 1801$ $2^2\cdot 5\cdot 13\cdot 37\cdot 41$	127 127^2 127^3	2^7 $3\cdot 5419$ $2^8\cdot 5\cdot 1613$
41 41^2 41^3	$2\cdot 3\cdot 7$ 1723 $2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 29^2$	83 83^2 83^3	$2^2\cdot 3\cdot 7$ $19\cdot 367$ $2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 13\cdot 53$	131 131^2 131^3	$2^2\cdot 3\cdot 11$ 17293 $2^3\cdot 3\cdot 11\cdot 8581$
43 43^2 43^3	$2^2\cdot 11$ $3\cdot 631$ $2^3\cdot 5^2\cdot 11\cdot 37$	89 89^2 89^3	$2\cdot 3^2\cdot 5$ 8011 $2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 17\cdot 233$	137 137^2 137^3	$2\cdot 3\cdot 23$ $7\cdot 37\cdot 73$ $2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 23\cdot 1877$
47 47^2 47^3	$2^4\cdot 3$ $37\cdot 61$ $2^5\cdot 3\cdot 5\cdot 13\cdot 17$	97 97^2 97^3	$2\cdot 7^2$ $3\cdot 3169$ $2^2\cdot 5\cdot 7^2\cdot 941$	139 139^2 139^3	$2^2\cdot 5\cdot 7$ $3\cdot 13\cdot 499$ $2^3\cdot 5\cdot 7\cdot 9661$
53 53^2 53^3	$2\cdot 3^3$ $7\cdot 409$ $2^2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 281$	101 101^2 101^3	$2\cdot 3\cdot 17$ 10303 $2^2\cdot 3\cdot 17\cdot 5101$	149 149^2 149^3	$2\cdot 3\cdot 5^2$ $7\cdot 31\cdot 103$ $2^2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 17\cdot 653$
59 59^2 59^3	$2^2\cdot 3\cdot 5$ 3541 $2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 1741$	103 103^2 103^3	$2^3\cdot 13$ $3\cdot 3571$ $2^4\cdot 5\cdot 13\cdot 1061$	151 151^2 151^3	$2^3\cdot 19$ $3\cdot 7\cdot 1093$ $2^4\cdot 13\cdot 19\cdot 877$
61 61^2 61^3	$2\cdot 31$ $3\cdot 13\cdot 97$ $2^2\cdot 31\cdot 1861$	107 107^2 107^3	$2^2\cdot 3^3$ $7\cdot 13\cdot 127$ $2^3\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 229$	157 157^2 157^3	$2\cdot 79$ $3\cdot 8269$ $2^2\cdot 5^2\cdot 17\cdot 29\cdot 79$
67 67^2 67^3	$2^2\cdot 17$ $3\cdot 7^2\cdot 31$ $2^3\cdot 5\cdot 17\cdot 449$	109 109^2 109^3	$2\cdot 5\cdot 11$ $3\cdot 7\cdot 571$ $2^2\cdot 5\cdot 11\cdot 13\cdot 457$	163 163^2 163^3	$2^2\cdot 41$ $3\cdot 7\cdot 19\cdot 67$ $2^3\cdot 5\cdot 41\cdot 2657$
71 71^2 71^3	$2^3\cdot 3^2$ 5113 $2^4\cdot 3^2\cdot 2521$	113 113^2 113^3	$2\cdot 3\cdot 19$ $13\cdot 991$ $2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 19\cdot 1277$	167 167^2 167^3	$2^3\cdot 3\cdot 7$ 28057 $2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 2789$

Nº.	Soma Div.	Nº.	Soma Div.	Nº.	Soma Div.
173 173^2 173^3	$2\cdot3\cdot29$ 30103 $2^2\cdot3\cdot5\cdot29\cdot41\cdot73$	227 227^2 227^3	$2^2\cdot3\cdot19$ $73\cdot709$ $2^3\cdot3\cdot5\cdot19\cdot5153$	271 271^2 271^3	$2^4\cdot17$ $3\cdot24571$ $2^5\cdot17\cdot36721$
179 179^2 179^3	$2^2\cdot3^2\cdot5$ $7\cdot4603$ $2^3\cdot3^2\cdot5\cdot37\cdot433$	229 229^2 229^3	$2\cdot5\cdot23$ $3\cdot97\cdot181$ $2^2\cdot5\cdot13\cdot23\cdot2017$	277 277^2 277^3	$2\cdot139$ $3\cdot7\cdot19\cdot193$ $2^2\cdot5\cdot139\cdot7673$
181 181^2 181^3	$2\cdot7\cdot13$ $3\cdot79\cdot139$ $2^2\cdot7\cdot13\cdot16381$	233 233^2 233^3	$2\cdot3^2\cdot13$ $7\cdot7789$ $2^2\cdot3^2\cdot5\cdot13\cdot61\cdot89$	281 281^2 281^3	$2\cdot3\cdot47$ $109\cdot727$ $2^2\cdot3\cdot13\cdot47\cdot3037$
191 191^2 191^3	$2^6\cdot3$ $7\cdot13^2\cdot31$ $2^7\cdot3\cdot17\cdot29\cdot37$	239 239^2 239^3	$2^4\cdot3\cdot5$ $19\cdot3019$ $2^5\cdot3\cdot5\cdot13^4$	283 283^2 283^3	$2^2\cdot71$ $3\cdot73\cdot367$ $2^3\cdot5\cdot71\cdot8009$
193 193^2 193^3	$2\cdot97$ $3\cdot7\cdot1783$ $2^2\cdot5^3\cdot97\cdot149$	241 241^2 241^3	$2\cdot11^2$ $3\cdot19441$ $2^2\cdot11^2\cdot113\cdot257$	293 293^2 293^3	$2\cdot3\cdot7^2$ 86143 $2^2\cdot3\cdot5^2\cdot7^2\cdot17\cdot101$
197 197^2 197^3	$2\cdot3^2\cdot11$ $19\cdot2053$ $2^2\cdot3^2\cdot5\cdot11\cdot3881$	251 251^2 251^3	$2^2\cdot3^2\cdot7$ $43\cdot1471$ $2^3\cdot3^2\cdot7\cdot17^2\cdot109$	307 307^2 307^3	$2^2\cdot7\cdot11$ $3\cdot43\cdot733$ $2^3\cdot5^3\cdot7\cdot11\cdot13\cdot29$
199 199^2 199^3	$2^3\cdot5^2$ $3\cdot13267$ $2^4\cdot5^2\cdot19801$	257 257^2 257^3	$2\cdot3\cdot43$ $61\cdot1087$ $2^2\cdot3\cdot5^2\cdot43\cdot1321$	311 311^2 311^3	$2^3\cdot3\cdot13$ $19\cdot5107$ $2^4\cdot3\cdot13\cdot137\cdot353$
211 211^2 211^3	$2^2\cdot53$ $3\cdot13\cdot31\cdot37$ $2^3\cdot53\cdot113\cdot197$	263 263^2 263^3	$2^3\cdot3\cdot11$ $7^2\cdot13\cdot109$ $2^4\cdot3\cdot5\cdot11\cdot6917$	313 313^2 313^3	$2\cdot157$ $3\cdot181^2$ $2^2\cdot5\cdot97\cdot101\cdot157$
223 223^2 223^3	$2^5\cdot7$ $3\cdot16651$ $2^6\cdot5\cdot7\cdot4973$	269 269^2 269^3	$2\cdot3^3\cdot5$ $13\cdot37\cdot151$ $2^2\cdot3^3\cdot5\cdot97\cdot373$	317 317^2 317^3	$2\cdot3\cdot53$ $7\cdot14401$ $2^2\cdot3\cdot5\cdot13\cdot53\cdot773$

$N^{o.}$	Soma Div.	$N^{o.}$	Soma Div.	$N^{o.}$	Soma Div.
331 331^2 331^3	$2^2\cdot 83$ $3\cdot 7\cdot 5233$ $2^3\cdot 29\cdot 83\cdot 1889$	383 383^2 383^3	$2^7\cdot 3$ 147073 $2^8\cdot 3\cdot 5\cdot 14669$	439 439^2 439^3	$2^3\cdot 5\cdot 11$ $3\cdot 31^2\cdot 67$ $2^4\cdot 5\cdot 11\cdot 173\cdot 557$
337 337^2 337^3	$2\cdot 13^2$ $3\cdot 43\cdot 883$ $2^2\cdot 5\cdot 13^2\cdot 41\cdot 277$	389 389^2 389^3	$2\cdot 3\cdot 5\cdot 13$ $7\cdot 21673$ $2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 13\cdot 29\cdot 2609$	443 443^2 443^3	$2^2\cdot 3\cdot 37$ $7\cdot 28099$ $2^3\cdot 3\cdot 5^4\cdot 37\cdot 157$
347 347^2 347^3	$2^2\cdot 3\cdot 29$ $7\cdot 13\cdot 1327$ $2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 29\cdot 12041$	397 397^2 397^3	$2\cdot 199$ $3\cdot 31\cdot 1699$ $2^2\cdot 5\cdot 199\cdot 15761$	449 449^2 449^3	$2\cdot 3^2\cdot 5^2$ $97\cdot 2083$ $2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 100801$
349 349^2 349^3	$2\cdot 5^2\cdot 7$ $3\cdot 19\cdot 2143$ $2^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 60901$	401 401^2 401^3	$2\cdot 3\cdot 67$ $7\cdot 23029$ $2^2\cdot 3\cdot 37\cdot 41\cdot 53\cdot 67$	457 457^2 457^3	$2\cdot 229$ $3\cdot 7\cdot 9967$ $2^2\cdot 5^2\cdot 229\cdot 4177$
353 353^2 353^3	$2\cdot 3\cdot 59$ $19\cdot 6577$ $2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 17\cdot 59\cdot 733$	409 409^2 409^3	$2\cdot 5\cdot 41$ $3\cdot 55897$ $2^2\cdot 5\cdot 41\cdot 83641$	461 461^2 461^3	$2\cdot 3\cdot 7\cdot 11$ $373\cdot 571$ $2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 106261$
359 359^2 359^3	$2^3\cdot 3^2\cdot 5$ $7\cdot 37\cdot 499$ $2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 13\cdot 4957$	419 419^2 419^3	$2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$ $13\cdot 13537$ $2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 41\cdot 2141$	463 463^2 463^3	$2^4\cdot 29$ $3\cdot 19\cdot 3769$ $2^5\cdot 5\cdot 13\cdot 17\cdot 29\cdot 97$
367 367^2 367^3	$2^4\cdot 23$ $3\cdot 13\cdot 3463$ $2^5\cdot 5\cdot 23\cdot 13469$	421 421^2 421^3	$2\cdot 211$ $3\cdot 59221$ $2^2\cdot 13\cdot 17\cdot 211\cdot 401$	467 467^2 467^3	$2^2\cdot 3^2\cdot 13$ $19\cdot 11503$ $2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 13\cdot 113\cdot 193$
373 373^2 373^3	$2\cdot 11\cdot 17$ $3\cdot 7^2\cdot 13\cdot 73$ $2^2\cdot 5\cdot 11\cdot 17\cdot 13913$	431 431^2 431^3	$2^4\cdot 3^3$ $7\cdot 67\cdot 397$ $2^5\cdot 3^3\cdot 293\cdot 317$	479 479^2 479^3	$2^5\cdot 3\cdot 5$ $43\cdot 5347$ $2^6\cdot 3\cdot 5\cdot 89\cdot 1289$
379 379^2 379^3	$2^2\cdot 5\cdot 19$ $3\cdot 61\cdot 787$ $2^3\cdot 5\cdot 19\cdot 71821$	433 433^2 433^3	$2\cdot 7\cdot 31$ $3\cdot 37\cdot 1693$ $2^2\cdot 5\cdot 7\cdot 31\cdot 18749$	487 487^2 487^3	$2^3\cdot 61$ $3\cdot 7\cdot 11317$ $2^4\cdot 5\cdot 37\cdot 61\cdot 641$

Nº.	Soma Div.	Nº.	Soma Div.	Nº.	Soma Div.
491	$2^2\cdot3\cdot41$	563	$2^2\cdot3\cdot47$	613	$2\cdot307$
491^2	$37\cdot6529$	563^2	$31\cdot10243$	613^2	$3\cdot7\cdot17923$
491^3	$2^3\cdot3\cdot41\cdot149\cdot809$	563^3	$2^3\cdot3\cdot5\cdot29\cdot47\cdot1093$	613^3	$2^2\cdot5\cdot53\cdot307\cdot709$
499	$2^2\cdot5^3$	569	$2\cdot3\cdot5\cdot19$	617	$2\cdot3\cdot103$
499^2	$3\cdot7\cdot109^2$	569^2	$7^2\cdot6619$	617^2	$97\cdot3931$
499^3	$2^3\cdot5^3\cdot13\cdot61\cdot157$	569^3	$2^2\cdot3\cdot5\cdot19\cdot161881$	617^3	$2^2\cdot3\cdot5\cdot103\cdot38069$
503	$2^3\cdot3^2\cdot7$	571	$2^2\cdot11\cdot13$	619	$2^2\cdot5\cdot31$
503^2	$13\cdot19501$	571^2	$3\cdot7\cdot103\cdot151$	619^2	$3\cdot19\cdot6733$
503^3	$2^4\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot25301$	571^3	$2^3\cdot11\cdot13\cdot163021$	619^3	$2^3\cdot5\cdot13\cdot31\cdot14737$
509	$2\cdot3\cdot5\cdot17$	577	$2\cdot17^2$	631	$2^3\cdot79$
509^2	$43\cdot6037$	577^2	$3\cdot19\cdot5851$	631^2	$3\cdot307\cdot433$
509^3	$2^2\cdot3\cdot5\cdot17\cdot281\cdot461$	577^3	$2^2\cdot5\cdot13^2\cdot17^2\cdot197$	631^3	$2^4\cdot79\cdot199081$
521	$2\cdot3^2\cdot29$	587	$2^2\cdot3\cdot7^2$	641	$2\cdot3\cdot107$
521^2	$31^2\cdot283$	587^2	$547\cdot631$	641^2	$7\cdot58789$
521^3	$2^2\cdot3^2\cdot29\cdot135721$	587^3	$2^3\cdot3\cdot5\cdot7^2\cdot34457$	641^3	$2^2\cdot3\cdot107\cdot205441$
523	$2^2\cdot131$	593	$2\cdot3^3\cdot11$	643	$2^2\cdot7\cdot23$
523^2	$3\cdot13\cdot7027$	593^2	$163\cdot2161$	643^2	$3\cdot97\cdot1423$
523^3	$2^3\cdot5\cdot17\cdot131\cdot1609$	593^3	$2^2\cdot3^3\cdot5^2\cdot11\cdot13\cdot541$	643^3	$2^3\cdot5^2\cdot7\cdot23\cdot8269$
541	$2\cdot271$	599	$2^3\cdot3\cdot5^2$	647	$2^3\cdot3^4$
541^2	$3\cdot7\cdot13963$	599^2	$7\cdot51343$	647^2	$211\cdot1987$
541^3	$2^2\cdot13\cdot271\cdot11257$	599^3	$2^4\cdot3\cdot5^2\cdot17\cdot61\cdot173$	647^3	$2^4\cdot3^4\cdot5\cdot41\cdot1021$
547	$2^2\cdot137$	601	$2\cdot7\cdot43$	653	$2\cdot3\cdot109$
547^2	$3\cdot163\cdot613$	601^2	$3\cdot13\cdot9277$	653^2	$7\cdot13^2\cdot19^2$
547^3	$2^3\cdot5\cdot137\cdot29921$	601^3	$2^2\cdot7\cdot43\cdot313\cdot577$	653^3	$2^2\cdot3\cdot5\cdot109\cdot42641$
557	$2\cdot3^2\cdot31$	607	$2^5\cdot19$	659	$2^2\cdot3\cdot5\cdot11$
557^2	$7^2\cdot6343$	607^2	$3\cdot13\cdot9463$	659^2	$13\cdot33457$
557^3	$2^2\cdot3^2\cdot5^3\cdot17\cdot31\cdot73$	607^3	$2^6\cdot5^2\cdot19\cdot7369$	659^3	$2^3\cdot3\cdot5\cdot11\cdot17\cdot53\cdot241$

Nº.	Soma Div.	Nº.	Soma Div.	Nº.	Soma Div.
661 661^2 661^3	$2\cdot331$ $3\cdot145861$ $2^2\cdot331\cdot218461$	733 733^2 733^3	$2\cdot367$ $3\cdot19\cdot9439$ $2^2\cdot5\cdot13\cdot367\cdot4133$	797 797^2 797^3	$2\cdot3\cdot7\cdot19$ $157\cdot4051$ $2^2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot19\cdot63521$
673 673^2 673^3	$2\cdot337$ $3\cdot151201$ $2^2\cdot5\cdot337\cdot45293$	739 739^2 739^3	$2^2\cdot5\cdot37$ $3\cdot7\cdot26041$ $2^3\cdot5\cdot37\cdot273061$	809 809^2 809^3	$2\cdot3^4\cdot5$ $7\cdot13\cdot19\cdot379$ $2^2\cdot3^4\cdot5\cdot229\cdot1429$
677 677^2 677^3	$2\cdot3\cdot113$ 459007 $2^2\cdot3\cdot5\cdot113\cdot45833$	743 743^2 743^3	$2^3\cdot3\cdot31$ 552793 $2^4\cdot3\cdot5^2\cdot31\cdot61\cdot181$	811 811^2 811^3	$2^2\cdot7\cdot29$ $3\cdot31\cdot73\cdot97$ $2^3\cdot7\cdot13\cdot29\cdot41\cdot617$
683 683^2 683^3	$2^2\cdot3^2\cdot19$ $7\cdot66739$ $2^3\cdot3^2\cdot5\cdot19\cdot46649$	751 751^2 751^3	$2^4\cdot47$ $3\cdot7\cdot26893$ $2^5\cdot47\cdot282001$	821 821^2 821^3	$2\cdot3\cdot137$ $7\cdot229\cdot421$ $2^2\cdot3\cdot137\cdot337021$
691 691^2 691^3	$2^2\cdot173$ $3\cdot19\cdot8389$ $2^3\cdot173\cdot193\cdot1237$	757 757^2 757^3	$2\cdot379$ $3\cdot13\cdot14713$ $2^2\cdot5^2\cdot73\cdot157\cdot379$	823 823^2 823^3	$2^3\cdot103$ $3\cdot7\cdot43\cdot751$ $2^4\cdot5\cdot103\cdot67733$
701 701^2 701^3	$2\cdot3^3\cdot13$ 492103 $2^2\cdot3^3\cdot13\cdot17\cdot97\cdot149$	761 761^2 761^3	$2\cdot3\cdot127$ 579883 $2^2\cdot3\cdot17\cdot127\cdot17033$	827 827^2 827^3	$2^2\cdot3^2\cdot23$ 684757 $2^3\cdot3^2\cdot5\cdot13\cdot23\cdot5261$
709 709^2 709^3	$2\cdot5\cdot71$ $3\cdot7\cdot23971$ $2^2\cdot5\cdot37\cdot71\cdot6793$	769 769^2 769^3	$2\cdot5\cdot7\cdot11$ $3\cdot31\cdot6367$ $2^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot17\cdot17393$	829 829^2 829^3	$2\cdot5\cdot83$ $3\cdot211\cdot1087$ $2^2\cdot5\cdot17^2\cdot29\cdot41\cdot83$
719 719^2 719^3	$2^4\cdot3^2\cdot5$ $487\cdot1063$ $2^5\cdot3^2\cdot5\cdot53\cdot4877$	773 773^2 773^3	$2\cdot3^2\cdot43$ 598303 $2^2\cdot3^2\cdot5\cdot43\cdot59753$	839 839^2 839^3	$2^3\cdot3\cdot5\cdot7$ 704761 $2^4\cdot3\cdot5\cdot7\cdot109\cdot3229$
727 727^2 727^3	$2^3\cdot7\cdot13$ $3\cdot176419$ $2^4\cdot5\cdot7\cdot13\cdot17\cdot3109$	787 787^2 787^3	$2^2\cdot197$ $3\cdot37^2\cdot151$ $2^3\cdot5\cdot197\cdot241\cdot257$	853 853^2 853^3	$2\cdot7\cdot61$ $3\cdot43\cdot5647$ $2^2\cdot5\cdot7\cdot13\cdot29\cdot61\cdot193$

Nº.	Soma Div.	Nº.	Soma Div.	Nº.	Soma Div.
857	$2\cdot3\cdot11\cdot13$	907	$2^2\cdot227$	953	$2\cdot3^2\cdot53$
857^2	735307	907^2	$3\cdot7\cdot39217$	953^2	$181\cdot5023$
857^3	$2^2\cdot3\cdot5^2\cdot11\cdot13\cdot37\cdot397$	907^3	$2^3\cdot5^2\cdot227\cdot16453$	953^3	$2^2\cdot3^2\cdot5\cdot53\cdot90821$
859	$2^2\cdot5\cdot43$	911	$2^4\cdot3\cdot19$	967	$2^3\cdot11^2$
859^2	$3\cdot246247$	911^2	830833	967^2	$3\cdot67\cdot4657$
859^3	$2^3\cdot5\cdot43\cdot137\cdot2693$	911^3	$2^5\cdot3\cdot19\cdot29\cdot41\cdot349$	967^3	$2^4\cdot5\cdot11^2\cdot13\cdot7193$
863	$2^5\cdot3^3$	919	$2^3\cdot5\cdot23$	971	$2^2\cdot3^5$
863^2	$7^2\cdot15217$	919^2	$3\cdot7\cdot13\cdot19\cdot163$	971^2	$13\cdot79\cdot919$
863^3	$2^6\cdot3^3\cdot5\cdot13\cdot17\cdot337$	919^3	$2^4\cdot5\cdot23\cdot37\cdot101\cdot113$	971^3	$2^3\cdot3^5\cdot197\cdot2393$
877	$2\cdot439$	929	$2\cdot3\cdot5\cdot31$	977	$2\cdot3\cdot163$
877^2	$3\cdot7\cdot37\cdot991$	929^2	$157\cdot5503$	977^2	$7\cdot136501$
877^3	$2^2\cdot5\cdot439\cdot76913$	929^3	$2^2\cdot3\cdot5\cdot31\cdot431521$	977^3	$2^2\cdot3\cdot5\cdot53\cdot163\cdot1801$
881	$2\cdot3^2\cdot7^2$	937	$2\cdot7\cdot67$	983	$2^3\cdot3\cdot41$
881^2	$19\cdot40897$	937^2	$3\cdot292969$	983^2	$103\cdot9391$
881^3	$2^2\cdot3^2\cdot7^2\cdot388081$	937^3	$2^2\cdot5\cdot7\cdot67\cdot87797$	983^3	$2^4\cdot3\cdot5\cdot13\cdot41\cdot7433$
883	$2^2\cdot13\cdot17$	941	$2\cdot3\cdot157$	991	$2^5\cdot31$
883^2	$3\cdot260191$	941^2	$811\cdot1093$	991^2	$3\cdot7\cdot13^2\cdot277$
883^3	$2^3\cdot5\cdot13\cdot17\cdot77969$	941^3	$2^2\cdot3\cdot13\cdot157\cdot34057$	991^3	$2^6\cdot31\cdot491041$
887	$2^3\cdot3\cdot37$	947	$2^2\cdot3\cdot79$	997	$2\cdot499$
887^2	$13\cdot60589$	947^2	$7\cdot277\cdot463$	997^2	$3\cdot13\cdot31\cdot823$
887^3	$2^4\cdot3\cdot5\cdot29\cdot37\cdot2713$	947^3	$2^3\cdot3\cdot5\cdot79\cdot89681$	997^3	$2^2\cdot5\cdot499\cdot99401$

Observação.

§. XIV. A tabela é bastante útil na resolução de questões sobre os divisores e as partes alíquotas. A soma dos divisores de qualquer número proposto pode ser descoberta facilmente com esse recurso, pois se o próprio número proposto é listado, uma vez localizado, a soma das suas partes alíquotas será obtida. Em consequência, consta-se de imediato se, ou não, as somas sejam iguais, o que, como vou explicar, torna fácil a investigação dos números amigáveis com o auxílio dessa tabela. Explicarei no seguinte lema o modo em que a soma dos divisores de qualquer número pode ser conhecido com o recurso dessa tabela.

Lema 3.

§. XV. *Seja um número qualquer proposto, então a soma dos seus divisores é obtida da seguinte maneira:*

Como todo número é primo ou um produto de primos, o número proposto deve ser decomposto em seus fatores primos e, se existirem fatores iguais, estes devem ser expressos conjuntamente. Desse modo, o número proposto sempre será reduzido à forma $m^{\alpha}\cdot n^{\beta}\cdot p^{\gamma}\cdot q^{\delta}$ &c, sendo m, n, p, q &c números primos. Portanto, seja o número proposto = N. Como temos N = $m^{\alpha}\cdot n^{\beta}\cdot p^{\gamma}\cdot q^{\delta}$ &c, com os fatores m^{α}, n^{β}, p^{γ}, q^{δ} &c primos entre si, teremos $\int N = \int m^{\alpha}\cdot\int n^{\beta}\cdot\int p^{\gamma}\cdot\int q^{\delta}$&c, onde os valores de $\int m^{\alpha}$, $\int n^{\beta}$, $\int p^{\gamma}$, $\int q^{\delta}$ &c. serão obtidos da tabela.

