Análisis del desarrollo del pensamiento aleatorio, a partir del concepto de probabilidad de eventos simples desde un enfoque Ontosemiótico en estudiantes de grado 5° de la institución educativa Sagrada Familia del municipio de Apia.

Alexander Muñoz Coral

Universidad Tecnológica de Pereira
Facultad de Ciencias Básicas Maestría en enseñanza de la Matemática
Pereira Colombia
2017

Análisis del desarrollo del pensamiento aleatorio, a partir del concepto de probabilidad de eventos simples desde un enfoque Ontosemiótico en estudiantes de grado 5° de la institución educativa Sagrada Familia del municipio de Apia.

Alexander Muñoz Coral

Trabajo de grado como requisito para optar al título de
Magister en la Enseñanza de la Matemática

Director:
José Gerardo Cardona Toro Ph.D

Universidad Tecnológica de Pereira
Facultad de Ciencias Básicas
Pereira Colombia
2017

Nota de aceptación:

Presidente del Jurado

Jurado 1

Jurado 2

Dedicatoria

A mi madre Libia, que es un ejemplo de constancia y dedicación.

A mis hijos Juan David, Manuela y Luisa Alejandra, quienes son motivo para cada día realizar con ánimo todas mis actividades.

Agradecimientos

A mi madre y mis hijos, por haberme apoyado de manera incondicional en los momentos que más lo necesité.

A la comunidad educativa, por brindarme todo el apoyo necesario y abrirme las puertas para realizar el trabajo con los estudiantes, para llevar a cabo la finalización de mi tesis.

A mi asesor de trabajo de grado José Gerardo Cardona Toro Ph.D por su paciencia, conocimiento, exigencia y humildad para guiarme en la realización de este trabajo.

A la gobernación de Risaralda y a la universidad Tecnológica de Pereira por brindarme esta oportunidad tan grande y especial.

Resumen

La investigación que se presenta en este trabajo está orientada a analizar el desarrollo del pensamiento aleatorio de los estudiantes de grado quinto de la I.E Sagrada Familia del municipio de Apia para determinar sus competencias a partir del concepto de probabilidad de eventos simples.

El marco teórico utilizado ha sido el Enfoque Ontosemiótico de la cognición matemática (EOS) propuesta por Godino y colaboradores.

La elección del tema viene determinada por los pocos estudios que se han realizado a nivel nacional y local sobre este tópico y la importancia de aportar sugerencias para el desarrollo de la probabilidad en los estudiantes de primaria en la institución educativa.

Para examinar las dificultades que presentan los estudiantes de grado quinto, se plantea aquí un estudio inicial de los conocimientos que poseen los estudiantes sobre probabilidad, para ello se elaboró un cuestionario con tres temáticas fuertes a trabajar: 1. Experimentos aleatorios: para determinar si los estudiantes reconocen cuando los sucesos son seguros, probables e imposibles a partir de situaciones de la vida diaria, 2. El azar y la vida cotidiana: para analizar si los estudiantes reconocen o no el grado de aleatoriedad de algunos juegos (“PIEDRA, PAPEL O TIJERA” y “LA PERSONA QUE SAQUE EL PALO MÁS CORTO PIERDE”), el concepto de suerte desde el punto de vista matemático y determinar si un juego es justo o no lo es, y 3. Cálculo de probabilidades en eventos sencillos, para analizar si saben hallar la probabilidad de un evento sencillo y lo representan matemáticamente. Finalmente se realiza un análisis detallado de los problemas del cuestionario y de las respuestas que dan de los estudiantes de grado quinto a los problemas propuestos.

Abstract

The research presented in this paper is aimed at analyzing the development of the random thinking of fifth grade students of the I.E. Sagrada Familia of the municipality of Apia to determine their competencies from the concept of probability of simple events.

The theoretical framework used has been the Ontosemiotic Approach to Mathematical Cognition (EOS) proposed by Godino et al.

The choice of topic is determined by the few studies that have been done at national and local level on this topic and the importance of providing suggestions for the development of probability in elementary students in the educational institution.

To examine the difficulties presented by fifth grade students, an initial study of students' knowledge of probability is presented here. For this purpose, a questionnaire was developed with three strong themes to work: 1. Randomized experiments: to determine if the Students recognize when events are safe, probable and impossible from daily life situations. 2. Chance and everyday life: to analyze whether or not students recognize the degree of randomness of some games ("STONE, PAPER OR SCISSORS "and" THE PERSON WHO LEFT THE SHORTEST BAT PAL "), the concept of luck from the mathematical point of view and determine if a game is fair or not, and 3. Calculation of probabilities in simple events, to analyze If they can find the probability of a simple event and represent it mathematically. Finally, a detailed analysis of the problems of the questionnaire and the answers given by fifth grade students to the problems proposed is carried out.

Tabla de Contenidos

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

Introducción

Esta propuesta de investigación, tiene como objetivo Analizar el Desarrollo del pensamiento aleatorio de los estudiantes de grado quinto de la institución educativa Sagrada Familia de Apia para determinar sus competencias matemáticas a partir del concepto de probabilidad de eventos simples desde un enfoque Ontosemiótico.

El trabajo está estructurado así, en el primer capítulo se inicia con el título de la investigación, seguida del planteamiento del problema resaltando su importancia se encuentra la pregunta de investigación y por último se describen con detalle el objetivo general y los objetivos específicos y la justificación, en la cual se hace referencia a los factores de utilidad, pertinencia y necesidad de llevar a cabo una propuesta investigativa de esta condición, buscando esencialmente fomentar su desarrollo y las prácticas que en ella se proponen.

En el capítulo dos se encuentra el marco de referencia donde se aprecian los antecedentes en el que se hace la revisión de diferentes investigaciones que buscan dar respuesta a las siguientes cuestiones: ¿Qué se ha investigado sobre el pensamiento aleatorio y probabilidad? ¿Qué vacíos existen? ¿Qué logros se han conseguido? ¿Desde qué dimensiones? Y ¿Qué aspectos faltan por abordar?

En el marco teórico sobre el que se fundamenta esta investigación, se hace un breve resumen de la historia de la probabilidad y de la comprensión de la probabilidad en niños y adolescentes, la probabilidad como objeto matemático y se analizan algunos estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática en el ámbito internacional y nacional.

En el capítulo tres se encuentra la metodología empleada, en la cual se habla que la muestra estaba constituida por 47 estudiantes de grado quinto de la I.E Sagrada Familia y el cuestionario incluía 24 problemas distribuidos en tres temáticas bien fuertes sobre probabilidad.

Las investigaciones sobre el conocimiento de la probabilidad eran y son escasas, por lo que se esperaba contribuir con este estudio a dar información sobre el conocimiento que presentan los estudiantes en esta área de la matemática y a partir de ello dar algunas sugerencias para la enseñanza de la probabilidad a los profesores sobre estos temas.

Se continua en el capítulo cuatro con el análisis de resultados donde se hace un análisis de cada uno de los ítems del cuestionario aplicado a los estudiantes, el análisis y la discusión de los resultados obtenidos por los estudiantes de grado quinto de la I.E Sagrada Familia en cada uno de los problemas propuestos en el cuestionario, además de las conclusiones generales del análisis de las respuestas dadas por los estudiantes a las preguntas planteadas en el mismo, además que se hace un análisis de la puntuación del cuestionario y un análisis del índice de dificultad de los problemas planteados allí, una vez expuestos los resultados de los estudiantes, se finaliza esta investigación con la presentación de las conclusiones obtenidas, además se indican algunas recomendaciones, limitaciones del estudio y posibles líneas para continuar y completar esta investigación todo ello en el capítulo cinco, terminando con las referencias bibliográficas.

Capítulo 1

1.1 Problema de investigación:

En la concepción aquí estructurada acerca del problema de aprendizaje que se presenta en los estudiantes de la Institución educativa Sagrada Familia del municipio de Apia, relacionado con la probabilidad como área de la matemática, se hace referencia en primera medida a la ubicación y condición socioeconómica de la población, posteriormente se hace referencia a la dificultad que presentan los estudiantes para la apropiación de los conceptos matemáticos, luego se habla de un cuestionario aplicado a 20 estudiantes de grado quinto referente a algunos problemas de probabilidad, con el análisis de las respuestas, también se habla tanto de lo referido a los contenidos de los textos de aprendizaje como a los referentes de calidad nacional para la educación donde se sustenta la enseñanza de la probabilidad, se mencionan los resultados obtenidos por los estudiantes en las pruebas saber 2014 y finalmente se habla de la poca formación en el área de matemáticas que poseen los docentes.

La institución educativa Sagrada Familia está ubicada en la zona urbana del municipio de Apia, departamento de Risaralda, se caracteriza porque la mayoría de sus habitantes se dedican a la agricultura, especialmente al cultivo del café y el plátano, en su mayoría los estudiantes son de estratos 1 y 2 con unos cuantos de estrato 3, los padres de los estudiantes poseen diferentes niveles académicos, en su mayoría son de un nivel académico medio, lo cual no permite el apoyo suficiente a los estudiantes en sus hogares para desarrollar sus tareas y trabajos escolares. La institución educativa cuenta con estudiantes de diferentes niveles desde el preescolar pasando por la básica y terminando en la media.

Por otro lado Vásquez y Cubides (2011) citando a Vinent, hacen referencia al hecho de la dificultad que se presenta en los niños para la comprensión de los conceptos matemáticos, debido a la abstracción que estos presentan, fenómeno que se presenta en nuestro contexto particular dado el interés por la enseñanza de asuntos de nivel concreto, a la par con el hecho de que muchos docentes no motivan en los estudiantes maneras de pensar más profundas y avanzadas que le permitan pasar a lo simbólico y lo lógico.

Durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos, es evidente la presencia de errores; los docentes de la Institución educativa Sagrada Familia y desde mi propia experiencia; a través del contacto con los estudiantes, han podido evidenciar y reconocer éstas y muchas otras más debilidades en el desempeño y rendimiento académico de los niños y niñas y en el aprendizaje relacionado con la probabilidad se hace aún más evidente, pues se nota como a los estudiantes les cuesta apropiar los conceptos relacionados con esta área, en el caso que los docentes alcancen a abordarlos en el año y en el peor de los casos ni siquiera los trabajan en el aula.

En esta misma dirección se les interrogó a 20 estudiantes de grado quinto a través de una prueba tipo saber con única respuesta, con preguntas como ¿cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado caiga 5?, ¿cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda al aire caiga cara? ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados caiga 8?, ¿de cuántas maneras posibles se pueden relacionar tres bebidas diferentes con tres frutas diferentes? La mayoría respondió erróneamente a estas preguntas, y los que respondieron a algunas de forma acertada se les preguntó el porqué de sus respuestas a lo cual no supieron responder.

Por lo que se procedió a preguntarles de manera grupal si conocían ¿qué es probabilidad? A lo que ellos respondieron no saber, no conocer ni siquiera la palabra o que nunca la habían escuchado, otros dieron respuestas como algo que se puede aprobar, también ¿qué es azar? Esta palabra muchos de los estudiantes la relacionaron con una comida, juegos donde apuestan plata, cuando tiran algo al aire, otros manifestaron no saber. Otra pregunta que se les hizo fue ¿Qué es aleatorio?, que tiene alas, nunca la han llegado a escuchar o no saben, ¿qué es combinatoria? Combinar algo, no saben, no la han escuchado, ¿qué juegos de azar conocen? la mayoría de los estudiantes dijeron, los dados, el parqués, el dominó, cartas, otros estudiantes manifestaron no conocerlos.

Con base en lo anterior se puede dar cuenta que los estudiantes desconocen las palabras y los conceptos relacionados con la probabilidad, aunque reconocen cuales son los juegos de azar no tienen conciencia de cuál es su esencia y las reglas que lo rigen, razón por la cual no son capaces de resolver diferentes tipos de problemas y mucho menos de argumentar el ¿por qué? de las respuestas que dan.

En este mismo orden de ideas se puede evidenciar que los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática siempre han sido son y serán un reto para los docentes y para los mismos estudiantes, por la misma concepción social que se tiene de ella y por la complejidad con que en algunas instituciones y centros educativos se trabaja, además se debe tener en cuenta que en matemáticas hay temas más complejos que otros y uno de ellos es el del concepto de probabilidad, en el cual los estudiantes presentan dificultad para asimilarlo, provocando no solo errores en el concepto mismo, en la dificultad para desarrollar las competencias de interpretación, argumentación y proposición, sino también cuando se ven enfrentados a la resolución de ejercicios y situaciones problémicas que involucran dichos temas.

Martínez y Penalva (2006), citando a Cobo y Batanero, manifiestan que algunas de las dificultades que los estudiantes encuentran en el aprendizaje de un concepto matemático dependen de la enseñanza recibida y ésta está condicionada, en gran medida, por la forma en la que los libros de texto presentan los conceptos.

Así mismo en los lineamientos curriculares de Matemáticas MEN (1998) se habla de la importancia de seleccionar los textos escolares y los materiales didácticos que son determinantes en la calidad y pertinencia de las representaciones y por ende de la comunicación. Lo que garantizaría en gran medida un buen proceso de enseñanza aprendizaje.

En muchos casos los docentes toman un texto guía y trabajan a partir de él los diferentes conceptos matemáticos que este propone sin hacer un análisis previo del contenido didáctico inmerso en él, la importancia epistemológica y lo cognitivo, ni de su pertinencia para trabajarlo en un grado escolar determinado, lo utilizan sin hacer ningún tipo de trasposición didáctica, además que no hacen un uso de otras herramientas y estrategias que sirvan de apoyo para mejorar la enseñanza aprendizaje de los diferentes conceptos, por otro lado si se tiene en cuenta que los conceptos de probabilidad en la mayoría de los textos están propuestos al final del mismo, esto da una idea por la cual en un porcentaje muy alto los docentes no alcanzan a abordar estos conceptos o los suelen omitir por falta de tiempo.

Además de ello, muchos libros de texto y materiales de apoyo utilizados por los docentes son insuficientes como soporte. Esto se da ya que dan una visión muy somera de los diferentes conceptos utilizados en probabilidad es decir solo se quedan en definiciones básicas. En otros casos las aplicaciones se limitan a juegos de azar, o no se basan en datos tomados de aplicaciones reales, y también aparecen en ocasiones definiciones incorrectas o incompletas de los conceptos Cardeñoso, Azcárate y Serradó (2005).

En el país el ministerio de educación nacional (MEN) que es la entidad que regula lo relacionado con la educación, define las áreas y los contenidos específicos de las mismas, creó en el 2006 los estándares básicos de educación, en ellos están los contenidos y conceptos mínimos, por grupos de escolaridad que cada institución educativa debe brindar a sus estudiantes, lo cual garantiza las condiciones de igualdad y de enseñanza en todo el territorio nacional. En uno de los estándares básicos de competencias y más específicamente en el pensamiento aleatorio y sistemas de datos; habla de lo mínimo que los estudiantes deben aprender en la escuela para el conjunto de grados de cuarto a quinto con relación a la probabilidad, algunos de ellos son:

- Conjeturo y pongo a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.
- Describo la manera como parecen distribuirse los distintos datos de un conjunto de ellos y la comparo con la manera como se distribuyen en otros conjuntos de datos.
- Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos provenientes de observaciones, consultas y experimentos.

Otro referente a tener en cuenta son los recientes derechos básicos de aprendizaje (DBA), en los cuales se encuentra en los de grado quinto que los estudiantes básicamente:

> Comprende la probabilidad de obtener ciertos resultados en situaciones sencillas. Por ejemplo: Tiene una bolsa con tres bolas verdes y una blanca. Al meter la mano en la bolsa y sacar una sola bola, sin mirar, ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola verde? ¿Cuántas bolas blancas habría que meter para que fuera igualmente posible sacar una bola verde o una bola blanca?

Estos referentes dan un camino e indican que es importante y se debe desarrollar en los estudiantes de básica primaria el pensamiento aleatorio y que implícitamente para lograrlo se debe trabajar la probabilidad que hace parte esencial de él y más aún si éste se desarrolla desde los inicios de la escolaridad.

Otro aspecto a tener en cuenta, tiene que ver con los resultados de las pruebas Saber aplicadas por el instituto colombiano para el fomento de la educación superior ICFES en el año

2014. En el área de matemáticas en tercer grado (aquí se hará referencia a las competencias que los estudiantes según el ICFES deben tener en el pensamiento aleatorio) el 19 % de los estudiantes no supera el nivel insuficiente, es decir el estudiante ubicado aquí no supera las preguntas de menor complejidad de la prueba, el 23 % de los estudiantes están en el nivel mínimo, o sea, el estudiante identifica la frecuencia y moda en un conjunto de datos; interpreta información sencilla en diagramas de barras y pictogramas, el 31 % de los estudiantes se ubicaron en el nivel satisfactorio, aquí los estudiantes además de alcanzar lo definido en el nivel precedente, reconocen y determinan frecuencias en un conjunto de datos e interpretan datos a partir de dos formas de representación, establecen la posibilidad de la ocurrencia de un evento simple; clasifican, ordenan y describen características de un conjunto de datos y un 27% alcanzó el nivel avanzado donde los estudiantes además de lograr lo definido en los dos niveles precedentes, organizan, clasifican e interpretan información estadística usando diferentes formas de representación de datos.

En el caso del grado quinto los resultados obtenidos en la prueba para el 2014; fueron, el 62% de los estudiantes están en el nivel insuficiente, en este nivel no alcanzan a desarrollar ninguno de los problemas de menor complejidad, el 23 % alcanza el nivel mínimo, es decir, organizar y clasificar información estadística. En estos mismos resultados de la prueba Saber del 2014, el 10 % de los estudiantes alcanzó el nivel satisfactorio, estos estudiantes demuestran competencias tales como, las que además de hacer lo definido para el nivel mínimo, saben, entre otros aspectos, describir algunas trasformaciones en el plano cartesiano y estimar la probabilidad de un evento para resolver situaciones en contextos de juegos o en acontecimientos cotidianos. Por otra parte, dichos resultados muestran que solo el 5 %, de los estudiantes de quinto grado, alcanzaron los desempeños establecidos para el nivel avanzado es decir que además de lograr lo definido en los dos niveles precedentes, el estudiante promedio de este nivel construye y describe secuencias numéricas y geométricas y organiza, clasifica e interpreta información estadística usando diferentes formas de representación de datos.

En general, y de acuerdo a la comparación entre los resultados alcanzados por los estudiantes de tercero y quinto grado en las pruebas Saber realizadas por el ICFES en el 2014 en matemáticas respectivamente muestra una situación preocupante y retadora, pues únicamente una proporción muy baja de los estudiantes de grado quinto logra superar los desempeños esperados es decir se ubicaron en el nivel satisfactorio que es el ideal y por consiguiente la mayoría de ellos se ubicó en los niveles insuficiente y mínimo y un porcentaje más bajo se ubicó en el nivel avanzado. Lo que hace necesario una intervención en este sentido.

De otro lado, Vásquez y Cubides (2011) hacen referencia a De la Paz R, Guillermo, el cual manifiesta que muchos de los docentes de matemáticas, se han formado en universidades en donde la interacción con otras disciplinas, como por ejemplo la física, es muy poca. En su estudio también cita que se debe tener en cuenta que en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, se encuentra un muy arraigado rechazo y temor a ellas, el cual se ha dado por mucho tiempo y se ha implantado en la idiosincrasia de la sociedad en general, el cual se ha transmitido de generación en generación (adultos, jóvenes y niños).

Se debe tener en cuenta que la formación que tienen los docentes de la Institución educativa Sagrada Familia, es en áreas diferentes a las matemáticas, estos docentes son formados en básica primaria, ello constituye un factor importante para el buen desarrollo de los conceptos matemáticos en los estudiantes en estos niveles.

Batanero (2000) indica que le pedimos a los docentes que impartan un nuevo contenido en el cual no han tenido una formación académica, cognitiva ni didáctica previa, además que las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad son escasas y desde hace muy poco estamos comenzando a conocer las problemáticas de los estudiantes en dichos conceptos.

Con base en todo lo dicho anteriormente se hace necesario implementar estrategias didácticas por parte de los docentes las cuales busquen mejorar el nivel de desempeño de los estudiantes en el tema de la probabilidad, en el grado quinto.

Cabe entonces preguntarse:

¿Cómo analizar el desarrollo del pensamiento aleatorio de los estudiantes de grado quinto de la institución educativa Sagrada Familia de Apia a partir del concepto de probabilidad de eventos simples desde un enfoque Ontosemiótico?

1.2 Pregunta de investigación:

¿Cómo analizar el desarrollo del pensamiento aleatorio de los estudiantes de grado quinto de la institución educativa Sagrada Familia de Apia a partir del concepto de probabilidad de eventos simples desde un enfoque Ontosemiótico?

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general:

Analizar el Desarrollo del pensamiento aleatorio de los estudiantes de grado quinto de la institución educativa Sagrada Familia de Apia para determinar sus competencias matemáticas a partir del concepto de probabilidad de eventos simples desde un enfoque Ontosemiótico.

1.3.2 Objetivos específicos

- Realizar lecturas que permitan ampliar la visión teórica del problema de investigación planteado.
- Indagar las debilidades y fortalezas en el aprendizaje de los estudiantes del grado quinto, respecto al concepto de probabilidad.
- Evaluar el conocimiento común del contenido de la probabilidad que tienen los estudiantes de grado quinto.
- Analizar e interpretar los datos obtenidos y los aprendizajes de los estudiantes.

1.4 Justificación

En este apartado se hace referencia a los factores de utilidad, pertinencia y necesidad de llevar a cabo una propuesta investigativa de esta condición, buscando esencialmente fomentar su desarrollo y las prácticas que en ella se proponen, inicialmente se hace referencia a la importancia de la enseñanza de las matemáticas en diferentes campos y el ¿por qué? de su enseñanza, la importancia que tiene el desarrollar el pensamiento aleatorio en los estudiantes desde el concepto de probabilidad, su estrecha relación desde los primeros años de vida a través de los juegos como los dados, el parqués, el dominó y las cartas, también se mencionan los referentes de calidad nacional donde se le da la importancia al pensamiento aleatorio para finalmente recalcar la relación de este pensamiento con los demás pensamientos propuestos por el MEN.

Son diversas las referencias que a través de la investigación se hacen en cuanto a la importancia del estudio de la matemática y su influencia no solo en las estructuras que requieren la elaboración de propuestas de orden matemático o la solución de problemas, sino también el aporte para el desarrollo y desenvolvimiento en otras dimensiones.

En este sentido Delors (1997) afirma que “la educación constituye un instrumento indispensable para que la humanidad pueda progresar hacia los ideales de paz, libertad y justicia social”. En esta misma línea es importante reconocer que un ser educado, es un ser que propende por mejorar cada día y por aportar todos sus conocimientos y saberes para el bien de los demás, y es desde este matiz que la ley general de educación (1994), afirma que la educación es:

> *“un proceso de formación permanente, personal, cultural y social que se fundamenta en una concepción integral de la persona humana, de su dignidad, de sus derechos y de sus deberes*”

Además Batanero y Godino (2001) dicen que las razones por las que un tema cualquiera debe ser incluido en el currículo de la educación obligatoria pueden sintetizarse en las siguientes:

Ser una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos.

Ser útil para la vida posterior, bien para el trabajo o para el tiempo libre.

Ayudar al desarrollo personal.

Ayudar a comprender los restantes temas del currículo, tanto de la educación obligatoria como posterior.

Constituir una base para una especialización posterior en el mismo tema u otros relacionados.

Estas razones mencionadas por los autores son características del proceso probalístico, además la probabilidad por todas las aplicaciones que tiene da la posibilidad de mostrar a los estudiantes la manera de matematizar y de resolver problemas reales de su diario vivir, planteando a los estudiantes problemas concretos y la realización de experimentos reales o simulados.

En los estándares básicos de competencias (2006) se habla del ¿por qué? de la educación matemática, donde se dice que:

> En Colombia, desde los inicios de la República hasta la década de los setenta, la contribución de la formación matemática a los fines generales de la educación se argumentó principalmente con base en las dos últimas razones de carácter personal y científico-técnico, a saber: por su relación con el desarrollo de las capacidades de razonamiento lógico, por el ejercicio de la abstracción, el rigor y la precisión, y por su aporte al desarrollo de la ciencia y la tecnología en el país. Estos fines estuvieron fuertemente condicionados por una visión de la naturaleza de las matemáticas como cuerpo estable e infalible de verdades absolutas, lo que condujo a suponer que sólo se requería estudiar, ejercitar y recordar un listado más o menos largo de contenidos matemáticos –hechos, definiciones, propiedades de objetos matemáticos, axiomas, teoremas y procedimientos algorítmicos– para formar a todos los estudiantes en el razonamiento lógico y en los conocimientos matemáticos (p. 46).

Sin embargo con el transcurrir de los años estos argumentos se fueron quedando sin fuerza debido a que para el desarrollo de la ciencia y la tecnología no solo se necesitaba de las matemáticas sino también de las otras áreas del conocimiento básico. Además resultaron tres factores prioritarios como: la necesidad de una educación básica de calidad para todos los ciudadanos, el valor social ampliado de la formación matemática y el papel de las matemáticas en la consolidación de los valores democráticos.

Por ello se hace necesario pasar de una enseñanza que solo busca alcanzar objetivos específicos relacionados con los contenidos del área y que sean aprendidos por el estudiante de forma memorística a una enseñanza que se caracterice por desarrollar en los estudiantes competencias matemáticas, científicas, tecnológicas, lingüísticas y ciudadanas.

Es decir que las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos MEN (2006 p. 46).

Los lineamientos curriculares para el área de matemáticas (1998) por su parte señalan que:

> *“ la educación matemática debe conducir al estudiante a la apropiación de los elementos de su cultura y a la construcción de significados socialmente compartidos, desde luego sin dejar de lado los elementos de la cultura matemática universal construidos por el hombre a través de la historia durante los últimos seis mil años.(p. 15)*

Además estos también señalan que a la hora de abordar el currículo de matemáticas en los Proyectos Educativos Institucionales, se hace necesario reflexionar sobre las siguientes preguntas:

¿Qué son las matemáticas?

¿En qué consiste la actividad matemática en la escuela?

¿Para qué y cómo se enseñan las matemáticas?

¿Qué relación se establece entre las matemáticas y la cultura?

¿Cómo se puede organizar el currículo de matemáticas?

¿Qué énfasis es necesario hacer?

¿Qué principios, estrategias y criterios orientarían la evaluación del desempeño matemático de los alumnos?

Todas ellas conducentes a elaborar un plan de estudios bien cimentado y estructurado con el cual lo que se lleve al aula de clase sea suficiente y eficaz para un buen proceso que permita un adecuado aprendizaje de los estudiantes.