1. Exemplo. *Seja o número proposto* N = 360.

Decompondo este número em seus fatores primos, teremos N = $2^3\cdot 3^2\cdot 5$ e, portanto, $\int 360 = \int 2^3\cdot.\int 3^2\cdot\int 5 = 3\cdot 5\cdot 13\cdot 2\cdot 3$ visto que $\int 2^3 = 3\cdot 5$, $\int 3^2 = 13$, $\int 5 = 2\cdot 3$.

Desta maneira, ordenando os fatores, teremos $\int 360 = 2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 13 = 1170$.

2. Exemplo. *Investigar* $\int m$, *para determinar se, ou não, os números 2620 e 2924 são amigáveis*.

Como temos $2620 = 2^2\cdot 5\cdot 131$ e $2924 = 2^2\cdot 17\cdot 43$ a investigação procede assim.

Números propostos	2620	2924
expressos em fatores	$2^2\ 5\cdot131$	$2^2\cdot17\cdot43$
somas dos divisores	$7\cdot6\cdot132$	$7\cdot18\cdot44$
ou seja	5544	5544
Somas das partes alíquotas	2924	2620

Portanto, visto que as somas das partes alíquotas são números reciprocamente iguais, é claro que os números propostos são amigáveis.

Observação.

§. XVI. Sendo posto, portanto, a maneira de achar os divisores de qualquer número, abordarei o próprio problema da investigação dos números amigáveis e examinarei como números desse tipo devem ser inter-relacionados com relação a soma dos divisores, de tal modo que a descoberta delas, um após o outro, pode ser mais facilmente empreendido por meio de regras a serem posteriormente ensinadas.

Problema geral.

§. XVII. Achar números amigáveis, isto é, dois números cuja natureza é tal que cada um seja igual à soma das partes alíquotas do outro.

Solução.

Sejam m e n dois números amigáveis desse tipo. Então, por hipótese, $\int m$ e $\int n$ são a soma dos divisores dos mesmos. A soma das partes alíquotas do número m será $= \int m - m$ e a soma das partes alíquotas do número n será igual $\int n - n$. Deste modo, originam-se, da natureza dos números amigáveis, as seguintes duas equações:

$$\int m - m = n \ \& \ \int n - n = m,$$
$$\text{ou seja,} \quad \int m = \int n = m + n.$$

Em primeiro lugar, portanto, os números amigáveis m e n devem ter a mesma soma dos divisores e, assim, é necessário que a soma comum dos divisores seja igual ao agregado $m+n$ dos próprios números.

Corolário I.

§. XVIII. O problema, portanto, é reduzido ao seguinte: encontrar dois números que tenham a mesma soma de divisores, sendo essa soma igual ao agregado dos próprios números.

Corolário 2.

§. XIX. A própria lógica do problema exige que os dois números procurados sejam distintos. Mas, se se quisesse que fossem iguais, isto é, $m = n$, teríamos $\int n = 2n$ & $\int n - n = n$. Isto é, a soma das partes alíquotas dos números repetidos é igual ao si próprio, o que é a propriedade dos números perfeitos. Portanto, qualquer número perfeito é amigável com si mesmo.

Corolário 3.

§. XX. Mas, se os números amigáveis m e n sejam diferentes, como a lógica da questão requer, é manifesto que um será abundante e o outro deficiente; isto é, a soma das partes alíquotas de um será maior do que si mesmo e a do outro menor do que si mesmo.

Observação.

§. XXI. Dessa propriedade geral, entretanto, obtemos pouca ajuda para achar números amigáveis, porque este tipo de análise é profundamente improdutivo para a resolução da equação $\int m = \int n = m+n$. Devido a essa deficiência, precisamos antes considerar fórmulas particulares, para que, a partir da natureza delas, regras específicas para a descoberta de números amigáveis possam ser derivadas; de fato, para tanto, a regra cartesiana mencionada por van Schooten será incluída. Visto que não se sabe se há números amigáveis que são primos entre si, limitarei as fórmulas gerais de tal forma a obter números amigáveis com um fator comum.

Problema Particular.

§. XXII. Achar a natureza dos números amigáveis que tenham um fator comum.

Solução

Seja a o fator comum dos números amigáveis, sendo um dos quais = am e o outro = an; sejam ainda tanto m & a, quanto n & a, números primos entre si. Assim, a soma dos divisores de cada um pode ser achada pelo dado princípio. Em primeiro lugar, portanto, visto que a soma dos divisores de cada um deve ser a mesma, temos $\int a \cdot \int m = \int a \cdot \int n$ e, logo, $\int m = \int n$. Em segundo lugar, é, decerto, necessário fazer $\int a \cdot \int m$, ou $\int a \cdot \int n$, igual ao agregado, $am+an$, dos próprios números, donde obtemos $\frac{a}{\int a} = \frac{\int m}{m+n} = \frac{\int n}{m+n}$. Assim, quando pomos am & an para os números amigáveis, é necessário, primeiro, que $\int m = \int n$ e, depois, que $a(m+n) = \int a \cdot \int m$.

Corolário 1.

§. XXIII. Logo, se encontrarmos, para m & n, números para os quais $\int m = \int n$, então devemos procurar um número a que faz $\frac{a}{\int a} = \frac{\int m}{m+n}$, ou seja, será necessário investigar o próprio número a a partir da razão que esse número deve ter para a soma dos seus divisores.

Corolário 2.

§. XXIV. Se o fator comum a for dado, a questão é reduzida a achar números m & n, supostos, alternadamente, primos ou compostos de dois, ou talvez mais, primos e, visto que, na prática, as somas dos divisores podem ser apresentadas, regras especiais para achá-los podem ser ensinadas.

Corolário 3.

§. XXV. Vê-se de imediato, porém, que ambos os números m e n não podem ser primos. Logo, o caso mais simples é o de ser um deles primo e o outro um produto de dois primos. Em seguida, todos os dois poderão ser produtos de dois, ou então mais, números primos e, a partir disto, várias regras especiais para achar números amigáveis poderão ser derivadas.

Observação.

§. XXVI. As diversas formas para números amigáveis, que se originam de tudo isto, poderão, portanto, ser representadas do seguinte modo. Seja a um fator comum dos dois números e sejam p, q, r, s &c. números primos que não são divisores do fator comum a. Então, as formas dos números amigáveis serão:

Primeira Forma	-	-	-	$\begin{cases} apq \\ ar \end{cases}$
Segunda Forma	-	-	-	$\begin{cases} apq \\ ars \end{cases}$
Terceira Forma	-	-	-	$\begin{cases} apqr \\ as \end{cases}$
Quarta Forma	-	-	-	$\begin{cases} apqr \\ ast \end{cases}$
Quinta Forma	-	-	-	$\begin{cases} apqr \\ astu \end{cases}$
&c.				

Embora o número dessas formas possa ser estendido ao infinito, não é lícito concluir que todos os números amigáveis estão nelas contidos. Pois, em primeiro lugar, uma vez que as letras p, q, r, s, t, &c. significam números primos distintos, não é verossímil que não haja número amigável algum, no qual não ocorrem potências de números primos. Ainda mais, é igualmente duvidoso que não haja números amigáveis que, ou não tenham um fator comum a, ou nos quais isto não fosse inteiramente o mesmo: por exemplo, se houver números amigáveis da forma $m^{\alpha}P$ & $m^{\beta}Q$, nos quais os expoentes α & β sejam distintos. Devido a isto, tais formas não são contidas nas formas dadas acima, mesmo se P & Q sejam produtos somente de números primos, todos distintos. Fica claro, portanto, que a questão sobre números amigáveis é bastante extensa e, pela mesma razão, é tão difícil que uma solução completa será dificilmente esperada.

Não obstante, esforçar-me-ei a procurar soluções particulares e explicarei vários métodos, que me permitiram retirar das referidas fórmulas muitos números amigáveis. Cada forma será investigada por um método duplo, de acordo com se o fator comum *a* é tomado como dado, ou se o mesmo é procurado; explicarei esses métodos nos seguintes problemas.

Problema 1.

§. XXVII. *Achar números amigáveis da primeira forma apq & ar, dado o fator comum a.*

Solução.

Visto que p, q & r são números primos e que $\int r = \int p \cdot \int q$, ou seja, $r+1 = (p+1)(q+1)$, pomos $p+1 = x$ & $q+1 = y$, o que faz com que $r = xy-1$. Portanto, é necessário que x & y sejam números tais que tanto $x-1$ & $y-1$, quanto $xy-1$, são números primos. Então, para que $a(x-1)(y-1)$ & $a(xy-1)$ sejam números amigáveis, é necessário que seu agregado $a(2xy-x-y)$ seja igual a soma dos divisores de qualquer um deles, $xy\int a$. Disto, surge a equação $xy\int a = 2axy-ax-ay$, ou seja, $y = \frac{ax}{(2a-\int a)x-a}$ .Para fins de brevidade, seja $\frac{a}{2a-\int a} = \frac{b}{c}$ e seja $\frac{b}{c}$ o valor irredutível da fração $\frac{a}{2a-\int a}$. Teremos $y = \frac{bx}{cx-b}$, ou seja, $cy = \frac{bcx}{cx-b} = b + \frac{bb}{cx-b}$ e, disto, obteremos $(cx-b)(cy-b) = bb$. Visto, portanto, que $cx-b$ & $cy-b$

são fatores de bb, o quadrado, que é conhecido, pode ser decomposto em dois fatores do referido tipo, sendo ambos dos quais, quando aumentados por b, divisíveis por c. Dessa forma, os quocientes gerados, x & y, são examinados até que $x-1$, $y-1$ & $xy-1$ resultam em números primos. Sempre que essa condição for satisfeita – e, de fato, é prontamente descoberta para qualquer valor que seja suposto para a –, obteremos números amigáveis, os quais serão $a(x-1)(y-1)$ & $a(xy-1)$. O que era proposto.

Corolário.

§. XXVIII. De acordo com um ou outro valor seja tomado para a, portanto, sendo os valores b & c desconhecidos, surgem regras específicas pelas quais números amigáveis, se os houverem nessa forma, são facilmente extraídos.

Regra 1.

§. XXIX. Seja o fator comum a qualquer potência de dois. Então para $a = 2^n$, teremos $\int a = 2^{n+1}-1$ e, portanto, $2a-\int a = 1$, donde teremos $\frac{a}{2a-\int a} = 2^n$ e, por isso, $b = 2^n$ & $c = 1$. Disto, resulta que $(x-2^n)(y-2^n) = 2^{2n}$.

Como 2^{2n} não tem outros fatores, exceto potências de dois, teremos:

$$x - 2^n = 2^{n+k} \text{ ou } x = 2^{n+k} + 2^n$$
$$y - 2^n = 2^{n-k} \text{ ou } y = 2^{n-k} + 2^n$$

Em consequência, deve ser investigado se haja um valor desse tipo para k que faz os seguintes três números

$$x-1=2^{n+k}+2^n-1$$
$$y-1=2^{n-k}+2^n-1$$
$$xy-1=2^{2n+1}+2^{2n+k}+2^{2n-k}-1$$

números primos. E se isto acontecer, teremos os números amigáveis

$$2^n(2^{n+k}+2^n-1)(2^{n-k}+2^n-1),$$
$$2^n(2^{2n+1}+2^{2n+k}+2^{2n-k}-1).$$

Seja, por exemplo, $n–k = m$, ou seja, $n = m+k$ e obteremos

$$x-1=2^m(2^{2k}+2^k)-1=q,$$
$$y-1=2^m(1+2^k)-1=p,$$
$$xy-1=2^{2m}(2^{2k+1}+2^{3k}+2^k)-1=r.$$

Esses números, sempre que forem primos, fornecerão números amigáveis.

Caso I.

§. XXX. Seja $k = 1$ e números amigáveis serão obtidos, sempre que os seguintes três números forem primos

$$3\cdot 2^m–1,\quad 6\cdot 2^m–1,\quad \text{e}\quad 18\cdot 2^{2m}–1.$$

Assim, pondo

$$p = 3\cdot 2^m–1,\quad q = 6\cdot 2^m–1,\quad \text{e}\quad r = 18\cdot 2^{2m}–1,$$

os números amigáveis serão

$$2^{m+1}pq \quad \text{e } 2^{m+1}r$$

porque $n = m+k = m+1$. Esta é a regra de Descartes, mencionada por van Schooten.

Exemplo 1.

§. XXXI. Seja $m = 1$ e teremos

$p = 3 \cdot 2 - 1 = 5$ um número primo,

$q = 6 \cdot 2 - 1 = 11$ um número primo,

$r = 18 \cdot 4 - 1 = 71$ um número primo.

Obtemos, portanto, os números amigáveis

$$2^2 \cdot 5 \cdot 11 \quad \text{e} \quad 2^2 \cdot 71 \quad \text{ou seja} \quad 220 \quad \text{e} \quad 284,$$

os quais são os menores de todos os que podem ser produzidos.

Exemplo 2.

§. XXXII. Seja $m = 2$ e teremos $2^m = 4$ e $2^{2m} = 16$ e também

$p = 3 \cdot 4 - 1 = 11$ um número primo,

$q = 6 \cdot 4 - 1 = 23$ um número primo,

$r = 18 \cdot 16 - 1 = 287$ um número não primo.

e, assim, não obtemos qualquer número amigável.

Exemplo 3.

§. XXXIII. Seja $m = 3$ e teremos $2^m = 8$ e $2^{2m} = 64$ e também

$p = 3 \cdot 8 - 1 = 23$ primo,

$q = 6 \cdot 8 - 1 = 47$ primo,

$r = 18 \cdot 64 - 1 = 1151$ primo.

Portanto, os números amigáveis serão

$$2^4 \cdot 23 \cdot 47 \quad \text{e} \quad 2^4 \cdot 1151 \quad \text{ou seja} \quad 17296 \quad \text{e} \quad 18416.$$

Próximos Exemplos.

§. XXXIV. Os exemplos que procedem na sequência, em que maiores valores são atribuídos aos expoentes *m*, podem ser mais comodamente representados num só olhar assim:

Seja $m = 1$	2	3	4	5	6	7	8
teremos $p = 5$	11	23	47	95*	191	383	767
$q = 11$	23	47	95*	191	383	767*	1535
$r = 71$	287*	1151	4607*	18431*	73727	294911	1179647*

Os números não primos são indicados por um asterisco. De tudo isto, somente três pares de números amigáveis são obtidos, a saber:

$$\text{I.}\begin{cases} 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \\ 2^2 \cdot 71 \end{cases} \quad \text{II.}\begin{cases} 2^4 \cdot 23 \cdot 47 \\ 2^4 \cdot 1151 \end{cases} \quad \text{III.}\begin{cases} 2^7 \cdot 191 \cdot 383 \\ 2^7 \cdot 73727. \end{cases}$$

Não podemos avançar muito além deste ponto, porém, porque os valores de *r* se tornam tão grandes que não se pode discernir se, ou não, eles sejam primos. Pois, na verdade, as tabelas de números primos até agora construídas mal passam de 100000.

Caso II.

§. XXXV. Seja $k = 2$ e os valores das letras p, q, r, que devem ser primos serão

$$p = 5 \cdot 2^m - 1,$$

$$q = 20 \cdot 2^m - 1,$$

$$r = 100 \cdot 2^{2m} - 1,$$

dos quais o último é sempre divisível por três porque $2^{2m} = 3\alpha+1$ e $r = 300\alpha+99$. Assim, nenhum número amigável é obtido.

Caso III.

§. XXXVI. Pondo $k = 3$, teremos

$$p = 9 \cdot 2^m - 1,$$

$$q = 72 \cdot 2^m - 1,$$

$$r = 648 \cdot 2^{2m} - 1,$$

dos quais nenhum parece admitir, necessariamente, a divisão. Sendo assim, representarei aqui, conjuntamente, os valores de p, q, r que surgem dos mais simples valores para m

$m =$ 1	2	3	4	5
$p =$ 17	35*	71	143*	287*
$q =$ 143*	287*	575*	1151	2303*
$r =$ 2591	10367*	41471*	165887	663551*

Visto que não pode progredir além deste ponto, nenhum número amigável é achado.

Caso IV.

§. XXXVII. Pondo $k = 4$, os seguintes três números devem dar primos

$$p = 17\cdot 2^m - 1,$$
$$q = 272\cdot 2^m - 1,$$
$$r = 4624\cdot 2^{2m} - 1.$$

Como, aqui, r é sempre um múltiplo de três, é evidente que nenhum número amigável é produzido.

Caso V.

§. XXXVIII. Pondo $k = 5$, os três números seguintes deverão ser primos

$$p = 33\cdot 2^m - 1,$$
$$q = 1056\cdot 2^m - 1,$$
$$r = 34848\cdot 2^{2m} - 1.$$

Aqui é imediatamente evidente que o caso $m = 1$ é inútil, pois dá $p = 65$. Seja, então, $m = 2$, o que faz com que $p = 131$, $q = 4223$*, $r = 557567$. Aqui, como q não é primo e como valores maiores para m, não podem ser sujeitos à examinação, devido ao defeito das tabelas de números primos, não se extrai daqui novos números amigáveis. Mas, pela mesma razão, maiores valores não podem ser atribuídos a k.

Observação.

§. XXXIX. Porque as potências de dois, quando colocadas para a, reduzam o valor de c, na fração $\frac{b}{c} = \frac{a}{2a - \int a}$, à unidade e assim permitem a obtenção de soluções, colocarei outros valores para a que também resultará no valor = 1 para c. Mas entre estes, os que merecem mais atenção são os que originam da forma $a = 2^n(2^{n+1}+e)$, supondo que $2^{n+1}+e$ seja um número primo. Pois, então, temos que

$$2a - \int a = e + 1 \quad \& \quad \frac{b}{c} = \frac{2^n(2^{n+1}+e)}{e+1};$$

se, portanto, $e+1$ for um divisor do numerador $2^n(2^{n+1}+e)$, o valor de c será novamente = 1.

Regra II.

§. XL. Seja o fator comum $a = 2^n(2^{n+1} + 2^k - 1)$ com $(2^{n+1} + 2^k - 1)$ primo. Porque $e+1 = 2^k$, teremos a fração $\frac{b}{c} = \frac{2^n(2^{n+1}+2^k+1)}{2^k} = 2^{n-k}(2^{n+1} + 2^k - 1)$, quando não tivermos $k > n$. Por esta hipótese, portanto, teremos

$$b = 2^{n-k}(2^{n+1}+2^k-1) \quad \text{e} \quad c = 1.$$

Assim, o quadrado bb deve ser decomposto de dois fatores deste tipo $(x-b)(y-b)$, a partir dos quais, não somente os números $x-1$

$= p$ e $y–1 = q$, mas também $xy–1 = r$ devem ser feitos números primos. Se casos desse tipo podem ser achados, apq e ar serão números amigáveis. Vale a pena observar que deverão ser rejeitados aqueles casos em que algum dos números primos p, q, r seja divisor de a ou se seja igual a $2^{n+1}+2^k–1$, pois a não é divisível por qualquer outro número primo.

Seja $n–k = m$ ou $n = m+k$. Teremos

$$a = 2^{m+k}(2^{m+k+1}+2^k–1) \quad \text{e} \quad b = 2^m(2^{m+k+1}+2^k–1).$$

Ora, porque $2^{m+k+1}+2^k–1$ deve ser um número primo, ponhamos

$$2^{m+k+1}+2^k–1 = f \quad \text{ou} \quad f = 2^k(2^{m+1}+1)–1,$$

de tal forma que

$$a = 2^{m+k}f \quad \text{e} \quad b = 2^m f;$$

teremos

$$bb = 2^{2m}ff = (x–b)(y–b).$$

Ora, porque f é um número primo, o número $2^{2m}ff$ é decomposto em dois fatores de duas maneiras.

Pela primeira, faz-se

$$(x–b)(y–b)=2^{m–\alpha}f\cdot 2^{m+\alpha}f$$

E, portanto

$$x = 2^{m–\alpha}f+2^m f, \quad y = 2^{m+\alpha}f+2^m f,$$

$$p = (2^{m–\alpha}+2^m)f–1; \quad q = (2^{m+\alpha}+2^m)f–1$$

e

$$r = (2^{2m+1}+2^{2m+\alpha}+2^{2m-\alpha})ff–1,$$

onde os três números p, q, r devem ser feitos primos.

Pela segunda, a resolução é feito assim

$$(x-b)(y-b) = 2^{m\pm\alpha} \cdot 2^{m\mp\alpha}ff,$$

donde se faz

$$x = 2^{m\pm\alpha} + 2^m f, \quad y = 2^{m\mp\alpha}ff + 2^m f,$$

$$p = 2^{m\pm\alpha} + 2^m f - 1, \quad q = \left(2^{m\mp\alpha}f + 2^m\right)f - 1$$

E, sempre que p, q, r produzirem números primos desta maneira, surgirão os números amigáveis apq e ar.

Caso I.

§. XLI. Seja $k = 1$. Teremos $a = 2^{m+1}(2^{m+2}+1)$, $b = 2^m(2^{m+2}+1)$ e $f = 2^{m+2}+1$, o qual deve ser primo. Mas, como $(x-b)(y-b)=2^{2m}ff$, temos

ou	ou
$p = (2^{m-\alpha}+2^m)f-1$	$p = 2^{m\pm\alpha} + 2^m f - 1,$
$q = (2^{m+\alpha}+2^m)f-1$	$q = \left(2^{m\mp\alpha}f + 2^m\right)f - 1,$
$r = (2^{2m+1}+2^{2m+\alpha}+2^{2m-\alpha})ff-1$	$r = \left(2^{2m+1}f + 2^{2m\pm\alpha} + 2^{2m\mp\alpha}ff\right)f - 1.$

Deve ser observado, no entanto, que, para $2^{m+2}+1$ ser um número primo, é necessário que o expoente $m+2$ seja uma potência de dois. Logo, os valores para m serão 0, 2, 6, 14, &c. Entretanto, o caso $m = 0$ deve ser rejeitado, pois nenhum valor seria atribuível a α.

Exemplo 1.

§. XLII. Seja, portanto, $m = 2$, de tal forma que $a = 8 \cdot 17$ e $b = 4 \cdot 17 = 68$ e $f = 17$. Como devemos ter $(x-b)(y-b) = 4^2 \cdot 17^2$, a resolução pode ser organizada por fatores:

$x-68 =$	2	4	8	34
$y-68 =$	$8 \cdot 17^2$	1156	578	136
$x =$	70	72	76	102
$y =$	2380	1224	646	204
$p =$	69*	71	75*	101
$q =$	2379*	1223	645*	203*
$r =$	166599*	88127*	49095*	20807

Então daqui nenhum número amigável é obtido.

Exemplo 2.

§. XLIII. Seja $m = 6$, de tal forma que $a = 2^7 \cdot 257$, $b = 2^6 \cdot 257$ e $f = 257$. Logo, como devemos ter $(x-b)(y-b) = 2^m \cdot 257^2$, a resolução deverá ser organizado assim:

$$
\begin{array}{r|c}
x-16448 = & 32\cdot 257 \\
y-16448 = & 128\cdot 257 \\
x = & 24672 \\
y = & 49344 \\
p = & 24671 \\
q = & 49343^{*} \\
r = & \ldots
\end{array}
$$

Os valores originados dos fatores restantes são tão grandes que não se pode julgar se, ou não, são primos.

Casos restantes.

§. XLIV. Visto que $f = 2^{m+k+1}+2^{k}-1$ deve ser um número primo, investiguemos o que acontece nos casos mais simples, pois não será possível desenvolver os casos demasiadamente complexos. Seja, portanto, $k = 2$ e, porque $f = 2^{m+3}+3$, os valores convenientes para m serão 1, 3, 4. Seja $k = 3$; teremos $f = 2^{m+4}+7$ e os valores convenientes para m serão 2, 4, 6. No caso em que $k = 4$, temos $f = 2^{m+5}+15$ e m será 1 ou 3. Além disso, decerto, não podemos progredir.

Exemplo 1.

§. XLV. Ponhamos, portanto, $k = 2$ e $m = 1$. Então, teremos $f = 19$ e $a = 8 \cdot 19$, enquanto $b = 2 \cdot 19 = 38$, donde se faz $(x-38)(y-38) = 2^2 \cdot 19^2 = 1444$. A resolução será

$x-38 =$	2	4	
$y-38 =$	722	361	Nenhum dos dois fatores, decerto, pode ser tomado como ímpar.
$x =$	40		
$y =$	760	ímp.	
$p =$	39*		

Já que p não é primo, é claro que nenhum número amigável resultará.

Exemplo 2.

§. XLVI. Ponhamos $k = 2$ e $m = 3$, de tal forma que $f = 67$. Então, teremos $a = 32 \cdot 67$ e $b = 8 \cdot 67 = 536$; disto, se faz $(x-536)(y-536) = 26 \cdot 67^2$.

$x-536 =$	268	16	
$y-536 =$	1072	17956	Os valores restantes para p
$x =$	804	552	fornecem números divisíveis por
$y =$	1608	. . .	3 e, por isso, foram omitidos.
$p =$	803*	551*	Exemplos subsequentes geram
$q =$	1607	. . .	números grandes demais.

Regra III.

§. XLVII. Sejam, como antes, $a = 2^n(2^{n+1}+2^k-1)$ & $2^{n+1}+2^k-1 = f$ números primos, enquanto, na fração $\frac{b}{c} = \frac{2^n(2^{n+1}+2^k-1)}{2^k}$, seja $k > n$. Então, teremos

$$b = 2^{n+1}+2^k-1 \quad \& \quad c = 2^{k-n}.$$

Pondo $k-n = m$, de tal forma que $k = m+n$, teremos

$$a = 2^n(2^{n+1}+2^{m+n}-1), \quad b = 2^{n+1}+2^{m+n}-1 = f \quad \& \quad c = 2^m,$$

donde obtemos a equação

$$(2^m x-b)(2^m y-b) = bb.$$

Porém, visto que $b = f$ é um número primo, não há outra solução além de $1 \cdot bb$, da qual se faz

$$x = \frac{1+b}{2^m} \quad \& \quad y = \frac{b(1+b)}{2^m}$$

ou seja

$$x = 2^n+2^{n+1-m} \quad \& \quad y = (2^{n+1}+2^{m+n}-1)(2^n+2^{n+1-m}).$$

Ora, vale observar que requer se que os seguintes quatro números sejam primos

$$f = 2^{n+1}+2^{m+n}-1, \quad p = x-1, \quad q = y-1 \quad \& \quad r = xy-1$$

e, para tanto, é necessário que $m < n+1$. Se essas condições forem satisfeitas, *apq* & *ar* serão números amigáveis.

Caso 1.

§. XLVIII. Seja $m = 1$; teremos $f = 2^{n+2}-1$, $x = 2^{n+1}$ & $p = 2^{n+1}-1$. Não é possível, porém, fazer com que ambos f e p sejam simultaneamente números primos, exceto no caso $n = 1$, para o qual, no entanto, $q = 27$. Portanto, sob a hipótese de que $m = 1$, nenhum número amigável é produzido.

Caso 2.

§. XLIX. Seja, então, $m = 2$, de tal forma que $f = 3\cdot2^{n+1}-1$, $x = 3\cdot2^{n-1}$ & $y = 3\cdot2^{n-1}(3\cdot2^{n+1}-1)$, enquanto $a = 2^n\cdot f$. Os seguintes quatro números, portanto, devem ser primos

$$f = 3\cdot2^{n+1}-1, \quad p = 3\cdot2^{n-1}-1, \quad q = 3\cdot2^{n-1}(3\cdot2^{m+1}-1)-1 \quad \& \quad r = 9\cdot2^{2n-2}(3\cdot2^{n+1}-1)-1,$$

donde os seguintes exemplos são formados:

$n =$	1	2	3	4	5
$f =$	11	23	47	95*	191
$p =$	2	5	11	. . .	47
$q =$	32*	137	563	. . .	9167*
$r =$	98*	827	6767*	. . .	. . .

Portanto, para $n = 2$ e $a = 4 \cdot 23$, obtemos os números amigáveis

$$\begin{cases} 4 \cdot 23 \cdot 5 \cdot 137 \\ 4 \cdot 23 \cdot 827. \end{cases}$$

Os outros casos.

§. L. Se $m = 3$, mais uma vez, ou f, ou p é divisível por 3 e o mesmo acontece se $m = 5$ ou 7. Seja, portanto, $m = 4$. Teremos

$f = 9 \cdot 2^{n+1} - 1$, $x = 9 \cdot 2^{n-3}$ & $y = 9 \cdot 2^{n-3}(9 \cdot 2^{n+1} - 1)$ & $a = 2^n \cdot f$,

donde os seguintes exemplos são formados:

$n =$	1	4	5	6
$f =$	35*	287*	575*	1151
$x =$	. . .	. . .	. . .	72
$y =$	. . .	. . .	. . .	82872
$p =$	. . .	. . .	. . .	71
$q =$	. . .	. . .	. . .	82871*
$r =$	. . .	. . .	. . .	. . .

Portanto, nem atribuindo estes valores a m, nem valores maiores, pode produzir números amigáveis.

Regra IV.

§. LI. Outras expressões ainda podem ser achadas para o fator comum a, nos quais o denominador c da fração $\frac{b}{c}$ é igual ou à unidade ou uma potência de dois. Podemos fazer, por exemplo, $a = 2^n(g-1)(h-1)$, onde $g-1$ e $h-1$ são números primos. Teremos

$$\int a = (2^{n+1}-1)gh = 2^{n+1}gh-gh;$$

mas, $2a = 2^{n+1}gh-2^{n+1}g-2^{n+1}h+2^{n+1}$, donde temos

$$2a-\int a = gh-2^{n+1}g-2^{n+1}h+2^{n+1}.$$

Pondo $2a-\int a = d$, temos $gh-2^{n+1}(g+h)+2^{n+1} = d$ &

$$(g-2^{n+1})(h-2^{n+1}) = d-2^{n+1}+2^{2n+2},$$

donde valores para g & h, que fazem $g-1$ e $h-1$ números primos, devem ser calculados através da decomposição em fatores. Então, teremos

$$a = 2^n(g-1)(h-1) \quad \& \quad \frac{b}{c} = \frac{a}{d}.$$

I. Pondo $n = 1$, teremos

$$(g-4)(h-4) = d+12,$$

onde, para obter dois fatores pares de $d+12$, os seguintes valores são produzidos:

Seja $d = 4$. Teremos

$$(g-4)(h-4) = 16 = 2\cdot 8, \text{ de que } g = 6,\ h = 12,$$

$$a = 2\cdot 5\cdot 11 \quad \text{e} \quad \frac{b}{c} = \frac{2\cdot 5\cdot 11}{4}, \quad \text{portanto} \quad b = 5\cdot 11 \quad \& \quad c = 2.$$

Seja $d = 8$. Teremos

$$(g-4)(h-4) = 20 = 2\cdot 10, \text{ de que } g = 6,\ h = 14,$$

$$a = 2\cdot 5\cdot 13 \quad \text{e} \quad \frac{b}{c} = \frac{2\cdot 5\cdot 13}{8}, \quad \text{portanto} \quad b = 5\cdot 13 \quad \& \quad c = 4.$$

Seja $d = 16$. Teremos

$$(g-4)(h-4) = 28 = 2\cdot 14, \text{ de que } g = 6,\ h = 18,$$

$$a = 2\cdot 5\cdot 17 \quad \text{e} \quad \frac{b}{c} = \frac{2\cdot 5\cdot 17}{16}, \quad \text{portanto} \quad b = 5\cdot 17 \quad \& \quad c = 8.$$

II. Pondo $n = 2$, teremos

$$(g-8)(h-8) = d+56,$$

enquanto $a = 4(g-1)(h-1)$, donde os seguintes casos resultam

Seja $d = 4$. Teremos

$$(g-8)(h-8) = 60 = 6\cdot 10, \text{ de que } g = 14,\ h = 18,$$

$$a = 4\cdot 13\cdot 17 \quad \text{e} \quad \frac{b}{c} = \frac{4\cdot 13\cdot 17}{4}, \quad \text{portanto} \quad b = 13\cdot 17 \quad \& \quad c = 1.$$

Seja $d = 8$. Teremos

$$(g-8)(h-8) = 60 = 6\cdot 10, \text{ de que } g = 14,\ h = 18,$$

$$a = 4\cdot 13\cdot 17 \quad \text{e} \quad \frac{b}{c} = \frac{4\cdot 13\cdot 17}{4}, \quad \text{portanto} \quad b = 13\cdot 17 \quad \& \quad c = 1.$$

Seja $d = 16$. Teremos

$$(g-8)(h-8) = 72 = 6\cdot 12, \text{ de que } g = 14,\ h = 20,$$

$$a = 4\cdot 13\cdot 19 \quad \text{e} \quad \frac{b}{c} = \frac{4\cdot 13\cdot 19}{16}, \quad \text{portanto} \quad b = 13\cdot 19 \quad \& \quad c = 4.$$

III. Pomos $n = 3$, de tal forma que $a = 8(g-1)(h-1)$ e será necessário ter

$$(g–16)(h–16) = d+240.$$

Seja $d = 4$. Teremos

$(g–16)(h–16) = 244 = 2\cdot 122$, de que $g = 18$, $h = 138$,

$a = 8\cdot 17\cdot 137$ e $\frac{b}{c} = \frac{8\cdot 17\cdot 137}{4}$, portanto $b = 2\cdot 17\cdot 137$ & $c = 1$.

Seja $d = 8$. Teremos

$(g–16)(h–16) = 248 = 2\cdot 124$, de que $g = 18$, $h = 140$,

$a = 8\cdot 17\cdot 139$ e $\frac{b}{c} = \frac{8\cdot 17\cdot 139}{8}$, portanto $b = 17\cdot 139$ & $c = 1$.

Seja $d = 16$. Teremos

$(g–16)(h–16) = 256 = 4\cdot 64$, de que $g = 20$, $h = 80$,

$a = 8\cdot 19\cdot 79$ e $\frac{b}{c} = \frac{8\cdot 19\cdot 79}{16}$, portanto $b = 19\cdot 79$ & $c = 2$.

Tomando esses valores para a, se os números amigáveis $a(x–1)(y–1)$ & $a(xy–1)$ estejam armados de tal forma que $x–1$, $y–1$ & $xy–1$ sejam números primos, deve se fazer $(cx–b)(cy–b) = bb$.

Exemplo 1.

§. LII. Seja $a = 2\cdot 5\cdot 11$. Teremos $b = 5\cdot 11 = 55$ & $c = 2$, donde

$$(2x–55)(2y–55) = 5^2\cdot 11^2.$$

$2x-55$	1	5	25	
$2y-55$	3025	605	121	
x	28	30	40	Aqui, portanto,
y	1540	330	88	nenhum número
$x-1$	27*	29	39*	amigável é obtido.
$y-1$	. . .	329*	. . .	
$xy-1$	. . .	. . .	. . .	

Exemplo 2.

§. LIII. Seja $a = 2 \cdot 5 \cdot 13$. Teremos $b = 5 \cdot 13 = 65$ e $c = 4$, donde se faz

$$(4x-65)(4y-65) = 5^2 \cdot 13^2.$$

Mas, o número $5^2 \cdot 13^2$ não pode ser decomposto em dois fatores, que, aumentados por 65, são divisíveis por 4. O mesmo acontece quando o valor $2 \cdot 5 \cdot 17$ é usado para a.

Exemplo 3.

§. LIV. Seja $a = 4 \cdot 13 \cdot 17$. Teremos $b = 13 \cdot 17 = 221$ & $c = 1$. É necessário que $(x-221)(y-221) = 13^2 \cdot 17^2$, donde

$x-221$	13	17	169
$y-221$	3757	. . .	289
$x-1$	233	237*	389
$y-1$	3977*	. . .	509
$xy-1$	. . .	. . .	198899

Na última coluna, $x-1$ e $y-1$ são números primos. Resta, porém investigar se, ou não, $xy-1$ = 198899 seja primo. Embora esse número exceda o limite de 100000, posso, mesmo assim, demonstrar que é primo e, em consequência, os seguintes números são amigáveis:

$$\begin{cases} 4 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 389 \cdot 509 \\ 4 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 198899 \end{cases}.$$

Observação.

§. LV. Concluo que o número 198899 é primo porque observei que 198899 = $2 \cdot 47^2 + 441^2$, de tal forma que 198899 é contida na forma $2aa+bb$. Mas, sabe-se que, se um número qualquer é contido na forma $2aa+bb$ de uma única maneira, então é primo, mas se pode ser expressa na forma $2aa+bb$ de duas ou mais maneiras, então é composto. Perguntei-me, portanto, se o dobro de algum quadrado, além de 47^2, pode ser subtraído do número 198899, de tal forma a deixar um quadrado como resto; mas, depois de fazer os cálculos, nenhum foi achado. Disso tudo, concluí que o referido número é primo e, portanto, os números acima achados são amigáveis. No entanto, nenhum número amigável é achado a partir do restante dos valores que exibi para a.

Regra V.

§. LVI. Outros números convenientes podem ser assumidos para a, a partir dos quais se pode desvendar números amigáveis. Porém, visto que não é possível obter uma regra geral para eles, explicarei aqui apenas algumas, pois não será difícil conceber outras por imitação destas.

I. Seja, portanto, $a = 3^2 \cdot 5 \cdot 13$. Teremos $\int a = 13 \cdot 6 \cdot 14$ e, porque $2a = 90 \cdot 13$ & $\int a = 84 \cdot 13$, teremos $2a - \int a = 6 \cdot 13$, enquanto $\frac{b}{c} = \frac{a}{2a - \int a} = \frac{3^2 \cdot 5 \cdot 13}{6 \cdot 13} = \frac{15}{2}$ e, portanto, $b = 15$ & $c = 2$.

II. Seja $a = 3^2 \cdot 7 \cdot 13$. Teremos $\int a = 13 \cdot 8 \cdot 14 = 16 \cdot 7 \cdot 13$, de que, porque $2a = 18 \cdot 7 \cdot 13$, teremos $2a - \int a = 2 \cdot 7 \cdot 13$, e, portanto, $\frac{b}{c} = \frac{3^2 \cdot 7^2 \cdot 13}{2 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{9}{2}$, donde $b = 9$ & $c = 2$.

III. Seja $a = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13$. Teremos $\int a = 13 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 14 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19$ & $2a = 42 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$, de que $2a - \int a = 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$ e, portanto, $\frac{b}{c} = \frac{3^2 \cdot 7^2 \cdot 13}{4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{21}{4}$, logo $b = 21$ & $c = 4$.

IV. Seja $a = 3^2 \cdot 5$. Teremos $\int a = 5 \cdot 8 \cdot 6 = 16 \cdot 3 \cdot 5$. Assim, porque $2a = 18 \cdot 3 \cdot 5$, teremos $2a - \int a = 2 \cdot 3 \cdot 5$, e, portanto, $\frac{b}{c} = \frac{3^3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{9}{2}$ e $b = 9$ & $c = 2$.

V. Seja $a = 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19$. Teremos $\int a = 13 \cdot 6 \cdot 14 \cdot 20 = 16 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$ e, porque $2a = 114 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$ & $\int a = 112 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$, teremos $\frac{b}{c} = \frac{3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13} = \frac{3 \cdot 19}{2}$ e $b = 3 \cdot 19 = 57$ & $c = 2$.

VI. Seja $a = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$. Teremos $\int a = 13 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 14 \cdot 20 = 8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19$ e, porque $2a = 42 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19$, teremos $\frac{b}{c} = \frac{3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19}{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19} = \frac{21}{2}$, donde se faz $b = 21$ & $c = 2$.

Desta forma, quando os números amigáveis são $a(x-1)(y-1)$ & $a(xy-1)$, devemos fazer $(cx-b)(cy-b) = bb$.

Exemplo 1.

§. LVII. Sejam $b = 15$, $c = 2$. Teremos $a = 3^2 \cdot 5 \cdot 13$ e é necessário satisfazer a equação $(2x-15)(2y-15) = 225$.

$2x-15$	1	5	9
$2y-15$	225	45	25
x	8	10	12
y	120	30	20
$x-1$	7	9*	11
$y-1$	119*	. . .	19
$xy-1$	. . .	. . .	239

Portanto, os números amigáveis serão

$$\left\{\begin{matrix} 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 19 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 239 \end{matrix}\right).$$

Exemplo 2.

§. LVIII. Sejam $b = 9$, $c = 2$. Teremos ou $a = 3^2 \cdot 7 \cdot 13$ ou $a = 3^3 \cdot 5$ e a equação a ser resolvida é $(2x-9)(2y-9) = 81$.

$2x-9$	3	
$2y-9$	27	Como temos $x-1 = 5$, esse valor não
x	6	pode ser combinado com $a = 3^3 \cdot 5$.
y	18	Logo, os números amigáveis serão
$x-1$	5	$\left\{\begin{array}{l} 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 17 \\ 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 107. \end{array}\right).$
$y-1$	17	
$xy-1$	107	

Exemplo 3.

§. LIX. Sejam $b = 21$ & $c = 4$. Teremos $a = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13$ e a equação a ser resolvida é $(4x-21)(4y-21) = 441$.

$4x-21$	3	Porque x e y devem ser números
$4y-21$	147	pares, não há outra resolução aqui.
x	6	Destes, portanto, os seguintes
y	42	números amigáveis são produzidos:
$x-1$	5	$\left\{\begin{array}{l} 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 41 \\ 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 251 \end{array}\right).$
$y-1$	41	
$xy-1$	251	

Exemplo 4.

§. LX. Sejam $b = 21$ & $c = 2$. Teremos $a = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$ e a equação a ser resolvida é $(2x–21)(2y–21) = 441$.

$2x–21$	3	7
$2y–21$	147	63
x	12	14
y	84	42
$x–1$	11	13
$y–1$	83	41
$xy–1$	1007*	587

Mas, porque o valor $x–1 = 13$ já é contido em a, nenhum número amigável é obtido destes.

Exemplo 5.

§. LXI. Sejam $b = 57$ & $c = 2$. Teremos $a = 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19$ e a equação a ser resolvida é $(2x–57)(2y–57) = 3249$.

$2x–57$	3	19
$2y–57$	1083	171
x	30	38
y	570	114
$x–1$	29	37
$y–1$	569	113
$xy–1$	17099	4331*

Destes, portanto, os seguintes números amigáveis são gerados:

$$\left\{\begin{matrix} 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 569 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 17099 \end{matrix}\right).$$

Exemplo 6.

§. LXII. Sejam $b = 45$ & $c = 2$. Teremos $a = 3^4 \cdot 5 \cdot 11$ e a equação a ser resolvida é $(2x-45)(2y-45) = 2025$.

$2x-45$	3	15
$2y-45$	675	135
x	24	30
y	360	90
$x-1$	23	29
$y-1$	359	89
$xy-1$	8639*	2699

Destes, portanto, os seguintes números amigáveis são gerados:

$$\left(\begin{cases} 3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 89 \\ 3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2699 \end{cases}\right).$$

Exemplo 7.

§. LXIII. Sejam $b = 77$ & $c = 2$. Teremos $a = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$ e a equação a ser resolvida é $(2x-77)(2y-77) = 49 \cdot 121$.

$2x-77$	7	11
$2y-77$	847	539
x	42	44
y	462	308
$x-1$	41	43
$y-1$	461	307
$xy-1$	19403	13551*

Destes, portanto, os seguintes números amigáveis são gerados:

$$\left(\begin{cases} 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 461 \\ 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19403 \end{cases}\right).$$

Exemplo 8.

§. LXIV. Sejam $b = 105$ & $c = 2$. Teremos $a = 3^2{\cdot}5{\cdot}7$ e a equação a ser resolvida é $(2x–105)(2y–105) = 105^2$.

$2x–105$	3	7	15	35
$2y–105$	3675	. . .	735	. . .
x	54	56	60	70
y	1890	. . .	420	. . .
$x–1$	53	55*	59	69*
$y–1$	1889	. . .	419	. . .
$xy–1$	102059	. . .	25199*	. . .

Como 102059 é um número primo, pois é contido na forma $8a+3$ e é reduzido à forma $2aa+bb$ em uma única maneira, os números amigáveis que surgem serão

$$\left\{\begin{matrix} 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 53\cdot 1889 \\ 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 102059 \end{matrix}\right).$$

Observação.

§. LXV. Portanto, os números amigáveis da forma apq, ar que temos achados até agora são

I. $\left\{\begin{matrix} 2^2\cdot 5\cdot 11 \\ 2^2\cdot 71 \end{matrix}\right)$

II. $\left\{\begin{matrix} 2^4\cdot 23\cdot 47 \\ 2^4\cdot 1151 \end{matrix}\right)$

III. $\left\{\begin{matrix} 2^7\cdot 191\cdot 383 \\ 2^7\cdot 73727 \end{matrix}\right)$

IV. $\left\{\begin{matrix} 4\cdot 23\cdot 5\cdot 137 \\ 4\cdot 23\cdot 827 \end{matrix}\right)$

V. $\left\{\begin{matrix} 4\cdot 13\cdot 17\cdot 389\cdot 509 \\ 4\cdot 13\cdot 17\cdot 198899 \end{matrix}\right)$

VI. $\begin{Bmatrix} 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 19 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 239 \end{Bmatrix}$

VII. $\begin{Bmatrix} 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 17 \\ 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 107 \end{Bmatrix}$

VIII. $\begin{Bmatrix} 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 41 \\ 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 251 \end{Bmatrix}$

IX. $\begin{Bmatrix} 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 569 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 17099 \end{Bmatrix}$

X. $\begin{Bmatrix} 3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 89 \\ 3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2699 \end{Bmatrix}$

XI. $\begin{Bmatrix} 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 461 \\ 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19403 \end{Bmatrix}$

XII. $\begin{Bmatrix} 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 53 \cdot 1889 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 102059. \end{Bmatrix}$

Problema 2.

§. LXVI. Achar números amigáveis da segunda forma apq, ars, onde p, q, r, s são números primos e a um dado fator comum.

Solução.

Visto que o fator comum a é dado, procura-se, a partir dele, o valor da fração $\frac{b}{c} = \frac{a}{2a - \int a}$, reduzido aos mínimos termos, e então teremos $a : \int a = b : 2b - c$. Em seguida, como devemos ter $\int p \cdot \int q = \int r \cdot \int s$, ou seja, $(p+1)(q+1) = (r+1)(s+1)$, põe-se um desses $= \alpha\beta xy$ e toma-se

$$p = \alpha x - 1, \quad q = \beta y - 1, \quad r = \beta x - 1, \quad s = \alpha y - 1,$$

onde é claro que os números α, β, x, y devem ser tais que p, q, r, s sejam números primos. Então os números amigáveis serão

$$a(\alpha x-1)(\beta y-1) \quad \& \quad a(\beta x-1)(\alpha y-1).$$

Ainda mais, pela definição de números amigáveis, devemos ter

$$\alpha\beta xy\int a = a(\alpha x-1)(\beta y-1)+a(\beta x-1)(\alpha y-1),$$

ou seja, porque $\int a : a = 2b-c : b$, teremos

$$\left.\begin{matrix} 2b\alpha\beta xy \\ -c\alpha\beta xy \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 2b\alpha\beta xy - b\alpha x - b\beta y + 2b \\ -b\beta x - b\alpha y \end{matrix}\right.$$

ou

$$c\alpha\beta xy = b(\alpha+\beta)(x+y)-2b.$$

Disto, faz-se

$$cc\alpha^2\beta^2 xy-bc\alpha\beta(\alpha+\beta)x+bb(\alpha+\beta)^2 = -2bc\alpha\beta+bb(\alpha+\beta)^2 \\ -bc\alpha\beta(\alpha+\beta)y$$

Assim, a seguinte equação deve ser satisfeita:

$$(c\alpha\beta x-b(\alpha+\beta))(c\alpha\beta y-b(\alpha+\beta)) = bb(\alpha+\beta)^2-2bc\alpha\beta.$$

Portanto, o número $bb(\alpha+\beta)^2-2bc\alpha\beta$ sempre deve ser decomposto em dois fatores, P & Q, de tal forma que, pondo

$$x = \frac{P+b(\alpha+\beta)}{c\alpha\beta} \quad \& \quad y = \frac{Q+b(\alpha+\beta)}{c\alpha\beta},$$

não somente os números x & y sejam inteiros, mas também $\alpha x-1$, $\beta y-1$, $\beta x-1$ & $\alpha y-1$ sejam números primos. Logo, teremos

$$p = \frac{P+b\alpha+(b-c)\beta}{c\beta}, \quad q = \frac{Q+b\beta+(b-c)\alpha}{c\alpha}$$

$$r = \frac{P + b\beta + (b - c)\alpha}{c\alpha}, \quad s = \frac{Q + b\alpha + (b - c)\beta}{c\beta}$$

Dado qualquer valor proposto para a, portanto, a partir dele, $\frac{b}{c} = \frac{a}{2a - \int a}$ é achado; então deve-se verificar se a resolução da equação

$$bb(\alpha+\beta)^2 - 2bc\alpha\beta = PQ,$$

pode ser efetuada com os números α & β tomados de tal maneira que os valores que acabamos de explicar para p, q, r & s sejam números primos e de tal maneira que o fator comum a seja primo com todos eles. Sempre que essas condições forem satisfeitas, apq & ars serão números amigáveis.

Corolário.