Fischbein citado por Batanero (2000) hace énfasis en el carácter exclusivamente determinista que el currículo de matemáticas ha tenido hasta hace unos años, y la necesidad de mostrar al alumno una imagen más equilibrada de la realidad: "En el mundo contemporáneo, la educación científica no puede reducirse a una interpretación unívoca y determinista de los sucesos. Una cultura científica eficiente reclama una educación en el pensamiento estadístico y probabilístico".

En este mismo sentido por el carácter no determinista de la probabilidad se hace necesario que su enseñanza se aborde en contextos significativos, en donde la presencia de problemas abiertos con cierta carga de indeterminación permitan exponer argumentos estadísticos, encontrar diferentes interpretaciones y tomar decisiones. “Explorar e interpretar los datos, relacionarlos con otros, conjeturar, buscar configuraciones cualitativas, tendencias, oscilaciones, tipos de crecimiento, buscar correlaciones, distinguir correlación de causalidad, calcular correlaciones y su significación, hacer inferencias cualitativas, diseños, pruebas de hipótesis, reinterpretar los datos, criticarlos, leer entre líneas, hacer simulaciones, saber que hay riesgos en las decisiones basadas en inferencias son logros importantes en el aprendizaje de la estadística”. MEN (1998, p.26).

Con estos referentes es importante mencionar que un ejercicio de la envergadura que aquí se propone, podrá, desde el fortalecimiento del análisis y procedimientos matemáticos como los que se llevan a cabo en la probabilidad, potenciar en el estudiante las competencias necesarias para vivir en sociedad, una matemática aplicada a la cultura y que incida de manera determinante en la vida social, cultural y política de los estudiantes mismos, permitiéndoles a la vez comportarse como seres ejemplares, que a partir de su formación matemática, como son los procesos lógicos, estructuras y pensamientos, aporten de manera positiva al desarrollo social y económico del país, incluso porque a partir de las matemáticas son formados en valores democráticos, ejerciendo una ciudadanía critica, lo cual redunde en un progreso en todos los campos, tecnológicos y científicos que permitan el desarrollo económico del país.

Las condiciones propias de este trabajo de investigación permiten el establecimiento de nuevas aperturas en el mundo de las matemáticas dado que se generan procesos de integración de diversas maneras y estrategias en el desarrollo de procesos para su enseñanza, no quedándose en tácticas monolineales y tradicionales sino que se fortalecen procesos dinámicos, es en este sentido que se podrá combinar la educación y el trabajo reconociendo los aportes de la educación al igual que los conocimientos, habilidades y destrezas adquiridos fuera de las aulas; se trata de que se establezca un equilibrio entre los elementos teóricos que se manejan y la solución de problemas específicos.

Por otro lado si tenemos en cuenta que el estudio de las nociones probabilísticas permiten analizar por ejemplo algo tan cotidiano como el pronóstico del tiempo, en el que tenemos necesidad de realizar predicciones o tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, otros ejemplos sobre resultados de elecciones, esperanza de vida, accidentes, etc., dan la posibilidad de aterrizar a los estudiantes en contextos sobre los cuales ellos pueden apreciar las características de los fenómenos para los que son pertinentes los modelos y nociones probabilísticas, es decir, los fenómenos aleatorios, lo que va a permitir mostrar que la probabilidad se puede aplicar fácilmente ya que no requiere de técnicas matemáticas complicadas demostrando así la importancia y pertinencia de realizar un estudio sobre el análisis del desarrollo del pensamiento aleatorio en los estudiantes el cual les permita interpretar el mundo que los rodea y desde sus experiencias cotidianas.

La posibilidad que tienen los estudiantes de poder hacer matemática desde las experiencias cotidianas va a generar situaciones de interacción y reconocimiento de lo propio, los cuales por su parte van a permitir espacios pertinentes para indagar sobre el mejoramiento del contexto y poder con ello generar maneras de vivir más propicias y acordes con las necesidades de los entornos particulares en donde se desenvuelven los niños sujeto de la investigación. Así mismo la confrontación con el diario vivir y sus contextos va a motivar la interpretación de lo que sucede en su mundo particular, la búsqueda de patrones y a promover cada vez, con mayor fuerza, la investigación hacia las causas y efectos de sus experiencias y modos de ser y actuar en el mundo.

La probabilidad proporciona un modo de medir la incertidumbre, por este motivo los modelos probabilísticos son el fundamento de la mayor parte de la teoría estadística lo que implica que se debe conocer muy bien los conceptos y teorías probabilísticas para la comprensión adecuada de los métodos estadísticos que son indispensables en diferentes campos de la vida como son los campos científico, profesional y social.

Afirmando lo anterior, se debe tener en cuenta que la enseñanza de la probabilidad es importante en el desarrollo social y académico del estudiante ya que se constituye en base fundamental para su diario vivir y poder entender mucho mejor su entorno.

Por otro lado Godino, Batanero y Cañizares, en su texto Azar y Probabilidad (p.12) manifiestan que la enseñanza y los adultos mismos siempre quieren mostrar a los niños que para cada pregunta planteada por ellos siempre existe una sola respuesta sencilla y clara, que solo es verdadero o falso y no hay más posibilidades, esto no está bien ya que los problemas con que se encontraran a lo largo de su vida van a ser de diferentes matices unos más complicados que otros, es así como parece importante que durante los primeros años de escolaridad se enseñe a los niños el carácter específico de la lógica probabilística, la forma de distinguir grados de incertidumbre y que se le enseñe a comparar sus predicciones y extrapolaciones particulares con lo que realmente sucede, en una palabra que se les enseñe a ser dueños de su propia incertidumbre.

Continúan diciendo los autores que a lo planteado anteriormente, se puede preguntar ¿qué niño de estas edades no practica juegos de azar en casa o con otros compañeros?, los juegos como el parqués, las cartas, el dominó, etc., hacen parte desde los primeros años de vida del niño, es decir ellos están en constante contacto y familiarizados con este tipo de juegos, por eso es importante y conveniente utilizarlos con fines educativos ya que a partir de este uso el niño va a adquirir un aprendizaje más motivante, significativo y perdurable. Por ejemplo, incluso un alumno de preescolar, lanzando una moneda al aire (o algún otro objeto) puede contar el número de veces que resulta cara o sello, y esta actividad lo va a acercar tanto al pensamiento numérico o a los primeros conceptos de número, como al mismo tiempo que el niño toma contacto con un experimento aleatorio y por ende al mismo pensamiento.

Otra razón de tipo social, para realizar esta investigación de desarrollar el pensamiento aleatorio a partir de probabilidad en los niños es el hecho de concienciarlos de la naturaleza probabilística que tienen los distintos juegos de azar (loterías, máquinas "tragamonedas", bingos, chances, etc.) los cuales constituyen grandes negocios para sus dueños, pues es una manera fácil de lucrarse y de estafar al ciudadano desprevenido y poco formado en la parte matemática el cual al hacer un uso desproporcionado y sin ninguna medida, puede pasar de una mera actividad lúdica, a una manera fácil y riesgosa de perder su dinero.

En este mismo orden de ideas en los lineamientos curriculares de matemáticas se encuentra que:

> el aprendizaje de las matemáticas debe posibilitar al alumno la aplicación de sus conocimientos fuera del ámbito escolar, donde debe tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas, exponer sus opiniones y ser receptivo a las de los demás. Es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los alumnos, así como presentarlos y enseñarlos en un contexto de situaciones problemáticas y de intercambio de puntos de vista MEN (1998 p. 18).

Es decir hacer unas matemáticas que los estudiantes realmente vean aplicables a su diario vivir y su transcurrir día a día y que les sea útil en todos y cada uno de los contextos donde se encuentre y se desenvuelva.

Puntualmente en lo que tiene que ver con nuevas herramientas para el estudio de áreas como la probabilidad un factor de acierto preponderante es el fortalecer la enseñanza aprendizaje para mejorar los resultados de las pruebas externas ya que en estas hay un buen número de preguntas que se relacionan con esta área y los resultados obtenidos no han sido los más alentadores.

Además de ello se dice “que los sistemas analíticos probabilísticos y los métodos estadísticos desarrollados durante los siglos XIX y XX se han refinado y potenciado en los últimos decenios con los avances de la computación electrónica y, por ello, hoy día ya no es tan importante para los estudiantes el recuerdo de las fórmulas y la habilidad para calcular sus valores, como sí lo es el desarrollo del pensamiento aleatorio, que les permitirá interpretar, analizar y utilizar los resultados que se publiquen en periódicos y revistas, que se presenten en la televisión o que aparezcan en pantalla o en hojas impresas como productos de los distintos programas de análisis de datos”. MEN (2006 p. 65)

Es decir interesa que los estudiantes con las herramientas aportadas y el desarrollo de sus competencias intenten predecir el curso de los acontecimientos respectivos y que a partir de sus análisis y conjeturas puedan tomar las mejores decisiones posibles ante la imposibilidad de saber con certeza lo que va a pasar.

De igual manera la probabilidad es un área que se ha venido enseñando de forma aislada de los demás pensamientos, lo que ha provocado que se permanezca en lo básico, y en muchos casos ni se enseña a los estudiantes, coartándose la posibilidad de interacción interdisciplinar enriqueciendo la asunción de nuevos y cada vez más complejos conceptos necesarios para la adopción de un pensamiento crítico que permita una verdadera comprensión de la realidad.

Creo que las razones expuestas son suficientes para concluir que es preciso realizar un análisis del desarrollo del pensamiento aleatorio en los estudiantes de grado quinto a partir del concepto de probabilidad, además las anteriores consideraciones también justifican el interés de esta investigación, pues la evaluación de los conocimientos y dificultades de los estudiantes es el primer paso para diseñar acciones didácticas encaminadas a superarlos Mayen (2009).

Capítulo 2

Marco de referencia

2.1 Antecedentes

En este apartado se hace la revisión de diferentes investigaciones que buscan dar respuesta a las siguientes cuestiones: ¿Qué se ha investigado sobre el pensamiento aleatorio? ¿Qué vacíos existen? ¿Qué logros se han conseguido? ¿Desde qué dimensiones? Y ¿Qué aspectos faltan por abordar?

Para iniciar con este apartado se hace referencia al trabajo de Carmen Batanero y Juan D. Godino, (2001), del Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada. Un material que sirve de complemento al trabajo desarrollado en la asignatura de libre configuración "Análisis de datos y su didáctica", ofrecida por el Departamento de Didáctica de la matemática en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, y tiene tres enfoques:

- Las aplicaciones de la estadística, que es hoy día un instrumento metodológico básico tanto en la investigación experimental, como en el mundo empresarial, político y profesional;
- El uso de ordenadores, que en la actualidad son un recurso imprescindible en el análisis de datos.
- El análisis didáctico de los conceptos y técnicas estadísticas.

Este texto permite trabajar de manera clara, muy fácil y ejemplificar los diferentes conceptos de la probabilidad y la estadística. En este texto los autores hacen referencia respecto en uno de los temas sobre la introducción a la probabilidad, desde experimentos y sucesos aleatorios, Estimación de probabilidades a partir de las frecuencias relativas, pasando por la distribución de probabilidades de una variable aleatoria discreta hasta llegar a Conceptos de probabilidad y Desarrollo psicológico de la intuición probabilística en el niño.

En esta línea se encuentra el trabajo de Rivas, Godino, Arteaga y Estepa (2013), en el cual se describen los resultados de un proceso formativo de futuros maestros sobre el tema de estadística y probabilidad desarrollado mediante una metodología didáctica basada en el uso de proyectos de análisis de datos. En el cual concluyen que hay dificultades conceptuales y procedimentales que reclaman una mayor atención por parte del profesor en los momentos de institucionalización y ejercitación de los conocimientos.

Dentro de los diferentes textos que hacen parte del estado del arte se debe citar a la Dra. Carmen Batanero y su texto didáctica de la estadística donde incluye parte del material que a lo largo de doce años ha venido elaborando, como parte de su trabajo en diversos grupos de investigación en educación estadística, en el libro trata de reflejar las diversas facetas de la estadística: como ciencia, como herramienta de investigación en áreas diversas, como campo de investigación didáctica, tanto para la formación de niños, como de profesionales, investigadores y profesores, dedicando unos subcapítulos a la parte de la aleatoriedad y a las ideas estocásticas fundamentales.

En esta misma línea encontramos la investigación de Estrada, Batanero y Fortuny, en el que presentan un estudio de evaluación de los conocimientos estadísticos elementales de una muestra de 367 estudiantes de diferentes especialidades del magisterio, los resultados indican la necesidad de potenciar la formación estadística en los futuros profesores. Esta investigación también complementa los estudios previos de Estepa (1993) y de Batanero, Godino y Navas (1997).

Es importante también destacar el trabajo de investigación realizado por Arteaga, Batanero y Contreras (2011), en donde se realiza una investigación sobre los gráficos estadísticos en niños y con futuros docentes, y se concluye que existen muchos vacíos con el lenguaje grafico que los docentes deben transmitir a sus estudiantes para que utilicen en su vida diaria. Además que una mejora de la educación de los niños pasa por la formación que reciban los docentes, la cual no debe olvidar el lenguaje de las gráficas estadísticas. Y que se debe continuar con las investigaciones iniciadas en este campo.

Cañizares (1997) citando a Jones y cols. (1996) describen una evaluación de un experimento de enseñanza basado en las investigaciones previas sobre el razonamiento probabilístico de los niños. El marco teórico usado parte de cuatro ideas claves: espacio muestral, probabilidad de un suceso, comparación de probabilidades y probabilidad condicional. Para cada uno de ellos establece, a su vez, cuatro niveles de pensamiento:

- El nivel 1 se asocia con el pensamiento subjetivo. La asignación de probabilidades se basa en juicios subjetivos. La comparación de probabilidades es subjetiva y no se diferencia entre situaciones equitativas y no equitativas.
- El nivel 2 o transicional entre subjetivo y cuantitativo ingenuo se caracteriza porque la asignación de probabilidades puede usar argumentos cuantitativos o subjetivos. La comparación cuantitativa puede ser incorrecta y limitada, aunque comienzan a diferenciarse las situaciones equitativas y no equitativas.
- El nivel 3 o cuantitativo informal, usa, informalmente, números para calcular probabilidades; distingue los sucesos “cierto”, “posible” e imposible”, justificando informalmente su decisión. Hace comparaciones de probabilidad basadas en juicios cuantitativos. Las justifica cuantitativamente, aunque con limitaciones. Distingue las situaciones equitativas y no equitativas mediante razonamientos numéricos.
- El nivel 4 o numérico predice el suceso más probable en experimentos simples. Asigna probabilidades a sucesos. Compara probabilidades y asigna probabilidades numéricas iguales a sucesos equiprobables.

Truran (1994b) discute la suposición que han manifestado algunos autores de que al pedir a los niños que comparen diferentes proporciones de bolas de colores en dos urnas no se hace realmente un test de comprensión probabilística. Sus entrevistas clínicas a 32 niños de 8 a 15 años sugieren que los niños son conscientes de la naturaleza probabilística de tales situaciones y, en el caso de los sucesos cierto o imposible, en los que no se precisa el razonamiento proporcional, los niños se mueven espontáneamente hacia el uso de un lenguaje formal. Sugiere también el interés de investigar sobre las estrategias de los niños en este tipo de tarea, encontrando los siguientes tipos, que amplían notablemente las descritas en investigaciones clásicas:

1. No da razón para la elección.
2. Simple descripción del contenido de las urnas, sin decidirse por una.

3. “Intuición”. Respuesta correcta sin saber justificarla.

4. Diferente estrategia en cada caja.

5. Sesgo hacia el número menor en cada pareja.

6. Estrategias que implican la comparación “más” sin cuantificación, es decir, comparación cualitativa.

Watson, Collis y Moritz (1997) en su estudio pidieron a estudiantes en los grados 3, 6, y 9 si ciertos sucesos son más probables o igualmente probables. Encontraron que incluso cuando los estudiantes identifican los sucesos más probables o igualmente probables, su argumento no es normativo. Sus resultados fueron similares a los de Konold y cols. (1993) citados por Mohamed (2012), muchos alumnos interpretan igualmente probable con que "cualquier cosa puede suceder". Estos estudios sirvieron para plantearse una serie de preguntas acerca de cómo los estudiantes de diferentes edades identifican el caso menos probable de un suceso.

Errores y dificultades

El estudio de los errores y las dificultades que se presenten en cualquier materia es importante ya que didácticamente a partir de estos análisis el docente puede decidir cuáles son los mejores caminos para subsanar estas debilidades presentadas por los estudiantes. En este apartado se hace una recopilación de los errores hallados en diferentes investigaciones en cuanto al aprendizaje y enseñanza de la estadística y la probabilidad.

En el trabajo de Silvia del Puerto, Silvia Seminara y Claudia Minnard, “Identificación y análisis de los errores cometidos por los alumnos en estadística descriptiva”, las autoras hacen una clasificación de los obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas, propuesta por Brosseau, como:

- Ontogénicos y psicogénicos, debidos a las características del niño, en este caso para comprender la idea de probabilidad se requiere el razonamiento proporcional.
- Didácticos, debidos a las elecciones didácticas hechas para establecer la situación de enseñanza, por ejemplo el introducir un nuevo simbolismo como $(\Sigma xi)/n$, cuando los estudiantes necesitan trabajar desde lo concreto.

- Epistemológicos: Relacionados con la dificultad del concepto que se aprende y que pueden ser rastreados a lo largo de la historia de las matemáticas. Por ejemplo la necesidad de definir axiomáticamente la probabilidad para comprenderla.

En la investigación de Luis Serrano Romero, Carmen Batanero Bernabeu y Juan J. Ortiz de Haro, "interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de bachillerato" concluye que los estudiantes interpretan la probabilidad de un suceso, como la predicción de si el suceso ocurrirá o no en el siguiente experimento. Por ejemplo si hay una probabilidad de que llueva del 70% al día siguiente, muchos indican que lloverá al día siguiente porque comparan con 0%, 5%, 50% y 100% de acuerdo con criterios de proximidad, por ello 70% se aproxima a la ocurrencia, esto es al 100%.

Carmen Batanero, Emilse Gómez, Luis Serrano, & José Miguel Contreras, en su investigación "Comprensión de la aleatoriedad por futuros profesores de educación primaria", los resultados muestran una mezcla de concepciones correctas e incorrectas, algunas de las cuáles son paralelas a las que el concepto de aleatoriedad ha recibido a lo largo de su historia. Se observan sesgos como la falacia del jugador o el enfoque en el resultado, así como concepciones erróneas acerca de la equiprobabilidad o la falta de la comprensión de la independencia. En la actualidad la comprensión subjetiva de la aleatoriedad tiene sesgos diferentes: consideran que la probabilidad de un suceso decrece cuando ha ocurrido recientemente. García (2013).

Juan Jesús Ortiz de Haro, Nordin Mohamed Maanan, Luis Serrano Romero y Jesús Rodríguez García, en su investigación "Competencias de futuros profesores de educación primaria en la asignación de probabilidades" comprobaron que los posibles errores pueden ser debidos a una generalización incorrecta de la regla de Laplace, mostrando el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), o que el alumno considere un espacio muestral diferente, cuyos elementos serían cada uno de los alumnos de la clase (29 sucesos elementales equiprobables).

En la investigación titulada "conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo" de Juan Jesús Ortiz, Carmen Batanero, José Miguel Contreras, querían valorar el conocimiento común del contenido, se analizaron las soluciones que dieron los docentes a dos problemas abiertos, se estudiaron dos componentes del conocimiento didáctico, considerando el trabajo de los maestros en pequeños grupos: para evaluar el conocimiento especializado del contenido, se pidió a los participantes que identificaran los contenidos matemáticos en la tarea, mientras que para determinar el conocimiento del contenido y los estudiantes se les solicitó que distinguieran, entre un grupo de respuestas a la tarea hecha por alumnos de educación primaria, cuáles eran correctas e incorrectas. Para ello fundamentaron su investigación en otras anteriores y utilizaron la clasificación dada por Piaget e Inhelder de las estrategias de comparación de probabilidades:

- Principio de la etapa preoperatoria, primero comparan los casos posibles y después los casos favorables.
- Final de la etapa preoperatoria, comparan el número de casos desfavorables.
- Etapa de operaciones concretas, utilizan la estrategia de correspondencia que consiste en establecer un criterio de proporcionalidad en una fracción y aplicarlo a la otra.
- Etapa de operaciones formales, utilizan las estrategias multiplicativas, en la que comparan los cocientes entre casos favorables y casos posibles en las dos probabilidades.

Es importante mencionar a Batanero, C. (2001) que presenta en su libro una sección titulada "Ordenadores y enseñanza de la estadística" donde plantea:

"Los ordenadores han reducido muchas horas dedicadas al cálculo, permitiendo el estudio de mayores conjuntos de datos. Esto ha permitido agregar nuevos tópicos a la enseñanza de la estadística. La gran ventaja de los ordenadores es su naturaleza dinámica, su velocidad, y el creciente rango de software que permite a los estudiantes experimentar y explorar todos los aspectos de los procesos estadísticos, desde la planificación de la muestra o del diseño experimental hasta la recolección y el manejo de datos, la simulación y el análisis, para interpretar y comunicar los resultados"

El texto presenta varios tipos de software para la enseñanza de la estadística: paquetes estadísticos profesionales, software didáctico, software de uso general, tutoriales, software en internet. Para la presente investigación es importante este aporte ya que da luces de diferentes estrategias que se pueden implementar con los estudiantes para hacer un trabajo diferente y más significativo para él ya que se pretende utilizar las características del computador para la construcción de situaciones didácticas que permitan asignar un problema real a un objeto matemático.

Siguiendo en esta línea se menciona el texto Tratamiento de la Probabilidad y la Estadística para Principiantes de Bernal (2012) el cual se elabora motivado por la falta de textos de estadísticas dirigidos a estudiantes de educación media, para el desarrollo del trabajo se consideran tres momentos principales: 1. La discusión con docentes del área sobre las debilidades presentes en la enseñanza de la estadística y el análisis de textos dirigidos al estudio de la estadística en bachillerato. 2. El análisis de los temas a incluir en el texto y el estudio de las investigaciones realizadas relacionadas con la educación estadística. 3. Organización de los temas seleccionados y redacción de las notas. El cual está acorde con lo establecido por el MEN en los estándares básicos de competencias en el apartado del pensamiento aleatorio y los sistemas de datos.

En la investigación de M. Jesús Cañizares, Carmen Batanero, Luis Serrano y Juan J. Ortiz llamada “Comprensión de la idea de juego equitativo en los niños”, dicen que estos juegos forman par de la cultura del niño fuera de la escuela, y, como ha mostrado Peard (1990), a través de los mismos, los niños adquieren conocimientos de tipo probabilístico incluso antes de una instrucción formal en el tema, se habla que a pesar de la importancia de estos juegos, son todavía escasas las investigaciones sobre las concepciones que los alumnos tienen sobre la idea de juego equitativo, en comparación con las realizadas respecto a la idea de probabilidad, aleatoriedad y otros conceptos probabilísticos. En este trabajo analizan la concepción de los niños entre 10 y 14 años sobre la idea de juego equitativo, completando sus anteriores estudios sobre las creencias de los niños en el terreno de probabilidad y su influencia en la asignación de probabilidades (Cañizares cols., 1997, Cañizares y Batanero, 1998). Terminan concluyendo que, la mayoría de los alumnos demuestran una adecuada concepción de la idea de juego justo o equitativo, aunque en las entrevistas se pudieron dar cuenta de una gran variedad en las concepciones de los alumnos, desde los que no diferencian entre sucesos equiprobables y no equiprobables, hasta los que son capaces de resolver correctamente todos los problemas, además que la mayoría de los alumnos entrevistados son capaces de determinar si dos sucesos compuestos son o no equiprobables, en contextos familiares (cartas y dados), mejor que en contextos de urnas.

Algunos autores, como Fischbein y Gazit (1984) y Fischbein *et al.* (1991) han centrado sus trabajos en el estudio de estas ideas previas, identificando ciertas dificultades y obstáculos sobre el desarrollo de la intuición estocástica.

Serrano (1996) ha mostrado recientemente el uso que hacen los alumnos de 14 a 18 años de heurísticas incorrectas en la asignación de probabilidades, tales como la *representatividad*, con la consiguiente presencia de sesgos en los resultados obtenidos. Otro sesgo hallado entre estos alumnos es el de equiprobabilidad (Lecoutre y Durand, 1988; Lecoutre, 1992), por el cual los sujetos generalizan indebidamente la regla de Laplace, aplicándola en situaciones en las que no es pertinente. Así mismo, los estudiantes universitarios y de secundaria han manifestado dificultades con la idea de independencia de los ensayos e interpretación incorrecta de enunciados de probabilidad desde el punto de vista frecuencial, esto es, el "outcome approach” descrito por Konold (1989).

Se piensa que estas dificultades y otras descritas en Garfield y Ahlgren (1988) podrían estar presentes en los alumnos más jóvenes, con el consiguiente peligro de que su desconocimiento, por parte de los profesores, hiciese fracasar la enseñanza de la probabilidad propuesta en los nuevos diseños curriculares.

Por otro lado, en el ámbito nacional se encuentra a Marleny Concepción Castaño Quintero que en su trabajo para Magister en Enseñanza de las Ciencias exactas y naturales llamado “Diseño de una unidad didáctica para el desarrollo del pensamiento probabilístico, que favorezca un aprendizaje significativo en los estudiantes del grado 5°3 de la I.E El pedregal del municipio de Medellín” (2013), muestra los aspectos fundamentales que se tendrán en cuenta para el desarrollo del pensamiento probabilístico en los estudiantes, a partir del diseño de una unidad didáctica de enseñanza teniendo como referente la teoría del aprendizaje significativo y la propuesta metodológica del ciclo didáctico de Jorba y Sanmartí. La autora concluye que en la enseñanza del concepto de probabilidad que esta mediada por los juegos de azar hay una gran gama de posibilidades, esto significa que el docente puede diseñar y adaptar juegos para aplicarlos en cada uno de los pasos de la secuencia didáctica de acuerdo con la intención de aprendizaje. Además integrar herramientas informáticas como juegos online, simulaciones, utilización de programas como power point, prezzi, plataformas educativas entre otros que permiten una mayor motivación hacia el aprendizaje de los conceptos de la matemática los cuales tradicionalmente se han considerado difíciles y aburridos para los estudiantes, continua diciendo que el uso de los dados en primaria puede plantear el inconveniente que el alumno confunde el nombre del evento con la frecuencia de la ocurrencia, así, puede ocurrir que si se lanza un dado el alumno crea que un 3 puede obtenerse con frecuencia tres sobre seis, sin embargo se puede trabajar con dados que tengan en sus caras colores, dibujos de animales, personajes de tiras cómicas, nombre de regiones o departamentos de Colombia, palabras, alimentos, hábitos, géneros musicales, etc. esto permitiría al maestro desarrollar actividades donde los estudiantes lancen el dado y pueda realizar una actividad complementaria. Por ejemplo, si sale "Santander", decir cuál es la capital de este departamento Colombiano. O si sale " perro" el estudiante imite a un perro y el maestro aprovecha para hacer un comentario sobre la responsabilidad al tener una mascota en casa. Así aparece el dado y el azar como un recurso del aula que permite utilizarse en otras actividades. Finalmente recomienda que en la enseñanza del concepto de probabilidad es muy importante que en los experimentos aleatorios, cualquiera que se escoja, sea repetido varias veces en condiciones iguales (hipotéticamente hablando) o similares y hacer un análisis de los resultados con el fin de que los estudiantes por si mismos descubran y concluyan, que es un concepto que está ligado al azar y que no es posible predecir con certeza que ocurrirá en cada uno.

La docente Paula Andrea Calderón Ramos en su trabajo “Desarrollo de estrategias metodológicas para mejorar el rendimiento académico en el área de estadística en temas relacionados con el concepto de probabilidad y de aleatoriedad en los estudiantes de quinto grado de básica primaria de la Institución Educativa el Salvador”(Medellín 2013), trabajo para optar al título de Magister en enseñanza de las Ciencias exactas y naturales de la Universidad Nacional diseña y aplica una propuesta para hacer uso del computador, buscando con ello facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje en esta área (estadística). Los resultados y conclusiones de este trabajo señalan que es muy importante que los docentes de estos grados reciban la formación adecuada pues se aprecia que es una de las debilidades; además que estas temáticas deben estar incluidas en las mallas curriculares. Con respecto a los estudiantes una de las contribuciones más importantes son las trabajadas con las tics en el Moodle y en programas de Microsoft, más el trabajo didáctico elaborado en clase el cual fue de forma diferente a las clases convencionales que están acostumbrados los estudiantes normalmente. Los resultados teóricos han sido comprobados comparándolos con valores procedentes de pruebas y con datos experimentales. El proceso de los datos se examinó previamente, con resultados plenamente satisfactorios.

2.2 Marco teórico

En este apartado se presenta una síntesis de algunas nociones teóricas que constituyen el Enfoque Ontosemiótico (EOS) sobre el conocimiento y la instrucción matemática propuesto por (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, 2003, Godino, Contreras y Font, 2006, Godino, Batanero y Font, 2007). se habla de la historia de la probabilidad y su desarrollo a través del tiempo, la comprensión de la probabilidad en niños y adolescentes, más adelante se habla del concepto de probabilidad como objeto matemático con algunas definiciones de conceptos propios de esta área que debería conocer tanto docentes como estudiantes así como también algunos elementos característicos de la probabilidad la manera de calcularla en eventos sencillos, cuanto es su valor y como calcularla a partir de las frecuencias, para terminar con las propuestas de algunos currículos a nivel internacional y con una mirada del concepto probabilidad en el currículo colombiano.

2.2.1 El enfoque Ontosemiótico en la matemática

En esta investigación se va a tomar como referente teórico el enfoque Ontosemiótico (EOS), desarrollado por Godino y colaboradores que va a servir de herramienta para analizar algunos procesos relacionados con el aprendizaje de la probabilidad en la primaria. Esta investigación se centra en las prácticas matemáticas relacionadas a la resolución de problemas utilizando diferentes estrategias y los posibles problemas que presenten los estudiantes al utilizarlas.

Este marco teórico adopta un punto de vista pragmático-antropológico sobre el conocimiento matemático, proponiendo tres dimensiones en el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: epistemológica, cognitiva e instruccional. Cada una de ellas se aborda con herramientas agrupadas en tres modelos teóricos: teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994; 1998 a y b); teoría de las funciones semióticas (Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, 2005) y teoría de las configuraciones didácticas (Godino, Contreras y Font, 2006).

El Enfoque Ontosemiótico (EOS), es un marco teórico que ha surgido en el seno de la Didáctica de las Matemáticas, con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje, Godino (2011), además manifiesta que la actividad matemática está relacionada por un conjunto de prácticas con las cuales se pueden resolver problemas dentro de las matemáticas o fuera de ellas de manera individual o como institución.

Este enfoque teórico considera la matemática desde un triple punto de vista: es una actividad humana, que implica la resolución de problemas (externos o internos a la disciplina) socialmente compartida; es un sistema conceptual organizado lógicamente; y un lenguaje simbólico, que sirve para expresar las ideas y las operaciones con los objetos matemáticos. En esta teoría, el concepto de situación-problema se toma como noción primitiva y es el punto de partida, a partir de esta idea los autores definen los conceptos de práctica, objeto, en sus dimensiones personal e institucional, y significado.

"En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas de las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas. A la pregunta, sobre qué es el objeto matemático probabilidad, se propone como respuesta, "el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional); una institución, para Godino y Batanero (1994), está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas; para resolver un tipo de situaciones-problemas en los cuales interviene dicho objeto" Ruiz (2013 p.10), en este caso para resolver un tipo de problemas en los cuales se necesita calcular la probabilidad de un suceso en un experimento aleatorio.

Es decir se torna de carácter relativo la manera de afrontar la solución de un tipo de situación problemática dependiendo del contexto o del sujeto quien lo afronte.

Godino, Batanero y Font (2007) hablan de diferentes categorías en las prácticas matemáticas, que dependiendo de quién o quienes las desarrollen y la manera como se miren podrían ser institucionales o personales, teniendo en cuenta que una práctica individual puede ser apta o no para la institución. Con relación a los significados institucionales ellos proponen los siguientes tipos:

- Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido (¿qué significado de la probabilidad se considera en una enseñanza o investigación?).
- Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio (¿qué se pretende enseñar de la probabilidad?).
- Implementado: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente. (¿qué se logra enseñar?).
- Evaluado: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes (¿qué parte se evalúa?).
- Referencial: qué parte de la probabilidad se considera en una enseñanza.

En relación con los significados personales los autores proponen los siguientes tipos:

- Global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático (todo lo que un sujeto conoce sobre la probabilidad).
- Declarado: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional (lo que, pasada la evaluación, hemos conseguido evaluar).
- Logrado: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen (la parte del conocimiento que está de acuerdo con el significado institucional).

La parte del significado declarado no concordante con el institucional es lo que habitualmente se considera como errores de aprendizaje.

Lo anterior se resume en la figura 1. (Godino, 2003, p. 141) tipología básica de los significados.

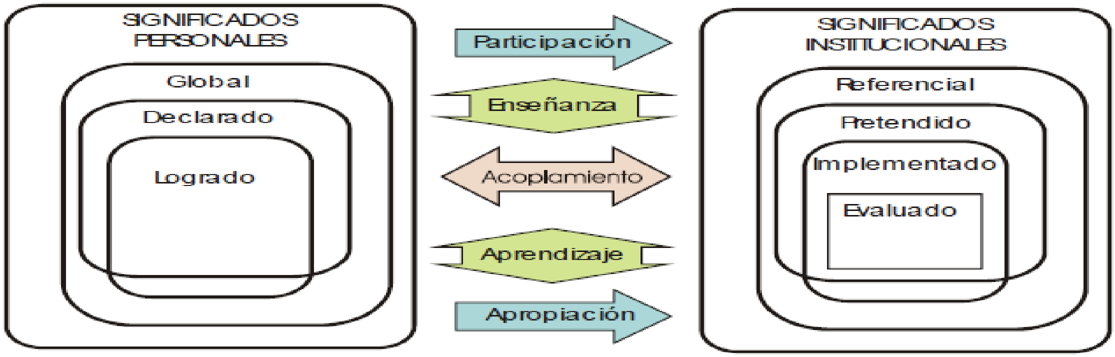


Figura 1: Tipos de significados institucionales y personales (Godino 2003, p.141)

En la parte central de la Figura 1, se representan las relaciones entre enseñanza y aprendizaje, que supone el acoplamiento poco a poco entre los significados personales e institucionales. Allí hace parte importante la participación de los estudiantes en las prácticas, lo que se va a manifestar en la apropiación de los significados.

En este modelo se asume que en las prácticas matemáticas intervienen objetos matemáticos que evocamos al hacer matemáticas y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual, por ejemplo, al resolver el problema de calcular la probabilidad de un suceso en un experimento aleatorio, donde se puede aplicar el enfoque clásico de probabilidad, intervienen los objetos "posible", "imposible" y "probable", así como "división" y "recuento de casos". También de los sistemas de prácticas matemáticas emergen nuevos objetos que dan cuenta de su organización y estructura. Mayen (2005).

En cuanto a los objetos matemáticos Ruiz (2013) citando a Godino, J. D. Batanero, C. y Font, (2008) describe las siguientes categorías de estos objetos primarios (figura 2) así:

- Situaciones-problemas: aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, problemas, acciones que inducen una actividad matemática. En este caso el problema puede ser la búsqueda de una estrategia óptima para ganar en un juego, o bien otros problemas planteados por el profesor.
- Lenguajes: términos, expresiones, notaciones, gráficos en sus diversos registros (escrito, oral, gestual,...) que se utilizan para representar los datos del problema, las operaciones que hacemos con ellos, los objetos matemáticos que se utilizan y la solución encontrada. Se busca familiarizar a los estudiantes con el lenguaje propio de la probabilidad tanto

gráfico, como verbal, icónico y simbólico. por ejemplo, las palabras, aleatorio, suceso, probabilidad, así como gráficos y diagramas utilizados.

- Conceptos-definición: (introducidos mediante definiciones o descripciones) En las prácticas que llevan a cabo los estudiantes para resolver un problema matemático, propuesto por el docente se usan implícita o explícitamente objetos matemáticos, de los cuáles el estudiante ha de recordar o aplicar la definición. Por ejemplo, probabilidad, espacio muestral, aleatoriedad.
- Proposiciones o enunciados sobre relaciones o propiedades de los conceptos que igualmente se han de emplear al resolver problemas matemáticos. Por ejemplo, cuando los estudiantes tienen que recordar que la suma de probabilidades en el espacio muestral es igual a la unidad o por ejemplo, que el valor de la probabilidad es un número comprendido entre 0 y 1.
- Procedimientos: Serían los algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo que los estudiantes han aprendido durante la enseñanza previa y que aplican al resolver el problema. En nuestro caso, los estudiantes usarán técnicas sencillas de cálculo de probabilidades, como técnicas combinatorias, uso de diagrama en árbol, etc., dados para el nivel que se está trabajando. por ejemplo el algoritmo que se utiliza para calcular la probabilidad según la regla de Laplace: p(A) = nº de casos favorables/nº de casos posibles.
- Argumentos: Serían los enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos o bien la solución de los problemas. Pueden ser deductivos, inductivos, formales o informales.

En este orden de ideas se puede decir que la situación-problema (en nuestro caso resolver un problema de probabilidad) es el origen de la actividad matemática; el lenguaje sirve para representar el problema, aludiendo a los conceptos, proposiciones y procedimientos; además los argumentos justifican los procedimientos y las soluciones de los problemas así como las proposiciones que relacionan los conceptos entre sí.

Godino, Batanero y Font (2007) indican que estos objetos propuestos están relacionados entre sí formando configuraciones. Estas configuraciones pueden ser epistémicas (cuando se trata de objetos institucionales) o cognitivas (si se refieren a objetos personales). En la primera configuración se distinguen los conocimientos previos (lo que los estudiantes deben saber para afrontar la unidad didáctica), y en la segunda las cognitivas, lo que pretende el docente o se supone va a aprender el estudiante.

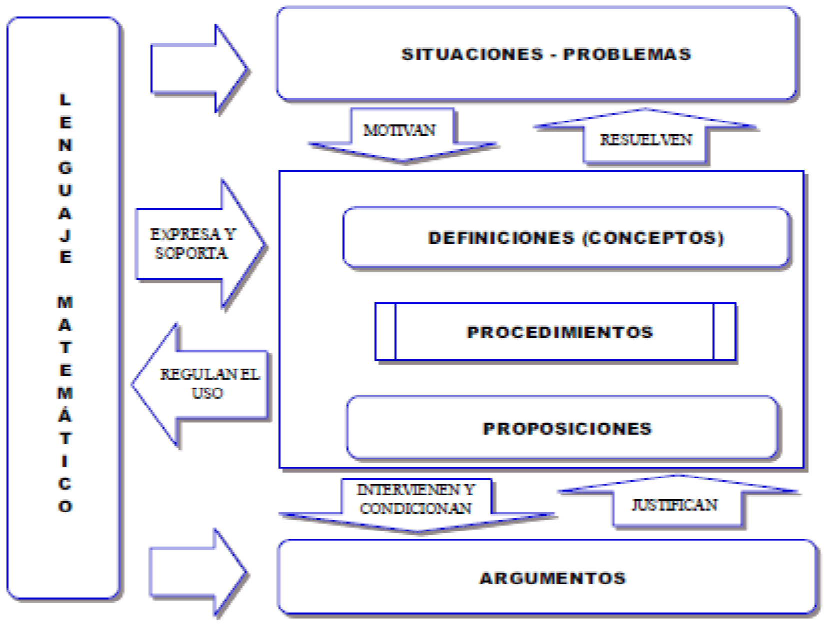


Figura 2 : Configuración de objetos primarios. (Font y Godino, 2006, p. 69)

La formación de estos objetos y configuraciones, tanto en su faceta personal como institucional, se produce a lo largo del tiempo mediante procesos matemáticos, que contienen “secuencias de prácticas”. La formación de los objetos lingüísticos, problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos, tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos primarios figura 2 (Font y Godino, 2006, p. 69), apoyados en los procesos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización,...) y argumentación (Godino, 2003), como se observa en la figura 3, además estos autores contemplan dichos objetos desde las siguientes dimensiones duales: personal/institucional, unitaria/sistémica, expresión/contenido, ostensiva/no-ostensiva y extensiva/intensiva.

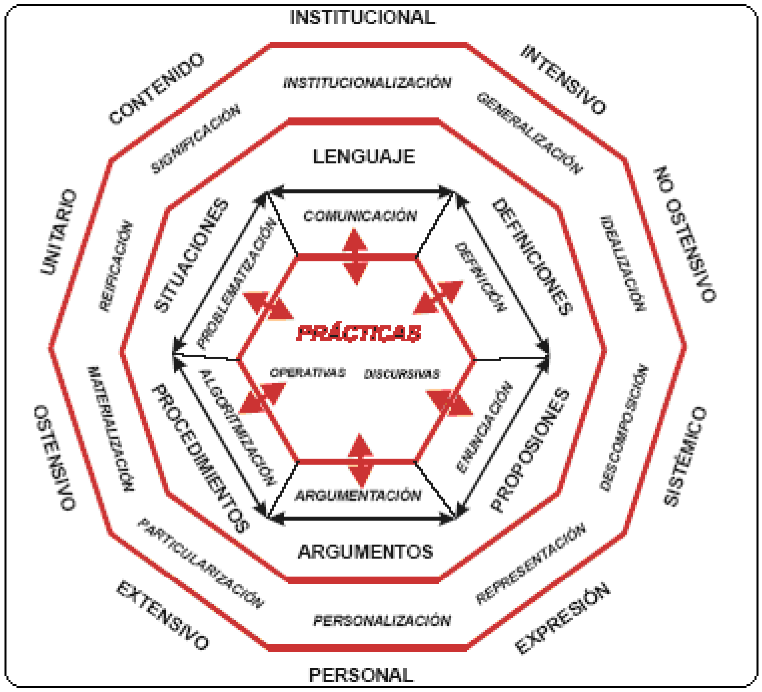


Figura 3: Tipos de objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas. (Godino, Batanero y Font, 2007).

También se puede ver en la figura 3 que se consideran una serie de procesos asociados a estas dualidades: generalización-particularización, institucionalización-personalización, representación-significación; descomposición-reificación; idealización-materialización.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2008. p.6) destacan que se debe considerar otro nivel más de objetos que emergen de la actividad matemática,

> En un segundo nivel tenemos una tipología de objetos que emerge de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc. sobre los objetos del nivel anterior; nos referimos a objetos personales o institucionales, ostensivos o no ostensivos, unitarios o sistémicos, etc.

Otro aspecto teórico que se debe tener en cuenta en esta investigación es el de función semiótica (Godino (2002); Godino, Batanero y Font (2007)), ya que este aspecto teórico sirve para determinar los conflictos de interpretación que se pueden presentar entre los docentes y los estudiantes. Reyes (2013) dice que los autores del marco teórico describen la idea de función semiótica como correspondencia entre un antecedente (expresión, significante o representante) y un consecuente (contenido, significado o representado), establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

Un juego de azar puede considerarse como una función semiótica, donde el antecedente es el propio juego. Esta correspondencia suele estar implícita con o sin instrucciones, pero si dado el caso el estudiante no entiende el juego o no interpreta los resultados como son esperados por el profesor se dice que hay un conflicto semiótico.

Otro ejemplo puede ser si usamos la expresión “probabilidad clásica” para referirnos a la regla de Laplace, que indica que la probabilidad de un suceso es igual al cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, siempre que todos los sucesos sean equiprobables y el espacio muestral asociado al experimento sea finito. En este ejemplo, observamos que la regla de correspondencia entre la palabra “probabilidad clásica” y la fórmula establecida por Laplace, como ocurre en general, se ha establecido en la institución matemática.

El antecedente y el consecuente de una función semiótica no solo abarcan los conceptos, sino que va más allá, en condiciones más complejas como sistemas o teorías. Por lo cual podemos descomponer las diferentes estrategias empleadas en otros objetos matemáticos implícitos teniendo en cuenta tanto su aporte en el desarrollo de competencias en los estudiantes como las dificultades que estos puedan tener.

> “Como vemos, en este marco teórico, las funciones semióticas y la ontología matemática asociada generalizan la noción de representación, que no queda asumida en exclusividad por el lenguaje. Se asume que cualquier tipo de objeto (situaciones problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), puede ser expresión o contenido de las funciones semióticas. Por ejemplo, el enunciado verbal de un problema representa una situación de la vida real; un gráfico, representa una distribución de datos, etc.”. Mayen (2005 p. 23).

Así mismo Mohamed (2006) en su tesis doctoral manifiesta que

> “Los cinco tipos de entidades considerados pueden desempeñar el papel de expresión o de contenido en las funciones semióticas. De este modo, las funciones semióticas y la ontología matemática introducida en el modelo teórico descrito, tienen en cuenta la naturaleza relacional de las matemáticas y generalizan la noción de representación, que no queda asumido en exclusividad por el lenguaje”.

2.3 La historia de la probabilidad

En este aparatado se pretende dar una contextualización de la historia de la probabilidad y como ha sido su evolución a través del desarrollo de la humanidad.

El conocimiento de la historia de un concepto matemático es importante para el estudiante ya que es una herramienta metodológica que propicia la transmisión del conocimiento y le permite al estudiante crear ciertas expectativas y motivaciones sobre el concepto al que se va a enfrentar, además que le permite acercarse a la visión humana de las matemáticas, dándole a conocer los errores cometidos y las dificultades para llegar a la situación actual.

En cuanto a la probabilidad sus orígenes se encuentran en los pueblos Sumerios y Asirios quienes utilizaban un hueso extraído del talón de animales como ovejas, ciervos o caballos, denominado astrágalo o talus, que tallaban para que pudieran caer en cuatro posiciones distintas (aunque no se conoce el uso que se le daba, juego o religión...), estos instrumentos son considerados como los precursores de los dados. En la civilización egipcia algunas pinturas encontradas en las tumbas de los faraones muestran tanto astrágalos como tableros para el registro de los resultados.

Por su parte, los juegos con dados se practicaron ininterrumpidamente por los romanos y griegos, aunque no se conoce las reglas con las que jugaban, lo que no propició el avance de la probabilidad. Uno de estos juegos, denominado "hazard", palabra que en inglés y francés significa riesgo o peligro, fue introducido en Europa con la Tercera Cruzada. Las raíces etimológicas del término provienen de la palabra árabe "al-azar", que significa "dado".

Lo mismo ocurría con los juegos de dados en la cultura judía donde se utilizaban diferentes sistemas aleatorios en oráculos y ceremonias. Allí se prescindía del concepto de aleatoriedad y se explicaba desde la voluntad de Dios, y con la llegada del cristianismo se reafirmó la creencia que es Dios quien está detrás de estos fenómenos.

Es 1453 se empieza a dar una explicación de los fenómenos que no seguían un patrón determinístico sino aleatorio, especialmente en los juegos de azar donde el estudio probabilístico encontró su origen. Dando paso a inquietudes sobre como contabilizar los resultados de un dado tirado varias veces o problemas más prácticos sobre cómo repartir las ganancias de los jugadores cuando el juego se interrumpe antes de finalizar. Estas inquietudes surgían más con el ánimo de resolver situaciones cotidianas y con el hecho de ser justos en las apuestas o de conocer la manera de cómo obtener más ganancias respecto a otros jugadores, pero no tenían un carácter matemático.

El problema más importante relativo a los juegos de azar era el conocido como "problema del reparto de apuestas" que distribuía las ganancias entre jugadores cuando la partida se interrumpía antes de finalizar. Este problema fue abordado por Luca Pacioli (1445-1517) quien en 1487 propuso estos dos problemas particulares.

Fue Girolamo Cardano (1501-1576) quien escribió la primera obra importante relacionada con el cálculo de probabilidades en los juegos de azar. Fue en 1565 y se llamaba Libro de los juegos de azar. Además Cardano se había ocupado anteriormente del problema del reparto de apuestas y en 1539 llegó a la conclusión de que la solución de Pacioli era incorrecta porque al considerar tan sólo el número de juegos ganados por cada equipo, no contaba cuántos juegos debían ganar para hacerse con el premio.

Aunque Cardano confunde probabilidad y esperanza matemática, señala el espacio de sucesos elementales y tiene claro lo que es un juego justo, noción previa y necesaria al concepto de esperanza matemática.

Galileo también aporto a los inicios de la probabilidad, su mayor aportación fue la invención de su teoría de la medida de errores. Clasificó los errores en dos tipos: "sistemáticos" y "aleatorios", clasificación que se mantiene aún en la actualidad y estableció cuidadosamente las propiedades de los errores aleatorios. Con esto contribuyó sin saberlo a la creación de ramas fundamentales de la estadística y la probabilidad posterior.

La historia de la probabilidad comienza en el siglo XVII cuando Pierre Fermat y Blaise Pascal tratan de resolver algunos problemas relacionados con los juegos de azar. Aunque algunos marcan sus inicios cuando Cardano escribió sobre 1520 El Libro de los Juegos de Azar (aunque no fue publicado hasta más de un siglo después, sobre 1660) no es hasta dicha fecha que el físico-matemático holandés Christian Huygens (1629-1695) en 1657 publicó un breve tratado titulado "De Ratiocinnis in ludo aleae" (sobre los razonamientos relativos a los juegos de dados) inspirado en la correspondencia sostenida entre los dos creadores de la teoría de la probabilidad, Pascal y Fermat.

Durante varios siglos se siguieron asentando las bases empíricas de la estadística y la probabilidad a través de la experimentación y la observación, conjuntamente con el desarrollo teórico hasta el siglo XIX y XX donde tuvo su apogeo.

Christiaan Huygens (1629-1695) introduce el concepto de esperanza matemática a partir de la noción de juego equitativo, siendo la base del estudio de las pensiones y los seguros de vida.

Jakob Bernoulli (1654-1705) sentó las bases de la probabilidad estadística, descomponiendo un suceso en sucesos elementales. Extendió el estudio de la probabilidad a distintos aspectos sociales, morales y económicos.

El reverendo Thomas Bayes (1702-1761), al querer demostrar la existencia de Dios, pretendió establecer unas leyes fijas a las que obedecieran los sucesos que ocurren. Introdujo el concepto de probabilidad inversa, al obtener las probabilidades de las causas por las que puede haber sido producido un suceso que se ha observado.

Francis Galton (1882 – 1911) desarrolló el concepto de correlación a partir de la observación de diversos aspectos hereditarios como la altura de los padres e hijos.

Otros autores que se deben destacar por su aporte para fijar las bases modernas de la probabilidad y la estadística durante los siglos XIX y XX son: Poisson (1781-1840), Tchebycheff (1821-1894) y Kolmogorov (1903- 1987) quien definió axiomáticamente la probabilidad, tal y como se enseña y aprende en todo el mundo.

Y Laplace (1749-1827) quien fue el formulador de la teoría clásica de la probabilidad. En sus diversas obras recoge la resolución de diferentes problemas, como el de puntos, desarrolla el método de mínimos cuadrados, la probabilidad bayesiana, etc.

2.4 Comprensión de la probabilidad en niños y adolescentes

“La investigación sobre la capacidad de comparar probabilidades, comienza con Piaget e Inhelder (1951), quienes describen diferentes niveles, en función de las estrategias y respuestas correctas, utilizando como dispositivo experimental bolas en urnas, fichas y otros materiales" Ortiz, Mohamed, Serrano, y Rodríguez, (2007).

Así mismo Carmen Batanero, Juan Jesús Ortiz y Luis Serrano en su trabajo sobre "investigación en didáctica de la probabilidad" señalan que los estudios de Piaget e Inhelder indican que en el estadio preoperacional (4-7 años) los niños rechazan la idea de azar o la conciben de una forma determinista; tienen dificultad para diferenciar certeza e incertidumbre, carecen de estrategias combinatorias y al comparar probabilidades sólo toman en cuenta los casos favorables.

Continúan diciendo que en el periodo de las operaciones concretas (7-11) los niños adquieren progresivamente una comprensión del azar, pero aún confían demasiado en la posibilidad de controlarlo. Comienzan a ser capaces de enumerar situaciones combinatorias sencillas, aunque la estrategia no es siempre completa o consistente. Sus estrategias de comparación de probabilidades se amplían, usando tanto los casos favorables como los desfavorables, sin llegar al razonamiento proporcional completo. No llegan a reconocer la ley de los grandes números.

Y finalizan afirmando que en la etapa de operaciones formales (a partir de 12 años) los jóvenes progresivamente conciben el azar como ausencia de patrones e impredecibilidad, adquieren la intuición de la convergencia, llegan a usar proporciones en la comparación de probabilidades y alcanzan la capacidad de enumeración combinatoria.

Otros autores han continuado este trabajo (Falk, 1983; Fiscbein y cols., 1991; Jones y cols., 1997; Watson y cols., 1997 y Way 1996), donde en tareas de elección binaria han descubierto que muchos estudiantes, especialmente los jóvenes, basan su elección en juicios idiosincrásicos o en un razonamiento restrictivo que se centra en el número de casos favorables". Ortiz, Mohamed, Serrano, y Rodríguez, J. (2007).