§. LXVII. Visto que não podemos ter $\alpha = \beta$, pomos os números mais simples para α & β, obtendo, assim, os seguintes casos:

I. Sejam $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Teremos $PQ = 9bb - 4bc$ e

$$p = \frac{P + 3b - 2c}{2c}, \quad q = \frac{Q + 3b - c}{c},$$

$$r = \frac{P + 3b - c}{c}, \quad s = \frac{Q + 3b - 2c}{2c}.$$

II. Sejam $\alpha = 1$, $\beta = 3$. Teremos $PQ = 16bb - 6bc$ e

$$p = \frac{P + 4b - 3c}{3c}, \quad q = \frac{Q + 4b - c}{c},$$

$$r = \frac{P + 4b - c}{c}, \quad s = \frac{Q + 4b - 3c}{3c}.$$

III. Sejam α = 2, β = 3. Teremos $PQ = 25bb - 12bc$ e

$$p = \frac{P + 5b}{3c} - 1, \quad q = \frac{Q + 5b}{2c} - 1,$$

$$r = \frac{P + 5b}{2c} - 1, \quad s = \frac{Q + 5b}{3c} - 1.$$

IV. Sejam α = 1, β = 4. Teremos $PQ = 25bb - 8bc$ e

$$p = \frac{P + 5b}{4c} - 1, \quad q = \frac{Q + 5b}{c} - 1,$$

$$r = \frac{P + 5b}{c} - 1, \quad s = \frac{Q + 5b}{4c} - 1.$$

V. Sejam α = 3, β = 4. Teremos $PQ = 49bb - 24bc$ e

$$p = \frac{P + 7b}{4c} - 1, \quad q = \frac{Q + 7b}{3c} - 1,$$

$$r = \frac{P + 7b}{3c} - 1, \quad s = \frac{Q + 7b}{4c} - 1.$$

VI. Sejam α = 1, β = 5. Teremos $PQ = 36bb - 10bc$ e

$$p = \frac{P + 6b}{5c} - 1, \quad q = \frac{Q + 6b}{c} - 1,$$

$$r = \frac{P + 6b}{c} - 1, \quad s = \frac{Q + 6b}{5c} - 1.$$

VII. Sejam α = 2, β = 5. Teremos $PQ = 49bb - 20bc$ e

$$p = \frac{P + 7b}{5c} - 1, \quad q = \frac{Q + 7b}{2c} - 1,$$

$$r = \frac{P + 7b}{2c} - 1, \quad s = \frac{Q + 7b}{5c} - 1.$$

VIII. Sejam $\alpha = 3$, $\beta = 5$. Teremos $PQ = 64bb–30bc$ e

$$p = \frac{P + 8b}{5c} - 1, \quad q = \frac{Q + 8b}{3c} - 1,$$

$$r = \frac{P + 8b}{3c} - 1, \quad s = \frac{Q + 8b}{5c} - 1.$$

IX. Sejam $\alpha = 4$, $\beta = 5$. Teremos $PQ = 81bb–40bc$ e

$$p = \frac{P + 9b}{5c} - 1, \quad q = \frac{Q + b}{4c} - 1,$$

$$r = \frac{P + 9b}{4c} - 1, \quad s = \frac{Q + 9b}{5c} - 1.$$

X. Sejam $\alpha = 1$, $\beta = 6$. Teremos $PQ = 49bb–12bc$ e

$$p = \frac{P + 7b}{6c} - 1, \quad q = \frac{Q + 7b}{c} - 1,$$

$$r = \frac{P + 7b}{c} - 1, \quad s = \frac{Q + 7b}{6c} - 1.$$

XI. Sejam $\alpha = 5$, $\beta = 6$. Teremos $PQ = 121bb–60bc$ e

$$p = \frac{P + 11b}{6c} - 1, \quad q = \frac{Q + 11b}{5c} - 1,$$

$$r = \frac{P + 11b}{5c} - 1, \quad s = \frac{Q + 11b}{6c} - 1.$$

Depois destes casos, explicarei os valores de *a* já exibidos porque parecem, antes dos restantes, aptos para descobrir números amigáveis; entre eles, porém, optarei em especial para os que na prática nos levam a números amigáveis.

Exemplo 1.

§. LXVIII. Seja $a = 2^2$. Teremos $b = 4$ & $c = 1$. Toma-se o segundo caso, em que $\alpha = 1$, $\beta = 3$, de tal forma que os números amigáveis são 2^2pq & 2^2rs. Deve-se fazer

$$PQ = 16 \cdot 16 - 6 \cdot 4 = 232$$

enquanto

$$p = \frac{P+16}{3} - 1,\ \ q = Q + 16 - 1,\ \ r = P + 16 - 1\ \ \&\ \ s = \frac{Q+16}{3} - 1.$$

Assim, os fatores do número 232 devem ser compostos de tal forma que, quando aumentados por 16, são divisíveis por 3.

$P =$	2
$Q =$	116
$P+16 =$	18
$Q+16 =$	132
$p =$	5
$q =$	131
$r =$	17
$s =$	43

Nenhuma outra resolução procede; pois, se pusermos $p = 8$, Q será um número ímpar e, portanto, nem q, nem s, pode ser um número primo. Assim, os seguintes números amigáveis são obtidos:

$$\left\{\begin{matrix} 2^2 \cdot 5 \cdot 131 \\ 2^2 \cdot 17 \cdot 43 \end{matrix}\right).$$

Exemplo 2.

§. LXIX. Se $\alpha = 1$ & $\beta = 3$ e a é uma potência mais alta de dois, não se acha números amigáveis, até se chega a $a = 2^8$. Assim, seja $b = 2^8$ & $c = 1$, enquanto

$$PQ = 16 \cdot 2^{16} - 6 \cdot 2^8 = 2^9(2^{11} - 3) = 512 \cdot 2045 = 512 \cdot 5 \cdot 409,$$

$$p = \frac{P + 1024}{3} - 1,\ \ q = Q + 1024 - 1,\ \ r = P + 1024 - 1\ \ \&\ \ s = \frac{Q + 1024}{3} - 1,$$

donde os fatores P & Q devem ser composto de tal forma que cada um, quando aumentado por quatro, é divisível por 3, ou (quando os quocientes são pares) por 6.

$P =$	2	8	20	32	80	128	320	1280
$Q =$	...	...	...	...	13088	8180	...	...
P+1024 =	1026	1032	1044	1056	1104	1152	1344	2304
Q+1024 =	...	...	...	...	14112	9204	...	...
$p =$	341*	343*	347	...	367	383	447*	767*
$q =$	...	...	...	...	14111*	9203	...	...
$r =$	1025*	...	1043*	1055*	1103	1151	1343*	2303*
$s =$	...	...	...	...	4703	3067	...	...

Portanto, são números amigáveis: $\begin{cases} 2^8 \cdot 383 \cdot 9203 \\ 2^8 \cdot 1151 \cdot 3067 \end{cases}$).

Exemplo 3.

§. LXX. Sejam $\alpha = 2$ & $\beta = 3$ e seja tomado $a = 3^2 \cdot 5 \cdot 13$, de tal forma que b =15 & c = 2. Teremos

$$PQ = 25 \cdot 225 - 12 \cdot 30 = 3^4 \cdot 5 \cdot 13,$$

$$p = \frac{P + 75}{6} - 1,\ \ q = \frac{Q + 75}{4} - 1,\ \ r = \frac{P + 75}{4} - 1,\ \ s = \frac{Q + 75}{6} - 1,$$

donde os fatores P, Q devem ser de tal forma que, quando aumentado por três, é divisível por 24.

$P = 45$	Outras resoluções não se acham aqui; logo, são gerados os números amigáveis
$Q = 117$	$$\left\{\begin{matrix} 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 47 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 31 \end{matrix}\right).$$
$P+75 = 19$	
$Q+75 = 120$	
$p = 19$	
$q = 47$	
$r = 29$	
$s = 31$	

Exemplo 4.

§. LXXI. Sejam $\alpha = 1$ & $\beta = 4$ e seja tomado $a = 3^3 \cdot 5$, de tal forma que $b = 9$ & $c = 2$. Teremos

$$PQ = 25 \cdot 81 - 8 \cdot 18 = 9 \cdot 11 \cdot 19$$

e

$$p = \frac{P+45}{8} - 1,\ \ q = \frac{Q+45}{2} - 1,\ \ r = \frac{P+45}{2} - 1,\ \ s = \frac{Q+45}{8} - 1,$$

donde P & Q devem ser tais que, quando aumentado por cinco, são divisíveis por 8.

$P = 3$	19	
$Q = 627$	99	Surgem, portanto, os números
$P+75 = 48$	64	amigáveis
$Q+75 = 672$	144	
$p = 5$	7	$\left\{\begin{matrix} 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 71 \\ 3^3 \cdot 5 \cdot 31 \cdot 17 \end{matrix}\right).$
$q = 335$*	71	
$r = 23$	31	
$s = 83$	17	

Observação.

§. LXXII. Estas operações, porém, são demasiadamente incertas e geralmente muitas são elaboradas em vão antes que uns números amigáveis se apresentam. De fato, o trabalho é bastante extenso quando queremos percorrer os vários casos das letras α & β para todo valor de *a*, como fiz acima; ainda mais, acontece raramente que os quatro números para *p*, *q*, *r* & *s* resultam em números primos. Além disto, a descoberta de números amigáveis é excessivamente limitada pela determinação da razão entre α & β, pois há casos do referido tipo de números, nos quais a razão α:β é tão envolvida que eles não podem ser especificadas por qualquer raciocínio plausível. Os números amigáveis $2^4 \cdot 19 \cdot 8563$ & $2^4 \cdot 83 \cdot 2039$, por exemplo, são tais que, para achá-los pelo presente método, a razão de 5:21, ou de 1:102, deve ser tomada para α:β. Então, devido ao fato de que esse método é bastante improdutivo e trabalhoso, não me ocuparei mais com ele. Antes, abrirei outro caminho, pelo qual números amigáveis, tanto os dessa segunda forma, quanto os de outras composições, podem ser investigados de maneira mais simples e mais eficaz. É semelhante ao método precedente, em que é efetuado ao achar apenas três números primos.

Problema 3.

§. LXXIII. *Achar números amigáveis da forma apq & afr, onde p, q & r são números primos, com f (ou primo ou composto) e o fator comum a dados.*

Solução.

Novamente procura-se, a partir do conhecido fator comum a, valores b e c, tais que $\frac{b}{c} = \frac{a}{2a - \int a}$. Seja $\int f = gh$ a soma dos divisores do número f. Como se requer que $\int p \cdot \int q = \int f \cdot \int r$, teremos $(p+1)(q+1) = gh(r+1)$. Põe-se $r+1 = xy$, $p+1 = hx$ & $q+1 = gy$ e será necessário que esses três números, a saber, $p = hx-1$, $q = gy-1$ & $r = xy-1$, sejam primos. Então é útil ter

$$\int apq = ghxy \int a = a(hx-1)(gy-1) + af(xy-1)$$
$$= a((gh+f)xy - hx - gy + 1 - f)$$

ou

$$2bghxy - cghxy = b(gh+f)xy - bhx - bgy + b(1-f)$$

ou

$$(bf - bgh + cgh)xy - bhx - bgy = b(f - 1).$$

Pondo, para fins de brevidade,

$$bf - bgh + cgh = e,$$

teremos $eexy - ebgy = eb(f-1)$, ou seja,

$$(ex - bg)(ey - bh) = bbgh + be(f - 1).$$

Logo, o número $bbgh+be(f-1)$ pode ser decomposto em dois fatores, digamos P & Q, de tal forma que fazem

$$x = \frac{P + bg}{e} \quad \& \quad y = \frac{Q + bh}{e}$$

números inteiros, além de fazer $hx-1$, $gy-1$ & $xy-1$ números primos. Sempre que essa condição puder ser satisfeita, $a(hx-1)(gy-1)$ & $af(xy-1)$ serão números amigáveis. Merece ser observado que nenhum dos números primos $hx-1$, $gy-1$, $xy-1$, bem como nenhum fator de f, deve ser um divisor de a e, também, f & $xy-1$ devem ser primos entre si.

Corolário 1.

§. LXXIV. Se f seja um número primo, de tal modo que se pede a segunda forma dos números amigáveis, teremos $f+1 = gh$ e, por isso, $f = gh-1$. Neste caso, portanto, teremos $e = cgh-b$ & $PQ = bbgh+be(gh-2)$ ou

$$PQ = bcgghh - 2bcgh + 2bb.$$

Assim, deve-se procurar números x & y, munidos das propriedades acima mencionadas, tais que tenhamos

$$x = \frac{P+bg}{e} \quad \& \quad y = \frac{Q+bh}{e}.$$

Corolário 2.

§. LXXV. É bastante conveniente usar essas fórmulas, substituindo nelas sucessivamente os diferentes valores para *a*, que apresentei acima, enquanto substituindo cada vez vários números, que pareçam convenientes para descobrir números amigáveis, tantos primos quantos compostos, para a letra *f*.

Caso 1.

§. LXXVI. Seja $a = 4$ (pois observei que nenhum número amigável é obtido do valor $a = 2$) e teremos $b = 4$ & $c = 1$. Então, para os números amigáveis $4pq$ & $4fr$, sejam $\int f = gh$ & $e = 4f-3gh$. Então, resolvendo, procura-se fatores P & Q tais que

$$PQ = 16gh+4e(f-1).$$

Disto, extrai-se números inteiros x & y, tais que tenhamos

$$x = \frac{P+4g}{e} \quad \& \quad y = \frac{Q+4h}{e},$$

e destes deriva-se valores para as letras $p = hx-1$, $q = gy-1$ & $r = xy-1$. Se estes forem números primos, $4pq$ & $4fr$ serão números amigáveis.

Exemplo 1.

§. LXXVII. Seja $f = 3$. Teremos $\int f = gh = 4$ e, portanto, $e = 12–12 = 0$, donde é óbvio que nada é obtido desta hipótese.

Exemplo 2.

§. LXXVIII. Seja $f = 5$. Teremos $\int f = gh = 6$, $e = 20–18 = 2$ e

$$PQ = 16\cdot 6+8\cdot 4 = 128.$$

Agora, de $gh = 6$, pomos primeiro $g = 2$ & $h = 3$, fazendo com que

$$x = \frac{P+8}{2} \quad \& \quad y = \frac{Q+12}{2}.$$

Disto, temos as seguintes resoluções[15]:

$P =$	2	4	8	16	32	64	Disto, portanto, se produz os seguintes números amigáveis:
$Q =$	64	32	16	8	4	2	$\begin{cases} 4\cdot 17\cdot 43 \\ 4\cdot 5\cdot 131 \end{cases}$
$x =$	5	6	8	12	20	36	&
$y =$	38	22	14	10	8	7	$\begin{cases} 4\cdot 13\cdot 107 \\ 4\cdot 5\cdot 251 \end{cases}$.
$p = 3x–1 =$	14*	17	23	35*	59	107	
$q = 2y–1 =$	…	43	27*	19	15*	13	
$r = xy–1 =$	…	131	111*	119*	159*	251	

No segundo lugar, pomos $g = 1$, $h = 6$, fazendo com que

$$x = \frac{P+4}{2} \quad \& \quad y = \frac{Q+24}{2}.$$

[15] No original, o valor de p na primeira coluna é dado como 19; é corrigido nas *Commentationes Arithmeticae*.

$P =$	2	4	8	16	32	64
$Q =$	64	32	16	8	4	2
$x =$	3	4	6	10	18	34
$y =$	44	28	20	16	14	13
$p = 6x-1 =$	17	23	5*	59	107	203*
$q = 1y-1 =$	43	27*	19	5*	13	2*
$r = xy-1 =$	131	111*	119*	159*	251	441*

Portanto, os mesmos dois pares de números amigáveis são produzidos como antes.[16]

Os números amigáveis são, portanto,

$$\begin{Bmatrix} 4\cdot 17\cdot 43 \\ 4\cdot 5\cdot 131 \end{Bmatrix} \quad \& \quad \begin{Bmatrix} 4\cdot 13\cdot 107 \\ 4\cdot 5\cdot 251 \end{Bmatrix}$$

Exemplo 3.

§. LXXIX. Seja $f = 7$. Teremos $\int f = gh = 8$, $e = 28-24 = 4$ e

$$PQ = 16\cdot 8 + 16\cdot 6 = 224.$$

Se, portanto, pusermos primeiro $g = 2$, $h = 4$, teremos

$$x = \frac{P+8}{4},\ y = \frac{Q+16}{4},\ p = 4x-1,\ q = 2y-1,\ r = xy-1.$$

[16] No original, o valor de p na primeira coluna é marcado com asterisco como sendo não primo; é corrigido nas *Commentationes Arithmeticae*.

P	4	8	28	56
Q	56	28	8	4
x	3	4	9	16
y	18	11	6	5
$4x–1$	11	15*	35*	63*
$2y–1$	35*	21*	11	9*
$xy–1$	53	43	53	79

Em segundo lugar, sejam $g = 1$, $h = 8$. Teremos

$$x = \frac{P+4}{4},\ y = \frac{Q+32}{4},\ p = 8x - 1,\ q = y - 1,\ r = xy - 1.$$

P	4	8	28	56
Q	56	28	8	4
x	2	3	8	15
y	22	15	10	9
$8x–1$	15*	23	63*	119*
$y–1$	21*	14*	9*	8*
$xy–1$	43	44*	79	134*

Portanto, nenhum número amigável é produzido.

Exemplo 4.

§. LXXX. Seja $f = 11$. Teremos $gh = 12$, $e = 8$, $PQ = 16\cdot 12+32\cdot 10 = 512$, ou teremos $(8x–4g)(8y–4h) = 512$, que se reduz a $(2x–g)(2y–h) = 32$, de tal forma que a solução será $p = hx–1$, $q = gy–1$ & $r = xy–1$. Ou, se pusermos $g = 1$, $h = 12$, ou g

$= 2$, $h = 6$, ou então $g = 3$, $h = 4$, nenhum número primo será produzido para p, q & r.

Exemplo 5.

§. LXXXI. Seja $f = 13$. Teremos $gh = 14$, $e = 10$, $PQ = 224+40\cdot 12 = 704$ & $(10x–4g)(10y–4h) = 704$, que se reduz a $(5x–2g)(5y–2h) = 176$. Assim, não são obtidos números amigáveis além de

$$\left\{\begin{matrix} 4\cdot 5\cdot 251 \\ 4\cdot 13\cdot 107 \end{matrix}\right)$$

que já foram achados antes (§. 78.). Está, ao mesmo tempo, certamente claro, embora números primos maiores sejam colocados para f, nenhum número amigável novo é produzido, visto que ou p ou q terá um valor menor do que pode ser assumido para f.

Exemplo 6.

§. LXXXII. Seja $f = 5\cdot 13$. Teremos $gh = 6\cdot 14$, $e = 8$, $PQ = 16\cdot 84+32\cdot 64 = 64\cdot 53$ & $(8x–4g)(8y–4h) = 64\cdot 53$ ou $(2x–g)(2y–h) = 4\cdot 53$. Assim, serão achados, para os números primos, $p = 43$, $q = 2267$ & $r = 1187$, donde os números amigáveis serão

$$\left\{\begin{matrix} 4\cdot 43\cdot 2267 \\ 4\cdot 5\cdot 13\cdot 1187 \end{matrix}\right).$$

Caso II.

§. LXXXIII. Seja $a = 2^3 = 8$. Teremos $b = 8$, $c = 1$. Então, pondo $8pq$ & $8fr$ para os números amigáveis e pondo $\int f = gh$, teremos $e = 8f-7gh$, enquanto

$$(ex-8g)(ey-8h) = 64gh+8e(f-1),$$

donde os casos a serem identificados são os, em que

$$p = hx-1, \quad q = gh-1 \ \& \ r = xy-1$$

são números primos.

Exemplo 1.

§. LXXXIV. Seja $f = 11$. Teremos $gh = 12$, $e = 4$, enquanto

$$(4x-8g)(4y-8h) = 64\cdot 12+32\cdot 10 = 64\cdot 17$$

ou

$$(x-2g)(y-2h) = 4\cdot 17 = 68.$$

Logo, nenhum número amigável é achado.

Exemplo 2.

§. LXXXV. Seja $f = 13$. Teremos $gh = 14$, $e = 6$, enquanto

$$(6x-8g)(6y-8h) = 64\cdot 14+48\cdot 12 = 64\cdot 23$$

ou

$$(3x-4g)(3y-4h) = 16\cdot 23,$$

e, assim, essa hipótese é inútil.

Exemplo 3.

§. LXXXVI. Seja $f = 17$. Teremos $gh = 18$, $e = 10$, enquanto

$$(10x-8g)(10y-8h) = 64\cdot 18+80\cdot 16 = 64\cdot 38$$

ou

$$(5x-4g)(5y-4h) = 32\cdot 19,$$

e, portanto, produz-se os números amigáveis

$$\left\{\begin{matrix} 8\cdot 23\cdot 59 \\ 8\cdot 17\cdot 79 \end{matrix}\right)$$

Exemplo 4.

§. LXXXVII. A hipótese de que $f = 11\cdot 23$ é mais fecunda e, de fato, um valor menor não pode ser substituído para f no caso em que é composto. Teremos $gh = 12\cdot 24$, $e = 8$, enquanto

$$(8x-8g)(8y-8h) = 64\cdot 12\cdot 24+64\cdot 252$$

ou

$$(x-g)(y-h) = 540.$$

Desta forma os seguintes números amigáveis são achados:

$$\left\{\begin{matrix} 8\cdot 383\cdot 1907 \\ 8\cdot 11\cdot 23\cdot 2543 \end{matrix}\right) \quad \left\{\begin{matrix} 8\cdot 467\cdot 1151 \\ 8\cdot 11\cdot 23\cdot 1871 \end{matrix}\right) \quad \left\{\begin{matrix} 8\cdot 647\cdot 719 \\ 8\cdot 11\cdot 23\cdot 1619 \end{matrix}\right)$$

Ao pôr números compostos para f desta maneira, muitos outros números amigáveis são achados.

Observação.

§. LXXXVIII. O número grande de combinações como os nesse exemplo me deu a oportunidade de redigir a solução de uma outra forma, mais cômoda. Isto é, visto que temos $e = bf-(b-e)gh$, bem como

$$PQ = bbgh+be(f-1) = (ex-bg)(ey-bh),$$

das fórmulas

$$x = \frac{P+bg}{c} \ \& \ y = \frac{Q+bh}{c}$$

extraímos os valores

$$p = \frac{hP+bgh}{e} - 1, \quad q = \frac{gQ+bhg}{e}, \quad r = \frac{PQ+b(hP+gQ)+bbgh}{ee} - 1.$$

Portanto, dado $gh = \int f$, sejam

$$e = bf-(b-c)\int f, \quad L = bb\int f+be(f-1) \quad \& \quad MN = L\int f.$$

Teremos

$$p = \frac{M+b\int f}{e} - 1, \quad q = \frac{N+b\int f}{e} - 1, \quad r = \frac{L+b(M+N)+bb\int f}{ee} - 1$$

e agora é uma questão de reduzi-la, de tal forma que o número $L\int f$ seja decomposto em dois fatores M & N, sendo cada um, quando aumentado pela quantidade $b\int f$, divisível por e e sendo os quocientes resultantes, quando diminuído pela unidade, números primos. Finalmente, é necessário que tenhamos $r+1 = \frac{(p+1)(q+1)}{\int f}$, com r um número primo. Ilustrarei esses cálculos através de alguns exemplos.

Caso III.

§. LXXXIX. Seja $a = 2^4 = 16$. Teremos $b = 16$, $c = 1$, enquanto

$$e = 16f - 15\int f, \quad L = 256\int f + 16e(f-1) \quad \& \quad MN = L\int f.$$

Portanto, os números primos devem ser

$$p = \frac{M+16\int f}{e} - 1, \quad q = \frac{N+16\int f}{e} - 1, \quad r = \frac{L+256\int f+16(M+N)}{ee} - 1,$$

os quais sendo achados, $16pq$ & $16fr$ serão números amigáveis.

Exemplo 1.

§. LXXXX. Seja $f = 17$. Teremos

$$\int f = 18, \quad e = 2, \quad L = 1024\cdot 5 \quad \& \quad MN = 1024\cdot 5\cdot 18 = 2^{11}\cdot 3^2\cdot 5,$$

$$p = \frac{M+288}{2} - 1, \quad q = \frac{N+288}{2} - 1, \quad r = \frac{512\cdot 19+16(M+N)}{4} - 1.$$

Ou, sejam $M = 2m$, $N = 2n$, de tal forma que tenhamos $mn = 29\cdot 32\cdot 5$. Teremos

$$p = m+143, \quad q = n+143 \quad \& \quad r = 8(m+n)+2431.$$

Esses três números devem ser primos para que $16pq$ & $16\cdot 17r$ sejam números amigáveis. Mas, isto ocorre em duas maneiras, primeiro, se $m = 24$, $n = 960$ e, segundo, se $m = 96$ & $n = 240$, donde os números amigáveis produzidos serão

$$\left\{\begin{matrix} 16\cdot 167\cdot 1103 \\ 16\cdot 17\cdot 10303 \end{matrix}\right) \quad \left\{\begin{matrix} 16\cdot 239\cdot 383 \\ 16\cdot 17\cdot 5119 \end{matrix}\right).$$

Exemplo 2.

§. LXXXXI. Seja $f = 19$. Teremos

$$\int f = 20, \quad e = 4, \quad L = 128\cdot 49 \quad \& \quad MN = 512\cdot 5\cdot 49 = 2^9\cdot 5\cdot 7^2,$$

Portanto,

$$p = \frac{M+320}{4} - 1, \quad q = \frac{N+320}{4} - 1, \quad r = \frac{128\cdot 89+16(M+N)}{16} - 1;$$

ou, sejam $M = 4m$ & $N = 4n$, de tal forma que tenhamos $mn = 32\cdot 5\cdot 49 = 2^5\cdot 5\cdot 7^2$. Teremos

$$p = m+79, \quad q = n+79 \quad \& \quad r = 4(m+n)+711.$$

Disto, se $m = 70$, $n = 112$, são produzidos os números amigáveis

$$\begin{cases} 16\cdot 149\cdot 191 \\ 16\cdot 19\cdot 1439 \end{cases}.$$

Exemplo 3.

§. LXXXXII. Seja $f = 23$. Teremos

$$\int f = 24, \quad e = 8, \quad L = 256\cdot 5\cdot 7 \quad \& \quad MN = 2048\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 2^{11}\cdot 3\cdot 5\cdot 7,$$

$$p = \frac{M+16\cdot 24}{8} - 1, \quad q = \frac{N+16\cdot 24}{8} - 1, \quad r = \frac{256\cdot 59+16(M+N)}{64} - 1;$$

ou, sejam $M = 8m$, $N = 8n$ & $mn = 2^5\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 2^5\cdot 5\cdot 7^2$. Teremos

$$p = m+47, \quad q = n+47 \quad \& \quad r = 2(m+n)+235.$$

Assim, ocorrem três casos

$$\begin{cases} m = 56 \\ n = 60 \end{cases} \quad \begin{cases} m = 42 \\ n = 80 \end{cases} \quad \begin{cases} m = 6 \\ n = 560 \end{cases}$$

e os números amigáveis serão

$$\begin{cases} 16\cdot 103\cdot 107 \\ 16\cdot 23\cdot 467 \end{cases} \quad \begin{cases} 16\cdot 89\cdot 127 \\ 16\cdot 23\cdot 479 \end{cases} \quad \begin{cases} 16\cdot 53\cdot 607 \\ 16\cdot 23\cdot 1367 \end{cases}.$$

Exemplo 4.