También Falk y Wilkening (1998) proponen el uso de tareas de ajuste de probabilidad, para determinar investigaciones sobre probabilidad de un suceso y comparación de probabilidades, donde el alumno es preguntado sobre cuántas bolas blancas hay que añadir en la segunda urna para que la probabilidad de extraer una bola blanca sea la misma en las dos urnas (1ª urna: 2 bolas blancas, 3 bolas negras; 2ª urna: 6 negras). Así los autores concluyen que en un nivel dado, la buena comprensión en tareas de elección binaria precede a la habilidad para ajustar probabilidades.

Ortiz, Mohamed, Serrano, y Rodríguez, J. (2007) continúan diciendo que otros estudios (Cañizares y cols., 1997, Cañizares y Batanero, 1998) destacan que la mayoría de los alumnos al finalizar la educación primaria demuestran una adecuada concepción de la probabilidad, aunque no es suficiente poseer un nivel de razonamiento proporcional dado para resolver un problema equivalente de comparación de probabilidades. El contexto en el que se presenta el problema (discreto o continuo) y algunos sesgos en el razonamiento probabilístico han mostrado su efecto sobre la dificultad de estos problemas.

2.5 La probabilidad como objeto matemático

En este apartado se estudia el objeto matemático de Probabilidad y los demás conceptos relacionados con él. Aquí en esta investigación se centra el estudio de dicho objeto en la educación primaria y se tienen en cuenta los conocimientos mínimos que un docente de este nivel debe adquirir sobre el tema para trasmitirlo a sus estudiantes.

TERMINOS Y EXPRESIONES

Al estudiar un objeto matemático el estudiante, se encuentra con diferentes términos y expresiones que son propios del tema en cuestión por lo que se hace necesario que quien va a afrontarlos debe conocerlos para resolver problemas, representar objetos o para describirlos a otras personas, y en Probabilidad no es la excepción, algunos de ellos son:
PROBABILIDAD: según Batanero y Godino (2001) en un estudio de los términos utilizados en el lenguaje ordinario, a través de los "diccionarios de uso" revela que el azar y la incertidumbre se aprecian como cualidades graduables. Entre lo cierto o lo seguro (lo que ocurrirá necesariamente o lo que es verdadero sin ninguna duda) y lo imposible (lo que no puede ocurrir nunca) está lo probable, término que define M. Moliner (1983): "se dice de lo que, en opinión del que habla, es más fácil que ocurra que deje de ocurrir".

ALEATORIO: el diccionario de uso de español de Ma Moliner (1983) define el termino como "aquello que es incierto que depende de la suerte o el azar" donde el azar es "la supuesta causa de los sucesos no debidos a una necesidad natural ni a una intervención intencionada humana ni divina".

AZAR: El azar se relaciona con la ausencia de patrones o esquemas específicos en las repeticiones de eventos o sucesos, y otras veces con las situaciones en las que se ignora cuáles puedan ser esos patrones, si acaso existen, como es el caso de los estados del tiempo; de la ocurrencia de los terremotos, huracanes u otros fenómenos de la naturaleza; de los accidentes, fallas mecánicas, epidemias y enfermedades; de las elecciones por votación; de los resultados de dispositivos como los que se usan para extraer esferas numeradas para las loterías y de las técnicas para efectuar los lanzamientos de dados o monedas o para el reparto de cartas o fichas en los juegos que por esto mismo se llaman "de azar" MEN (2005 p. 65).

EXPERIMENTO: Se llama experimento tanto a los verdaderos experimentos que podamos provocar como a fenómenos observables en el mundo real; en éste último caso, la propia acción de observar el fenómeno se considera como un experimento. Por ejemplo, la comprobación del sexo de un recién nacido se puede considerar como la realización de un experimento. Diferenciamos entre experimentos deterministas y aleatorios. Los primeros son aquellos que, realizados en las mismas circunstancias sólo tienen un resultado posible. Por el contrario, un experimento aleatorio se caracteriza por la posibilidad de dar lugar, en idénticas condiciones, a diferentes efectos. (Batanero & Godino 2001).

SUCESO: es cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio. Se distinguen entre sucesos elementales, cuando no pueden descomponerse en otros más simples y suceso compuestos cuando se componen de dos o más sucesos elementales por medio de operaciones lógicas como la conjunción, disyunción o negación.

SUCESO SEGURO E IMPOSIBLE: El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se denomina espacio muestral o suceso seguro. Suele representarse mediante la letra E. Por ejemplo, el espacio muestral obtenido al lanzar un dado sería E= {1, 2, 3, 4, 5,6}. Este espacio muestral es finito, pero podemos considerar un espacio muestral con infinitos resultados posibles. Por ejemplo, la duración de una lámpara podría variar en un intervalo continuo [0, 1000], donde hay infinitos puntos. Otros casos serían el peso o la talla de una persona tomada al azar de una población.

Puesto que el suceso seguro consta de todos los resultados posibles, siempre se verifica. Teóricamente podríamos también pensar en un suceso que nunca pueda ocurrir, como obtener un 7 al lanzar un dado ordinario. Lo llamaremos suceso imposible y lo representamos por Ø.

ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES EN EL CASO DE SUCESOS ELEMENTALES EQUIPROBABLES. REGLA DE LAPLACE

Si un espacio muestral consta de un número finito n de sucesos elementales y no tenemos motivo para suponer que alguno de ellos pueda ocurrir con mayor frecuencia que los restantes, la probabilidad de cada uno de estos sucesos elementales es 1/n. En estos casos, podemos aplicar la llamada regla de Laplace para calcular las probabilidades de los sucesos compuestos. Un suceso compuesto que se compone de k sucesos elementales tiene, en este caso, una probabilidad igual a k/n (regla de Laplace). En el caso de que tengamos motivos para pensar que algún suceso puede darse con mayor frecuencia que otros (por ejemplo, al usar un dado sesgado) o bien cuando el espacio muestral es infinito, no podemos aplicar esta regla.

Dos sucesos que no pueden ocurrir a la vez se llaman incompatibles. Por ejemplo, no pueden ocurrir a la vez los sucesos "obtener par" y "obtener impar" cuando lanzamos un dado.

VARIABLE ALEATORIA: Una variable aleatoria es una variable cuyos valores dependen del resultado de un experimento aleatorio. Frecuentemente el resultado de un experimento se expresa de forma numérica y, en consecuencia, tal resultado es una variable aleatoria. Por ejemplo: "observar la temperatura diaria a las 8 h. en Pereira", "Observar la altura (o bien, el peso, pulsaciones por segundo, el C.I. etc.), de un colectivo de individuos".

De modo similar a las variables estadísticas, se clasifican las variables aleatorias en discretas o continuas según que el conjunto de valores que puedan tomar sea o no numerable.

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA: Una variable aleatoria discreta es aquella que sólo puede tomar valores enteros. Por ejemplo: El número de hijos de una familia, la puntuación obtenida al lanzar un dado[1].

VARIABLE ALEATORIA CONTINUA: Una variable aleatoria continua es aquella que puede tomar todos los valores posibles dentro de un cierto intervalo de la recta real. Por ejemplo: La altura de los alumnos de una clase, las horas de duración de una pila[2].

A continuación se mencionan dos referentes internacionales para la enseñanza de la estadística y la probabilidad, como son los estándares americanos de educación matemática y el proyecto GAISE, los cuales brindan directrices para la evaluación y enseñanza en estos campos y sirven para comparar nuestro currículo con lo propuesto internacionalmente**.**

2.6 Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática (estándares americanos, n.c.t.m.; usa)

En los estándares curriculares (NCTM, 2000) la probabilidad se inicia desde el nivel K-2 (5 años) y continúa a lo largo de toda la escolaridad. A continuación se describen las competencias recogidas en estos estándares, con relación a este tema:

RESPECTO A LA INFERENCIA Y LA PREDICCIÓN BASADA EN DATOS:

- Desde preescolar hasta el grado 2, todos los estudiantes deberían poder discutir eventos relacionados con experiencias de los estudiantes, como probable o improbable.
- En los grados 3-5 todos los estudiantes deberían poder: proponer y justificar conclusiones y predicciones basadas en datos y diseñar estudios para sacar conclusiones o predicciones.

[1] Tomado de http://www.vitutor.com/pro/3/a_1.html
[2] Tomado de http://www.vitutor.com/pro/3/a_1.html

RESPECTO A LOS CONCEPTOS BÁSICOS DE PROBABILIDAD:

- En los grados 3-5 todos los estudiantes deberían describir sucesos probables o improbables y discutir el grado de probabilidad usando palabras como cierto, igualmente probable e imposible. Asimismo deben predecir la probabilidad de resultados de experimentos sencillos y poner a prueba las predicciones; entender que la medida de la probabilidad de un evento puede ser representado por un número de 0 a 1.

2.7 PROYECTO GAISE (Guidelines for Assesment and Instruction in Statistics Education) (Proyecto de los Lineamientos para la Evaluación e Instrucción en Educación Estadística)

La American Statistical Association (ASA) en el año 2007, publicó el trabajo denominado “Pautas para la Evaluación e Instrucción en Educación Estadística”, Proyecto GAISE (Franklin et. al, 2007), que se basa en los NCTM, buscando como objetivo final que los estudiantes desde los primeros años de escolaridad usen la estadística para afrontar los requerimientos de la vida diaria y que sean capaces de formular preguntas que puedan ser abordadas con datos; recoger, organizar y presentar datos relevantes para resolverlas; seleccionar y usar métodos estadísticos apropiados para analizar datos; desarrollar y evaluar inferencias y predicciones que están basadas en datos y entender y aplicar conceptos básicos de probabilidad. Está estructurado en el desarrollo de los conocimientos estadísticos en tres niveles (A, B, C), a través de cuatro procesos: formular preguntas, recolectar datos, analizar datos e interpretar resultados.

En el Nivel A, los estudiantes deben entender que la probabilidad es una medida de la posibilidad de que algo va a suceder. Es una medida de certeza o incertidumbre. Los eventos deben ser vistos como situados en un continuo de ser imposible a seguro, con menos probable, igualmente probable, y más probable situados en el medio. Ruiz (2013).

En este nivel se consideran sólo modelos simples basados en resultados igualmente probables, o, a lo sumo, basados, en la suma de las caras en dos dados numerados.

En el nivel B, los estudiantes verán el papel que la probabilidad desempeña en el desarrollo del concepto de la muestra aleatoria simple y el rol que la probabilidad juega con la aleatoriedad.

Los conceptos básicos y aplicaciones de probabilidad son planteados con un énfasis en la forma que la probabilidad y la estadística se relacionan. El documento proporciona una estructura conceptual para la educación estadística.

2.8 La probabilidad en el currículo colombiano de educación primaria

Al desarrollarse desde el Siglo XVII la teoría de la probabilidad y el cálculo diferencial e integral, se empezó a notar también que entre los estudiantes de matemáticas había algunos que sobresalían en los aspectos aritméticos y geométricos, pero que tenían dificultad en pensar en los conceptos de la probabilidad o en las variaciones continuas de los procesos físicos. Pareció pues conveniente distinguir también el pensamiento probabilístico o aleatorio y el pensamiento analítico o variacional como tipos de pensamiento matemático diferentes del numérico, el espacial y el métrico, aunque muy relacionados con ellos. MEN (2006 p.57).

Seguidamente De Guzmán (1995) señala al respecto que, más allá de las ramas tradicionales de las matemáticas: la aritmética y la geometría, en su devenir histórico “el espíritu matemático habría de enfrentarse con:

• La complejidad del símbolo (álgebra)

• La complejidad del cambio y de la causalidad determinística (cálculo)

• La complejidad proveniente de la incertidumbre en la causalidad múltiple incontrolable (probabilidad, estadística)

• La complejidad de la estructura formal del pensamiento (lógica matemática)".

Es decir hay una relación con los cinco pensamientos matemáticos que se enuncian en los lineamientos curriculares. Y es así como de esta manera se incluye el pensamiento aleatorio en los estándares básicos de competencias como un pensamiento transversal a los otros propuestos.

En este mismo sentido en los lineamientos curriculares de Matemáticas (1998 p.17) se da una definición del pensamiento aleatorio y de sus componentes, destacando el papel fundamental que juega la probabilidad como base de este pensamiento.

> La probabilidad y la estadística son ramas de las matemáticas que desarrollan procedimientos para cuantificar, proponen leyes para controlar y elaboran modelos para explicar situaciones que por presentar múltiples variables y de efectos impredecibles son consideradas como regidas por el azar, y por tanto denominadas aleatorias. El carácter globalizante de la probabilidad y la estadística está en la presencia del pensamiento aleatorio para la comprensión de fenómenos de la vida cotidiana y de las ciencias. Particularmente en el conocimiento matemático escolar este carácter globalizante se asume cuando el énfasis se hace en el tratamiento de situaciones no deterministas, en donde la recolección, la organización y la representación de los datos obedece a una intencionalidad que les dé sentido, que guíe su interpretación para la toma de decisiones y posteriores predicciones; el desarrollo de la intuición sobre la probabilidad mediante valoraciones cualitativas y mediante la exploración de problemas reales que permitan la elaboración de modelos de probabilidad.

Así mismo la ley general de educación dentro de los objetivos generales de la educación básica menciona en su artículo 20 los objetivos generales de la educación básica en el numeral c:

> Ampliar y profundizar en el razonamiento lógico y analítico para la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, la tecnología y de la vida cotidiana;

Donde se hace implícito el estudio de la probabilidad. Además en el artículo 21 se mencionan los Objetivos específicos de los cinco (5) primeros grados de la educación básica que constituyen el ciclo de primaria, específicamente en el numeral e se dice que:

> El desarrollo de los conocimientos matemáticos necesarios para manejar y utilizar operaciones simples de cálculo y procedimientos lógicos elementales en diferentes situaciones, así como la capacidad para solucionar problemas que impliquen estos conocimientos,

en este numeral se evidencia la importancia de desarrollar en los niños la lógica en diferentes contextos y la necesidad de ponerlos frente a situaciones problema de diversa índole, para nuestro caso serían relacionadas con la probabilidad.

Además de ello en los estándares básicos de competencias (MEN 2006 p.64, 65) se da una definición de lo que debe ser el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos para el entorno de la educación colombiana,

> Este tipo de pensamiento, llamado también probabilístico o estocástico, ayuda a tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, de azar, de riesgo o de ambigüedad por falta de información confiable, en las que no es posible predecir con seguridad lo que va a pasar. El pensamiento aleatorio se apoya directamente en conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial, e indirectamente en la estadística descriptiva y en la combinatoria. Ayuda a buscar soluciones razonables a problemas en los que no hay una solución clara y segura, abordándolos con un espíritu de exploración y de investigación mediante la construcción de modelos de fenómenos físicos, sociales o de juegos de azar y la utilización de estrategias como la exploración de sistemas de datos, la simulación de experimentos y la realización de conteos.

Este pensamiento está estructurado como se muestra a continuación en la fig 3. Donde se evidencia claramente que la teoría de las probabilidades hace parte importante y es base de este pensamiento.

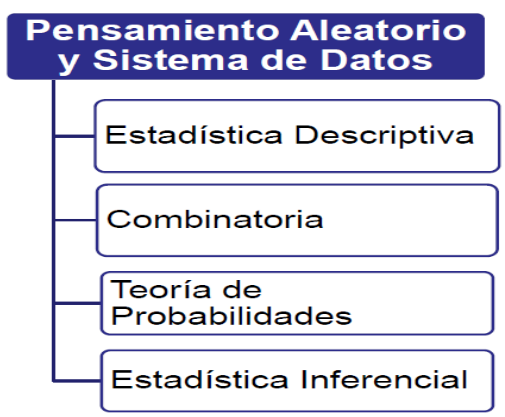


Figura 4 Organización de los componentes del pensamiento aleatorio y sistemas de datos. Fuente propia.

Así mismo en la figura 5. Se pueden observar los procesos, conceptos procedimientos y contextos en los que se desenvuelve la probabilidad en la básica primaria que es el contexto para el desarrollo de esta investigación.

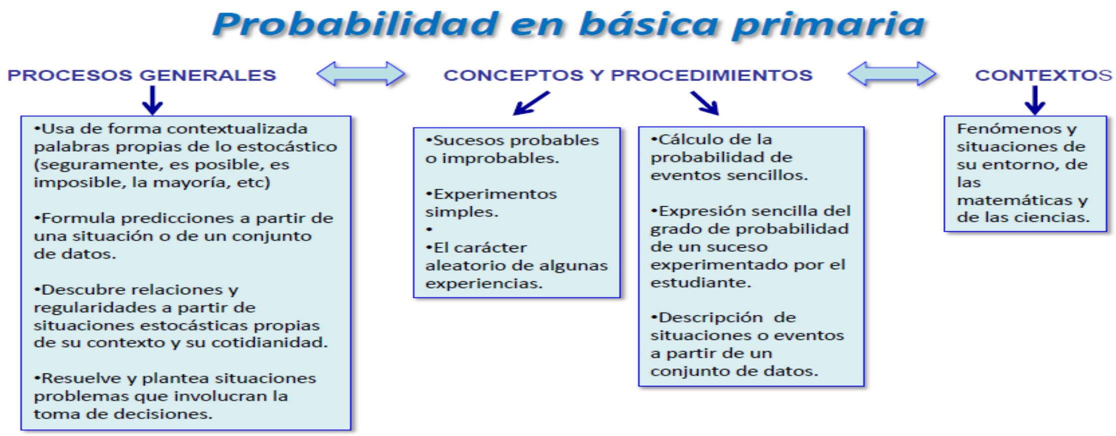


Figura 5 Procesos, conceptos, procedimientos y contextos de la probabilidad en la básica primaria. Fuente propia.

Capítulo 3

3.1 Metodología

La recogida de datos se llevó a cabo durante el curso 2016 y la participación de la I.E fue voluntaria. Los estudiantes respondieron al cuestionario como una actividad más a desarrollar en la clase de Matemáticas. El investigador se desplazó personalmente al centro participante y, con la ayuda de los profesores de los grados quintos, llevó a cabo la recogida de datos. Al comenzar la actividad se les explicó a los estudiantes la finalidad del cuestionario y se les pidió su participación, lo que hicieron de buen agrado y con interés. Se Agradece a estos niños, a la I.E y a los profesores la colaboración prestada, sin la cual esta investigación no podría haberse llevado a cabo.

En este estudio se utilizaron algunos elementos del marco teórico del Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición matemática (Godino, Batanero y Font, 2007).

Para evaluar el conocimiento común del contenido de la probabilidad de los estudiantes de grado quinto de la I. E Sagrada Familia de Apia, se analizaron las respuestas obtenidas a un cuestionario con 24 problemas de probabilidad, que cubren algunos significados de la probabilidad. Este conocimiento sería inobservable, pero según el Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición matemática (Godino, Batanero y Font, 2007), las prácticas explicitadas por los estudiantes durante la resolución de los problemas propuestos serían los indicadores empíricos en la evaluación de dicho conocimiento. El análisis de las respuestas de los estudiantes nos aportó información sobre sus conocimientos matemáticos de la probabilidad, las principales dificultades que se presentan, los sesgos del razonamiento probabilístico que manifiestan y errores que cometen.

La muestra participante que se tomó fue de 47 niños del grado quinto entre los 9 y 11 años. Todos ellos de la institución educativa Sagrada Familia de Apia.

FASE UNO

El punto de partida ha de ser la elaboración de un proyecto en el que se establezcan los elementos sustanciales para la solución de la pregunta formulada en la solución del problema, es decir interpretar el papel que puedan jugar las diferentes estrategias utilizadas para el desarrollo del pensamiento aleatorio en cuanto al concepto de probabilidad.

La incidencia de diferentes procesos y actividades en el desarrollo cotidiano de la enseñanza de este concepto hasta el momento han de convertirse en un punto de referencia para comprender el estado del arte de la probabilidad y con ello interpretar las diferentes apreciaciones que de él se tengan como la pertinencia o no, la utilidad o no, la necesidad o no de su aprendizaje.

FASE DOS

Después de haber clarificado los fundamentos sobre los cuales debe descansar la investigación realizada, se continuó con una fase en la que se tuvieron en cuenta las apreciaciones que desde diferentes puntos de vista y componentes escolares se aprecian, es así como a partir de la elaboración y desarrollo de un cuestionario se pudo reconocer la situación real e identificar las debilidades y fortalezas en el aprendizaje de los estudiantes del grado quinto de la I.E Sagrada Familia, respecto al concepto de probabilidad.

CUESTIONARIO:

Sin entrar en el detalle de todas las categorías de conocimientos contemplados en el modelo propuesto por Godino (2009), se utilizó la metodología sugerida por el autor que consiste en dos pasos:

1. Elegir una tarea matemática cuya solución ponga en juego los principales aspectos del contenido, o de las competencias a desarrollar, en nuestro caso, la idea de probabilidad de eventos simples.
2. Formular consignas que cubran las distintas (o principales) facetas y niveles de análisis didáctico del modelo propuesto. Para evaluar el conocimiento común del contenido, dicha consigna consistió en a) resolver el problema; para evaluar el conocimiento común del

contenido; b) identificar los objetos y procesos matemáticos puestos en juego en la solución; para evaluar el conocimiento del contenido y los estudiantes, y c) describir los razonamientos que los alumnos han desarrollado al resolver la tarea propuesta o los principales conflictos en dicha solución.

El instrumento de evaluación fue un cuestionario con 24 preguntas que pretendían indagar por el conocimiento de los estudiantes entre sucesos seguros, probables e imposibles, diferenciar entre experimento aleatorio y determinista y estimar probabilidades en forma numérica. Todos los ítems del cuestionario son de opción múltiple con única respuesta, excepto el ítem 18 que es para responder en forma escrita y han sido tomados de la página web http://repositorio.educa.jccm.es/portal/odes/matematicas/azar_y_probabilidad/mt11_oa01_es/index.html

Por último, el instrumento se probó con los estudiantes de grado quinto de la I.E Sagrada Familia. Las respuestas de cada estudiante a cada problema dependían de ciertos factores (como el conocimiento, el interés, cansancio y otros), y reflejó el significado declarado que es la parte a la que el investigador puede acceder.

FASE TRES

La sistematización de la información alcanzada se convirtió posteriormente en el insumo determinante para dar inicio a la búsqueda y generación de estrategias las cuales tuvieron como componente sustancial el análisis del desarrollo del pensamiento aleatorio de los estudiantes a partir del concepto de probabilidad de eventos simples, buscando con ello facilitar la enseñanza – aprendizaje de este concepto, lo cual a su vez proporcionó una manera nueva y diferente de ver el área como tal, y los indudables aportes a los docentes de la I.E que pueda forjar en el desarrollo cotidiano de la enseñanza propiamente dicha.

Para el análisis del cuestionario se tuvo en cuenta el contenido matemático, contexto y otros aspectos que pueden influir en las respuestas de los estudiantes. Las variables que se consideraron son las siguientes: Conocimiento evaluado, Contexto, Representación gráfica, Tipo de respuesta, Espacio muestral, utilizadas por CAÑIZARES (1997).

FASE CUATRO El culmen de este proceso estuvo determinado por las estrategias sugeridas que permitan potenciar el desarrollo del pensamiento aleatorio en los estudiantes de grado quinto de la Institución educativa.

Capítulo 4

4.1 Análisis de resultados.

4.1.1 Análisis del cuestionario aplicado.

Puesto que en el presente trabajo se está interesado por determinar si los estudiantes del grado quinto de la I.E Sagrada Familia han desarrollado el pensamiento aleatorio a partir de la probabilidad de eventos simples, a continuación se hace un análisis de cada uno de los ítems del cuestionario[3] aplicado a los estudiantes.

Sobre cada uno de ellos se analiza el contenido matemático, contexto y otros aspectos que pueden influir en las respuestas de los estudiantes. Las variables que vamos a considerar son las siguientes utilizadas por Cañizares (1997):

- Conocimiento evaluado: Conceptos o procedimientos que precisa el estudiante para resolver el problema. Aquí se pretende determinar si los estudiantes distinguen entre sucesos seguros, probables e imposibles, asignación de probabilidades simples, diferenciar entre experimento aleatorio o determinista, etc.
- Contexto: Este aspecto es muy importante cuando se presentan las situaciones probabilísticas a los estudiantes. Por ejemplo un contexto de juego de azar es más conocido para el estudiante y le facilita determinar mejor la idea de experimento aleatorio que un contexto físico. Por otro lado, ciertas investigaciones han mostrado que los alumnos no siempre consideran equivalentes dos generadores aleatorios isomorfos desde un punto de vista probabilístico (Truran, 1994 a y b; Fischbein y cols, 1991) o que no usan las mismas estrategias en dos problemas equivalentes al variar el contexto (Maury, 1984).
- *Representación gráfica:* para muchos estudiantes la representación gráfica facilita e influye en muchos casos las respuestas a los problemas.

---

[3] TOMADO DE http://repositorio.educa.jccm.es/portal/odes/matematicas/azar_y_probabilidad/mt11_oa01_es/index.html

- *Tipo de respuesta:* En este cuestionario la respuesta que se le pide a los estudiantes es de selección múltiple con única respuesta y solo en una pregunta la número 18 se le pide que represente numéricamente una probabilidad
- *Espacio muestral*: conjunto de todos los posibles resultados considerados en la pregunta.

ITEM 1: La probabilidad de que este hombre vuele.

Conocimiento evaluado: Clasifica los sucesos en seguros, probables o imposibles.

Contexto: Situación de la vida diaria del estudiante.

Representación gráfica: no hay.

Tipo de respuesta: selección múltiple con única respuesta.

Espacio muestral: en este enunciado se hace alusión a una amplia gama de experimentos aleatorios. Claramente es un contexto apropiado para el empleo de probabilidades de tipo subjetivo.

ITEM 2: La probabilidad de que Mario apruebe el examen si ha estudiado.

Conocimiento evaluado: Clasifica los sucesos en seguros, probables o imposibles.

Contexto: Situación de la vida diaria del estudiante.

Representación gráfica: no hay.

Tipo de respuesta: selección múltiple con única respuesta.

Espacio muestral: en este enunciado se hace alusión a una amplia gama de experimentos aleatorios. Claramente es un contexto apropiado para el empleo de probabilidades de tipo subjetivo.

ITEM 3: La probabilidad de que haya un monstruo debajo de la cama.

Conocimiento evaluado: Clasifica los sucesos en seguros, probables o imposibles.

Contexto: Situación de la vida diaria del estudiante.

Representación gráfica: no hay.

Tipo de respuesta: selección múltiple con única respuesta.

Espacio muestral: en este enunciado se hace alusión a una amplia gama de experimentos aleatorios. Claramente es un contexto apropiado para el empleo de probabilidades de tipo subjetivo.

ITEM 4: La probabilidad de que mañana salga el sol.

Conocimiento evaluado: Clasifica los sucesos en seguros, probables, posibles e imposibles.

Contexto: Situación de la vida diaria del estudiante.

Representación gráfica: no hay.

Tipo de respuesta: selección múltiple con única respuesta.

Espacio muestral: en este enunciado se hace alusión a una amplia gama de experimentos aleatorios. Claramente es un contexto apropiado para el empleo de probabilidades de tipo subjetivo.

ITEM 5: La probabilidad de que caiga agua cuando se abra la llave del lavamanos.

Conocimiento evaluado: Clasifica los sucesos en seguros, probables o imposibles.

Contexto: Situación de la vida diaria del estudiante.

Representación gráfica: no hay.

Tipo de respuesta: selección múltiple con única respuesta.

Espacio muestral: en este enunciado se hace alusión a una amplia gama de experimentos aleatorios. Claramente es un contexto apropiado para el empleo de probabilidades de tipo subjetivo.

ITEM 6: La probabilidad de que una moneda caiga cara.

Conocimiento evaluado: Clasifica los sucesos en seguros, probables o imposibles.

Contexto: Situación de la vida diaria del estudiante, se indica que se lanza una sola vez una moneda al aire.

Representación gráfica: no hay.

Tipo de respuesta: selección múltiple con única respuesta.

Espacio muestral: $E = \{C, S\}$. Dos sucesos simples equiprobables.

ITEM 7: La probabilidad de que un pájaro cante en este momento.

Conocimiento evaluado: Clasifica los sucesos en seguros, probables o imposibles.

Contexto: Situación de la vida diaria del estudiante.

Representación gráfica: no hay.

Tipo de respuesta: selección múltiple con única respuesta.

Espacio muestral: en este enunciado se hace alusión a una amplia gama de experimentos aleatorios. Claramente es un contexto apropiado para el empleo de probabilidades de tipo subjetivo.

ITEM 8: La probabilidad de que la joven este escuchando salsa.

Conocimiento evaluado: Clasifica los sucesos en seguros, probables, o imposibles.

Contexto: Situación de la vida diaria del estudiante.

Representación gráfica: no hay.

Tipo de respuesta: selección múltiple con única respuesta.

Espacio muestral: en este enunciado se hace alusión a una amplia gama de experimentos aleatorios. Claramente es un contexto apropiado para el empleo de probabilidades de tipo subjetivo.

En esta primera parte del cuestionario (anexo 1), se pretende determinar si los estudiantes clasifican adecuadamente las situaciones de la vida diaria en sucesos probables, seguros o imposibles, cada situación va acompañada de un dibujo o imagen que representa la situación como se aprecia en el anexo 1 lo que hace más llamativa la pregunta a los estudiantes.

En los ítems del 9 al 13 (anexo 1), se le proporcionó a los estudiantes una información sobre el conocido juego de PIEDRA, PAPEL O TIJERA, para que a partir de ella dieran respuesta a los mismos y determinar el grado de aleatoriedad del juego, los elementos que pueden intervenir en él, determinar el concepto de suerte desde el punto de vista matemático, descubrir si un juego es justo o no lo es.

ITEM 9: ¿cuándo se produce un empate en este juego?

a. Cuando los dos contrincantes eligen la misma opción.
b. Cuando un contrincante elige piedra y el otro papel.
c. Cuando un contrincante elige papel y el otro tijera.
d. Nunca se puede empatar.

Conocimiento evaluado: grado de aleatoriedad que presenta el juego y posibilidades de control sobre los fenómenos aleatorios.

Contexto: Situación de la vida diaria del estudiante en un juego real que conoce y ha practicado.

Representación gráfica: la imagen de las manos representando las diferentes opciones, piedra (puño cerrado) papel (mano abierta) y tijera (mano representando un dos con los dedos).

Tipo de respuesta: selección múltiple con única respuesta.

Espacio muestral: E = {PIEDRA, PAPEL, TIJERA}.

ITEM 10: ¿Qué situación es la más frecuente?

a. El empate.
b. Que gane el jugador 1.
c. Que gane le jugador 2.
d. No se puede saber porque es un juego de azar.

Conocimiento evaluado: determinar el concepto de suerte desde el punto de vista matemático.

Contexto: Situación de la vida diaria del estudiante en un juego real que conoce y ha practicado.

Representación gráfica: la imagen de las manos representando las diferentes opciones, piedra (puño cerrado), papel (mano abierta) y tijera (mano representando un dos con los dedos).

Tipo de respuesta: selección múltiple con única respuesta.

Espacio muestral: E = {PIEDRA, PAPEL, TIJERA}.

ITEM 11: ¿Cuántas posibilidades hay de que un contrincante elija salir con piedra?

a. No hay ninguna, porque la piedra siempre pierde.
b. Las mismas probabilidades de que elija tijera o papel.
c. Es casi seguro de que siempre se salga con piedra.
d. Siempre hay que salir eligiendo la opción piedra porque siempre se gana.

Conocimiento evaluado: grado de aleatoriedad que presenta el juego y posibilidades de control sobre los fenómenos aleatorios, determinación de si el juego es justo o no lo es y determinar el número de posibilidades que presenta el mismo.

Contexto: Situación de la vida diaria del estudiante en un juego real que conoce y ha practicado.

Representación gráfica: la imagen de las manos representando las diferentes opciones, piedra (puño cerrado) papel (mano abierta) y tijera (mano representando un dos con los dedos).

Tipo de respuesta: selección múltiple con única respuesta.

Espacio muestral: E = {PIEDRA, PAPEL, TIJERA}.

ITEM 12: ¿Hay algún truco para ganar?

a. Sí, saliendo con piedra.
b. Sí, saliendo con tijera.
c. Sí, saliendo con papel.
d. No, porque es un juego de azar.

Conocimiento evaluado: grado de aleatoriedad que presenta el juego y posibilidades de control sobre los fenómenos aleatorios, determinación de si el juego es justo o no lo es.

Contexto: Situación de la vida diaria del estudiante, en un juego real que conoce y ha practicado.

Representación gráfica: la imagen de las manos representando las diferentes opciones, piedra (puño cerrado) papel (mano abierta) y tijera (mano representando un dos con los dedos).

Tipo de respuesta: selección múltiple con única respuesta.

Espacio muestral: E = {PIEDRA, PAPEL, TIJERA}.

ITEM 13: ¿Sirve para ganar tener algún amuleto?

a. Sí, si tienes un amuleto siempre se gana.
b. Depende del tipo de amuleto.
c. No, porque es un juego de azar.
d. Sí, los amuletos siempre dan buena suerte.

Conocimiento evaluado: grado de aleatoriedad que presenta el juego y posibilidades de control sobre los fenómenos aleatorios.

Contexto: Situación de la vida diaria del estudiante, en un juego real que conoce y ha practicado.

Representación gráfica: la imagen de las manos representando las diferentes opciones, piedra (puño cerrado) papel (mano abierta) y tijera (mano representando un dos con los dedos).

Tipo de respuesta: selección múltiple con única respuesta.

Espacio muestral: E = {PIEDRA, PAPEL, TIJERA}.

En los ítems 14 al 17 (anexo 1) se da una situación real de un juego que consiste en que la persona que ELIJA EL PALILLO MÁS CORTO PIERDE. Aquí lo que se pretende es determinar el grado de aleatoriedad del juego, los elementos que pueden intervenir en él, determinar el concepto de suerte desde el punto de vista matemático, el cálculo de probabilidades y descubrir si un juego es justo o no lo es.

ITEM 14: ¿Qué probabilidad hay de perder, si en total hay 8 palillos?

a. Las posibilidades de perder son las mismas que las posibilidades de ganar.
b. No hay ninguna posibilidad de perder.
c. Hay una posibilidad de perder y siete de ganar.
d. Siempre se pierde.

Conocimiento evaluado: cálculo de la probabilidad de un evento sencillo.

Contexto: Situación de la vida diaria del estudiante en un juego real que conoce y ha practicado.

Representación gráfica: los palillos de diferentes tamaños.

Tipo de respuesta: selección múltiple con única respuesta.

Espacio muestral: E = {P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8}. (P= PALILLOS)

ITEM 15: ¿Ser el primero en elegir un palillo da alguna ventaja?

a. Sí, porque el primer palillo siempre es largo.
b. No, porque se puede sacar un palillo largo o un palillo corto.
c. No, porque el primer palillo siempre será más pequeño que le resto.
d. Sí, porque el que saca primero siempre gana.

Conocimiento evaluado: Elementos que pueden intervenir en el juego, determinar el concepto de suerte desde el punto de vista matemático y descubrir si el juego es justo o no lo es.

Contexto: Situación de la vida diaria del estudiante en un juego real que conoce y ha practicado.

Representación gráfica: los palillos de diferentes tamaños.

Tipo de respuesta: selección múltiple con única respuesta.

Espacio muestral: E = {P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8}. (P= PALILLOS)

ITEM 16: ¿Qué pasa si juegas un martes 13?

a. En martes y 13 siempre se pierde.
b. Es mejor no jugar un martes y 13.
c. Lo mismo que si juegas cualquier otro día.
d. Que hay más posibilidades de perder.

Conocimiento evaluado: Elementos que pueden intervenir en el juego, determinar el concepto de suerte desde el punto de vista matemático y posibilidades de control sobre los fenómenos aleatorios.

Contexto: Situación de la vida diaria del estudiante.

Representación gráfica: no hay.

Tipo de respuesta: selección múltiple con única respuesta.

Espacio muestral: en este enunciado se hace alusión a una amplia gama de experimentos aleatorios. Claramente es un contexto apropiado para el empleo de probabilidades de tipo subjetivo.

ITEM 17: ¿Y si juegas con unos pantalones amarillos?

a. El color amarillo da mala suerte.
b. Lo mismo que con pantalones de cualquier otro color.
c. Nunca hay que jugar con ropa de color amarillo.

d. Hay más posibilidades de perder, aunque también se puede ganar.

Conocimiento evaluado: Elementos que pueden intervenir en el juego, determinar el concepto de suerte desde el punto de vista matemático y posibilidades de control sobre los fenómenos aleatorios.

Contexto: Situación de la vida diaria del estudiante.

Representación gráfica: no hay.

Tipo de respuesta: selección múltiple con única respuesta.

Espacio muestral: en este enunciado se hace alusión a una amplia gama de experimentos aleatorios. Claramente es un contexto apropiado para el empleo de probabilidades de tipo subjetivo.

En el ítem 18 como ya se dijo anteriormente lo que se pretende es que el estudiante aplique de forma directa la regla de La place para que calcule y exprese de forma numérica la probabilidad que se le pide, aquí se les recuerda la fórmula para calcular una probabilidad. (P= No DE CASOS FAVORABLES/ No DE CASOS POSIBLES).

ITEM 18: Andrés ha metido cinco bolas de color azul y otras cinco bolas de color rojo en la caja. ¿Cuál es la probabilidad de que saque sin mirar, una bola de color azul?

Conocimiento evaluado: Calculo de una probabilidad simple en un evento sencillo.

Contexto: caja con cinco bolas de color azul y cinco de color rojo (5Azules/ 10 Bolas), probabilidad de extraer una azul.

Representación gráfica: la caja con su composición.

Tipo de respuesta: selección múltiple con única respuesta.

Espacio muestral: un espacio muestral finito, E = {A, R}

En los ítems del 19 al 24 (anexo 1) se utiliza la baraja española como pretexto para que los estudiantes determinen la probabilidad pedida en diferentes situaciones, cabe anotar que los estudiantes tuvieron la posibilidad con anterioridad de jugar con la baraja española diferentes juegos que se pueden hacer con ella, como la 21, el burro, guerra de cartas, etc. Es decir que de antemano ya conocían el juego y que el total de cartas era de 40. Aquí lo que se pretende es identificar si los estudiantes son capaces de determinar la probabilidad pedida aplicando la regla de La Place, mediante la representación fraccionaria, o mediante una determinación de casos favorables y desfavorables.

ITEM 19: cualquier carta de la baraja española tiene una probabilidad de ser sacada al azar de:

Conocimiento evaluado: Calculo de una probabilidad simple en un experimento aleatorio, representación fraccionaria, casos favorables y casos desfavorables.

Contexto: situación de aleatoriedad utilizando cartas de la baraja española.

Representación gráfica: no hay.

Tipo de respuesta: selección múltiple con única respuesta.

Espacio muestral: espacio muestral finito 40 cartas de la baraja española, sucesos simples equiprobables (P = 1/40).

ITEM 20: La probabilidad de sacar al azar de una baraja española una carta con una numeración menor que cuatro es:

Conocimiento evaluado: Calculo de una probabilidad simple en un experimento aleatorio, representación fraccionaria, casos favorables y casos desfavorables.

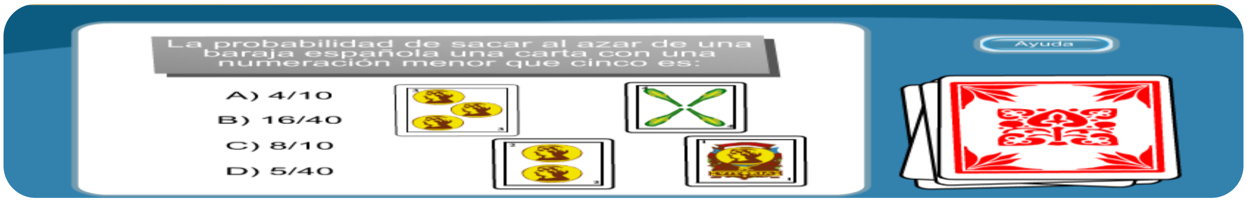
Contexto: situación de aleatoriedad utilizando cartas de la baraja española.

Representación gráfica: no hay.

Tipo de respuesta: selección múltiple con única respuesta.

Espacio muestral: espacio muestral finito 40 cartas de la baraja española sucesos simples equiprobables, (P = 12/40).

ITEM 21: La probabilidad de sacar al azar de una baraja española una carta con una numeración menor que cinco es:



Conocimiento evaluado: Calculo de una probabilidad simple en un experimento aleatorio, representación fraccionaria, casos favorables y casos desfavorables.

Contexto: situación de aleatoriedad utilizando cartas de la baraja española.

Representación gráfica: no hay.

Tipo de respuesta: selección múltiple con única respuesta.

Espacio muestral: espacio muestral finito 40 cartas de la baraja española (P=16/40).

ITEM 22: la probabilidad de sacar esta carta (rey de bastos) de la baraja española.

Conocimiento evaluado: Calculo de una probabilidad simple en un experimento aleatorio, representación fraccionaria, casos favorables y casos desfavorables.

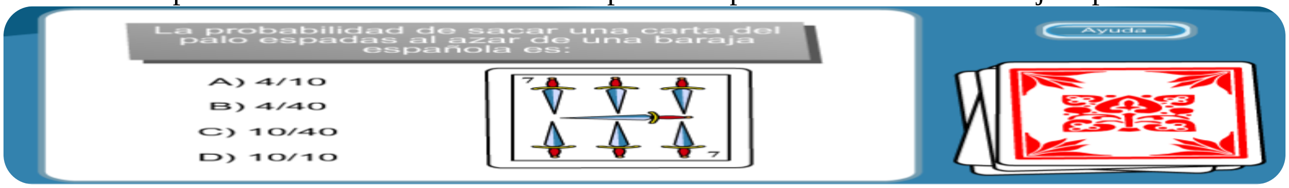
Contexto: situación de aleatoriedad utilizando cartas de la baraja española.

Representación gráfica: no hay.

Tipo de respuesta: selección múltiple con única respuesta.

Espacio muestral: espacio muestral finito 40 cartas de la baraja española (P= 1/40).

ITEM 23: La probabilidad de sacar una carta del palo de espadas al azar de una baraja española es:



Conocimiento evaluado: Calculo de una probabilidad simple en un experimento aleatorio, representación fraccionaria, casos favorables y casos desfavorables.

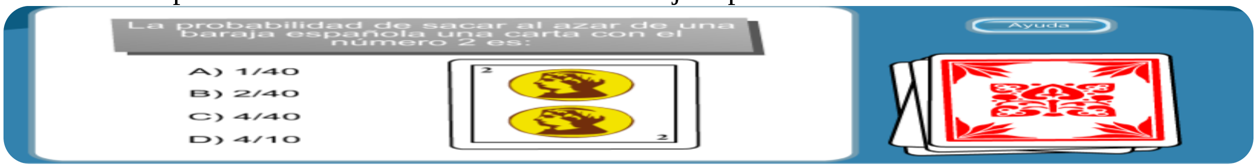
Contexto: situación de aleatoriedad utilizando cartas de la baraja española.

Representación gráfica: no hay.

Tipo de respuesta: selección múltiple con única respuesta.

Espacio muestral: espacio muestral finito 40 cartas de la baraja española (P = 10/40).

ITEM 24: La probabilidad de sacar al azar de una baraja española una carta con el número 2 es:



Conocimiento evaluado: Calculo de una probabilidad simple en un experimento aleatorio, representación fraccionaria, casos favorables y casos desfavorables.

Contexto: situación de aleatoriedad utilizando cartas de la baraja española.

Representación gráfica: no hay.

Tipo de respuesta: selección múltiple con única respuesta.

Espacio muestral: espacio muestral finito 40 cartas de la baraja española (P= 4/40).

En síntesis, en el anterior cuestionario se considera que para que el estudiante tenga un buen desarrollo del pensamiento aleatorio a través del concepto de probabilidad éste debe estar en capacidad de:

1. Identificar desde diferentes situaciones cuando un suceso se puede clasificar en seguro, probable e imposible (ítem 1 al 8).

2. Reconocer la aleatoriedad en los diferentes sucesos de la vida diaria. (ítem 1 al 8)
3. Reconocer el grado de aleatoriedad o no de algunos juegos (ítem 9 al 13 y 14 al 17).
4. Identificar los diferentes elementos probabilísticos que pueden intervenir en un juego (ítem 9 al 13 y 14 al 17).
5. Identificar el concepto de suerte desde el punto de vista matemático (factores causales improcedentes en situaciones puramente aleatorias). (ítem 9,10, 13, 16, 17)
6. Diferenciar cuando un juego es justo o no lo es, es decir juego equitativo. (ítem 12, 15).
7. Representar numéricamente el cálculo de una probabilidad simple. (ítem 18).
8. Determinar correctamente el cálculo de una probabilidad simple aplicando la fórmula de Laplace. (N° casos favorables/ N° total de casos). (ítem 19 al 24).

Los contextos usados en el presente cuestionario son situaciones de la vida diaria en la que están inmersos los estudiantes, sucesos naturalistas, juegos de amplio conocimiento por los estudiantes y que los han practicado alguna vez en su vida, y juegos de azar (baraja española que tuvieron la oportunidad de interactuar con ella a través de la práctica de diferentes modalidades de juego).

4.2 Resultados y discusión

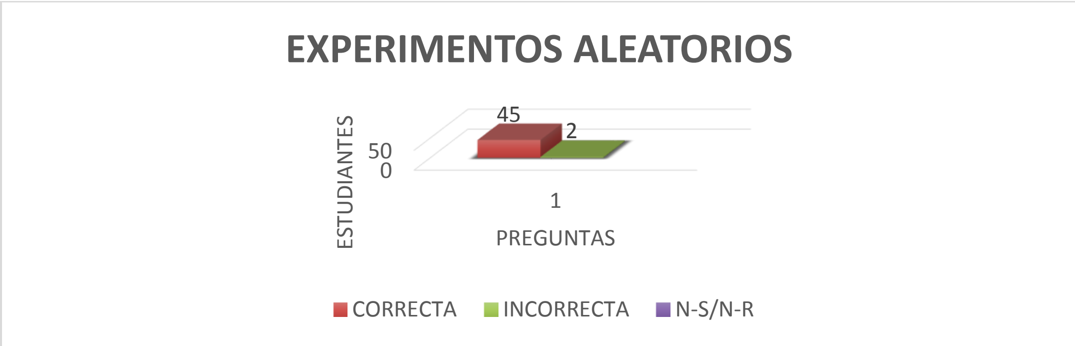
Seguidamente se hace un análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes de grado quinto de la I.E sagrada Familia en cada uno de los problemas propuestos en el cuestionario. Para facilitar el estudio, los problemas se han agrupado según el concepto que se trabaja en cada uno de ellos.

EXPERIMENTOS ALEATORIOS

En este apartado se analizan los resultados obtenidos por los estudiantes de grado quinto de la I.E Sagrada Familia en los ítems del 1 al 8, sobre el concepto de experimentos aleatorios en los cuales ellos deben de clasificar las diferentes situaciones presentadas en sucesos seguros, probables e imposibles las respuestas a estos problemas se han clasificado en correctas e incorrectas para hacer un mejor análisis.

ITEM 1: La probabilidad de que este hombre vuele. 

Las respuestas al problema se han clasificado en las categorías que aparecen en la gráfica 1, a continuación analizamos las respuestas correctas e incorrectas.



GRÁFICA 1

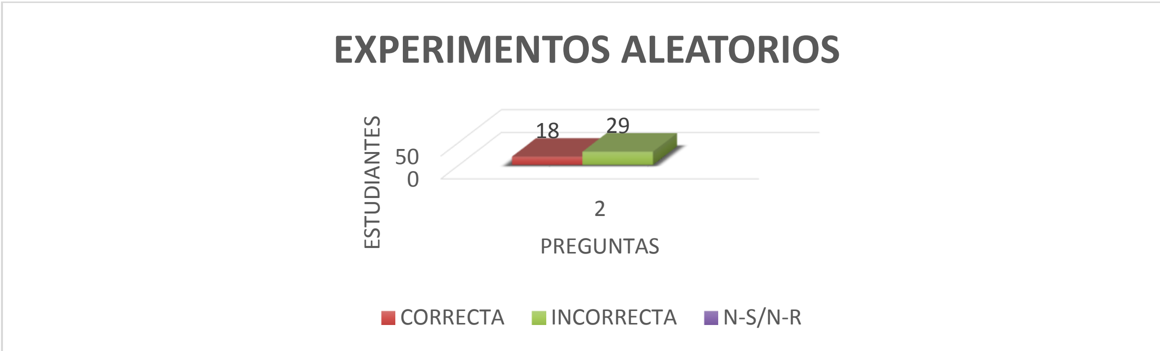
En ella se observa que la mayoría de las respuestas dadas por los estudiantes es la correcta es decir "IMPOSIBLE" (95.74%), de 47 estudiantes 45 respondieron acertadamente.

En las respuestas incorrectas, es decir los estudiantes que eligieron otras opciones (SEGURO O PROBABLE) aparecen 2 estudiantes (4.25%) y N-S/N-R (no sabe - no responde), no se ubicó ningún estudiante.

Es decir que la mayoría de los estudiantes del grado quinto de la I.E Sagrada Familia clasifica correctamente este tipo de situación ya que es una situación que está relacionada con su experiencia, además de ser una situación irreal que para su edad son propias de niños en las etapas pre-operacional y concreta según Piaget e Inhelder (1951).

ITEM 2: La probabilidad de que Mario apruebe el examen si ha estudiado.

Las respuestas al problema se han clasificado en las categorías que aparecen en la gráfica 2, a continuación analizamos las respuestas correctas e incorrectas.



GRAFICA 2

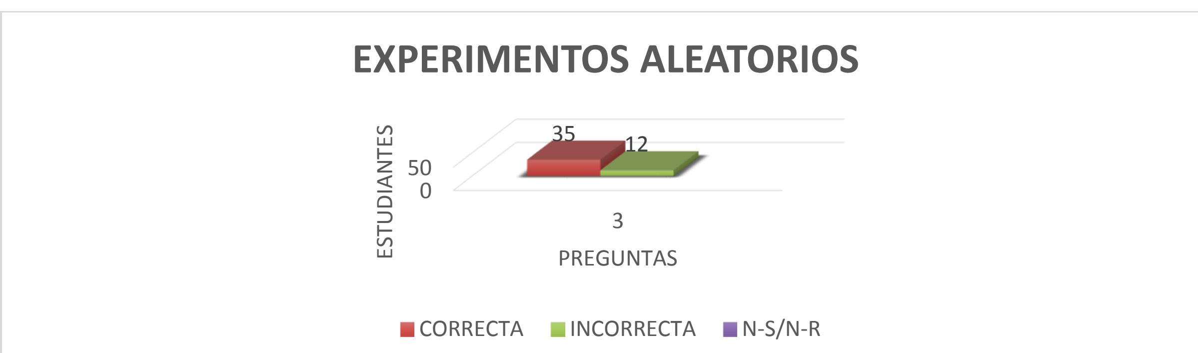
En ella se observa que la minoría de las respuestas dadas por los estudiantes es la correcta es decir "PROBABLE" (38.3%), de 47 estudiantes 18 respondieron acertadamente.

En las respuestas incorrectas, es decir los estudiantes que eligieron otras opciones (SEGURO O IMPOSIBLE) aparecen 29 estudiantes (61.70%) y N-S/N-R (no sabe - no responde), no se ubicó ningún estudiante.

Es decir que la mayoría de los estudiantes del grado quinto de la I.E Sagrada Familia clasifica incorrectamente este tipo de situación, ya que puede existir sesgos que lo llevan a confundir lo probable con lo seguro y posible ya que ellos tienen en sus arraigos que el estudiar es una consecuencia segura de ganar la prueba ya que este tipo de situación es tan común para ellos y que está relacionada con su experiencia y su diario vivir.

ITEM 3: La probabilidad de que haya un monstruo debajo de la cama.

Las respuestas al problema se han clasificado en las categorías que aparecen en la gráfica 3, a continuación analizamos las respuestas correctas e incorrectas.



GRAFICA 3

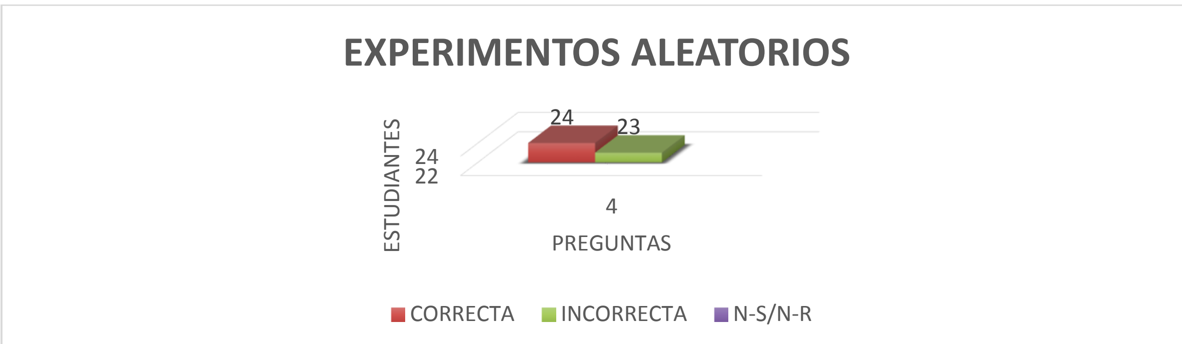
En ella se observa que la mayoría de las respuestas dadas por los estudiantes es la correcta es decir "IMPOSIBLE", de 47 estudiantes 35 (74.46%) respondieron acertadamente.