§. LXXXXIII. Seja $f = 31$. Teremos

$$\int f = 32, \quad [e = 16,]^{17} \quad L = 512\cdot 31 \quad \& \quad MN = 2^{14}\cdot 31,$$

$$p = \frac{M+16\cdot 32}{16} - 1, \quad q = \frac{N+16\cdot 32}{16} - 1, \quad r = \frac{16(M+N)+512\cdot 47}{256} - 1.$$

Sejam, portanto, $M = 16m$, $N = 16n$, de tal forma que $mn = 2^6\cdot 31$. Teremos

$$p = m+31, \quad q = n+31, \quad r = m+n+93.$$

Portanto, nenhum número amigável será produzido.

Exemplo 5.

§. LXXXXIV. Seja $f = 47$. Teremos

$$\int f = 48, \quad e = 32, \quad \& \quad L = 1024\cdot 5\cdot 7 \quad \& \quad MN = 2^{14}\cdot 3\cdot 5\cdot 7,$$

donde

$$p = \frac{M+16\cdot 48}{32} - 1, \quad q = \frac{N+16\cdot 48}{32} - 1, \quad r = \frac{16(M+N)+1024\cdot 47}{1024} - 1.$$

Sejam $M = 32m$, $N = 32n$, de tal forma que $mn = 2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 7$. Teremos

$$p = m+23, \quad q = n+23, \quad r = \tfrac{1}{2}(m+n)+46.$$

Logo, $m+n$ deve ser um número imparmente par, de tal forma que $\tfrac{1}{2}(m+n)$ seja ímpar, o que acontece se, ou m, ou n, seja imparmente par. Seja $m = 30$, $n = 56$. Serão números amigáveis

$$\left\{\begin{matrix} 16\cdot 53\cdot 79 \\ 16\cdot 47\cdot 89 \end{matrix}\right).$$

[17] Nota dos Trad. Acrescentado na *Opera Omnia*.

Exemplo 6.

§. XCIV[a][18]. Seja $f = 17\cdot137$. Teremos

$$\textstyle\int f = 18\cdot138 = 4\cdot27\cdot2484, \quad e = 4,$$

$$L = 256\cdot2484+64\cdot2328 = 512\cdot3\cdot7\cdot73$$

$$\& \quad MN = 2048\cdot81\cdot7\cdot23\cdot73,$$

$$p = \frac{M+16\cdot2484}{4} - 1, \quad q = \frac{N+16\cdot2484}{4} - 1,$$

$$r = \frac{512\cdot2775+16(M+N)}{16} - 1$$

Sejam $M = 4m$, $N = 4n$; teremos $mn = 128\cdot81\cdot7\cdot23\cdot73$ &

$$p = m+9935, \quad q = n+9935, \quad r = 4(m+n)+88799.$$

Mas, isto sempre produz valores de r maiores que 100000 e, assim, é difícil discernir se seja primo, ou não.

Exemplo 7.

§. XCV. Seja $f = 17\cdot151$. Teremos

$$\textstyle\int f = 18\cdot152 = 16\cdot9\cdot276, \quad e = 32,$$

$$L = 1024\cdot1967+1024\cdot7\cdot281 = 512\cdot3\cdot7\cdot73 \quad \text{enquanto}$$

$$MN = 2^{14}\cdot9\cdot7\cdot19\cdot281.$$

Sejam $M = 32m$, $N = 32n$; teremos $mn = 16\cdot9\cdot7\cdot19\cdot281$ &

$$p = m+1367, \quad q = n+1367, \quad r = \tfrac{1}{2}(m+n)+2650.$$

Sejam $m = 2\mu$, $n = 8\nu$; teremos $\mu\nu = 9\cdot7\cdot19\cdot281$ &

$$p = 2\mu+1367, \quad q = 8\nu+1367, \quad r = \mu+\nu+2650.$$

---

[18] Nota dos Trad. Acrescentado na *Opera Omnia*; no original o número 94 é repetido.

Assim, é evidente que nem μ, nem ν, pode ser um número da forma $3\alpha+2$ e, ainda mais, μ não pode terminar em 9, nem ν em 1. Quando essas condições são observadas, só tem as seguintes soluções:

	*		*		*	*	
μ	3·281	7·19	21·281	21	63·281	3	1
ν	21·19	9·281	57	57·281	19	399·281	1197·281

dos quais, os que são marcadas com um asterisco são eliminadas, porque nem p, q, ou r, são divisíveis por 7. A quarta solução dará os números amigáveis

$$\left\{\begin{matrix} 16\cdot 1409\cdot 129503 \\ 16\cdot 17\cdot 151\cdot 66739 \end{matrix}\right)$$

sob a condição de que o número 129503 seja primo.

Exemplo 8.

§. XCVI. Seja $f = 17\cdot 167$. Teremos

$$\int f = 18\cdot 168 = 16\cdot 27\cdot 7 = 3024, \quad e = 64,$$

$$L = 2048\cdot 1797 = 2048\cdot 3\cdot 599 \quad \& \quad MN = 2^{15}\cdot 3^4\cdot 7\cdot 599.$$

Sejam $M = 64m$, $N = 64n$; teremos $mn = 2^3\cdot 3^4\cdot 7\cdot 599$ &

$$p = m+755, \quad q = n+755, \quad r = \tfrac{1}{4}(m+n)+\frac{2173}{2}.$$

Sejam $m = 2\mu$, $n = 4\nu$; teremos $\mu\nu = 34\cdot 7\cdot 599$ &

$$p = 2\mu+755, \quad q = 4\nu+755, \quad r = \nu+\frac{\mu+1}{2}+1086.$$

Disto, é claro que devemos ter $\mu = 4\alpha-1$, r não é um número par, nem $\mu = 3\alpha+2$, nem $\nu = 3\alpha+1$. Assim, os números amigáveis produzidos são

$$\left\{\begin{matrix} 16 \cdot 809 \cdot 51071 \\ 16 \cdot 17 \cdot 167 \cdot 13679 \end{matrix}\right).$$

Caso IV.

§. XCVII. Seja ou $a = 3^3 \cdot 5$, ou $a = 3^2 \cdot 7 \cdot 13$, de tal modo que tenhamos $b = 9$, $c = 2$. Teremos

$$e = 9f - 7\int f, \quad L = 81\int f + 9e(f-1) \quad \& \quad MN = L\int f,$$

$$p = \frac{M + 9\int f}{e} - 1, \quad q = \frac{N + 9\int f}{e} - 1, \quad r = \frac{9(M+N) + L + 81\int f}{ee} - 1.$$

Se os números p, q, r forem primos, os números amigáveis serão

$$\left\{\begin{matrix} apq \\ afr \end{matrix}\right).$$

Exemplo.

§. XCVIII. Sejam $f = 7$, $\int f = 8$. Teremos

$$e = 7, \quad L = 2 \cdot 27 \cdot 19; \quad MN = 16 \cdot 27 \cdot 19,$$

$$p = \frac{M + 72}{7} - 1, \quad q = \frac{N + 72}{7} - 1, \quad r = \frac{9(M+N) + 2 \cdot 27 \cdot 31}{49} - 1.$$

Disto, pondo $M = 54$, $N = 152$, surgem os números amigáveis

$$\left\{\begin{matrix} a \cdot 17 \cdot 31 \\ a \cdot 7 \cdot 71 \end{matrix}\right) \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{matrix} 3^3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 31 \\ 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 71 \end{matrix}\right)$$

Problema 4.

§. XCIX. *Achar números amigáveis da forma agpq & ahr, onde p, q, r são números primos, mas g & h são ou primos ou compostos dados, com o fator comum a também dado.*

Solução.

Procura-se, a partir do fator comum a, a fração $\frac{b}{c} = \frac{a}{2a-\int a}$ reduzida aos menores termos; então, seja $\frac{\int g}{\int h} = \frac{m}{n}$ e, da primeira propriedade de números amigáveis, teremos

$$(p+1)(q+1)\int g = (r+1)\int h \quad ou \quad r+1 = \frac{m}{n}(p+1)(q+1).$$

De fato, a segunda propriedade mostra que

$$(r+1)\int a \cdot \int h = a(gpq+hr);$$

ou, porque $\frac{\int a}{a}\ \frac{2b-c}{b}$, teremos

$$(r+1)(2b-c)\int h = b(gpq+hr)$$

e, ao substituir o valor de r,

$$m(2b-c)(p+1)(q+1)\int h = b(ngpq+mh(p+1)(q+1)-nh).$$

Para brevidade, sejam $p+1 = x$, $q+1 = y$; teremos

$$m(2b-c)xy\int h = b(mhxy+ngxy-ngx-ngy+ng-nh)$$

ou

$$(mbh+nbg-2mb\int h+mc\int h)xy-nbgx-nbgy = nb(h-g).$$

Para brevidade, ponhamos

$$e = b(mh+ng)-(2b-c)m\int h$$

e teremos

$$eexy-nbgex-nbgey+nnbbgg = nnbbgg+nb(h-g)e$$

ou

$$(ex-nbg)(ey-nbg) = nnbbgg+nb(h-g)e.$$

Pomos, portanto, $nnbbgg+nb(h-g)e$ = MN e temos

$$x = \frac{M+nbg}{e} \quad \& \quad y = \frac{N+nbg}{e}$$

ou

$$p = \frac{M+nbg}{e} - 1, \quad q = \frac{N+nbg}{e} - 1, \quad r = \frac{m}{n}xy - 1.$$

Sempre que os três números p, q & r forem primos, $agpq$ & ahr, serão números amigáveis, sob a condição de que os fatores sejam, dois a dois, primos entre si.

Corolário.

§. C. Se g & h forem números primos, teremos $\frac{m}{n} = \frac{g+1}{h+1}$. Sejam, portanto, $g = km-1$ & $h = kn-1$. Teremos $\int h = kn$, donde

$$e = b(2kmn-m-n)-(2b-c)kmn = ckmn-b(m+n),$$

$$MN = nb(nb(km-1)^2+k(n-m)e) = (ex-bn(km-1))(ey-bn(km-1))$$

e

$$p = x-1, \quad q = y-1 \quad \text{enquanto} \quad r = \frac{m}{n}xy - 1.$$

Caso I.

§. CI. Sejam $m = 1$, $n = 3$, portanto, $g = k-1$, $h = 3k-1$ e teremos

$$e = 3ck-4b \quad \& \quad MN = 3b(3b(k-1)^2+2ke)$$

e, portanto,

$$x=\frac{M+3b(k-1)}{e} \quad \& \quad y=\frac{N+3b(k-1)}{e}$$

e, finalmente, $p = x-1$, $q = y-1$ & $r=\frac{1}{3}xy-1$.

Exemplo 1.

§. CII. Sejam $a = 4$, $b = 4$, $c = 1$. Teremos

$$e = 3k-16 \quad \& \quad MN = 12(12(k-1)^2+2ke)$$

e

$$x=\frac{M+12(k-1)}{e} \quad \& \quad y=\frac{N+12(k-1)}{e}.$$

Aqui, podemos por

I. $k = 6$, que faz $g = 5$, $h = 17$ & $e = 2$, mas, ao fazer isto, nada se ganha.

II. $k = 8$, que faz $g = 7$, $h = 23$ & $e = 8$. $MN = 12(12\cdot 49+128)$ ou $MN = 16\cdot 3\cdot 179 = (8x-84)(8y-84)$ e, portanto, $3\cdot 179 = (2x-21)(2y-21)$, de que, igualmente, nada se deduz.

Exemplo 2.

§. CIII. Sejam $a = 8$, $b = 8$, $c = 1$. Teremos

$$e = 3k-32 \quad \& \quad MN = 24(24(k-1)^2+2ke)$$

ou

$$MN = 48(15kk-56k+12) = (ex-24(k-1))(ey-24(k-1)).$$

Mas, decerto, não é lícito deduzir qualquer coisa disto.

Caso II.

§. CIV. Sejam $m = 3$, $n = 1$. Teremos

$$e = 3ck - 4b \quad \& \quad g = 3k - 1, \quad h = k - 1,$$

$$MN = b(b(3k-1)^2 - 2ke) = (ex - b(3k-1))(ey - b(3k-1))$$

enquanto

$$p = x - 1, \quad q = y - 1 \quad \& \quad r = 3xy - 1.$$

Exemplo 1.

§. CV. Sejam $a = 10$, $b = 5$, $c = 1$. Teremos

$$e = 3k - 20 \quad \& \quad 5(5(3k-1)^2 - 2ke) = (ex - 5(3k-1))(ey - 5(3k-1)).$$

Pondo aqui $k = 8$, temos $5 \cdot 29 \cdot 89 = (4x - 115)(4y - 115)$. Disso, obtemos $x = 30$, $y = 674$, $3xy = 60660$ e os números amigáveis serão

$$\left\{\begin{matrix} 10 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 673 \\ 10 \cdot 7 \cdot 60659 \end{matrix}\right).$$

Exemplo 2.

§. CVI. Sejam $a = 3^3 \cdot 5$, $b = 9$, $c = 2$. Teremos

$$e = 6k - 36 \quad \& \quad 9(3k-1)^2 - 2ke = \left(\tfrac{1}{3}ex - 3(3k-1)\right)\left(\tfrac{1}{3}ey - 3(3k-1)\right).$$

Agora, fazendo $k = 8$, teremos $e = 12$ & $3 \cdot 1523 = (4x - 69)(4y - 69)$ e, portanto, obtemos $x = 18$, $y = 398$, $3xy = 21492$ e $g = 23$, $h = 7$, $p = 17$, $q = 397$, $r = 21491$ serão números primos; os números amigáveis serão

$$\left\{\begin{matrix} 3^3 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 17 \cdot 397 \\ 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 21491 \end{matrix}\right).$$

Observação.

§. CVII. Através destes exemplos, a utilidade desse problema para a descoberta de números amigáveis tem sido suficientemente iluminada; mas, porque há liberdade demais na sua aplicação, seria muito penoso percorrer todos os casos segundo os preceitos aqui abordados. Visto que o referido método e seu uso foram suficientemente ilustrados, não me deterei sobre isto, mas progredirei ao último método, explicando como se pode eliciar números amigáveis através dos seus recursos e, de fato, como eu havia empregado o mesmo. Depende de umas notáveis propriedades da razão de um número para a soma dos seus divisores, que só explicarei no decorrer da exposição, para que não fique enfadonho com a apresentação preliminar de diversos lemas. Ainda mais, uma vez que forem explanados, não será difícil resolver muitos outros problemas do mesmo tipo.

Problema 5.

§. CVIII. *Achar números amigáveis da forma zap & zbq, onde os fatores a & b são dados, p & q são números primos e é o fator comum z que deve ser procurado.*

Solução.

Seja $\int a : \int b = m : n$ e, como devemos ter $\int a \cdot (p+1) = \int b \cdot (q+1)$, teremos $m(p+1) = n(q+1)$. Pondo $p+1 = nx$ & $q+1 = mx$, teremos os números amigáveis

$$za(nx-1) \quad \& \quad zb(mx-1),$$

onde se requer que $mx-1$ & $nx-1$ sejam números primos. Visto que a soma dos divisores de cada um dos dois números é a mesma $= nx\int a \cdot \int z = mx\int b \cdot \int z$, é necessário que ela seja igual à soma dos números $z((na+mb)x-a-b)$. Disto, se obtém a equação

$$\frac{z}{\int z} = \frac{nx \int a}{(na+mb)x-a-b}.$$

Para que o valor de z pode ser extraído dessa equação, seja a fração reduzida aos menores termos, digamos $= \frac{r}{s}$, de tal forma que temos $\frac{z}{\int z} = \frac{r}{s}$, e os seguintes passos devem ser observados. Em primeiro lugar, z pode ser igual ao próprio r, ou a algum múltiplo dele, digamos kr. No primeiro caso, se $z = r$, teremos $\int z = s$ e, logo, $s = \int r$. No segundo caso, se $z = kr$, teremos $\int z = ks \int kr$. Qualquer que seja k, porém, teremos $\frac{\int kr}{\int r} > k$; pois $\int kr$ contém todos os divisores individuais do r, multiplicados por k, e ainda mais, os divisores do próprio kr que não são divisíveis por k e, portanto, teremos $\int kr > k\int r$. Como, portanto, $\int z > k\int r$, teremos $ks > k\int r$ ou $s > \int r$. Dessa forma, se tivermos $s = \int r$ na fração $\frac{r}{s}$, teremos, $z = r$; mas se tivermos $s > \int r$, teremos z igual a algum múltiplo de r. Disto, é claro que, se $s < \int r$, a equação $\frac{z}{\int z} = \frac{r}{s}$ será impossível e, nesse caso, não se pode achar números amigáveis. Prosseguindo, visto que

$$\frac{\int z}{z} = \frac{na+mb}{n\int a} - \frac{a+b}{nx\int a} = \frac{a}{\int a} + \frac{b}{\int b} - \frac{a+b}{nx\int a},$$

Porque $\frac{a}{\int a} < 1$ & $\frac{b}{\int b} < 1$, teremos $\frac{\int z}{z} < 2 - \frac{a+b}{nx\int a}$ e, portanto, por muito mais, $\frac{z}{\int z} > \frac{1}{2}$, de tal forma que z é sempre um número deficiente. Assim, é evidente que a equação $\frac{z}{\int z} = \frac{r}{s}$ sempre pode ser elaborada de tal forma que $\frac{r}{s} > \frac{1}{2}$ ou $s < 2r$. Disto, se tivermos $\int r = s$, teremos $\int r < 2r$ e, se $s > \int r$, teremos, por muito mais, $\int r < 2r$. Em todos os dois casos, r será um número deficiente. Dessa maneira, se x é considerado como se fosse um número desconhecido, é necessário determinar o valor de x na equação proposta $\frac{z}{\int z} = \frac{nx\int a}{(na+mb)x-a-b}$ de tal forma a fazer o r na fração $\frac{nx\int a}{(na+mb)x-a-b}$, reduzida aos menores termos $\frac{r}{s}$, um número deficiente e de tal forma que ou $s = \int r$ ou $s > \int r$.

Depois de cuidarmos dessas condições, sejam tanto r, quanto s, decompostos em seus fatores primos simples, de tal modo a produzir uma equação do tipo

$$\frac{z}{\int z} = \frac{A^\alpha B^\beta C^\gamma}{E^\varepsilon F^\zeta G^\eta};$$

Então, pondo ou A^{α}, ou uma potência maior de A, como fator de z, isto é, pondo $z = P \cdot A^{\alpha+\nu}$, teremos $\int z = P \cdot A^{\alpha+\nu} \cdot \int P$ & $\frac{z}{\int z} = \frac{PA^{\alpha+\nu}}{\int A^{\alpha+\nu} \cdot \int P}$ e, portanto,

$$\frac{P}{\int P} = \frac{B^{\beta} C^{\gamma} \int A^{\alpha+\nu}}{A^{\nu} E^{\varepsilon} F^{\zeta} G^{\eta}}.$$

E pondo, de modo semelhante, $P = B^{\beta+\mu} Q$ nessa última e procedendo da mesma forma, até finalmente chegarmos a uma equação da forma $\frac{Z}{\int Z} = \frac{u}{\int u}$, obteremos disto $Z = u$. Frequentemente, decerto, essa operação não alcança o resultado almejado, mas para qualquer caso que se apresenta, será mais fácil ensinar essa operação por exemplos do que por preceitos.

Exemplo 1.

§. CIX. Sejam $a = 3$, $b = 1$ & $m = 4$, $n = 1$; os números amigáveis serão

$$3(x-1)z \quad \& \quad (4x-1)z,$$

se $x-1$ & $4x-1$ forem números primos e

$$\frac{z}{\int z} = \frac{4x}{7x-4}.$$

Aqui é evidente, no primeiro lugar, que, se 4 não for cancelado do numerador, teremos $7x-4 < \int 4x$ porque $\int 4x = 7\int x$. Portanto, é necessário que $7x-4$ seja um número par. Pondo $x = 4p$, teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{4p}{7p-1}.$$

Agora fazemos $7p-1$ um número par pondo $p = 2q+1$; teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{2(2q+1)}{7q+3}$$

e $x = 8q+4$, enquanto

$$x-1 = 8q+3, \quad 4x-1 = 32q+15.$$

Disto, q não pode ser um múltiplo de três, de tal modo que $x-1$ não é divisível por 3. Teremos, portanto, ou $q = 3r+1$ ou $3r-1$. No primeiro caso, fazemos $2q+1 = 6r+3$ e z deverá ser divisível por 3, o que também não pode ser feito, porque o fator 3 já está no outro fator procurado, $3(x-1)z$. Seja, portanto, $q = 3r-1$; teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{2(6r-1)}{21r-4},$$

enquanto $x = 24r-4$,

$$x-1 = 24r-5 \quad \& \quad 4x-1 = 96r-17.$$

Ainda mais, visto que z não pode ter um fator de 3, exceto se o binômio $2(6r-1)$ for cancelado do numerador, z será divisível por 2 e, pondo $z = 2y$, obtemos

$$\frac{2y}{3\int y} = \frac{2(6r-1)}{21r-4} \quad \& \quad \frac{y}{\int y} = \frac{3(6r-1)}{21r-4}$$

e, assim, y e, portanto, z seriam divisíveis por 3, o que não pode acontecer. Devido a isto, o referido binário deve ser cancelado do numerador por colocar $r = 2s$, de tal modo que

$$x-1 = 48s-5 \quad \& \quad 4x-1 = 192s-17,$$

e teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{12s-1}{21s-2}.$$

Ora, se s for um número ímpar, fazemos, porque z é ímpar, $\int z = k(21s-2)$ um número ímpar, de que segue que z será um número quadrado; mas se s for um número par, o fator comum z não será quadrado. Calculamos, portanto, quais valores de s fazem $x-1 = 48s-5$ & $4x-1 = 192s-17$ números primos e consideramos se a equação $\frac{z}{\int z} = \frac{12s-1}{21s-2}$ pode se satisfeita.

Seja $s = 7$. Teremos $x-1 = 331$, $4x-1 = 1327$ & $\frac{z}{\int z} = \frac{83}{145}$. Ora, visto que z deve ser um quadrado, pomos $z = 83^2A$; teremos $\int z = 367 \cdot 19 \int A$ & $\frac{A}{\int A} = \frac{367 \cdot 19}{5 \cdot 29 \cdot 83}$. Agora, porém, porque $\int 19^2 = 3 \cdot 127$, o número 19^2 não pode ser fator de A, pois então 3 seria fator de A. No entanto, ao tomar potências maiores, chegamos logo a números tão grandes que é óbvio que a tarefa não pode ser feita.

Seja $s = 12$. Teremos $x-1 = 571$, $4x-1 = 2287$ & $\frac{z}{\int z} = \frac{11 \cdot 13}{2 \cdot 125}$, o que não pode ser resolvido assumindo ou 11^2 ou 13 como fatores de z.

Nem é lícito usar quaisquer valores maiores para s.

Exemplo 2.

§. CX. Sejam $a = 5$, $b = 1$. Teremos $\int a = 6$, $\int b = 1$, $m = 6$, $n = 1$ e os números amigáveis serão

$$5(x-1)z \quad \& \quad (6x-1)z,$$

e haveremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{6x}{11x-6}.$$

Para que essa equação seja possível, é necessário cancelar ou dois ou três do numerador, $6x$, porque senão o numerador permanecerá um número abundante. Temos, portanto, dois casos a investigar.

I. Seja três cancelado do numerador, pondo $x = 3p$. Teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{6p}{11p-2};$$

Agora, continuando, pomos $p = 3q+1$ e teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{2(3q+1)}{11q+3}$$

e, porque $x = 9q+3$, os números primos devem ser

$$x-1 = 9q+2 \quad \& \quad 6x-1 = 54q+17,$$

onde é claro que q deve ser um número ímpar. Seja, portanto, $q = 2r-1$. Teremos

$$x-1 = 18r-7, \quad 6x-1 = 108r-37 \quad \& \quad \frac{z}{\int z} = \frac{2(6r-2)}{22r-8} = \frac{2(3r-1)}{11r-4}.$$

Agora explicaremos os casos em que $18r-7$ & $108r-37$ sejam números primos; esses casos são:

1) $r = 1$. Teremos

$$x-1 = 11, \quad 6x-1 = 71 \quad \& \quad \frac{z}{\int z} = \frac{2\cdot 2}{7} = \frac{4}{7}.$$

Em consequência, visto que $7 = \int 4$, teremos $z = 4$ e os números amigáveis serão

$$\left\{\begin{matrix} 4\cdot 5\cdot 11 \\ 4\cdot 71 \end{matrix}\right),$$

que já havíamos descoberto.

2) $r = 2$. Teremos

$$x\text{–}1 = 29, \quad 6x\text{–}1 = 179 \quad \& \quad \frac{z}{\int z} = \frac{2\cdot 5}{2\cdot 9} = \frac{5}{9}.$$

Mas, z não pode ter 5 como fator.

3) $r = 5$. Teremos

$$x\text{–}1 = 83, \quad 6x\text{–}1 = 503 \quad \& \quad \frac{z}{\int z} = \frac{4\cdot 7}{3\cdot 17}.$$

Mas, $3\cdot 17 < \int 4\cdot 7$.

4) $r = 8$. Teremos

$$x\text{–}1 = 137, \quad 6x\text{–}1 = 827 \quad \& \quad \frac{z}{\int z} = \frac{23}{2\cdot 3\cdot 7}.$$

Pondo $z = 23P$, teremos

$$\int z = 24\int P \quad \& \quad \frac{P}{\int P} = \frac{24}{23}\cdot\frac{z}{\int z} = \frac{4}{7},$$

donde $P = 4$ & $z = 4\cdot 23$. Represento essa operação mais concisamente da seguinte maneira:

$$\frac{z}{\int z} = \frac{23}{2\cdot 3\cdot 7}\ \boxed{\frac{23}{24}}\ \frac{4}{7}\ \boxed{\frac{4}{7}}.$$

Desta forma, fazemos $z = 4\cdot 23$ e os números amigáveis serão

$$\left\{\begin{matrix} 4\cdot 23\cdot 5\cdot 137 \\ 4\cdot 23\cdot 827 \end{matrix}\right).$$

Os valores restantes, os quais examinei, não dão números amigáveis.

II. Seja dois cancelado do numerador, pondo $x = 2p$. Teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{6p}{11p-3};$$

Agora, seja $p = 2q+1$ e teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{3(2q+1)}{11q+4}$$

e, porque $x = 4q+2$, os números primos devem ser

$$x-1 = 4q+1, \quad 6x-1 = 24q+11;$$

logo, não podemos ter $q = 3\alpha-1$. Então, como z não deve ser divisível por 5, nem $2q+1$, nem $4q+1$, nem $24q+11$ deve ser divisível por 5, donde os casos $q = 5\alpha+2$, $q = 5\alpha+1$ são excluídos. Portanto, depois de rejeitar esses valores inúteis para q, que não fornecem números primos para $x-1$ & $6x-1$, teremos os seguintes cálculos:

q	$x-1$	$6x-1$	$\frac{z}{\int z}$
3	13	83	$\frac{3\cdot 7}{37}$ nada dá.
4	17	107	$\frac{3.9}{48} = \frac{9}{16}\boxed{\frac{9}{13}}\frac{13}{16}\boxed{\frac{13}{14}}\frac{7}{8}\boxed{\frac{7}{8}}$,
			ou $\frac{9}{16}\boxed{\frac{27}{40}}\frac{5}{6}\boxed{\frac{5}{6}}$, logo $z = 27\cdot 5$;
			mas, porque $a = 5$, esse valor é inútil.
			Assim, os números amigáveis serão
			$\begin{Bmatrix} 9\cdot 7\cdot 13\cdot 5\cdot 17 \\ 9\cdot 7\cdot 13\cdot 107 \end{Bmatrix}$.

q	x–1	6x–1	$\frac{z}{\int z}$
9	37	227	$\frac{3\cdot19}{103}$ nada dá.
10	41	251	$\frac{3\cdot21}{114} = \frac{3\cdot7}{2\cdot19}\ \boxed{\frac{7^2}{3\cdot19}}\ \frac{3^2}{2\cdot7}\ \boxed{\frac{3^2}{13}}\ \frac{13}{14}\ \boxed{\frac{13}{14}}.$
			Portanto, $z = 3^2\cdot7^2\cdot13$ & os números amigáveis serão
			$\left\{\begin{matrix} 3^2\cdot7^2\cdot13\cdot5\cdot41 \\ 3^2\cdot7^2\cdot13\cdot251 \end{matrix}\right).$
18	73	443	$\frac{3\cdot37}{202} = \frac{3\cdot37}{2\cdot101}$ nada dá.
24	97	587	$\frac{3\cdot49}{268} = \frac{3\cdot49}{4\cdot67}$ nada dá.
28	113	683	$\frac{3\cdot57}{312} = \frac{9\cdot19}{8\cdot39} = \frac{3\cdot19}{8\cdot13}$ nada dá.
34	137	827	$\frac{3\cdot69}{378} = \frac{23}{2\cdot21} = \frac{23}{2\cdot3\cdot7}\ \frac{23}{24}\ \frac{4}{7}\ \frac{4}{7}$, $z = 4.23$ como antes.
39	157	947	$\frac{3\cdot79}{433}$ nada dá.
45	181	1091	$\frac{3\cdot91}{499} = \frac{3\cdot7\cdot13}{499}$
48	193	1163	$\frac{3\cdot97}{532} = \frac{3\cdot97}{4\cdot7\cdot19} = \frac{3\cdot97}{4\cdot133}\ \boxed{\frac{97}{2\cdot7^2}}\ \frac{3\cdot7}{2\cdot19}\ \boxed{\frac{7^2}{3\cdot19}}\ \frac{3^2}{2\cdot7}\ \boxed{\frac{3^2}{13}}\ \frac{13}{14}\ \boxed{\frac{13}{14}}.$
			Portanto, $z = 3^2\cdot7^2\cdot13\cdot97$ e os números amigáveis serão
			$\left\{\begin{matrix} 3^2\cdot7^2\cdot13\cdot5\cdot41 \\ 3^2\cdot7^2\cdot13\cdot251 \end{matrix}\right).$
49	197	1187	$\frac{3\cdot99}{543} = \frac{9\cdot11}{181}$
60	241	1451	$\frac{3\cdot121}{664} = \frac{3\cdot11^2}{8\cdot83}$

q	$x-1$	$6x-1$	$\frac{z}{\int z}$
69	277	1667	$\frac{3\cdot139}{763}$
79	317	1907	$\frac{3\cdot159}{873}=\frac{53}{97}$
84	337	2027	$\frac{3\cdot169}{928}=\frac{3\cdot169}{8\cdot116}=\frac{3\cdot169}{32\cdot29}$
93	373	2243	$\frac{3\cdot187}{1027}=\frac{3\cdot11\cdot17}{13\cdot79}$
100	401	2411	$\frac{3\cdot201}{1104}=\frac{3\cdot67}{368}=\frac{3\cdot67}{16\cdot23}$
244	977	5867	$\frac{3\cdot489}{2688}=\frac{3\cdot163}{128\cdot7}\boxed{\frac{163}{4\cdot41}}\frac{3\cdot41}{32\cdot7}\boxed{\frac{41}{2\cdot3\cdot7}}\frac{3^3}{16}\boxed{\frac{3^2}{13}}\frac{13}{16}\boxed{\frac{13}{14}}\frac{7}{8}\boxed{\frac{7}{8}}$.

Portanto, $z = 3^2\cdot7^2\cdot13\cdot41\cdot163$ & os números amigáveis serão

$$\left\{\begin{matrix} 3^2\cdot7\cdot13\cdot41\cdot163\cdot5\cdot977 \\ 3^2\cdot7\cdot13\cdot41\cdot163\cdot5867 \end{matrix}\right).$$

Disto, então, dois novos números amigáveis foram produzidos.

Exemplo 3.

§. CXI. Sejam $a = 7$, $b = 1$. Teremos $\int a = 8$, $\int b = 1$, $m = 8$, $n = 1$ & como números amigáveis

$$7(x-1)z \quad \& \quad (8x-1)z,$$

sendo

$$\frac{z}{\int z}=\frac{8x}{15x-8}.$$

Ainda mais, em primeiro lugar, x deve ser um número par. Pondo, portanto, $x = 2p$, teremos

$$x-1 = 2p-1, \quad 8x-1 = 16p-1$$

e

$$\frac{z}{\int z} = \frac{8p}{15p-4}.$$

Essa equação é impossível, a não ser que a potência de dois no numerador for reduzida, porque $15p < \int 8p$. Logo, fazemos $p = 4q$, de tal modo que

$$x = 8q, \quad x-1 = 8q-1, \quad 8x-1 = 64q-1$$

e

$$\frac{z}{\int z} = \frac{8q}{15q-1}.$$

Agora, seja $q = 2r+1$. Teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{4(2r+1)}{15r+7}$$

e

$$x-1 = 16r+71, \quad 8x-1 = 128r+63.$$

Nenhum desses dois números é divisível por 3, nem teremos $r = 3\alpha-1$, nem $r = 3\alpha$. Seja, portanto, $r = 3s+1$. Teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{4(6s+3)}{45s+22} \quad \text{ou} \quad \frac{z}{\int z} = \frac{4\cdot 3(2s+1)}{45s+22}$$

e

$$x-1 = 48s+23, \quad 8x-1 = 384s+191.$$

Ora, ou três ou quatro deve ser cancelado do numerador. Porém, três não pode ser cancelado, porque o denominador nunca é divisível por três. Seja, portanto, quatro cancelado, logo coloco $s = 2t$, e teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{2\cdot3(4t+1)}{45t+11}.$$

Agora, seja $t = 2u–1$; teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{3(8u-3)}{45u-17}.$$

Além disso, $s = 4u–2$ e, portanto, os números amigáveis devem ser

$$x-1 = 192u-73, \quad 8x-1 = 1536u-577.$$

u	$x–1$	$8x–1$	$\frac{z}{\int z}$
5	887	7103	$\frac{3\cdot37}{208} = \frac{3\cdot37}{16\cdot13}\ \boxed{\frac{37}{2\cdot19}}\ \frac{3\cdot19}{8\cdot13}\ \boxed{\frac{19}{4\cdot5}}\ \frac{3\cdot5}{2\cdot13}\ \boxed{\frac{5}{2\cdot3}}\ \frac{3^2}{13}\ \boxed{\frac{3^2}{13}}$.
79	317	1907	Portanto, $z = 3^2\cdot5\cdot19\cdot37$ e os números amigáveis serão $\left\{\begin{matrix}3^2\cdot5\cdot19\cdot37\cdot7\cdot887\\ 3^2\cdot5\cdot19\cdot37\cdot7103\end{matrix}\right).$
11	2039	16319	$\frac{3\cdot5\cdot17}{2\cdot239}$
13	2423	19391	$\frac{3\cdot101}{8\cdot71}$
26	4919	39359	$\frac{3\cdot205}{1153}$.

Exemplo 4.

§.CXII. Sejam $a = 11$, $b = 1$. Teremos $\int a = m = 12$, $\int b = n = 1$, os números procurados

$$11(x-1)z \quad \& \quad (12x-1)z,$$

enquanto

$$\frac{z}{\int z} = \frac{12x}{23x-12}.$$

Aqui, ou 3 ou 4 deve ser cancelado do numerador.

I. Seja 3 cancelado. Pondo $x = 3p$, teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{12p}{23p-4}$$

e $p = 3q-1$. Teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{4(3q-1)}{23q-9}$$

e, porque $x = 9q-3$, q deve ser ímpar. Seja $q = 2r+1$, de modo que $x = 18r+6$. Teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{4(6r+2)}{46r+14} = \frac{4(3r+1)}{23r+7}$$

e

$$x-1 = 18r+5, \quad 12x-1 = 216r+71.$$

r	$x-1$	$12x-1$	$\frac{z}{\int z}$
0	5	71	$\frac{4}{7}$, $z = 4$; números amigáveis $\begin{Bmatrix} 4 \cdot 11 \cdot 5 \\ 4 \cdot 71 \end{Bmatrix}$.
2	41	503	$\frac{4 \cdot 7}{53}$
3	59	719	$\frac{4 \cdot 10}{76} = \frac{2 \cdot 5}{19}$ impossível.
6	113	1367	$\frac{4 \cdot 19}{145} = \frac{4 \cdot 19}{5 \cdot 29}$ impossível.
7	131	1583	$\frac{4 \cdot 22}{168} = \frac{11}{21} = \frac{11}{3 \cdot 7}$ $\boxed{\frac{11}{12}}$ $\frac{4}{7}$ $\boxed{\frac{4}{7}}$, mas, devido ao fator 11, esse valor para z não vale.

II. Seja 4 cancelado e pomos $x = 4p$, de modo que

$$\frac{z}{\int z} = \frac{12p}{23p-3}.$$

Agora, seja $p = 4q-1$. Teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{3(4q+1)}{23q+5}$$

e, porque $x = 16q+4$,

$$x-1 = 16q+3 \quad \& \quad 12x-1 = 192q+47$$

devem ser números primos; logo, os valores $q = 3\alpha$ são excluídos.

q	$x-1$	$12x-1$	$\frac{z}{\int z}$
0	3	47	$\frac{3}{5}$ impossível.
1	19	239	$\frac{3\cdot5}{4\cdot7}\ \boxed{\frac{5}{2\cdot3}}\ \frac{3^2}{14}\ \boxed{\frac{3^2}{13}}\ \frac{13}{14}\ \boxed{\frac{13}{14}}$; $z = 3^2\cdot5\cdot13$ e os números amigáveis serão $\begin{cases}3^2\cdot5\cdot13\cdot11\cdot19\\ 3^2\cdot5\cdot13\cdot239\end{cases}$).
13	211	2543	$\frac{3\cdot53}{16\cdot19}\ \boxed{\frac{53}{2\cdot27}}\ \frac{81}{8\cdot19}\ \boxed{\frac{243}{4\cdot7\cdot13}}\ \frac{7\cdot13}{2\cdot3\cdot19}\ \boxed{\frac{13}{2\cdot7}}\ \frac{7^2}{3\cdot19}\ \boxed{\frac{7^2}{3\cdot19}}$. Portanto, z = 35·72·13·53 e os números amigáveis são $\begin{cases}3^5\cdot7^2\cdot13\cdot53\cdot11\cdot211\\ 3^5\cdot7^2\cdot13\cdot53\cdot2543\end{cases}$).

Exemplo 5.

§. CXIII. Sejam $a = 5$, $b = 17$ & números amigáveis

$$5(3x-1)z \quad \& \quad 17(x-1)z.$$

Teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{18x}{32x-22} = \frac{9x}{16x-11}.$$

Como x deve ser um número par, pomos $x = 2p$; teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{18p}{32p-11}$$

e ou um fator 2 ou um 3^2 deve ser cancelado do numerador $18p$, para que não seja um número abundante. Mas, um fator 2 não pode ser cancelado; seja cancelado, portanto, um fator 9. Para tanto, pomos $p = 9q+4$, de tal modo que $x = 18q+8$ e

$$x-1 = 18q+7 \quad \& \quad 3x-1 = 54q+23;$$

teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{2(9q+4)}{32q+13}.$$

q	$x-1$	$3x-1$	$\frac{z}{\int z}$
0	7	23	$\frac{8}{13}$ impossível.
2	43	131	$\frac{4\cdot 11}{7\cdot 11} = \frac{4}{7}$; $z = 4$ & números amigáveis $\begin{Bmatrix} 4\cdot 5\cdot 131 \\ 4\cdot 17\cdot 43 \end{Bmatrix}$.
4	79	239	$\frac{16\cdot 5}{3\cdot 47}$
5	97	293	$\frac{2\cdot 49}{173}$
17	313	941	$\frac{2\cdot 157}{557}$
19	349	1049	$\frac{2\cdot 5^2\cdot 7}{27\cdot 23}$
20	367	1103	$\frac{16\cdot 23}{653}$
24	439	1319	$\frac{8\cdot 5\cdot 11}{781}$ inútil, $= \frac{8\cdot 5}{71}$.

Exemplo 6.

§. CXIV. Sejam $a = 37$ & $b = 227$. Teremos $\int a = 38$, $\int b = 228$ & $\frac{m}{n} = \frac{1}{6}$; donde, se os números amigáveis sejam

$$37(6x-1)z \quad \& \quad 227(x-1)z,$$

teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{6\cdot 38x}{449x-264} = \frac{4\cdot 3\cdot 19x}{449x-264}.$$

Visto que, aqui, x deve ser um número par, pomos $x = 2p$, de tal forma que os números primos devam ser

$$x{-}1 = 2p{-}1 \quad \& \quad 6x{-}1 = 12p{-}1,$$

e teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{4{\cdot}3{\cdot}19p}{449p-132}.$$

Agora, ou um fator 4 ou um fator 3 deve ser cancelado do numerador.

I. Seja cancelado um fator 3. Para isso, pomos $p = 3q$, de tal modo

$$\frac{z}{\int z} = \frac{4{\cdot}3{\cdot}19q}{449q-44};$$

agora, fazemos $q = 3r+1$ e teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{4{\cdot}19(3r+1)}{449r+135}$$

e $p = 9r+3$ &

$$x{-}1 = 18r+5, \quad 6x{-}1 = 108r+35.$$

r	$x-1$	$6x-1$	$\frac{z}{\int z}$
2	41	251	$\frac{4\cdot19\cdot7}{1033}$
3	59	359	$\frac{4\cdot19\cdot10}{1482}=\frac{4\cdot5}{3\cdot13}$
6	113	683	$\frac{4\cdot19\cdot19}{3\cdot23\cdot41}$
13	239	1439	$\frac{4\cdot19\cdot40}{4\cdot1493}$
17	311	1871	$\frac{16\cdot13\cdot19}{8\cdot971}$
22	401	2411	$\frac{4\cdot19\cdot67}{10013}=\frac{4\cdot67}{17\cdot31}\ \boxed{\frac{67}{4\cdot17}}\ \frac{16}{31}\ \boxed{\frac{16}{31}}$;
			$z=4$ & números amigáveis $\left(\begin{cases}16\cdot67\cdot37\cdot2411\\16\cdot67\cdot227\cdot401\end{cases}\right)$.
117	2111	12671	$\frac{4\cdot19\cdot352}{52668}=\frac{128\cdot11\cdot19}{4\cdot7\cdot9\cdot11\cdot19}=\frac{32}{63}$;
			$z=32$ & números amigáveis $\left(\begin{cases}32\cdot37\cdot12671\\32\cdot227\cdot2111\end{cases}\right)$.

II. Seja cancelado um fator 4. Pondo $p=4q$, teremos

$$\frac{z}{\int z}=\frac{4\cdot3\cdot19q}{449q-33};$$

agora, seja $q=4r+1$ e teremos $p=16r+4$ &

$$x-1=32r+7,\quad 6x-1=192r+47,$$

enquanto

$$\frac{z}{\int z}=\frac{4\cdot19(4r+1)}{449r+104}.$$

r	$x-1$	$6x-1$	$\frac{z}{\int z}$
0	7	47	$\frac{3\cdot19}{8\cdot13}\ \boxed{\frac{19}{4\cdot5}}\ \frac{3\cdot5}{2\cdot13}\ \boxed{\frac{5}{2\cdot3}}\ \frac{3^2}{13}\ \boxed{\frac{3^2}{13}}$; $z=3^2\cdot5\cdot19$ & números amigáveis $\begin{Bmatrix}3^2\cdot5\cdot19\cdot37\cdot47\\3^2\cdot5\cdot19\cdot227\cdot7\end{Bmatrix}$.
2	71	431	$\frac{9\cdot19}{2\cdot167}$
8	263	1583	$\frac{3\cdot19\cdot33}{16\cdot3\cdot7\cdot11}=\frac{3\cdot19}{16\cdot7}\ \boxed{\frac{19}{4\cdot5}}\ \frac{3\cdot5}{4\cdot7}\ \boxed{\frac{5}{2\cdot3}}\ \frac{3^2}{2\cdot7}\ \boxed{\frac{3^2}{13}}\ \frac{13}{14}\ \boxed{\frac{13}{14}}$; $z=3^2\cdot5\cdot13\cdot19$ & números amigáveis $\begin{Bmatrix}3^2\cdot5\cdot13\cdot19\cdot37\cdot1583\\3^2\cdot5\cdot13\cdot19\cdot227\cdot263\end{Bmatrix}$.
15	487	2927	$\frac{3\cdot19\cdot61}{7\cdot977}$
23	743	4463	$\frac{9\cdot19\cdot31}{9\cdot19\cdot61}=\frac{31}{61}$
26	839	5039	$\frac{3\cdot19\cdot105}{2\cdot3\cdot13\cdot151}=\frac{3\cdot5\cdot7\cdot19}{2\cdot13\cdot151}$
30	967	5807	$\frac{3\cdot19\cdot11}{2\cdot617}$
41	1319	7919	$\frac{3\cdot19\cdot165}{9\cdot121\cdot17}=\frac{5\cdot19}{11\cdot17}$

Exemplo 7.

§. CXV. Sejam $a = 79$, $b = 11\cdot19 = 209$, $\int a = 80$, $\int b = 240$. Teremos $m = 1$, $n = 3$ & os números amigáveis são

$$79(3x-1)z \quad \& \quad 11\cdot19(x-1)z;$$

teremos

$$\frac{z}{\int z}=\frac{240x}{446x-288}=\frac{120x}{223x-144}.$$

Seja $x = 2p$. Teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{120p}{223p-72}$$

e os números primos devem ser $2p-1$ & $6p-1$. Agora, ou um fator 8 ou 3 deve ser cancelado do numerador, $120p$.

I. Seja cancelado um fator 3. Seja $p = 9q$. Teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{120q}{223q-8}$$

e fazemos $q = 3r-1$, de modo que

$$\frac{z}{\int z} = \frac{40(3r-1)}{223r-77},$$

$p = 27r-9$ &

$$x-1 = 54r-19 \quad \text{e} \quad 3x-1 = 162r-55.$$

Mas, porque 40 é um número abundante, ou 5 ou 4 deve ser cancelado.

α) Cancelando 5, fazemos $r = 5s-1$. Teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{8(15s-4)}{223s-60}$$

e os números primos devem ser $x-1 = 270s-73$, $3x-1 = 810s-217$. Ainda mais, para que três não seja introduzido novamente no numerador, o caso $s = 3\alpha-1$ deve ser excluído. Assim, nada é achado.

β) Como temos $\frac{z}{\int z} = \frac{40(3r-1)}{223r-77}$, 4 é cancelado e fazemos $r = 4s-1$. Teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{10(12s-4)}{223s-75} = \frac{40(3s-1)}{223s-75}.$$

Continuando, fazemos $s = 4t+1$. Teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{10(12t+2)}{223t+37} = \frac{20(6t+1)}{223t+37}.$$

Novamente, seja $t = 2u–1$; teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{10(12u-5)}{223u-93} = \frac{20(6t+1)}{223t+37}$$

e, porque $r = 16t+3 = 32u–13$, teremos $x–1 = 1728u–721$, $3x–1 = 5184u–2161$. Mas, um valor de u menor de 16 não produz esses números primos, donde fazemos $\frac{z}{\int z} = \frac{2 \cdot 11 \cdot 17}{5 \cdot 139}$, o que, devido ao fator 11, é inútil.

II. O fator 8 é, portanto, cancelado da equação $\frac{z}{\int z} = \frac{120p}{223p-72}$. Pondo $p = 8q$, teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{120q}{223q-9}$$

e agora seja $q = 8r–1$. Teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{3 \cdot 5(8r-1)}{223r-29};$$

Mas, porque $p = 64r–8$, teremos

$$x–1 = 128r–17, \qquad 3x–1 = 384r–49.$$

Assim, os valores $r = 3\alpha+1$ & $r = 5\alpha\pm1$ são excluídos.

r	$x-1$	$6x-1$	$\frac{z}{\int z}$
2	239	719	$\frac{3\cdot 5^2}{139}$
3	367	1103	$\frac{3\cdot 23}{128}\ \boxed{\frac{23}{8\cdot 3}}\ \frac{3^2}{16}\ \boxed{\frac{3^2}{13}}\ \frac{13}{16}\ \boxed{\frac{13}{14}}\ \frac{7}{8}\ \boxed{\frac{7}{8}}$, portanto, $z = 3^2\cdot 7\cdot 13\cdot 23$ **ou** $\frac{3\cdot 23}{128}\ \boxed{\frac{23}{8\cdot 3}}\ \frac{3^2}{16}\ \boxed{\frac{3^2}{8\cdot 5}}\ \frac{5}{6}\ \boxed{\frac{5}{6}}$, portanto, $z = 3^2\cdot 5\cdot 23$,

e os números amigáveis serão

$$\left\{\begin{matrix} 3^2\cdot 7\cdot 13\cdot 23\cdot 79\cdot 1103 \\ 3^2\cdot 7\cdot 13\cdot 23\cdot 11\cdot 19\cdot 367 \end{matrix}\right) \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{matrix} 3^3\cdot 5\cdot 23\cdot 79\cdot 1103 \\ 3^3\cdot 5\cdot 23\cdot 11\cdot 19\cdot 367 \end{matrix}\right).$$

Exemplo 8.

§. CXVI. Sejam $a = 17\cdot 19$, $b = 11\cdot 59$. Teremos $\int a = 18\cdot 20$, $\int b = 12\cdot 60$ & $m = 1$, $n = 2$. Se, para os números amigáveis, pusermos

$$17\cdot 19(2x-1)z, \quad 11\cdot 59(x-1)z,$$

teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{720x}{1295x-972}.$$

Seja $x = 2p$; teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{720p}{1295p-486}$$

enquanto

$$x-1 = 2p-1, \quad 2x-1 = 4p-1.$$

Para que nenhum dos dois sejam divisíveis por 3, devemos ter $p = 3q$, de tal modo que

$$\frac{z}{\int z} = \frac{720q}{1295q-162}$$

e

$$x-1 = 6q-1, \quad 2x-1 = 12q-1.$$

Cancelando o fator 16 do numerador e pondo $q = 2r$, teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{720r}{1295r-81}.$$

Agora, seja $r = 16s-1$; teremos

$$\frac{z}{\int z} = \frac{45(16s-1)}{1295s-86}.$$

e

$$x-1 = 192s-13, \quad 2x-1 = 384s-25.$$

Seja $s = 1$; teremos $x-1 = 179$, $2x-1 = 359$ e

$$\frac{z}{\int z} = \frac{45 \cdot 15}{1209} = \frac{225}{403} = \frac{3^2 \cdot 5^2}{13 \cdot 31} \boxed{\frac{3^2}{13}} \frac{5^2}{31} \boxed{\frac{5^2}{31}}.$$

Portanto, $z = 3^2 \cdot 5^2$ e os números amigáveis serão

$$\begin{Bmatrix} 3^2 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 359 \\ 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 59 \cdot 179 \end{Bmatrix}.$$

Observação.