En las respuestas incorrectas, es decir los estudiantes que eligieron otras opciones (SEGURO O PROBABLE) aparecen 12 estudiantes (25.54%) y N-S/N-R (no sabe - no responde), no se ubicó ningún estudiante.

Es decir que aunque la mayoría de los estudiantes del grado quinto de la I.E Sagrada Familia clasifica correctamente este tipo de situación, el porcentaje de los estudiantes que respondieron incorrectamente es alto y no va de acuerdo con su desarrollo mental.

ITEM 4: La probabilidad de que mañana salga el sol.

Las respuestas al problema se han clasificado en las categorías que aparecen en la gráfica 4, a continuación analizamos las respuestas correctas e incorrectas.



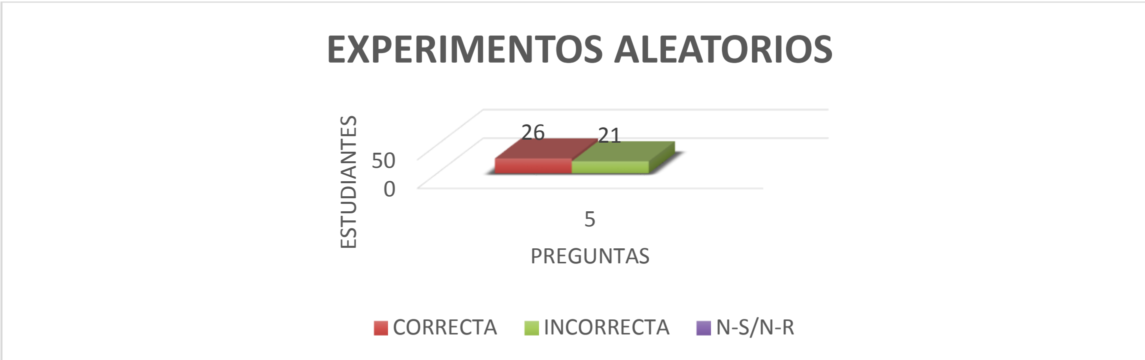
GRAFICA 4

En ella se observa que la mayoría de las respuestas dadas por los estudiantes es la correcta es decir "PROBABLE", de 47 estudiantes 24 (51.06%) respondieron acertadamente.

En las respuestas incorrectas, es decir los estudiantes que eligieron otras opciones (SEGURO O IMPOSIBLE) aparecen 23 estudiantes (48.94%) y N-S/N-R (no sabe - no responde), no se ubicó ningún estudiante.

Es decir que aunque la mayoría de los estudiantes del grado quinto de la I.E Sagrada Familia clasifica correctamente este tipo de situación naturalista, el porcentaje de los estudiantes que respondieron incorrectamente es muy alto y esto pudo ser debido a que por sus creencias se dejaron llevar para dar respuesta a la pregunta, pues en el día que se aplicó el cuestionario había llovido los días anteriores.

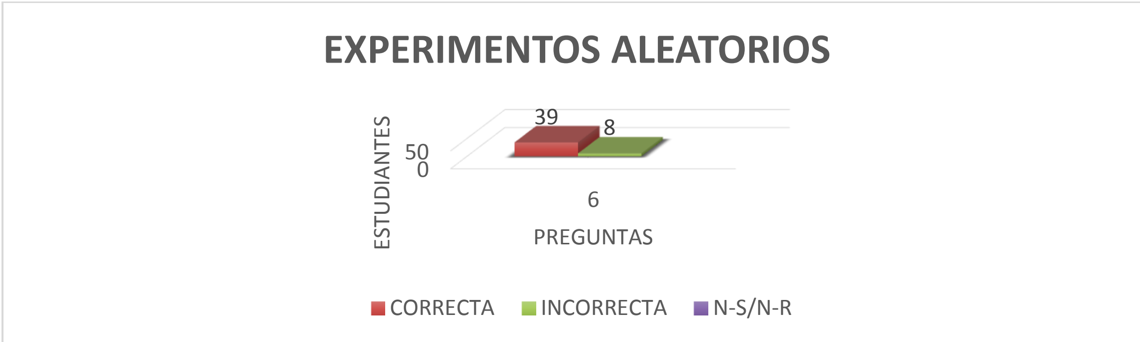
ITEM 5: La probabilidad de que caiga agua cuando se abra la llave del lavamanos.
Las respuestas al problema se han clasificado en las categorías que aparecen en la gráfica 5, a continuación analizamos las respuestas correctas e incorrectas.



GRAFICA 5

En ella se observa que la mayoría de las respuestas dadas por los estudiantes es la correcta es decir "SEGURO", de 47 estudiantes 26 (55.31%) respondieron acertadamente.
En las respuestas incorrectas, es decir los estudiantes que eligieron otras opciones (PROBABLE O IMPOSIBLE) aparecen 21 estudiantes (44.69%) y N-S/N-R (no sabe - no responde), no se ubicó ningún estudiante.
Es decir que aunque la mayoría de los estudiantes del grado quinto de la I.E Sagrada Familia clasifica correctamente este tipo de situación real que vive diariamente, el porcentaje de los estudiantes que respondieron incorrectamente es muy alto y esto pudo ser debido a que por ubicarse en el municipio de Apia donde quitan el agua muy seguido esto haya influido en sus respuestas, no teniendo en cuenta el concepto de lo aleatorio.
ITEM 6: La probabilidad de que una moneda caiga cara.

Las respuestas al problema se han clasificado en las categorías que aparecen en la gráfica 6, a continuación analizamos las respuestas correctas e incorrectas.



GRÁFICA 6

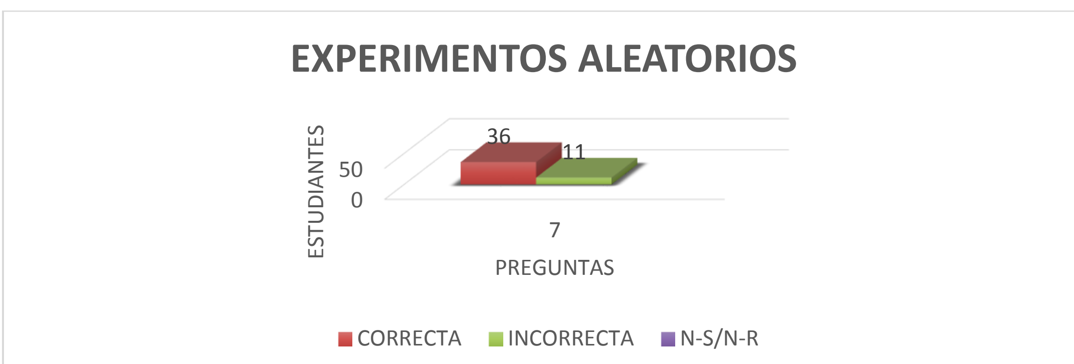
En ella se observa que la mayoría de las respuestas dadas por los estudiantes es la correcta es decir "PROBABLE", de 47 estudiantes 39 (82.97%) respondieron acertadamente.

En las respuestas incorrectas, es decir los estudiantes que eligieron otras opciones (SEGURO, O IMPOSIBLE) aparecen 8 estudiantes (17.03%) y N-S/N-R (no sabe - no responde), no se ubicó ningún estudiante.

Es decir que la mayoría de los estudiantes del grado quinto de la I.E Sagrada Familia clasifica correctamente este tipo de situación típica de un contexto probabilístico.

ITEM 7: La probabilidad de que un pájaro cante en este momento.

Las respuestas al problema se han clasificado en las categorías que aparecen en la gráfica 7, a continuación analizamos las respuestas correctas e incorrectas.



GRAFICA 7

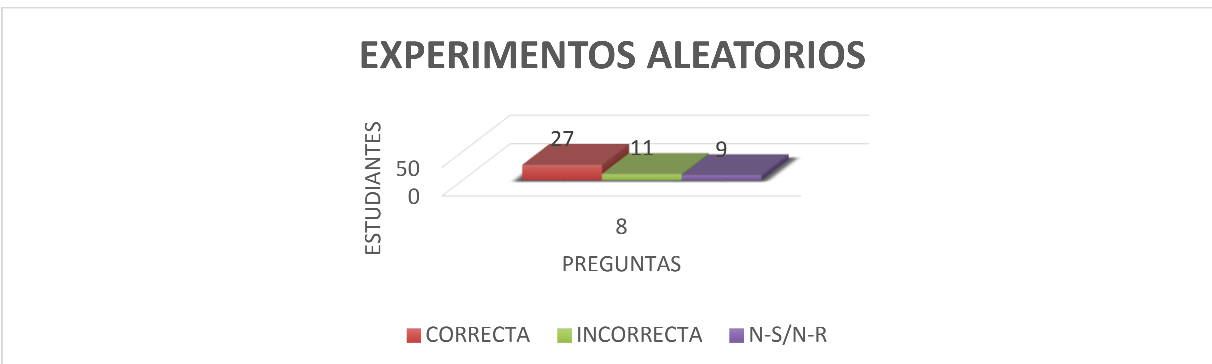
En ella se observa que la mayoría de las respuestas dadas por los estudiantes es la correcta es decir "PROBABLE", de 47 estudiantes 36 (76.59%) respondieron acertadamente.

En las respuestas incorrectas, es decir los estudiantes que eligieron otras opciones (SEGURO, IMPOSIBLE) aparecen 11 estudiantes (23.41%) y N-S/N-R (no sabe - no responde), no se ubicó ningún estudiante.

Es decir que esta pregunta a pesar de ser del tipo naturalista, la mayoría de los estudiantes del grado quinto de la I.E Sagrada Familia la clasifica correctamente contradiciendo a los resultados obtenidos en un ítem anterior donde este tipo de situación había causado dificultad para dar la respuesta. Para los estudiantes esta situación es más familiar y más fácil de responder.

ITEM 8: La probabilidad de que la joven este escuchando salsa.

Las respuestas al problema se han clasificado en las categorías que aparecen en la gráfica 8, a continuación analizamos las respuestas correctas e incorrectas.



GRÁFICA 8

En ella se observa que la mayoría de las respuestas dadas por los estudiantes es la correcta es decir "PROBABLE", de 47 estudiantes 27 (57.44%) respondieron acertadamente.

En las respuestas incorrectas, es decir los estudiantes que eligieron otras opciones (SEGURO O IMPOSIBLE) aparecen 11 estudiantes (23.40%) y N-S/N-R (no sabe - no responde), se ubicaron 9 estudiantes (19.16%).

Es decir que este tipo de situación a pesar de ser tan familiar para los estudiantes y que la mayoría de ellos la clasifica correctamente hay muchos que no relacionan ninguna respuesta con el enunciado, causando dificultad para encontrar la respuesta, pudiendo ser que no la relacionan con ningún hecho aleatorio.

En resumen, los resultados obtenidos muestran que la mayor parte de los estudiantes de grado quinto de la I.E Sagrada Familia han demostrado poseer un adecuado significado personal en cuanto a distinguir correctamente sucesos seguros, probables e imposibles ya que hay 250 respuestas correctas, 117 incorrectas y 9 sin responder. Sin embargo en las preguntas de sucesos naturalistas no parece haber una consistencia ya que en el ítem 4 el 48.94% de los estudiantes responde incorrectamente y en el ítem 7 la respuesta baja a 23.41% notándose cierto sesgo por determinar los acontecimientos desde la perspectiva subjetiva y no desde lo aleatorio, es decir, al aplicar el cuestionario se pone de manifiesto que los estudiantes se dejan influenciar por hechos casuales (como la de que ayer llovió, hoy también, mañana vuelve a llover, o que quitan muchas veces el agua en el municipio, por lo tanto al abrir la llave no es seguro que salga agua) sobre una situación aleatoria ítem 4 y 5 respectivamente.

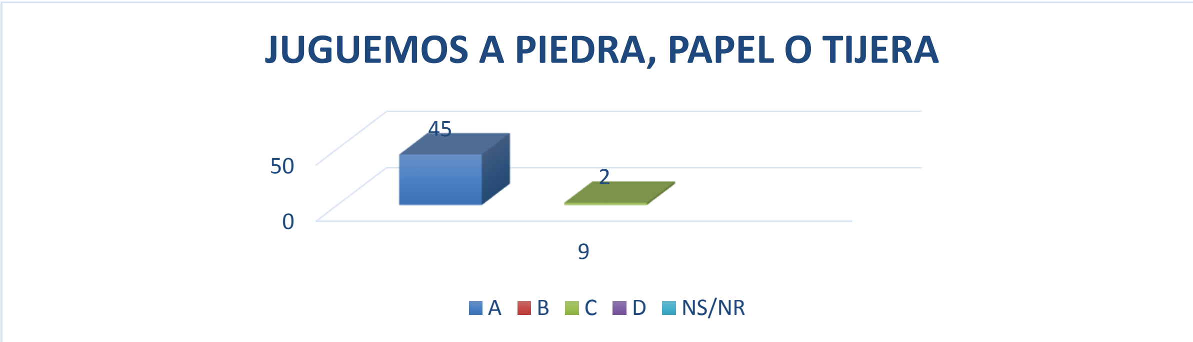
EL AZAR Y LA VIDA COTIDIANA

En este apartado se analizan los resultados obtenidos por los estudiantes de grado quinto de la I.E Sagrada Familia al aplicarles el cuestionario, en los ítems del 9 al 13, con estos ítems se pretende determinar a partir del juego de "PIEDRA, PAPEL O TIJERA" (un juego que los estudiantes ya lo han practicado y que conocen las reglas); el adecuado significado personal que demuestran los estudiantes en relación a las regularidades del azar, el grado de aleatoriedad o no del juego, reconocer los elementos que intervienen en el juego, examinar el concepto de suerte desde el punto de vista matemático y descubrir si un juego es justo o no lo es, las respuestas a estos problemas son de selección múltiple.

ITEM 9: ¿Cuándo se produce un empate en este juego?

a. Cuando los dos contrincantes eligen la misma opción.
b. Cuando un contrincante elige piedra y el otro papel.
c. Cuando un contrincante elige papel y el otro tijera.
d. Nunca se puede empatar.

Las respuestas al problema se han clasificado en las categorías que aparecen en la gráfica 9, a continuación analizamos las respuestas correctas e incorrectas.



GRÁFICA 9

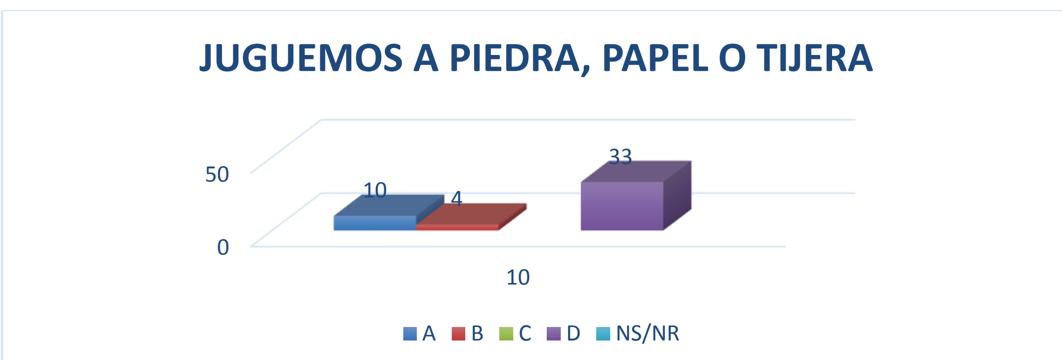
En ella se observa que la mayoría de las respuestas dadas por los estudiantes es la correcta es decir la opción A (cuando los dos contrincantes eligen la misma opción), de 47 estudiantes 45 (95.74%) respondieron acertadamente.

En las respuestas incorrectas, es decir los estudiantes que eligieron otra opción en este caso la C (Cuando un contrincante elige papel y el otro tijera.) aparecen 2 estudiantes (4.26%). Es decir que los estudiantes reconocen los elementos que intervienen en este juego.

ITEM 10: ¿Qué situación es la más frecuente?

a. El empate.
b. Que gane el jugador 1.
c. Que gane le jugador 2.
d. No se puede saber porque es un juego de azar.

Las respuestas al problema se han clasificado en las categorías que aparecen en la gráfica 10, a continuación analizamos las respuestas correctas e incorrectas.



GRÁFICA 10

En ella se observa que la mayoría de las respuestas dadas por los estudiantes es la correcta es decir la opción D (no se puede saber porque es un juego de azar), de 47 estudiantes 33 (70.21%) respondieron acertadamente.

En las respuestas incorrectas, es decir los estudiantes que eligieron otra opción en este caso la A (el empate.) 10 (21.27%) estudiantes y la opción B (que gane el jugador 1) aparecen 4 (8.52%). Es decir que la mayoría de los estudiantes sí reconocen el grado de aleatoriedad del juego, según Batanero, Serrano y Green (1998), el concepto de aleatoriedad es el punto básico en el estudio de la probabilidad y por ello, es fundamental que el alumno tenga una correcta comprensión de esta idea, para que pueda avanzar en el campo del cálculo de probabilidades. Sin embrago hay 14 estudiantes que no tienen muy claro dicho concepto aunque así como lo manifiestan Batanero y Serrano (1995) el análisis epistemológico del concepto así como la investigación psicológica muestran la complejidad para los estudiantes del significado de la aleatoriedad. O estas respuestas pueden estar condicionadas por la subjetividad de los estudiantes al practicar el juego y encontrarse con esas regularidades (opciones A y B).

ITEM 11: ¿Cuántas posibilidades hay de que un contrincante elija salir con piedra?

a. No hay ninguna, porque la piedra siempre pierde.
b. Las mismas probabilidades de que elija tijera o papel.
c. Es casi seguro de que siempre se salga con piedra.
d. Siempre hay que salir eligiendo la opción piedra porque siempre se gana.

Las respuestas al problema se han clasificado en las categorías que aparecen en la gráfica 11, a continuación se analiza las respuestas correctas e incorrectas.

GRÁFICA 11

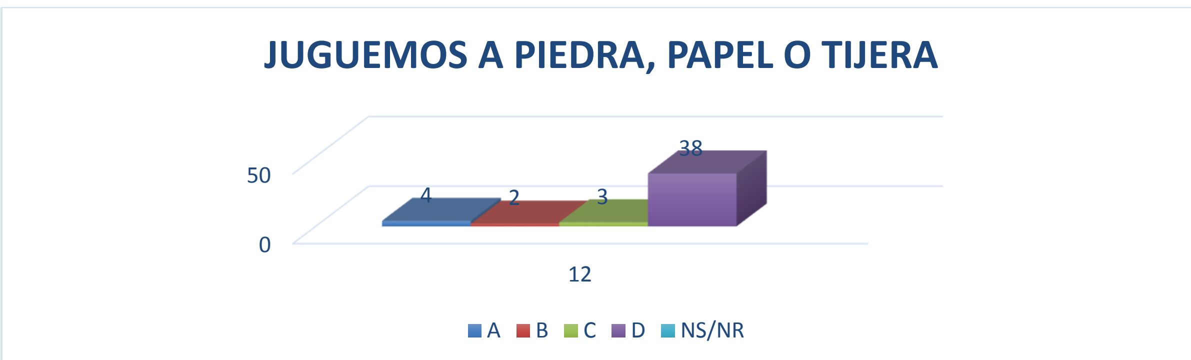
En ella se observa que la mayoría de las respuestas dadas por los estudiantes es la correcta es decir la opción B (las mismas probabilidades de que elija tijera o papel), de 47 estudiantes 28 (59.57%) respondieron acertadamente.

En las respuestas incorrectas, es decir los estudiantes que eligieron otra opción en este caso la A (no hay ninguna porque la piedra siempre pierde) 3 (6.38%) estudiantes, la opción C (es casi seguro de que siempre se salga con piedra) aparecen 11 estudiantes (23.40%) y la opción D 1 estudiante (2.12%). En este caso aunque hay una mayoría de estudiantes que reconoce el grado de aleatoriedad del juego, también hay muchos estudiantes que aún no tienen muy claro este concepto y se dejan llevar por sus propias experiencias, pues al practicarlo es muy probable que utilicen una de las estrategias definidas en las opciones incorrectas.

ITEM 12: ¿Hay algún truco para ganar?

a. Sí, saliendo con piedra.
b. Sí, saliendo con tijera.
c. Sí, saliendo con papel.
d. No, porque es un juego de azar.

Las respuestas al problema se han clasificado en las categorías que aparecen en la gráfica 12, a continuación se analiza las respuestas correctas e incorrectas.



GRÁFICA 12

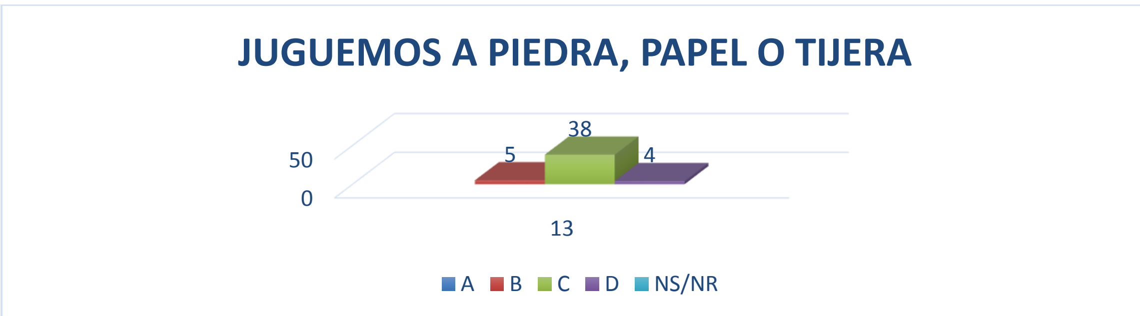
En ella se observa que la mayoría de las respuestas dadas por los estudiantes es la correcta es decir la opción D (no porque es un juego de azar), de 47 estudiantes 38 (80.85%) respondieron acertadamente.

En las respuestas incorrectas, es decir los estudiantes que eligieron otra opción en este caso la A (sí, saliendo con piedra) 4 (8.51%) estudiantes, la opción B (sí, saliendo con tijera) aparecen 2 estudiantes (4.25%) y la opción C 3 estudiantes (6.38%). Con esta pregunta se determina que la gran mayoría de los estudiantes reconoce que hay un elemento de aleatoriedad en el juego, es decir que reconoce el juego como un juego de azar, en el cual están involucrados diferentes opciones para poder ganar y todo queda a la suerte, además de tener conciencia del concepto juego justo, pues ninguno de los participantes tiene más ventaja de ganar que el otro. Sin embargo hay un grupo pequeño de estudiantes que aún manifiestan estar influenciados por la propia experiencia al momento de desarrollar el juego y los lleva a seleccionar la opción errada.

ITEM 13: ¿Sirve para ganar tener algún amuleto?

a. Sí, si tienes un amuleto siempre se gana.
b. Depende del tipo de amuleto.
c. No, porque es un juego de azar.
d. Sí, los amuletos siempre dan buena suerte.

Las respuestas al problema se han clasificado en las categorías que aparecen en la gráfica 13, a continuación se analiza las respuestas correctas e incorrectas.



GRÁFICA 13

En ella se observa que la mayoría de las respuestas dadas por los estudiantes es la correcta es decir la opción C (no, porque es un juego de azar), de 47 estudiantes 38 (80.85%) respondieron acertadamente.

En las respuestas incorrectas, es decir los estudiantes que eligieron otra opción en este caso la B (depende del tipo de amuleto) 5 (10.63%) estudiantes, la opción D (sí, los amuletos siempre dan buena suerte) aparecen 4 estudiantes (17.02%). Con esta pregunta se determina que la gran mayoría de los estudiantes reconoce que hay un grado de aleatoriedad en el juego, reconocen los elementos que pueden intervenir en el juego, y reconoce el concepto de suerte desde el punto de vista matemático es decir que reconocen el juego como un juego de azar. Aunque se observa que en nueve de los estudiantes subyace la creencia muy arraigada en la cultura de los pueblos de que los amuletos son determinantes para la suerte de las personas.

Las conclusiones obtenidas al aplicar estos ítems a los estudiantes son las siguientes:

Los estudiantes en su gran mayoría han manifestado poseer un adecuado significado personal en el concepto de aleatoriedad el cual es importante, pues como lo expresa Batanero, Serrano y Green (1998), el concepto de aleatoriedad es el punto básico en el estudio de la probabilidad y por ello, es fundamental que el alumno tenga una correcta comprensión de esta idea, para que pueda avanzar en el campo del cálculo de probabilidades. Sin embargo, aún se nota en algunos estudiantes que presentan problemas para determinar la aleatoriedad del juego, aunque Fischbein (1975), considera que la intuición primaria del azar, es decir la distinción entre fenómeno determinista y aleatorio sin instrucción previa, está presente en la conducta diaria de cada niño, incluso antes de la edad de 7 años, es decir que esta intuición debería estar ya arraigada en los estudiantes de grado quinto.

Por otro lado, la gran mayoría de los estudiantes determinan los elementos que intervienen en el juego, esto es comprensible desde el punto de vista de que los estudiantes ya han tenido una gran experiencia en la práctica del juego pues es reconocido por ellos, sin embargo esto hace que muchos de los estudiantes respondan de manera errada a algunas preguntas debido a que está arraigado en ellos la subjetividad dejando de lado el concepto de aleatoriedad y sus características. Además de las tradiciones culturales y educativas de la sociedad moderna que le orientan el pensamiento hacia explicaciones deterministas unívocas. Mohamed (2012), como en el caso del ítem 13 (¿sirve tener un amuleto para ganar?) donde varios estudiantes responden erradamente.

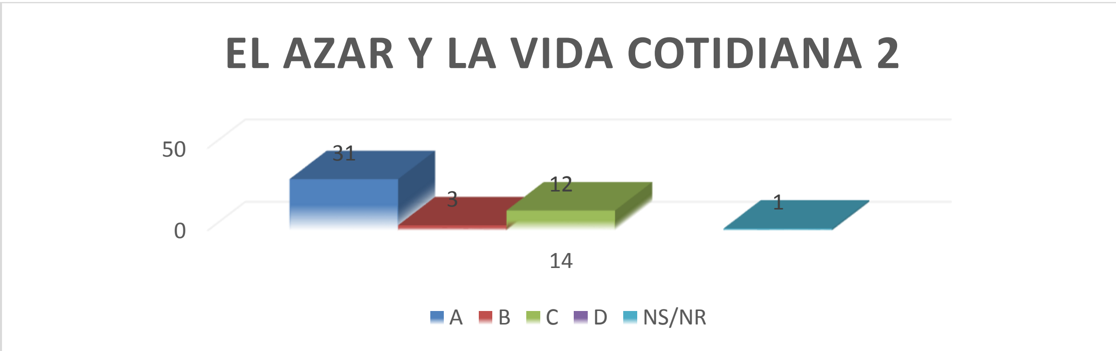
EL AZAR Y LA VIDA COTIDIANA 2

En este apartado se analizan los resultados obtenidos por los estudiantes de grado quinto de la I.E Sagrada Familia al aplicarles el cuestionario, en los ítems del 14 al 17, con estos ítems se pretende, al igual que en el apartado anterior, determinar a partir de un nuevo juego muy conocido por los estudiantes denominado “LA PERSONA QUE ELIJE EL PALILLO MAS CORTO PIERDE”; el significado personal que tienen los estudiantes en relación a las regularidades del azar, el grado de aleatoriedad o no del juego, reconocer los elementos que intervienen en el juego, examinar el concepto de suerte desde el punto de vista matemático y descubrir si el juego es justo o no lo es, las respuestas a estos problemas son de selección múltiple.

ITEM 14: ¿Qué probabilidad hay de perder, si en total hay 8 palillos?

a. Las posibilidades de perder son las mismas que las posibilidades de ganar.
b. No hay ninguna posibilidad de perder.
c. Hay una posibilidad de perder y siete de ganar.
d. Siempre se pierde.

Las respuestas al problema se han clasificado en las categorías que aparecen en la gráfica 14, a continuación se analiza las respuestas correctas e incorrectas.



GRAFICA 14

En ella se observa que de 47 estudiantes solo 12 (25.53%) respondieron correctamente a la pregunta es decir eligieron la opción C (hay una posibilidad de perder y siete de ganar).

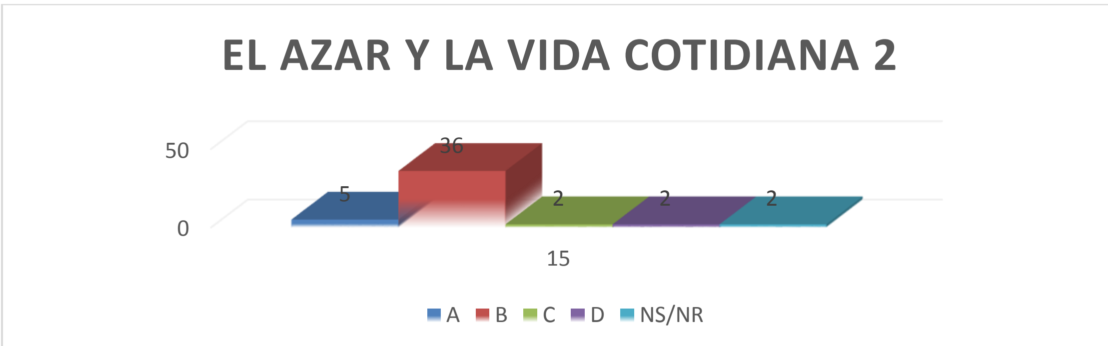
En las respuestas incorrectas, es decir los estudiantes que eligieron otra opción en este caso la A (las posibilidades de perder son las mismas que de ganar) que es la mayor respuesta 31 estudiantes (65.95%), la opción B (no hay ninguna posibilidad de perder) 3 estudiantes (6.38%), y 1 estudiante (2.12%) no respondió a esta pregunta. Aquí se puede evidenciar que la mayoría de los estudiantes les causa dificultad, encontrar la probabilidad, es decir no reconoce la probabilidad de un suceso, como lo manifiestan Konold y cols. (1993) citados por Mohamed, muchos estudiantes interpretan igualmente probable con que "cualquier cosa puede suceder". Además sucede que los estudiantes se dejan llevar por las creencias que son un elemento cultural que influye en el razonamiento probabilístico, como lo demuestran los resultados obtenidos por Amir y Williams (1999).

ITEM 15: ¿Ser el primero en elegir un palillo da alguna ventaja?

a. Sí, porque el primer palillo siempre es largo.

b. No, porque se puede sacar un palillo largo o un palillo corto.
c. No, porque el primer palillo siempre será más pequeño que el resto.
d. Sí, porque el que saca primero siempre gana.

Las respuestas al problema se han clasificado en las categorías que aparecen en la gráfica 15, a continuación se analiza las respuestas correctas e incorrectas.



GRÁFICA 15

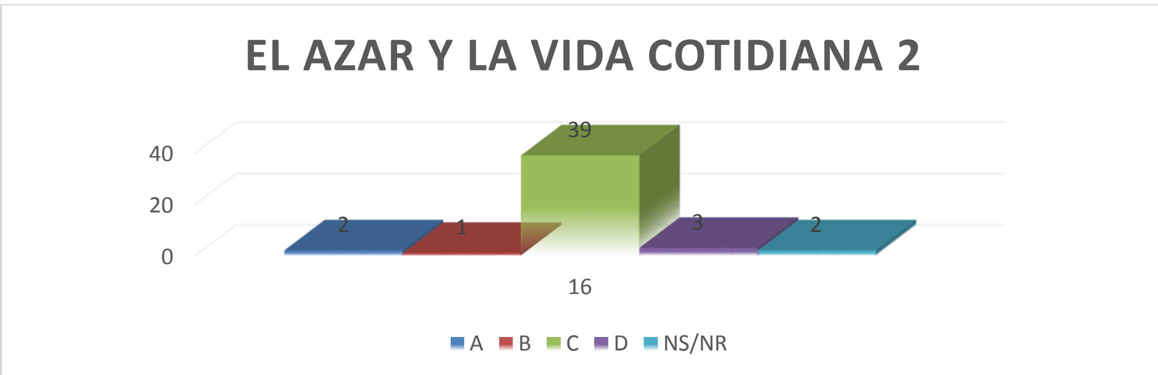
En ella se observa que de 47 estudiantes 36 (76.59%) respondieron correctamente a la pregunta es decir eligieron la opción B (no, porque se puede sacar un palillo largo o un palillo corto).

En las respuestas incorrectas, es decir los estudiantes que eligieron otra opción en este caso la A (sí, porque el primer palillo siempre es largo) 5 estudiantes (10.63%), la opción C (no, porque el primer palillo siempre será más pequeño que el resto) 2 estudiantes (4.25%), la opción D (sí, porque el que saca primero siempre gana 2 estudiantes (4.25%) y 2 estudiantes (4.25%) no respondieron a esta pregunta. Los estudiantes manifiestan tener conocimiento sobre si el juego es justo o no lo es y sobre el grado de aleatoriedad del juego, pero sin tener claro cuál es la mayor probabilidad de perder, manifiestan tener claro que es un suceso seguro o posible, como lo determinaron Watson, Collis y Moritz (1997) cuando indagaron a estudiantes en los grados 3, 6, y 9 si ciertos sucesos son más probables o igualmente probables. Encontraron que incluso cuando los estudiantes identifican los sucesos más probables o igualmente probables, su argumento no es normativo. Aunque también hay otro porcentaje de estudiantes que les causa dificultad entender el concepto de azar y aleatoriedad, como lo indica Metz (1998b) que las principales dificultades que los conceptos de azar y aleatoriedad presentan a los estudiantes son: a) fallos al interpretar los patrones resultantes de muchas repeticiones de un suceso; b) la ocurrencia de que una persona o dispositivo puede controlar un suceso y c) la creencia de que algún tipo de orden o propósito subyace a los sucesos.

ITEM 16: ¿Qué pasa si juegas un martes 13?

a. En martes y 13 siempre se pierde.
b. Es mejor no jugar un a martes y 13.
c. Lo mismo que si juegas cualquier otro día.
d. Que hay más posibilidades de perder.

Las respuestas al problema se han clasificado en las categorías que aparecen en la gráfica 16, a continuación se analiza las respuestas correctas e incorrectas.



GRÁFICA 16

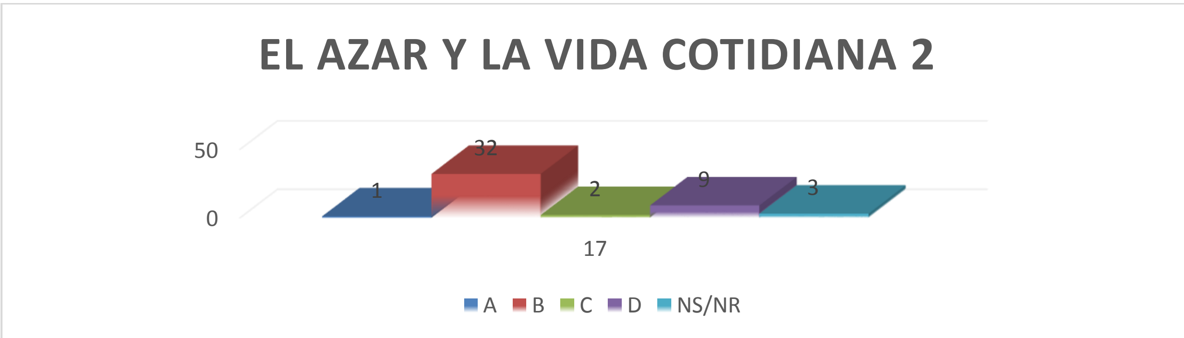
En ella se observa que de 47 estudiantes 39 (82.97%) respondieron correctamente a la pregunta es decir eligieron la opción C (lo mismo que si juegas cualquier otro día).

En las respuestas incorrectas, es decir los estudiantes que eligieron otra opción en este caso la A (en martes y 13 siempre se pierde)2 estudiantes (4.25%), la opción B (es mejor no jugar en martes y 13) 1 estudiante (2.12%), la opción D (que hay más posibilidades de perder) 3 estudiantes (6.38%) y 2 estudiantes (4.25%) no respondieron a esta pregunta. Con esta pregunta se evidencia que los estudiantes reconocen el concepto de suerte desde el punto de vista matemático pues en su gran mayoría determinan que no importa el día que se haga el juego van a tener las mismas probabilidades de ganar o perder, aquí la gran mayoría no se dejan influenciar por la cultura o las creencias populares, sin embargo hay unos pocos estudiantes que tienen arraigado en sus conceptos las creencias populares que los llevan a optar por respuestas deterministas.

ITEM 17: ¿Y si juegas con unos pantalones amarillos?

a. El color amarillo da mala suerte.
b. Lo mismo que con pantalones de cualquier otro color.
c. Nunca hay que jugar con ropa de color amarillo.
d. Hay más posibilidades de perder, aunque también se puede ganar.

Las respuestas al problema se han clasificado en las categorías que aparecen en la gráfica 17, a continuación se analiza las respuestas correctas e incorrectas.



GRÁFICA 17

En ella se observa que de 47 estudiantes 32 (68.08%) respondieron correctamente a la pregunta es decir eligieron la opción B (lo mismo que con pantalones de cualquier otro color).

En las respuestas incorrectas, es decir los estudiantes que eligieron otra opción en este caso la A (el color amarillo da mala suerte) 1 estudiante (2.12%), la opción C (nunca hay que jugar con ropa de color amarillo) 2 estudiantes (4.25%), la opción D (hay más posibilidades de perder, aunque también se puede ganar) 9 estudiantes (19.14%) y 3 estudiantes (6.38%) no respondieron a esta pregunta. Con esta pregunta se evidencia que los estudiantes reconocen el concepto de suerte desde el punto matemático, se confirma lo concluido en el ítem anterior, sin embargo 9 de los estudiantes se confundieron con la opción D, pues no tienen muy claro el concepto de suerte desde el punto de vista matemático, y la respuesta es ambigua para ellos.

En conclusión al analizar los resultados obtenidos por los estudiantes en estos ítems en su gran mayoría los estudiantes evidencian un gran significado personal en relación a las regularidades del azar, el grado de aleatoriedad o no del juego, que según Batanero, Serrano y Green (1998), este concepto es el punto básico en el estudio de la probabilidad y por ello, es fundamental que el estudiante tenga una correcta comprensión de esta idea, para que pueda avanzar en el campo del cálculo de probabilidades. Además estos resultados son esperados pues como lo manifiesta

Fischbein (1975), la intuición primaria del azar, es decir la distinción entre fenómeno determinista y aleatorio sin instrucción previa, está presente en la conducta diaria de cada niño, incluso antes de la edad de 7 años. También se puede concluir que los estudiantes reconocen los elementos que intervienen en el juego, examinan el concepto de suerte desde el punto de vista matemático y descubren si el juego es justo o no lo es.

Sin embargo existen otro número de estudiantes que se les dificulta entender el concepto de azar y aleatoriedad, como lo afirma Fischbein (1975), que la síntesis entre lo formal y lo deducible no se realiza espontánea y completamente al nivel de las operaciones formales. La explicación es que las tradiciones culturales y educativas de la sociedad moderna orientan el pensamiento hacia explicaciones deterministas unívocas.

Y Metz (1998b) indica que las principales dificultades que los conceptos de azar y aleatoriedad presentan a los estudiantes son: a) fallos al interpretar los patrones resultantes de muchas repeticiones de un suceso; b) la ocurrencia de que una persona o dispositivo puede controlar un suceso y c) la creencia de que algún tipo de orden o propósito subyace a los sucesos.

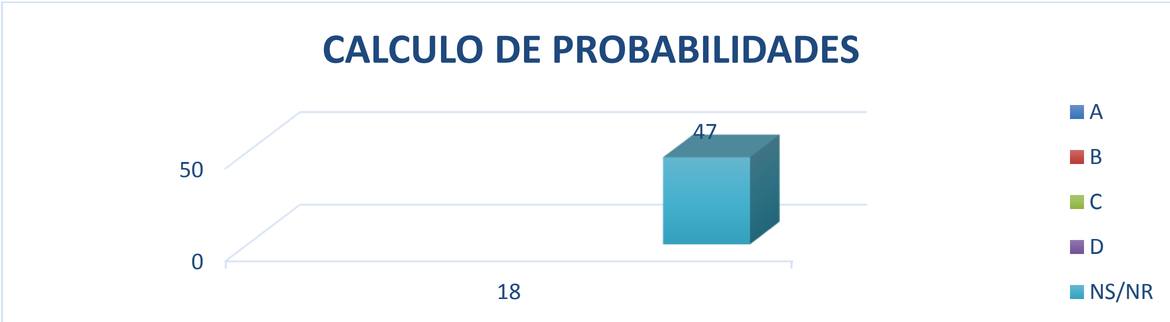
En el ítem 14, los estudiantes tuvieron mucha dificultad en determinar la probabilidad del suceso, no tienen muy claro el procedimiento ni este concepto, lo cual se puede comparar con los resultados de Konold y cols. (1993), donde muchos estudiantes interpretan igualmente probable con que "cualquier cosa puede suceder". Estos estudios sirvieron para plantearse una serie de preguntas acerca de cómo los estudiantes de diferentes edades identifican el caso menos probable de un suceso.

CALCULO DE PROBABILIDADES

En este apartado se analizan los resultados obtenidos por los estudiantes de grado quinto de la I.E Sagrada Familia al aplicarles el cuestionario, en el ítem 18, con este ítem se pretende, determinar a partir de un problema de bolas rojas y azules depositadas en una caja; el significado personal que tienen los estudiantes para calcular numéricamente la probabilidad de un evento sencillo.

ITEM 18: Andrés ha metido cinco bolas de color azul y otras cinco bolas de color rojo en la caja. ¿Cuál es la probabilidad de que saque sin mirar, una bola de color azul?

Las respuestas al problema se han clasificado en las categorías que aparecen en la gráfica 18, a continuación se analiza las respuestas correctas e incorrectas.



GRÁFICA 18

En ella se observa que de 47 estudiantes 47 (100%) respondieron incorrectamente a la pregunta es decir eligieron la opción no sabe/no responde. Ningún estudiante respondió correctamente a la pregunta que se le planteó, aun dándoles en el cuestionario (anexo 1) la fórmula de Laplace PROBABILIDAD = $\frac{\textbf{\textit{NÚMERO DE CASOS FAVORABLES}}}{\textbf{\textit{NÚMERO DE CASOS POSIBLES}}}$ no supieron cómo aplicarla, por lo tanto no manifiestan un conocimiento claro de cómo hallar matemáticamente la probabilidad de un suceso, ni la idea de juego justo. Aquí se encontraron algunas respuestas como: probable (ESTUDIANTE 1. Fig. 6), como puedes sacar de color azul, también de color rojo (ESTUDIANTE 3. Fig. 7.), la probabilidad de sacar una bola azul es que meta la mano en la bola de cajas azules (ESTUDIANTE 7. Fig. 8.), puede que saque una roja o azul (ESTUDIANTE 8. Fig. 9.), no se sabe si sacaras otra de diferente color o la azul porque es a suerte (ESTUDIANTE 15. Fig. 10.). tampoco reconocen que una probabilidad se puede representar como una fracción. Este problema ha resultado ser el más difícil (100% de los estudiantes no respondió) en el cual así la proporcionalidad entre las bolas presentadas sea la misma obliga al estudiante a un cálculo de proporciones, es decir a la aplicación de la regla de Laplace, donde tiene que comparar los casos favorables con los posibles en la caja. Los estudiantes no poseen un significado personal para hallar numéricamente el resultado matemático de una probabilidad.

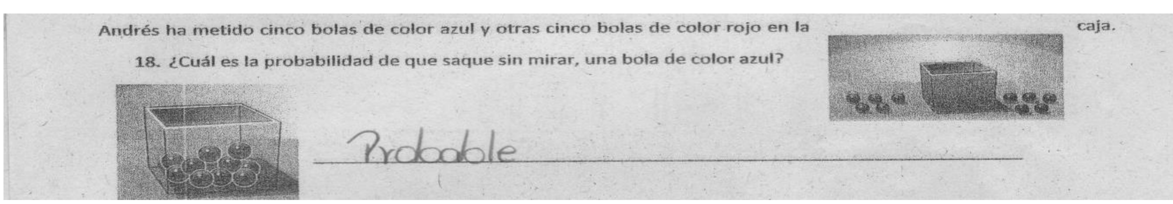


Figura. 6 estudiante 1 (FUENTE PROPIA)

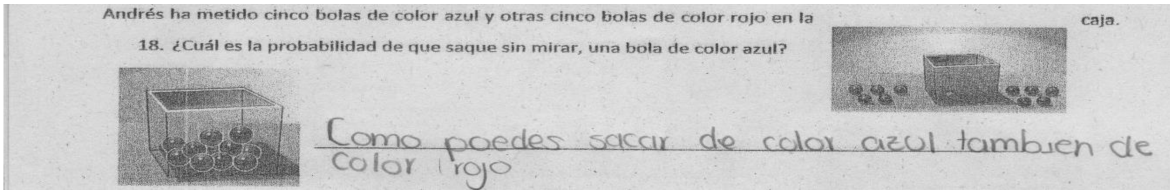


Figura.7 ESTUDIANTE 3 (FUENTE PROPIA)

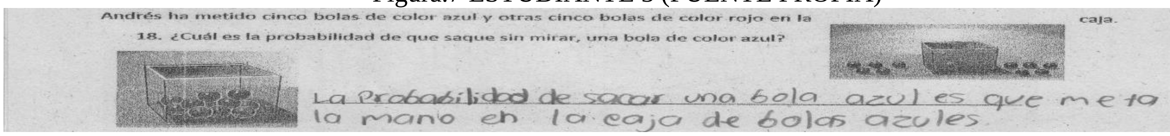


Figura.8 ESTUDIANTE 7 (FUENTE PROPIA)

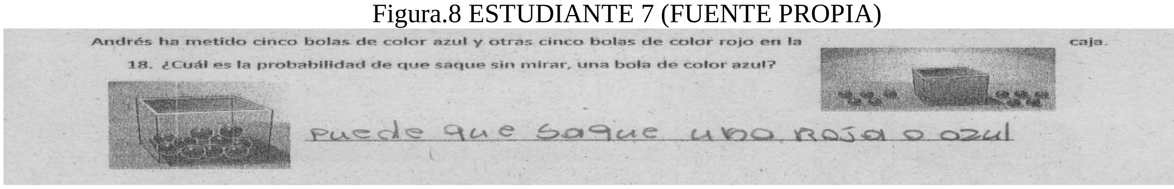


Figura. 9 ESTUDIANTE 8 (FUENTE PROPIA)

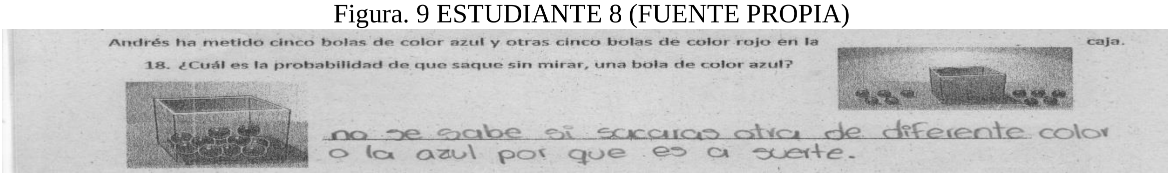


Figura. 10 ESTUDIANTE 15 (FUENTE PROPIA)

CALCULO DE PROBABILIDADES 2

En este apartado se analizan los resultados obtenidos por los estudiantes de grado quinto de la I.E Sagrada Familia al aplicarles el cuestionario en los ítems 19 al 24, con estos ítems se pretende determinar utilizando como pretexto el juego de cartas de la baraja española (con la cual los estudiantes ya habían jugado con anterioridad, es decir la conocían muy bien); el significado personal que tienen los estudiantes para calcular numéricamente la probabilidad de un evento sencillo.

ITEM 19: cualquier carta de la baraja española tiene una probabilidad de ser sacada al azar de:

Las respuestas al problema se han clasificado en las categorías que aparecen en la gráfica 19, a continuación se analiza las respuestas correctas e incorrectas.

GRÁFICA 19

En ella se observa que de 47 estudiantes 12 (25.53%) respondieron correctamente a la pregunta es decir eligieron la opción A (1/40).

En las respuestas incorrectas, es decir los estudiantes que eligieron otra opción están la B (4/40) 8 estudiantes (17.02%), la opción C (4/40) 5 estudiantes (10.63%), la opción D (20/40) 12 estudiantes (25.53%) y 10 estudiantes (21.27%) no respondieron a esta pregunta. Con esta pregunta se evidencia que la gran mayoría de los estudiantes no son capaces de determinar la probabilidad pedida ni aplicando la regla de Laplace, ni mediante la representación fraccionaria, o mediante una determinación de casos favorables y desfavorables. Pues se confirma como se determinó en el ítem anterior que no tienen conocimiento de cómo se halla una probabilidad de un suceso sencillo, y más preocupante aunque hay 10 de los estudiantes que no saben, ni responden a la pregunta. Sin embargo hay un pequeño grupo 12 estudiantes que responde correctamente la pregunta, no siendo consistente con la respuesta dada en el ítem anterior, por lo que se podría dudar de su conceptualización, lo que obliga a adelantar un tipo de investigación más profunda donde el estudiante explique del por qué? De su repuesta.

ITEM 20: La probabilidad de sacar al azar de una baraja española una carta con una numeración menor que cuatro es:

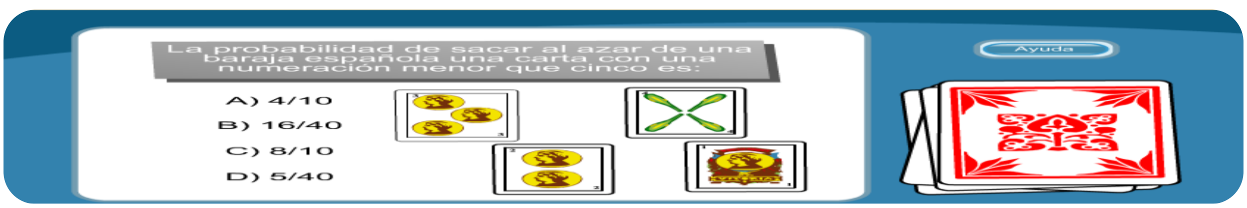
Las respuestas al problema se han clasificado en las categorías que aparecen en la gráfica 20, a continuación se analiza las respuestas correctas e incorrectas.

GRÁFICA 20

En ella se observa que de 47 estudiantes 10 (21.27%) respondieron correctamente a la pregunta es decir eligieron la opción B (12/40).

En las respuestas incorrectas, es decir los estudiantes que eligieron otra opción están la A (30/40) 9 estudiantes (19.14%), la opción C (4/40) 9 estudiantes (19.14%), la opción D (4/10) 7 estudiantes (14.89%) y 12 estudiantes (25.53%) no respondieron a esta pregunta. Con esta pregunta se evidencia que la gran mayoría (72.72%) de los estudiantes no son capaces de determinar la probabilidad pedida ni aplicando la regla de Laplace, ni mediante la representación fraccionaria, o mediante una determinación de casos favorables y desfavorables. Y solo 10 estudiantes respondieron correctamente a la pregunta aunque no se podría determinar la estrategia utilizada por los estudiantes para solucionarlo.

ITEM 21: La probabilidad de sacar al azar de una baraja española una carta con una numeración menor que cinco es:



Las respuestas al problema se han clasificado en las categorías que aparecen en la gráfica 21, a continuación se analiza las respuestas correctas e incorrectas.

GRAFICA 21

En ella se observa que de 47 estudiantes 7 (14.89%) respondieron correctamente a la pregunta es decir eligieron la opción B (16/40).

En las respuestas incorrectas, es decir los estudiantes que eligieron otra opción están la A (4/40) 9 estudiantes (19.14%), la opción C (8/10) 12 estudiantes (25.53%), la opción D (5/40) 6 estudiantes (12.76%) y 13 estudiantes (27.65%) no respondieron a esta pregunta. Con esta pregunta se evidencia que solo 7 estudiantes respondieron correctamente a la pregunta es decir que reconocen la expresión de probabilidad pedida, la fracción que determina dicha probabilidad, sin embargo no se puede determinar la estrategia utilizada para resolverla. Además se observa que hay un número muy grande que responde erradamente, es decir no determinan la probabilidad pedida, no utiliza ninguna estrategia adecuada como es la regla de Laplace, la representación fraccionaria, o mediante una determinación de casos favorables y desfavorables y más preocupante aun 13 estudiantes no reconocen la representación de dicha probabilidad pues su respuesta es no saben-no responden, no tienen ningún criterio para determinar la respuesta.

ITEM 22: la probabilidad de sacar esta carta (rey de bastos) de la baraja española.

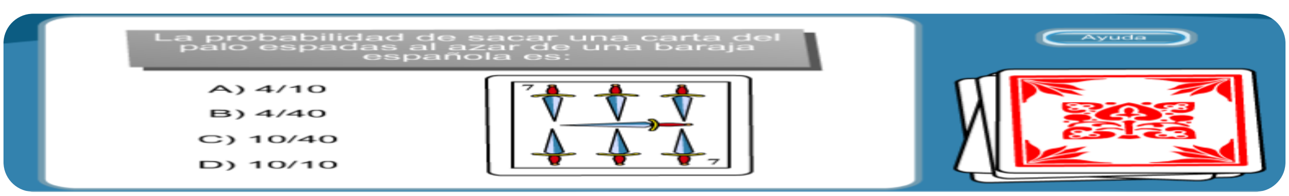
Las respuestas al problema se han clasificado en las categorías que aparecen en la gráfica 22, a continuación se analiza las respuestas correctas e incorrectas.