§. CXVII. Esse último método, explanada no problema 5, é completamente diferente do método anterior, que foi encerrado nos primeiros quatro problemas: enquanto naquele o fator comum era procurado, nestes era dado. Não obstante, todos os dois são munidos de um tipo notável de excelência, de tal modo que um, sem a ajuda do outro, não é suficiente para aumentar a quantidade de números amigáveis. Pois, o segundo método fornece os referidos fatores comuns, que são supostos pelo primeiro, enquanto o primeiro fornece os fatores restantes que são convenientes para esse plano. Todos os outros métodos que têm sido propostos contêm uma forte espécie de indecisão, na medida em que não procedem por regras algébricas, mas são limitados à incerteza de tentativas e erros. Ao terminar, portanto, anexarei aqui mais que sessenta pares de números amigáveis que extraí com esses métodos.

Catálogo de Números Amigáveis

I. $\left\{\begin{matrix} 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \\ 2^2 \cdot 71 \end{matrix}\right)$ II. $\left\{\begin{matrix} 2^4 \cdot 23 \cdot 47 \\ 2^4 \cdot 1151 \end{matrix}\right)$ III. $\left\{\begin{matrix} 2^7 \cdot 191 \cdot 383 \\ 2^7 \cdot 73727 \end{matrix}\right)$

IV. $\left\{\begin{matrix} 2^2 \cdot 23 \cdot 5 \cdot 137 \\ 2^2 \cdot 23 \cdot 827 \end{matrix}\right)$ V. $\left\{\begin{matrix} 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 17 \\ 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 107 \end{matrix}\right)$

VI. $\left\{\begin{matrix} 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 19 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 239 \end{matrix}\right)$ VII. $\left\{\begin{matrix} 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 41 \\ 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 251 \end{matrix}\right)$

VIII. $\left\{\begin{matrix} 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 53 \cdot 1889 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 102059 \end{matrix}\right)$ IX. $\left\{\begin{matrix} 2^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 389 \cdot 509 \\ 2^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 198899 \end{matrix}\right)$

X. $\left\{\begin{matrix} 3^2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 887 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 7103 \end{matrix}\right)$ XI. $\left\{\begin{matrix} 3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 89 \\ 3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2699 \end{matrix}\right)$

XII. $\left\{\begin{matrix} 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 461 \\ 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19403 \end{matrix}\right)$ XIII. $\left\{\begin{matrix} 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 569 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 17099 \end{matrix}\right)$

XIV. $\left\{\begin{matrix} 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 97 \cdot 5 \cdot 193 \\ 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 97 \cdot 1163 \end{matrix}\right)$ XV. $\left\{\begin{matrix} 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 163 \cdot 5 \cdot 977 \\ 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 41 \cdot 163 \cdot 5867 \end{matrix}\right)$

XVI. $\left\{\begin{matrix} 2^3 \cdot 17 \cdot 79 \\ 2^3 \cdot 23 \cdot 59 \end{matrix}\right)$ XVII. $\left\{\begin{matrix} 2^4 \cdot 23 \cdot 1367 \\ 2^4 \cdot 53 \cdot 607 \end{matrix}\right)$

XVIII. $\left\{\begin{matrix} 2^4 \cdot 47 \cdot 89 \\ 2^4 \cdot 53 \cdot 79 \end{matrix}\right)$ XIX. $\left\{\begin{matrix} 2^4 \cdot 23 \cdot 479 \\ 2^4 \cdot 89 \cdot 127 \end{matrix}\right)$

XX. $\left\{\begin{matrix} 2^4 \cdot 23 \cdot 467 \\ 2^4 \cdot 103 \cdot 107 \end{matrix}\right)$

XXI. $\left\{\begin{matrix} 2^4 \cdot 17 \cdot 5119 \\ 2^4 \cdot 239 \cdot 383 \end{matrix}\right)$

XXII. $\left\{\begin{matrix} 2^4 \cdot 17 \cdot 10303 \\ 2^4 \cdot 167 \cdot 1103 \end{matrix}\right)$

XXIII. $\left\{\begin{matrix} 2^4 \cdot 19 \cdot 1439 \\ 2^4 \cdot 149 \cdot 191 \end{matrix}\right)$

XXIV. $\left\{\begin{matrix} 2^5 \cdot 59 \cdot 1103 \\ 2^5 \cdot 79 \cdot 827 \end{matrix}\right)$

XXV. $\left\{\begin{matrix} 2^5 \cdot 37 \cdot 12671 \\ 2^5 \cdot 227 \cdot 2111 \end{matrix}\right)$

XXVI. $\left\{\begin{matrix} 2^5 \cdot 53 \cdot 10559 \\ 2^5 \cdot 79 \cdot 7127 \end{matrix}\right)$

XXVII. $\left\{\begin{matrix} 2^6 \cdot 79 \cdot 11087 \\ 2^6 \cdot 383 \cdot 2309 \end{matrix}\right)$

XXVIII. $\left\{\begin{matrix} 2^8 \cdot 383 \cdot 9203 \\ 2^8 \cdot 1151 \cdot 3067 \end{matrix}\right)$

XXIX. $\left\{\begin{matrix} 2^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 263 \\ 2^2 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 107 \end{matrix}\right)$

XXX. $\left\{\begin{matrix} 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 71 \\ 3^3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 31 \end{matrix}\right)$

XXXI. $\left\{\begin{matrix} 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 79 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 199 \end{matrix}\right)$

XXXII. $\left\{\begin{matrix} 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 47 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 31 \end{matrix}\right)$

XXXIII. $\left\{\begin{matrix} 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 1583 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 227 \cdot 263 \end{matrix}\right)$

XXXIV[19]. $\left\{\begin{matrix} 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 11 \cdot 220499 \\ 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 89 \cdot 29399 \end{matrix}\right)$

XXXV. $\left\{\begin{matrix} 3^2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 47 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 7 \cdot 277 \end{matrix}\right)$

XXXVI. $\left\{\begin{matrix} 2^4 \cdot 67 \cdot 37 \cdot 2411 \\ 2^4 \cdot 67 \cdot 227 \cdot 401 \end{matrix}\right)$

XXXVII[20]. $\left\{\begin{matrix} 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \\ 3^2 \cdot 5 \cdot 31 \cdot 89 \end{matrix}\right)$

XXXVIII. $\left\{\begin{matrix} 2 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 673 \\ 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 60659 \end{matrix}\right)$

XXXIX. $\left\{\begin{matrix} 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 107 \\ 2 \cdot 5 \cdot 47 \cdot 359 \end{matrix}\right)$

XL. $\left\{\begin{matrix} 2^3 \cdot 11 \cdot 163 \cdot 191 \\ 2^3 \cdot 31 \cdot 11807 \end{matrix}\right)$

XLI. $\left\{\begin{matrix} 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 367 \\ 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 79 \cdot 1103 \end{matrix}\right)$

XLII. $\left\{\begin{matrix} 3^3 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 367 \\ 3^3 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 79 \cdot 1103 \end{matrix}\right)$

XLIII. $\left\{\begin{matrix} 2^3 \cdot 11 \cdot 59 \cdot 173 \\ 2^3 \cdot 47 \cdot 2609 \end{matrix}\right)$

XLIV. $\left\{\begin{matrix} 2^3 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 2543 \\ 2^3 \cdot 383 \cdot 1907 \end{matrix}\right)$

XLV. $\left\{\begin{matrix} 2^3 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 1871 \\ 2^3 \cdot 467 \cdot 1151 \end{matrix}\right)$

XLVI. $\left\{\begin{matrix} 2^3 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 1619 \\ 2^3 \cdot 719 \cdot 647 \end{matrix}\right)$

XLVII. $\left\{\begin{matrix} 2^3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 239 \\ 2^3 \cdot 191 \cdot 449 \end{matrix}\right)$

XLVIII. $\left\{\begin{matrix} 2^3 \cdot 29 \cdot 47 \cdot 59 \\ 2^3 \cdot 17 \cdot 4799 \end{matrix}\right)$

XLIX. $\left\{\begin{matrix} 2^4 \cdot 17 \cdot 167 \cdot 13679 \\ 2^4 \cdot 809 \cdot 51071 \end{matrix}\right)$

L. $\left\{\begin{matrix} 2^4 \cdot 23 \cdot 47 \cdot 9767 \\ 2^4 \cdot 1583 \cdot 7103 \end{matrix}\right)$

LI. $\left\{\begin{matrix} 2^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 1187 \\ 2^2 \cdot 43 \cdot 2267 \end{matrix}\right)$

LII. $\left\{\begin{matrix} 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 1187 \\ 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 131 \cdot 971 \end{matrix}\right)$

LIII. $\left\{\begin{matrix} 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 53 \cdot 11 \cdot 211 \\ 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 53 \cdot 2543 \end{matrix}\right)$

LIV. $\left\{\begin{matrix} 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 59 \cdot 179 \\ 3^2 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 359 \end{matrix}\right)$

LV. $\left\{\begin{matrix} 3^3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 397 \\ 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 21491 \end{matrix}\right)$

LVI. $\left\{\begin{matrix} 3^4 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 47 \cdot 7019 \\ 3^4 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 389 \cdot 863 \end{matrix}\right)$

LVII. $\left\{\begin{matrix} 3^4 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 53 \cdot 6959 \\ 3^4 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 179 \cdot 2087 \end{matrix}\right)$

LVIII. $\left\{\begin{matrix} 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 47 \cdot 7019 \\ 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 389 \cdot 863 \end{matrix}\right)$

LIX. $\left\{\begin{matrix} 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 53 \cdot 6959 \\ 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 179 \cdot 2087 \end{matrix}\right)$.

---

[19] Nota dos Trad.: O número 220499 = 311·709 não é primo. Em consequência, como pode ser verificado por cálculo direto, o presente item não é um par de números amigáveis.

[20] Nota dos Trad.: O original tem 3^3, o que é evidentemente um erro de transcrição.

É uma satisfação acrescentar a estes os seguintes dois pares, que têm uma forma distinta dos precedentes.

LX. $\left\{\begin{matrix} 2^3 \cdot 19 \cdot 41 \\ 2^5 \cdot 199 \end{matrix}\right)$ LXI. $\left\{\begin{matrix} 2^3 \cdot 41 \cdot 467 \\ 2^5 \cdot 19 \cdot 233 \end{matrix}\right).$

SOBRE NÚMEROS AMIGÁVEIS

Leonhard Euler

Tradução de: Fabricio Possebon

John A. Fossa

§1. Entre todos os problemas que costumam ser tratados na matemática, nenhum é tido, mesmo agora, pela maior parte dos matemáticos, como mais estéril ou mais distanciado de toda aplicação prática do que aqueles que tratam da contemplação da natureza dos números e da investigação dos seus divisores. Neste assunto, os matemáticos modernos divergem bastante dos antigos, os quais costumavam dar muito mais valor a especulações desse tipo. Pois, embora os antigos não ignorassem que questões sobre a natureza dos números têm pouca utilidade para a parte da matemática que costuma ser chamada aplicada e que é voltada à investigação de assuntos pertinentes, sobretudo, à física, dedicaram, contudo, muitos esforços na investigação das propriedades dos números. Além disso, na medida em que a investigação da verdade parecesse, para eles, louvável em si e digna ao conhecimento humano, eles certamente julgariam que a referida investigação aperfeiçoaria, de modo admirável, a própria arte de descobrir e tornaria as faculdades da mente mais aguçadas para a resolução de assuntos mais importantes. Nisso não se enganaram, como claramente testemunham os grandes resultados, pelos quais a análise, desde aquele tempo, tem sido enriquecida; pois parece altamente provável que esta ciência nunca teria chegado a seu atual grau de perfeição, se os Antigos não tivessem se empenhado com tanto zelo em desenrolar questões desse tipo, as quais são hoje tão desprezadas como inúteis por quase todos. A partir de agora, convém duvidar menos disso, ainda mais quando a análise fizer desenvolvimentos notáveis ao cultivar mais assiduamente as referidas questões.

§2. Euclides, já nos tempos antiquíssimos, deduziu muitas propriedades belas sobre os números e mostrou o verdadeiro método para descobrir os números perfeitos; assim, é admirável que diversos matemáticos mais novos tenham fracassado tão miseravelmente neste assunto. É perfeitamente claro que, a partir do tempo de Diofanto, tanto os Gregos quanto os Árabes possuíam muitos estudos dedicados à doutrina dos números, pois a referida doutrina, depois de restaurado seu estudo na Europa, foi imitada com grande empenho pelos primeiros cultores da matemática. Assim, prepararam o caminho para investigações mais elevadas. Com certeza Descartes, a quem, principalmente, as partes avançadas da análise são merecidamente creditadas, não rejeitou as especulações numéricas e, de fato, Fermat e Frenicle se empenharam ainda mais neste assunto. Esses, por sua vez, instigaram o habilidoso matemático Wallis, quase a contragosto, a este estudo, como pode ser amplamente constatado da sua correspondência, incluída no segundo tomo de suas obras. Entre os primeiros que se dedicaram à álgebra na Alemanha, Michael Stifel, que viveu no tempo de Lutero, conseguiu louvores acima de todos. Para elaborar um exemplo notável de análise, para cujo esclarecimento os preceitos usuais da álgebra não foram suficientes, fez menção do problema que procura dois números relacionados de tal forma que todas as partes alíquotas do número menor, quando somadas, produzem o maior e, por sua vez, todas as partes alíquotas do maior, quando somadas, produzem o menor; descobriu os seguintes números: 220 e 284. Descartes também julgou este problema digno para testar suas forças, e obteve ainda outros números que gozam da referida propriedade; até investigou uma regra, pela qual diversos números deste tipo podem ser encontrados. Schooten explicou a regra nos seus Exercícios Matemáticos. No entanto, esta regra nem é geral, nem pode fornecer mais do que três soluções.

§3. Esta questão, portanto, pertence ao gênero de problema que investiga partes alíquotas. Essa doutrina, em geral, tem pouco a ver com questões sobre quantidades contínuas, para as quais a análise é mais adequada; em uma palavra, deve ser tratada de forma especial, exceto quando queremos testar uma hipótese. Apesar disso, Schooten parece ter proposto certo método para resolver problemas desse tipo, em que tentou introduzir o uso do cálculo analítico. Se investigarmos atentamente o seu raciocínio, todavia, a parte principal da solução consiste em mera conjetura, mas está destituído de todo fundamento. Pois, ele supõe, sem justificativa, que certas fórmulas – nas quais se suspeita estarem contidos os números convenientes – darão números do tipo procurado, mesmo que pudesse corretamente assumir, para as mesmas razões, quaisquer outras. Desta forma, há muita sorte envolvida no desenvolvimento das referidas fórmulas; assim, censurou Stifel, embora para razões erradas, porque pensava que a solução de problemas deste tipo não podia ser compreendida por um método fixo. O fato de que essa ciência, que investiga quantidades discretas, está atualmente imperfeita é razão suficiente para estudá-la ainda mais e para procurar os princípios certos pelos quais ela pode ser estruturada. Mas, diante desta ausência de princípios para resolver problemas numéricos do referido tipo, precisa-se de muita engenhosidade e geralmente é necessário recorrer a cogitações extraordinárias, nas quais o máximo poder da inteligência é desperdiçado. Ainda diante da referida causa, mesmo que a própria solução destes problemas pareça ser de pouca utilidade na análise, um método que supera tantas dificuldades deve ser avaliado como promovendo bastante os fins da análise. Quanto mais caminhos diversos abrem, portanto, para investigar a verdade, tanto mais a própria arte de descobrir deve trazer maiores desenvolvimentos.

§4. Como em toda análise, o uso de símbolos apropriados vale muito, assim também neste caso, que trata dos divisores e partes alíquotas dos números, espera-se que uma conveniente maneira de representá-los será muito útil. Portanto, indicarei os números, sejam eles dados ou procurados, pelas letras minúsculas do alfabeto, mas usarei letras maiúsculas para representar as somas dos divisores dos números que são indicados pelas minúsculas correspondentes. Assim, se a denota um número inteiro positivo qualquer – pois é sempre esse tipo de número de que se tratará aqui – a letra maiúscula correspondente A indicará a soma de todos os divisores do número a. De modo semelhante, as letras B, C, D, *etc*. exprimirão, no que segue, as somas dos divisores dos números b, c, d, *etc*.; por exemplo, se tivermos $a = 10$, teremos $A = 18$, e se tivermos $b = 50$, teremos $B = 93$. Visto, porém, que as partes alíquotas de qualquer número são justamente seus divisores – exceto o próprio número, que, embora seja divisor de si mesmo, todavia não está incluído entre as partes alíquotas – a soma das partes alíquotas do número a será $= A–a$, sempre que não tivermos $a = 1$. Pois, neste caso, visto que a unidade costuma ser considerada tanto um divisor, quanto uma parte alíquota, de todos os números, aqui também teremos $A = 1$ e a soma das partes alíquotas = 1. De fato, como a unidade não costuma ser posta entre os números em questões deste tipo, esta exceção não trará dificuldade alguma.

§5. Tendo fixado, portanto, o significado das letras, visto que os números primos não têm parte alíquota alguma, além da unidade, e visto que qualquer número primo não tem outros divisores, além da unidade e dele mesmo, se a for um número primo, teremos $A = a+1$. E se a for alguma potência de um número primo p, a soma dos divisores dele, A, poderá ser determinada facilmente. Pois, seja $a = p^2$, certamente teremos $A = 1+p+p^2$; e se $a = p^3$, teremos $A = 1 + p + p^2 + p^3$. De modo geral, denotando por p um número primo qualquer e sendo $a = p^n$, teremos $A = 1 + p + p^2 + \cdots + p^n$, e já que os divisores constituem uma progressão geométrica, também teremos $A = \frac{p^{n+1}-1}{p-1}$. Decorre disto que, se a for uma potência qualquer do número primo p, e qualquer que seja o seu expoente, sempre teremos $A = \frac{pa-1}{p-1}$. Logo, se a for uma potência de dois, teremos $A = 2a-1$; mas se a for uma potência de três, teremos $A = \frac{3a-1}{2}$, mas se for uma potência de cinco, teremos $A = \frac{5a-1}{4}$, e assim por diante.

§6. Se, porém, a for o produto de dois números primos distintos p e q, considere $a = pq$; a soma dos divisores será $A = 1+p+q+pq = (1+p)(1+q)$. De modo semelhante, se tivermos vários números primos distintos p, q, r, s, *etc.*, para $a = pqr$, teremos $A = (1+p)(1+q)(1+r)$, e dado $a = pqrs$, teremos $A = (1+p)(1+q)(1+r)(1+s)$. Mas, como temos $p+1 = P$, $q+1 = Q$, $r+1 = R$, *etc*., para $a = pq$, teremos $A = PQ$, e para $a = pqr$, teremos $A = PQR$, *etc*. As mesmas expressões serão válidas não somente no caso de p, q e r, serem números primos distintos, mas também sempre que forem números primos entre si, de forma que, além da unidade, não tenham outro divisor comum. Pois, se P for a soma dos divisores do número p, e Q a soma dos divisores de q, e as somas P e Q não contiverem, além da unidade, qualquer número comum, então o produto $a = pq$ terá, em primeiro lugar, os mesmos divisores do fator p, cuja soma é $= P$; em seguida, também tem os divisores do número q, cuja soma é $= Q$. Porque a unidade ocorre duas vezes, a soma de todos esses divisores será $= P+Q-1$. Em terceiro lugar, o produto pq será divisível por cada produto de dois divisores dos números p e q, excluindo a unidade dos mesmos; a soma destes divisores compostos será então $= (P-1)(Q-1) = PQ-P-Q+1$, a qual, quando somada com a soma dos divisores simples, $P+Q-1$, faz PQ; assim, para $a = pq$, teremos $A = PQ$.

§7. Visto que todo número é primo, ou o produto de vários primos, ou de suas potências, a soma dos seus divisores é facilmente conhecida através da resolução do número em seus fatores. Pois, sejam p, q, r, *etc*. números primos. Então, todo número estará contido na seguinte forma: $a = p^m q^n r^k$... Como a soma dos divisores do fator p^m é $= \frac{p^{m+1}-1}{p-1}$, e a do fator q^n é $= \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$, e a soma dos divisores do próprio r^k é $\frac{r^{k+1}-1}{r-1}$, e visto que esses fatores p^m, q^n, r^k, são primos entre si, a soma dos divisores do número proposto, $a = p^m q^n r^k ...$, será

$$A = \frac{(p^{m+1}-1)(q^{n+1}-1)(r^{k+1}-1)}{(p-1)(q-1)(r-1)} ...$$

Desta maneira, expressando o próprio número a por fatores, descobre-se a soma dos seus divisores, também expressa por fatores. Isto será bastante útil na resolução de várias questões desse tipo. Para que a soma dos divisores de qualquer número seja mais facilmente descoberta, e que os mesmos possam ser expressos por fatores, serão exibidas, na tabela anexa, as somas dos divisores, resolvidas nos seus fatores, não somente de todos os números primos menores de mil, mas também de suas potências, até onde a dificuldade do cálculo o permitir, pois estes são os mais úteis na prática. Assim, pelo recurso desta tabela, as somas dos divisores de todos os números compostos, exceto os que são demasiadamente grandes, podem ser facilmente obtidas. Assim, seja a = 7560 o número proposto. Primeiramente, este número é expresso por fatores primos da seguinte maneira: $a = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$. Em seguida, as somas dos divisores destes fatores podem ser sucessivamente procuradas na tabela; eles serão: $3 \cdot 5$; $2^3 \cdot 5$; $2 \cdot 3$ e 2^3. Ao multiplicar os mesmos, obteremos a soma dos divisores do número proposto, a = 7560, isto é, $A = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 =$

28800. Assim, o uso da tabela para achar a soma dos divisores de qualquer número é plenamente ilustrado pelo exemplo.

§8. Agora a descoberta de números perfeitos não padece de dificuldade alguma: pois, visto que um número é chamado perfeito, quando é igual à soma das suas partes alíquotas, se *a* for um número perfeito, deveremos pôr $a = A - a$ e, portanto, $A = 2a$. Ora, o número perfeito a ou é par ou é impar; no primeiro caso terá o fator 2, ou alguma potência de 2. Seja então $a = 2^n b$; então teremos $A = (2^{n+1} - 1)B$ e, portanto, $(2^{n+1} - 1)B = 2^{n+1}b$, do qual obtemos $\frac{B}{b} = \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}$. Mas, como a fração $\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}$ não pode ser reduzida a números menores, é necessário que ou *b* seja $= 2^{n+1} - 1$, ou *b* seja $= (2^{n+1} - 1)c$. O primeiro, porém, não pode acontecer, a menos que $2^{n+1} - 1$ seja um número primo, porque a soma dos seus divisores deve ser $= 2^{n+1}$ e, portanto, a soma das suas partes alíquotas = 1. De fato, sempre que $2^{n+1} - 1$ for um número primo, quando $b = 2^{n+1} - 1$, teremos $B = 2^{n+1}$ e, em consequência, o número perfeito será $a = 2^n(2^{n+1} - 1)$. Em contraste, se *b* for tomado como múltiplo de $2^{n+1} - 1$, considere $(2^{n+1} - 1)c$, do qual $2^{n+1} - 1$ e *c* serão partes alíquotas. Decorre disto que *B*, a soma de todos os divisores, certamente não será menor do que $2^{n+1} + c + b$, e será igual a isto no caso de que tanto *c* quanto $2^{n+1} - 1$ forem números primos. Logo, a fração $\frac{B}{b}$ não será menor do que

$\frac{2^{n+1}+c+b}{b}$, isto é, do que $\frac{2^{n+1}(1+c)}{(2^{n+1}-1)c}$, pois $b = (2^{n+1} - 1)c$. Mas, a fração $\frac{2^{n+1}(1+c)}{(2^{n+1}-1)c}$ é necessariamente maior do que $\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}$ e, em consequência, b não pode ser um múltiplo de $2^{n+1} - 1$. Por essa razão, outros números perfeitos pares não podem ser encontrados além dos que estejam contidos na fórmula antes encontrada $a = 2^n(2^{n+1} - 1)$, onde $2^{n+1} - 1$ é um número primo; esta é a própria regra prescrita por Euclides. Se houver, contudo, além destes, números perfeitos ímpares, ou não, é uma questão dificílima. Até agora, ninguém havia encontrado tais números, nem havia demonstrado que não existam. No entanto, se números perfeitos desse tipo existirem, eles necessariamente estarão contidos na fórmula $(4m + 1)^{4n+1}xx$, onde $4m+1$ denota um número primo e x um número ímpar.

§9. Não obstante, o problema de achar números amigáveis, no qual se pede dois números para os quais a soma das partes alíquotas de cada um é igual ao outro, foi por muito tempo considerado bastante difícil. Embora se dedicasse assiduamente à resolução deste problema, Schooten não encontrou mais do que três pares desse tipo de número, a saber,

220	e	284
17296	e	18416
9363584	e	9437056,

e o método que ele empregou é constituído de tal forma que dificilmente se acharia, por meio de seu uso, mais números que satisfizessem a definição. Pois, ele assumiu que os números amigáveis tenham as fórmulas gerais $2^n x$ e $2^n yz$, nas quais x, y e z são números primos, e tendo tomado sucessivamente números fixos para n, procurou, por inspeção, para cada n, números primos que satisfizessem à questão quando substituídos para x, y e z. Ninguém, contudo, acreditará que todos os números amigáveis estão contidos nestas fórmulas, não somente porque isto não foi demonstrado por Schooten, mas também porque os seguintes números amigáveis, que descobri, deixarão isto bastante claro. Pois, além daqueles três pares, obtive, como explicarei mais adiante, os seguintes números amigáveis:

$$\begin{array}{rcr} 4\cdot 5\cdot 131 & \text{e} & 4\cdot 17\cdot 43 \\ 4\cdot 5\cdot 251 & \text{e} & 4\cdot 13\cdot 107 \\ 16\cdot 17\cdot 5119 & \text{e} & 16\cdot 239\cdot 383 \\ 4\cdot 11\cdot 17\cdot 263 & \text{e} & 4\cdot 11\cdot 43\cdot 107 \\ 32\cdot 37\cdot 12671 & \text{e} & 32\cdot 227\cdot 2111 \\ 4\cdot 23\cdot 827 & \text{e} & 4\cdot 23\cdot 5\cdot 137. \end{array}$$

Mais ainda, por mais admirável que isto possa parecer, podemos exibir números ímpares que gozam da propriedade almejada, pois temos:

$$\begin{array}{rcr} 3^2\cdot 7\cdot 13\cdot 5\cdot 17 & \text{e} & 3^2\cdot 7\cdot 13\cdot 107 \\ 3^2\cdot 7^2\cdot 13\cdot 5\cdot 41 & \text{e} & 3^2\cdot 7^2\cdot 13\cdot 251. \end{array}$$

Disso, é bastante evidente que os números amigáveis são muito mais abundantes do que os números perfeitos, os quais ocorrem rarissimamente na série dos números.

§10. Estes números, então, bem como outros que satisfazem a definição, serão extraídos sem muita dificuldade pelo recurso do método a ser elucidado, já mencionado. Pois, sejam a e b dois números amigáveis quaisquer. Visto que as somas de seus divisores são A e B, as somas das suas partes alíquotas serão $A–a$ e $B–b$. A condição sobre estes números fornece as equações $A–a = b$ e $B–b = a$, das quais decorre que $A = B = a+b$. Logo, ambos os números amigáveis têm a mesma soma de divisores, a qual é simultaneamente igual à soma dos dois números. Para obter uma solução apropriada para as equações, pomos px e qy para os números amigáveis, sendo x e y números primos, de tal forma que $a = px$ e $b = qy$. Então, teremos

$A = P(x+1)$ e $B = Q(y+1)$; disto decorre que $P(x+1) = Q(y+1) = px+qy$.

Pondo $P(x+1) = Q(y+1) = PQz$, teremos $x+1 = Qz$ e $y+1 = Pz$, ou seja, $x = Qz–1$ e $y = Pz–1$. Como, de fato, devemos ter $PQz = px+qy$, substituindo estes valores para x e y, obtemos:

$$PQz = Qpz–p+Pqz–q \text{ e, portanto, } z = \frac{p+q}{Qp+Pq-PQ}.$$

Para que as fórmulas forneçam números amigáveis *px* e *qy*, devemos ter:

$$x + 1 = \frac{Q(p+q)}{Qp+Pq-PQ} \quad \text{e} \quad y + 1 = \frac{P(p+q)}{Qp+Pq-PQ}.$$

Seja *n* o máximo divisor comum dos números *px* e *qy* e, pondo *p* = *na* e *q* = *nb*, temos *P* = *NA* e *Q* = *NB*. Assim, teremos as seguintes fórmulas para os números amigáveis:

$$nax \quad \text{e} \quad nby,$$

onde *x* e *y* devem ser números primos, a serem definidos por meio das seguintes equações:

$$x + 1 = \frac{nB(a+b)}{Bna+Anb-NAB}, \quad y + 1 = \frac{nA(a+b)}{Bna+Anb-NAB}.$$

Assim, tomando arbitrariamente números determinados para *a* e *b*, teremos:

$$x + 1 = \frac{(a+b)Bn}{(Ab+Ba)n-ABN} \quad \text{e} \quad y + 1 = \frac{(a+b)An}{(Ab+Ba)n-ABN},$$

onde se requer tais números para *n*, que farão com que *x* e *y* sejam não somente números inteiros, mas também primos.

§11. Mas, como estas fórmulas são muito gerais, reduzi-las-emos a algumas mais específicas; pomos, portanto, $a = 1$. Assim, teremos $A = 1$ e as fórmulas que apontam números amigáveis se tornarão

$$nx \quad \text{e} \quad nby,$$

para as quais x e y devem ser definidos a partir das seguintes equações:

$$\frac{x+1}{B} = y + 1 = \frac{(1+b)n}{(B+b)n-Bn}.$$

Além disso, seja b um número primo, de tal forma que $B = b+1$, resulta que

$$\frac{x+1}{b+1} = y + 1 = \frac{(1+b)n}{(2n-N)b-(N-n)}\ .$$

Se, nesta equação, pusermos uma potência de 2 para n, de tal forma que $N = 2n-1$, obteremos

$$\frac{x+1}{b+1} = y + 1 = \frac{(1+b)n}{b-(n-1)}\ ,$$

tais fórmulas fornecerão os números amigáveis, que foram descobertos pelo método de Schooten e de Descartes. Pois, pondo sucessivamente as potências de 2 para n, obteremos

$$\text{para } n = 2,\quad \frac{x+1}{b+1} = y + 1 = \frac{2(1+b)}{b-1},$$
$$\text{para } n = 4,\quad \frac{x+1}{b+1} = y + 1 = \frac{4(1+b)}{b-3},$$
$$\text{para } n = 8,\quad \frac{x+1}{b+1} = y + 1 = \frac{8(1+b)}{b-7},$$

etc.

De fato, outros números podem ser aceitos, com proveito, para n, uma vez que, para eles, a diferença $2n–N$ seja expressa convenientemente. Assim, se tomarmos $n = 92$, teremos $N = 168$, $2n = 184$ e $N–n = 76$; disto decorre que:

$$\frac{x+1}{b+1} = y + 1 = \frac{92(1+b)}{16b-76} = \frac{23(1+b)}{4b-19}.$$

Agora, pondo $b = 5$, teremos:

$$\frac{x+1}{6} = y + 1 = \frac{6\cdot 23}{1} = 138 \quad \text{e} \quad x + 1 = 828,$$

de que obtemos facilmente que $y = 137$ e $x = 827$; visto que ambos desses números são primos, os números amigáveis são

$92 \cdot 827$ e $92 \cdot 5 \cdot 137$.

De modo semelhante, a partir destas fórmulas, é possível obter outros números que satisfazem a definição.

§12. Agora, não seja mais $a = 1$, mas denota-se, tanto por a, quanto por b, números primos quaisquer, de tal forma que $A = a+1$ e $B = b+1$. Então, as fórmulas nax e nby darão números amigáveis, se as seguintes equações fornecerem números primos para x e y:

$$\frac{x+1}{b+1} = \frac{y+1}{a+1} = \frac{n(a+b)}{(2ab+a+b)n-(ab+a+b+1)N},$$

ou seja,
$$\frac{x+1}{b+1} = \frac{y+1}{a+1} = \frac{n(a+b)}{(2n-N)ab-(N-n)(a+b)-N}.$$

Aqui, novamente, se uma potência de dois for tomada para n, de tal forma que $N = 2n-1$, teremos:

$$\frac{x+1}{b+1} = \frac{y+1}{a+1} = \frac{n(a+b)}{ab-(n-1)(a+b)-2n+1}.$$

Em primeiro lugar, essa fração deve ser reduzida a um inteiro, assumindo, para isso, números primos apropriados para a e b; assim, pondo $n = 4$, teremos:

$$\frac{x+1}{b+1} = \frac{y+1}{a+1} = \frac{4(a+b)}{ab-3(a+b)-7}.$$

Pondo $b = 5$, obteremos:

$$\frac{x+1}{6} = \frac{y+1}{a+1} = \frac{4(a+5)}{2a-22} = \frac{2(a+5)}{a-11}.$$

Depois de testar sucessivamente vários valores para a, pomos $a = 13$, o que dá:

$$\frac{x+1}{6} = \frac{y+1}{14} = 18 \text{ e disto decorre que } x = 107 \text{ e } y = 251,$$

ambos primos. Desta forma, os números amigáveis gerados são $4 \cdot 13 \cdot 107$ e $4 \cdot 5 \cdot 251$. Em seguida, pondo $a = 17$ nas mesmas fórmulas, obtemos

$$\frac{x+1}{6} = \frac{y+1}{18} = \frac{2 \cdot 22}{6} \text{ e } x = 43,\ y = 131,$$

sendo, de novo, ambos primos. Os números amigáveis que surgem são $4 \cdot 17 \cdot 43$ e $4 \cdot 5 \cdot 131$. De fato, também podemos tomar, para n, além de potências de dois, outros números convenientes, como $n = 44$, para o qual $N = 84$; assim, $N:n = 21:11$ e disto decorre que:

$$\frac{x+1}{b+1} = \frac{y+1}{a+1} = \frac{11(a+b)}{ab-10(a+b)-21},$$

no qual, pondo $b = 17$ e $a = 43$, obtemos números primos para x e y.

§13. Também, podemos substituir, para a e b, o produto de dois, ou mais, números primos. Sejam, pois, p e q números primos. Ponhamos $a = cp$ e $b = dq$, de tal forma que os números amigáveis sejam $ncpx$ e $ndqy$;

visto que $A = Cp+C$ e $B = Dq+D$, teremos $Ab+Ba =$

$(Cd+Dc)pq+Cdq+Dcp$ e

$AB = CDpq+CDp+CDq+CD$.

Disto decorre que

$$\frac{x+1}{D(q+1)} = \frac{y+1}{C(p+1)} = \frac{n(cp+dq)}{(Cd+Dc)npq+Dcnp+Cdnq-CDNpq-CDNp-CDNq-CDN},$$

onde convém substituir para c e d números quaisquer, ou primos, ou compostos. Sejam, por exemplo, $c = 5$ e $d = 11$. Teremos $C = 6$, $D = 12$ e os números amigáveis $5npx$ e $11nqy$; assim, obteremos:

$$\frac{x+1}{12(q+1)} = \frac{y+1}{6(p+1)} = \frac{n(5p+11q)}{126npq+60np+66nq-72Npq-72Np-72Nq-72N},$$

ou seja,

$$\frac{x+1}{2(q+1)} = \frac{y+1}{p+1} = \frac{n(5p+11q)}{(21n-12N)pq-(12N-10n)p-(12N-11n)q-12N}.$$

Para que essa expressão não seja negativa, dado que $N > n$, é necessário que tenhamos $21n > 12N$, ou seja, $7n > 4N$. Primeiramente, portanto, seja $n = 2$, de tal forma que $N = 3$ e teremos[1]

$$\frac{x+1}{2(q+1)} = \frac{y+1}{p+1} = \frac{5p+11q}{3pq-8p-14q-18}, \text{ logo } 3p > 14 \text{ e } p > 5.$$

Seja $p = 7$. Teremos $\frac{x+1}{2(q+1)} = \frac{y+1}{8} = \frac{35+11q}{7q-74}$, de que surge um número integral, se $q = 61$, dando, de fato, $y = 15$, não primo. Mas, se pormos $n = 14$, de tal forma que $N = 24$, obteremos:

$$\frac{x+1}{2(q+1)} = \frac{y+1}{p+1} = \frac{7(5p+11q)}{(3p-67)q-74p-144}$$

e, fazendo $p = 23$, $$\frac{x+1}{q+1} = \frac{y+1}{12} = \frac{7(115+11q)}{q-923}$$

Deste modo, portanto, fazendo mais substituições, podemos achar mais números amigáveis.

§14. Apesar de que muito mais números amigáveis podem ser encontrados por este método do que pelo método

[1] Nota dos Trad.: Ver a Introdução.

usado por Descartes e por Schooten, todavia isto depende principalmente da sorte, pois geralmente muitas tentativas são feitas em vão, antes que surjam números primos para x e y. Abrirei, portanto, outro caminho, bastante diferente desse, de modo que a descoberta fortuita dos números primos não seja requerida. Esse caminho se deriva de uma propriedade dos números amigáveis, a saber, que cada um tem a mesma soma de divisores. De fato, é fácil, com o apoio da tabela anexa, encontrar tantos números quantos queira, para os quais a soma dos divisores seja a mesma. Sejam então v e u dois números do referido tipo, isto é, cada um tenha a mesma soma de divisores = V; logo, se também tivermos V = $v+u$, os números v e u serão amigáveis. Se, ao contrário, não tiverem esta propriedade, então muitas vezes será conveniente achar múltiplos deles, que satisfazem a propriedade. Sejam, então, av e au números amigáveis, de tal forma que as somas dos divisores de ambos são iguais a AV, sob a condição de que a seja primo com ambos os números v e u. Só falta, portanto, fazer com que AV = $av+au$, ou seja, $\frac{\mathrm{A}}{a} = \frac{v+u}{\mathrm{V}}$, e, a partir desta equação, um valor apropriado para a pode ser encontrado. Quando a fração $\frac{v+u}{\mathrm{V}}$ é reduzida à forma mais simples, é necessário que a seja divisível pelo denominador desta; isto é, se a fração $\frac{v+u}{\mathrm{V}}$ seja reduzida a $\frac{m}{n}$, pomos $a = nb$. Assim, teremos A = NB e $\frac{\mathrm{A}}{a} = \frac{\mathrm{NB}}{nb} = \frac{m}{n}$, de que decorre que $\frac{\mathrm{B}}{b} = \frac{m}{\mathrm{N}}$. Por sua vez, b será, de modo semelhante, divisível pelo denominador desta fração e, assim, a operação, da forma que acabamos de explicar, será sempre repetida, até a solução se tornar evidente, ou se concluir que seja impossível. Deve ser notado, de fato, que podemos tomar para a, não somente um múltiplo do número n, mas também qualquer potência deste e, assim, a investigação geralmente pode ser conduzida por diversos caminhos.

§15. Tomemos para v e u, então, dois números, dos quais a soma dos divisores seja a mesma, e, pondo

$$v = 71,\ u = 5\cdot 11, \quad \text{de tal forma que } \mathrm{V} = 72 = 2^3\cdot 3^2,$$

teremos que os números amigáveis serão $71a$ e $55a$. Teremos, portanto, $\frac{\mathrm{A}}{a} = \frac{v+u}{\mathrm{V}} = \frac{126}{72} = \frac{7}{4}$. Disto, fica claro que o número a deve ter o fator 4, ou seja 2^2, ou então 2 levado a uma potência mais alta. Seja, portanto,

$$a = 2^2 b, \text{ de tal forma que } \mathrm{A} = 7\mathrm{B} \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{A}}{a} = \frac{7\mathrm{B}}{4b} = \frac{7}{4} \quad \text{e, logo,}$$

$$\frac{\mathrm{B}}{b} = \frac{1}{1}.$$

Desta maneira, obtemos $b = 1$; por esta razão, $a = 4$ e os seguintes números amigáveis são gerados:

$$4 \cdot 71 = 284 \text{ e } 4 \cdot 55 = 220.$$

Nenhuma potência de 2 mais alta, porém, pode ser tomada como fator de a, pois, pondo

$$a = 8b, \quad \text{de tal forma que} \quad \mathrm{A} = 15\mathrm{B} \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{A}}{a} = \frac{15\mathrm{B}}{8b} = \frac{7}{4}, \quad \text{donde} \quad \frac{\mathrm{B}}{b} = \frac{14}{15},$$

a equação é impossível, porque nenhum número pode estar para a soma dos seus divisores como uma razão de maior desigualdade[2]. De modo semelhante, estipulando que

$$v = 5 \cdot 131 = 655,\ u = 17 \cdot 43 = 731, \quad \text{de tal forma que} \quad \mathrm{V} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11,$$

os números amigáveis serão $655a$ e $731a$; devemos também ter:

$$\frac{A}{a} = \frac{v+u}{V} = \frac{1386}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 11} = \frac{77}{4 \cdot 11} = \frac{7}{4},$$

de que obtemos, primeiramente, que $a = 4$ e, em consequência, achamos os seguintes números amigáveis:

[2] Nota dos Trad.: “razão de maior desigualdade” é uma razão em que o numerador é maior que o denominador.

$$4 \cdot 655 = 2620 \text{ e } 4 \cdot 731 = 2924.$$

Do mesmo modo, como os seguintes números têm a mesma soma de divisores:

$$v = 5 \cdot 251 \text{ e } u = 13 \cdot 107, \quad \text{de tal forma que} \quad \text{V} = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7,$$

os números amigáveis serão:

$$5 \cdot 251a = 1255a \quad \text{e} \quad 13 \cdot 107a = 1391a, \quad \text{de tal forma que}$$
$$\frac{\text{A}}{a} = \frac{2646}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 7} = \frac{7}{4};$$

disto decorre que, mais uma vez, $a = 4$ e, assim, os números amigáveis serão:

$$5020 \quad \text{e} \quad 5564.$$

§16. Nestes exemplos, a descoberta do número a nada tinha de dificuldade; tomemos então exemplos, em que a requer mais trabalho. Seja estipulado que

$$v = 827 \quad \text{e} \quad u = 5 \cdot 137, \quad \text{de ambos obtemos} \quad \text{V} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 23.$$

Achamos, portanto, o multiplicador comum a, tal que tenhamos $\frac{\mathrm{A}}{a} = \frac{v+u}{\mathrm{V}} = \frac{1512}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 23} = \frac{42}{23}$. Visto que 23 é fator do próprio a, pomos $a = 23b$ e teremos

$$\mathrm{A} = 2^3 \cdot 3\mathrm{B}, \quad \text{portanto} \quad \frac{\mathrm{A}}{a} = \frac{2^3 \cdot 3\mathrm{B}}{23b} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{23}, \quad \text{logo} \quad \frac{\mathrm{B}}{b} = \frac{7}{4}.$$

Disto decorre, como nos exemplos acima, que $b = 4$ e $a = 4 \cdot 23$; os números amigáveis, portanto, serão:

$$4 \cdot 23 \cdot 827 = 76084 \quad \text{e} \quad 4 \cdot 23 \cdot 5 \cdot 137 = 63020.$$

Então, como os números $17 \cdot 263$ e $43 \cdot 107$ têm a mesma soma de divisores $2^4 \cdot 3^3 \cdot 11$, pomos

$$v = 17 \cdot 263 = 4471 \quad \text{e} \quad u = 43 \cdot 107 = 4601, \quad \text{de tal forma que} \quad \mathrm{V} = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 11,$$

$$\text{e} \quad \frac{\mathrm{A}}{a} = \frac{9072}{2^4 \cdot 3^3 \cdot 11} = \frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 7}{2^4 \cdot 3^3 \cdot 11} = \frac{21}{11}.$$

Assim, pondo $\begin{matrix} a = 11b \\ \mathrm{A} = 12\mathrm{B} \end{matrix}$, teremos $\frac{\mathrm{A}}{a} = \frac{12\mathrm{B}}{11b} = \frac{21}{11}$ e $\frac{\mathrm{B}}{b} = \frac{7}{4}$;

logo, $b = 4$, $a = 4 \cdot 11 = 44$ e, assim, os números amigáveis serão:

$$4 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 263 = 196724 \quad \text{e} \quad 4 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 107 = 202444.$$

Acrescentemos outro exemplo; sejam

$$v = 5 \cdot 17 = 85,\ u = 107, \quad \text{de tal forma que} \quad V = 2^2 \cdot 3^3, \quad \text{logo}$$

$$\frac{\mathrm{A}}{a} = \frac{192}{2^2 \cdot 3^3} = \frac{16}{9}\ .$$

Pomos, portanto, $\begin{matrix} a = 3^2 b \\ \mathrm{A} = 13\mathrm{B} \end{matrix}$, de tal forma que $\frac{\mathrm{A}}{a} = \frac{13\mathrm{B}}{9b} = \frac{16}{9}$ e

$$\frac{\mathrm{B}}{b} = \frac{16}{13}.$$

Em seguida, fazemos $b = 13c$, de tal forma que B = 14C e $\frac{\mathrm{B}}{b} = \frac{14\mathrm{C}}{13c} = \frac{16}{13}$, logo $\frac{\mathrm{C}}{c} = \frac{8}{7}$.

Disto decorre que $c = 7$, $b = 7 \cdot 13$ e $a = 3^2 \cdot 7 \cdot 13$. Por esta razão, surgem os seguintes números amigáveis:

$$3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 85 = 69615 \quad \text{e} \quad 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 107 = 87633.$$

Se tivéssemos posto $a = 3^3 b$ e $\mathrm{A} = 2^3 \cdot 5\mathrm{B}$, teríamos obtido $\frac{\mathrm{B}}{b} = \frac{6}{5}$; disto decorreria que $b = 5$ e $a = 3^3 \cdot 5$ e, como a deve ser primo com ambos os números v e u, este valor, devido ao fator 5 que tem em comum com v, é inútil.

§17. Desenvolveremos agora um último exemplo, visto que nele ocorrem alguns artifícios notáveis, os quais podem ter utilidade na resolução de problemas semelhantes. Assumamos, então, os seguintes números, que têm a mesma soma de divisores, para v e u:

$$v = 5 \cdot 41 = 205 \quad \text{e} \quad u = 251, \quad \text{de tal forma que} \quad V = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Daí, surgem os seguintes números amigáveis:

$$205a \quad \text{e} \quad 251a, \quad \text{se tivermos} \quad \frac{A}{a} = \frac{456}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7} = \frac{38}{3 \cdot 7}.$$

Assim, o número a terá os divisores 3 e 7. Pomos, portanto,

$$\begin{matrix} a = 3b \\ A = 4B \end{matrix}, \quad \text{de tal forma que} \quad \frac{B}{b} = \frac{19}{2 \cdot 7};$$

Essa equação já é impossível, visto que 19 é menor do que a soma dos divisores do próprio $2 \cdot 7$, que é 24. Ainda mais, os múltiplos de $2 \cdot 7$ têm uma razão ainda menor para com as somas de seus divisores. Assim, pomos:

$$\begin{matrix} a = 3^2 b \\ A = 13B \end{matrix}, \quad \text{de tal forma que} \quad \frac{B}{b} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 19}{7 \cdot 13}$$

e, portanto, b terá os fatores 7 e 13. Agora pomos

$$\begin{matrix} b = 7c \\ \mathrm{B} = 8\mathrm{C} \end{matrix}, \quad \text{de tal forma que} \quad \frac{\mathrm{C}}{c} = \frac{3\cdot 19}{4\cdot 13};$$

novamente, essa equação é impossível, porque $3\cdot 19 <$ soma dos divisores do próprio[3] $4\cdot 13$. Por este motivo, ainda faremos a seguinte tentativa:

$$\begin{matrix} b = 7^2 c \\ \mathrm{B} = 3\cdot 19\mathrm{C} \end{matrix}, \quad \text{de tal forma que} \quad \frac{\mathrm{C}}{c} = \frac{14}{13}, \quad \text{de que decorre que } c = 13;$$

em consequência, $b = 7^2\cdot 13$ e $a = 3^2\cdot 7^2\cdot 13$. Logo, os seguintes números amigáveis surgirão desta tentativa:

$$3^2\cdot 7^2\cdot 13\cdot 205 = 1175265 \quad \text{e} \quad 3^2\cdot 7^2\cdot 13\cdot 251 = 1438983.$$

Quando, portanto, procedermos de acordo com estes preceitos, não será muito difícil resolver tanto esse problema sobre números amigáveis, quanto outros semelhantes.

[3] Nota dos Trad.: O texto original tem 4·19, que é evidentemente um erro de composição gráfica.

Segue uma tabela[4] que apresenta as somas dos divisores dos números primos inferiores a mil, bem como umas potências destes.

[4] Nota dos Trad.: A tabela não consta na publicação original.

edufrn
Editora da UFRN

Este livro foi projetado pela equipe
editorial da Editora da UFRN,
em setembro de 2015.

Arquivo para a História da Teoria dos Números e da Lógica é uma coleção de trabalhos originais e traduções de obras clássicas referentes à história das duas referidas áreas da matemática. Na sua totalidade, a coleção pretende apresentar recursos para a delineação do desenvolvimento histórico das duas mencionadas áreas, o esclarecimento das relações existentes entre ekas e a investigação de como essas duas áreas se inseriram nos contextos históricos, não somente da Matemática em geral, mas também nos contextos históricos das culturas gerais das quais faziam parte nos vários estágios do seu desenvolvimento.

Volumes do *Arquivo* já publicados:

- Os Primórdios da Teoria dos Números
- Uma Investigação das Leis do Pensamento
- Um Estudo Histórico-Epistemológico do Conceito de Número Negativo
- Um Estudo sobre as origens da Lógica Matemática
- Tratado do Triângulo Aritimético
- Tratado sobre Triângulos Retângulos em Números Inteiros
- A Teoria dos Números de Adrien-Marie Legendre
- Tratado sobre a Teoria dos Números em XVI Capítulos

Próximos Lançamentos:

- Investigação Sistemática e Propriedades dos Triângulos Retângulos em Números Inteiros

Associação Brasileira das Editoras Universitárias

9 788542 505245