GRÁFICA 22

En ella se observa que de 47 estudiantes 6 (12.76%) respondieron correctamente a la pregunta es decir eligieron la opción B (1/40).

En las respuestas incorrectas, es decir los estudiantes que eligieron otra opción están la A (1/10) 7 estudiantes (14.89%), la opción C (2/40) 12 estudiantes (25.53%), la opción D (5/40) 10 estudiantes (21.27%) y 12 estudiantes (25.53%) no respondieron a esta pregunta. Con esta pregunta se evidencia que solo EL 12.76% de los estudiantes respondieron correctamente a la pregunta es decir que reconocen la fracción que representa la probabilidad, sin embargo sigue en duda la estrategia utilizada para resolver la pregunta, pues como se determinó en el ítem 18 ningún estudiante sabe aplicar la regla de Laplace. También se puede determinar que existe un número muy grande que responde erradamente, es decir no determinan la probabilidad pedida, no utiliza ninguna estrategia adecuada como es la regla de Laplace, no reconocen la representación fraccionaria, o no aplican una determinación de casos favorables y desfavorables y se sigue manteniendo la tendencia de que hay estudiantes que no reconocen la representación de dicha probabilidad pues su respuesta es no saben-ni responden, no tienen ningún criterio para determinar la respuesta, son 12 de ellos, muchos más que los que responden acertadamente.

ITEM 23: La probabilidad de sacar una carta del palo de espadas al azar de una baraja española es:



Las respuestas al problema se han clasificado en las categorías que aparecen en la gráfica 23, a continuación se analiza las respuestas correctas e incorrectas.

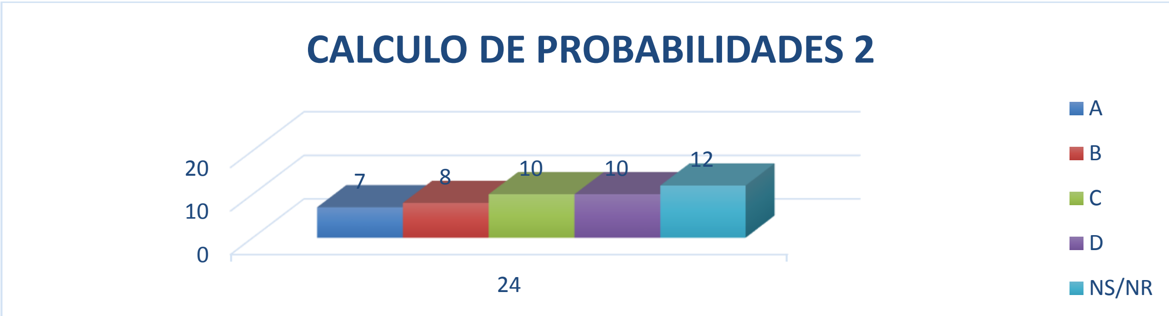
GRÁFICA 23

En esta gráfica se observa que 11 estudiantes (23.40%) respondieron correctamente a la pregunta es decir eligieron la opción C (10/40).

En las respuestas incorrectas, están la A (4/10) 10 estudiantes (21.27%), la opción B (4/40) 10 estudiantes (21.27%), la opción D (10/10) 4 estudiantes (8.51%) y 12 estudiantes (25.53%) no respondieron a esta pregunta. Con esta pregunta se evidencia que solo 11 de los 47 estudiantes respondieron correctamente a la pregunta es decir que sin tener un concepto claro de la regla de Laplace escogieron la fracción correcta que representa la probabilidad pedida. Aquí también se ve y como ha pasado en los anteriores ítems, que existe un número muy grande de estudiantes que responde erradamente, es decir no determinan la probabilidad pedida, no utiliza ninguna estrategia adecuada como es la regla de Laplace, no reconocen la representación fraccionaria, o no aplican una determinación de casos favorables y desfavorables, corroborando el resultado obtenido en el ítem 18 del cuestionario, además que se manteniendo la tendencia de que hay estudiantes que no optan por ninguna respuesta pues su elección es no saben-ni responden, no tienen ningún criterio para determinar la respuesta, son 12 de ellos.

ITEM 24: La probabilidad de sacar al azar de una baraja española una carta con el número 2 es:

Las respuestas al problema se han clasificado en las categorías que aparecen en la gráfica 24, a continuación se analiza las respuestas correctas e incorrectas.



GRÁFICA 24

En esta gráfica se observa que 10 estudiantes (21.27%) respondieron correctamente a la pregunta es decir eligieron la opción C (4/40).

En las respuestas incorrectas, están la A (1/40) 7 estudiantes (14.89%), la opción B (2/40) 8 estudiantes (17.02%), la opción D (4/10) 10 estudiantes (21.27%) y 12 estudiantes (25.53%) no respondieron a esta pregunta. Los resultados de esta pregunta muestran que la gran mayoría de los estudiantes 25 de los 47 respondieron de forma incorrectamente a la pregunta es decir que no tienen el conocimiento adecuado de como calcular matemáticamente una probabilidad, así como se pudo concluir en el ítem 18 de este cuestionario, no diferencian los casos posibles ni el total de posibilidades, por lo que no pueden determinar fácilmente la fracción correcta que representa la probabilidad pedida y nuevamente aparecen 12 estudiantes que no optan por ninguna respuesta pues su elección es no saben-no responden, es decir no tienen ningún criterio para determinar ninguna respuesta. Solo 10 estudiantes del total eligen la respuesta correcta, que son muy pocos para el nivel en que se encuentran.

Los resultados obtenidos en los ítems del 19 al 24 muestran que la mayor parte de los estudiantes del grado quinto de la I.E Sagrada Familia poseen un significado personal insuficiente en relación a la asignación de probabilidades, ya que el porcentaje de respuestas incorrectas en los seis problemas ha sido muy alto. De 329 respuestas dadas en total por los estudiantes, solo 56 respuestas fueron acertadas aunque estas respuestas no se pueden determinar el tipo de estrategias utilizadas por los estudiantes para resolverlas ya que eran de selección múltiple, es decir que la gran mayoría de los estudiantes no aplican correctamente la fórmula de Laplace, no reconocen los sucesos probables ni el total de sucesos posibles en el juego de la baraja española, aun cuando tuvieron la oportunidad de jugar con ella y reconocerla con anterioridad a la aplicación de la prueba, estos estudiantes no reconocen la representación de una probabilidad de un evento sencillo en forma de fracción, lo que es preocupante pues para el nivel en que se encuentran y según los estándares de educación para el grado quinto como mínimo deberían conjeturar y poner a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos, en este caso a través del juego de cartas de la baraja española. El problema que más dificultad les causó a los estudiantes fue el 18 en el cual se les pedía calcular o representar matemáticamente la probabilidad de sacar una bola de color azul de una caja donde estaban cinco bolas rojas y cinco azules, aun escribiéndoles la fórmula de Laplace en el mismo cuestionario, el 100% de los estudiantes respondió de manera errada a esta pregunta.

4.2.1 Conclusiones generales del análisis de las respuestas dadas por los estudiantes a las preguntas planteadas en el cuestionario

En este apartado se presentan las conclusiones más relevantes obtenidas en el análisis de las respuestas dadas por los 47 estudiantes de grado quinto de la I.E Sagrada Familia, sobre los conocimientos de probabilidad.

EXPERIMENTOS ALEATORIOS:

En relación al análisis efectuado en los ítems 1-8 del promedio de problemas resueltos, el promedio resultante es de 66.48 % problemas correctos, 31.11 % problemas incorrectos y 2.39% NS/NR. Este promedio nos indica que los estudiantes participantes reconocen el concepto de experimentos aleatorios pues en su gran mayoría clasifican las situaciones presentadas en sucesos seguros, probables e imposibles, esto puede ser debido a que las situaciones son del contexto del niño lo que facilita su razonamiento, Nisbett y Ross (1980) afirman que el razonamiento humano es muy diferente cuando las tareas se resuelven en laboratorio que cuando este mismo tipo de razonamiento se aplica en situaciones de la vida cotidiana, como pueden ser algunos tipos de problemas probabilísticos con contextos próximos a los niños, aunque otro porcentaje responden erradamente debido a que pueden estar influenciados por la subjetividad y por su propia experiencia dejando de la lado los conceptos de aleatoriedad que pueden existir en los sucesos de la vida diaria, como lo manifiesta Cañizares (1997)

> "Puesto que el azar se concibe en algunos sujetos como complementario de las relaciones de causa y efecto, los sesgos en el razonamiento de tipo causal pueden llevar en ocasiones a suponer la existencia de mecanismos que permitan el control de lo aleatorio. Algunas de estas concepciones se transmiten o son apoyadas por creencias arraigadas de tipo cultural que conviven con la enseñanza que el niño recibe en la escuela.
> Por otro lado, ciertos procesos psicológicos nos llevan inconscientemente a simplificar los problemas aleatorios, especialmente cuando los encontramos fuera del contexto escolar. Estos procesos, analizados desde el punto de vista de la teoría del procesamiento de la información, se han denominado "heurísticas" y se refieren a las reglas de conducta -a veces inconscientes- que nos hacen prescindir de parte de la información relevante y conducen con frecuencia a sesgos en el razonamiento y la resolución de problemas.
> Finalmente, puesto que en un problema probabilístico intervienen con frecuencia las ideas estocásticas fundamentales, los errores en la resolución del problema pueden venir motivados por creencias erróneas respecto a las mismas. Destacamos en especial el concepto de independencia, relacionado con muchos de los sesgos descritos sobre el razonamiento estocástico".

Por otro lado Fischbein y Schnarch (1996, 1997), encuentran que muchos niños identifican "raro" con imposible, y en otros casos, imposible se identifica con "incierto", algo que no se puede saber. Como ya se ha dicho, algunos niños tienden a confundir seguro con posible, pero a veces también ocurre al revés, confunden posible con seguro, o muy frecuente con seguro. En ocasiones, los alumnos se dejan guiar por sus propias creencias y experiencias subjetivas, considerando que un suceso es imposible, por ejemplo, porque a él nunca le ocurre. Cañizares (1997. Pag.51)

Cabe anotar que los ítems 4 y 7 que son de tipo naturalista fueron los que causaron más sesgos en suponer que los sucesos aleatorios se puedan controlar pues los estudiantes se basaron más en la parte subjetiva que en los conocimientos sobre la aleatoriedad. Cañizares (1997) citando a Amir y Williams (1994) manifiesta que estos autores se interesaron por el efecto de los factores culturales sobre las heurísticas, sesgos e intuiciones en el campo de la probabilidad y la influencia de creencias o actitudes fatalistas sobre la inclinación de los niños a considerar un suceso como aleatorio. En general este tipo de problemas no causa dificultad a los estudiantes del grado quinto y los clasifican con facilidad.

Al comparar estos resultados con los de Jones y cols. (1996) citado en los antecedentes se puede ubicar a los estudiantes en el nivel 3 o cuantitativo informal, usa, informalmente, números para calcular probabilidades; distingue los sucesos "cierto", "posible" e imposible", justificando informalmente su decisión.

EL AZAR Y LA VIDA COTIDIANA

En relación al análisis efectuado en los ítems 9-13 del promedio de respuestas obtenidas, el promedio resultante es de 77.44 % respuestas correctas, 22.12 % respuestas incorrectas y 0.42% NS/NR. Este promedio nos indica que los estudiantes participantes reconocen el grado de aleatoriedad del juego “PIEDRA, PAPEL O TIJERA”, además que reconocen los elementos que intervienen en el juego; pues este es ampliamente reconocido por ellos y practicado, también reconocen el concepto de suerte desde el punto de vista matemático.

Según Batanero, Serrano y Green (1998), el concepto de aleatoriedad es el punto básico en el estudio de la probabilidad y por ello, es fundamental que el alumno tenga una correcta comprensión de esta idea, para que pueda avanzar en el campo del cálculo de probabilidades. Con esta afirmación y los resultados obtenidos, los estudiantes participantes en la investigación pueden alcanzar el desarrollo del pensamiento aleatorio desde la probabilidad.

Por otro lado hay muchos estudiantes que cometieron errores al momento de responder la prueba y no identificaron correctamente lo que se les pedía, pudo ser debido a la experiencia propia con relación al juego, por lo cual dejaron de lado los conceptos aleatorios o les causa aun dificultad dicho concepto, Batanero y Serrano (1995) indican que el análisis epistemológico del concepto así como la investigación psicológica muestran la complejidad para los estudiantes del significado de la aleatoriedad. Otros pudieron ser influenciados por el contexto como lo afirma Fischbein (1975) citado por Cañizares (1997), la síntesis entre lo formal y lo deducible no se realiza espontánea y completamente al nivel de las operaciones formales. La explicación es que las tradiciones culturales y educativas de la sociedad moderna orientan el pensamiento hacia explicaciones deterministas unívocas. Y más recientemente Metz (1998b) indica que las principales dificultades que los conceptos de azar y aleatoriedad presentan a los estudiantes son: a) fallos al interpretar los patrones resultantes de muchas repeticiones de un suceso; b) la ocurrencia de que una persona o dispositivo puede controlar un suceso y c) la creencia de que algún tipo de orden o propósito subyace a los sucesos.

Igualmente hay varios estudiantes que aún tienen creencias relacionadas con la suerte, Amir y Williams (1994) se interesaron por el efecto de los factores culturales sobre las heurísticas, sesgos e intuiciones en el campo de la probabilidad y la influencia de creencias o actitudes fatalistas sobre la inclinación de los niños a considerar un suceso como aleatorio. Con ayuda de entrevistas, exploraron el efecto de estas creencias y convicciones en 38 alumnos de 11-12 años de dos escuelas de Manchester, investigaron su percepción de la aleatoriedad de ciertos generadores aleatorios. Por ejemplo, ciertos niños piensan que el resultado de lanzar un dado depende de la forma en que se lance, de la experiencia previa o piensan que unas personas son más afortunadas que otras. Cañizares (1997 pág. 48).

Por último según el alto porcentaje de respuestas acertadas este apartado no presentó mayor dificultad a los estudiantes.

EL AZAR Y LA VIDA COTIDIANA 2

En relación al análisis efectuado en los ítems 14-17 del promedio de respuestas obtenidas, el promedio resultante es de 63.29 % respuestas correctas, 32.44 % respuestas incorrectas y 4.45% NS/NR. Este promedio nos indica que los estudiantes participantes reconocen el grado de aleatoriedad del juego "LA PERSONA QUE ELIJA EL PALILLO MAS CORTO PIERDE", con estos resultados se corrobora lo descrito en el ítem anterior, pues con estas preguntas se pretendía determinar también los elementos que intervienen en el juego y reconocer el concepto de suerte desde el punto de vista matemático. Aquí se evidencia el alto grado de significado personal que tienen los estudiantes de lo aleatorio, del azar a partir de un juego conocido en el contexto.

Aquí se evidencia que la gran mayoría de los estudiantes no están influenciados por factores culturales sobre las heurísticas, sesgos e intuiciones en el campo de la probabilidad ni tampoco se dejan influenciar por ciertas creencias o actitudes fatalistas sobre la inclinación a considerar un suceso como aleatorio, sin embargo aún hay un pequeño grupo de estudiantes que tienden a dar las explicaciones desde su subjetividad y experiencias propias, pensando por ejemplo que por ser un martes 13 o tener un pantalón amarillo va a perder con mayor facilidad, es un pequeño porcentaje de estos estudiantes que manifiestan creencias en el control de lo aleatorio y en supersticiones extendidas en la cultura popular.

El ítem que mayor dificultad causó fue el 14 donde se les indagó a los estudiantes sobre ¿Qué probabilidad hay de perder, si en total hay 8 palillos? Estos en su gran mayoría no supieron responder debido a que no tienen claro la manera como se haya una probabilidad, además como lo manifiesta Cañizares (1997), puesto que en un problema probabilístico intervienen con frecuencia las ideas estocásticas fundamentales, los errores en la resolución del problema pueden venir motivados por creencias erróneas respecto a las mismas. Además por ser una situación del contexto de los estudiantes fueron influenciados por su subjetividad y experiencias propias. Este resultado se evidencia con mayor fuerza en el ítem 18 que a continuación se analiza.

CALCULO DE PROBABILIDADES

En relación al análisis efectuado en el ítem 18 del promedio de respuestas obtenidas, el promedio resultante es de 100 % de respuestas que NS/NR los estudiantes. Este promedio nos indica que los estudiantes participantes a la pregunta: Andrés ha metido cinco bolas de color azul y otras cinco bolas de color rojo en la caja. ¿Cuál es la probabilidad de que saque sin mirar, una bola de color azul? Ningún estudiante respondió acertadamente, aquí lo que se buscaba era que los estudiantes representaran en forma matemática la probabilidad del suceso pedido, o que determinaran el número de casos favorables y el total de casos posibles, o que aplicaran la regla de Laplace, que se les había dado en el mismo cuestionario, no supieron determinar la proporción de bolas de un color y otro, la dificultad pudo estar en que el contexto del problema ya no era tan conocido para ellos y como lo determinan Piaget e Inhelder (1951) entre las conclusiones de su trabajo, los problemas presentados en un contexto proporcional eran más fáciles que los presentados en un contexto probabilístico. Es muy posible que el dominio del cálculo de proporciones sea un prerrequisito para dominar el cómputo de probabilidades, pero no parece ser el único prerrequisito. Una diferencia importante entre las dos tareas estriba en que el resultado de un problema presentado en un contexto proporcional está indicando un

acontecimiento seguro, mientras que el resultado de un problema presentado en un contexto probabilístico indica un grado de incertidumbre. Cañizares (1997 pág. 40).
Se observa, aquí que le nivel de razonamiento proporcional de los estudiantes es bajo. Este tipo de dificultad podría ser un obstáculo para el aprendizaje de las probabilidades, aunque, también la enseñanza de la probabilidad podría ser un contexto muy rico que favoreciese el desarrollo del razonamiento proporcional de estos estudiantes. Cañizares (1997 pág. 126)

Los resultados obtenidos muestran que la mayor parte de los estudiantes participantes no posee un conocimiento personal suficiente del contenido en relación a la asignación de probabilidades, ya que el porcentaje de respuestas correctas en el problema ha sido nulo.
Este problema fue el que mayor dificultad presentó a los estudiantes.

CALCULO DE PROBABILIDADES 2.

En relación al análisis efectuado en los ítems 19 -24 del promedio de respuestas obtenidas, el promedio resultante es de 19.85% respuestas correctas, 54.96% respuestas incorrectas y 25.17% NS/NR. Este promedio nos indica que la mayoría de los estudiantes participantes al responder las situaciones planteadas en estos ítems a partir del juego de cartas “LA BARAJA ESPAÑOLA”, a pesar de haber jugado con ella y de haber explorado el juego con anterioridad a la aplicación del cuestionario, no tienen un significado personal satisfactorio para la asignación de probabilidades, no reconocen el número de casos favorables ni el número de casos posibles, no reconocen la representación fraccionaria de una probabilidad, como ya se ha observado en el ítem 18 a pesar de que se les recordó en el mismo cuestionario la regla de Laplace, la aplicación de ésta no es intuitiva para los niños que no han tenido enseñanza formal al respecto.
Estos estudiantes no alcanzan el nivel 4 o numérico que predice el suceso más probable en experimentos simples. Asigna probabilidades a sucesos. Compara probabilidades y asigna probabilidades numéricas iguales a sucesos equiprobables. Categorizado por Jones y cols. (1996).

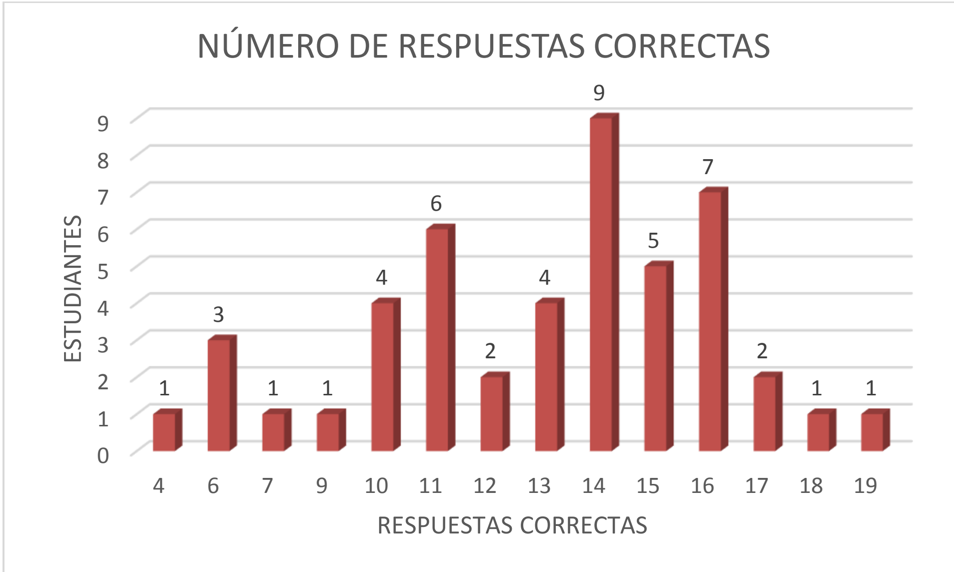
Sin embargo hay un porcentaje muy bajo de estudiantes que respondieron acertadamente a las preguntas y comparando estos resultados con los de Jones y cols. (1996) citado en el estado del arte se pueden ubicar en el nivel 1 que se asocia con el pensamiento subjetivo. La asignación de probabilidades se basa en juicios subjetivos. La comparación de probabilidades es subjetiva y no se diferencia entre situaciones equitativas y no equitativas. Pues por ser el tipo de pregunta de selección múltiple no se puede determinar la estrategia utilizada para dar solución al problema.

En general los resultados obtenidos muestran que la mayor parte de los estudiantes participantes no posee un conocimiento personal suficiente del contenido en relación a la asignación de probabilidades, ya que el porcentaje de respuestas correctas en el problema ha sido muy bajo. Los problemas de esta sección tuvieron una gran dificultad para ser resueltos por los estudiantes.

4.2.2 Puntuación total del cuestionario

Para realizar el análisis de la puntuación total del cuestionario, se han categorizado las respuestas de los estudiantes en correctas e incorrectas, asignando el valor 1 por cada respuesta correcta y el valor 0 para cada respuesta incorrecta o sin contestar. El cuestionario consta de 24 problemas, lo que significa que la puntuación de cada estudiante puede tomar un valor de 0 a 24, debido al número de preguntas con respuestas correctas.

Se calculó el número de problemas que resolvieron correctamente los estudiantes de grado quinto. En la gráfica 25 se pueden observar los resultados obtenidos. No hay ningún estudiante que haya resuelto de forma correcta los 24 problemas, solo 1 de los estudiantes (2.12 %) que resolvieron, 4, 7, 9, 18 y 19 preguntas correctamente, apenas 2 estudiantes (4.25 %) respondieron 17 y 12 preguntas correctamente, 3 estudiantes (6.38%) respondieron 6 preguntas correctamente, 4 estudiantes (8.51 %) respondieron 10 y 13 preguntas correctamente, 5 de los estudiantes (10.63%) respondieron 15 preguntas acertadamente, 6 estudiantes (12.76%) respondieron correctamente 11 preguntas, 7 estudiantes (14.84%) respondieron 16 preguntas acertadamente y el mayor número de estudiantes 9 (19.14 %), respondieron 14 preguntas correctamente.



GRAFICA 25

El promedio resultante es de 3,64 problemas resueltos correctamente por estudiante, lo que constituye un promedio muy bajo dado el nivel de los problemas y la exigencia de los estándares básicos de competencia para este nivel educativo.

La siguiente tabla muestra la frecuencia y el porcentaje de aciertos de las respuestas dadas por los estudiantes.

Tabla 1 Frecuencia y porcentaje del número de respuestas correctas de los estudiantes de grado quinto

ACIERTOS	FRECUENCIA	PORCENTAJE	PORCENTAJE ACUMULADO
4	1	2,13	2,13
6	3	6,38	8,51
7	1	2,13	10,64
9	1	2,13	12,77
10	4	8,51	21,28
11	6	12,77	34,04
12	2	4,26	38,30
13	4	8,51	46,81
14	9	19,15	65,96
15	5	10,64	76,60
16	7	14,89	91,49
17	2	4,26	95,75
18	1	2,13	97,87
19	1	2,13	100,00
TOTAL	47	100,00	

Teniendo en cuenta que las puntuaciones pueden variar de 0 a 24 valores, la puntuación media es de 3,64 con el intervalo de confianza (-0,12, 7,40) que aparece en la tabla 2, indica que, en general, los estudiantes presentan grandes dificultades respecto al contenido evaluado, lo que confirma los diferentes tipos de errores analizados en cada uno de los problemas. Hay estudiantes que aciertan cuatro preguntas y el número máximo de preguntas contestadas correctamente es 19. Los estadísticos descriptivos correspondientes de la tabla 2 muestran que sólo un poco menos del 50% de los estudiantes contesta correctamente la mitad de los problemas formulados, pues el segundo cuartil es 12,5, que está por debajo del número más frecuente de respuestas correctas.

Tabla 2 Estadísticos descriptivos de la puntuación total de los estudiantes

ESTADISTICOS		VALOR
MEDIA		3,64
ERROR TIPICO DE LA MEDIA		1,92
INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA AL 95%		
	LIMITE INFERIOR	-0,12
	LIMITE SUPERIOR	7,40
MEDIANA		12,5
MODA		14
DESVIACIÓN TIPICA		13,14
VARIANZA		3,63
MÍNIMO		4
MÁXIMO		19
SUMA		171
PERCENTILES		
	25	8,5
	50	12,5
	75	15,75

4.2.3 Análisis del índice de dificultad de los problemas

Para este análisis se utilizó la misma clasificación que para el estudio de la puntuación total del cuestionario. Las respuestas de los alumnos se clasifican en correctas e incorrectas. Si la respuesta es correcta le asignamos el valor 1, y por el contrario si es incorrecta le asignamos el valor 0.

Según Mohamed (2012) citando a Muñiz (1994) el índice de dificultad (ID) de un problema, corresponde con la proporción de sujetos que lo aciertan de aquellos que han intentado resolverlo. Cuanto mayor es el índice de dificultad, el problema es más sencillo para los estudiantes y no más difícil. De este modo, es posible ver qué problemas han resultado más fáciles o más difíciles.

En la tabla 3 se presentan los índices de dificultad encontrados en los estudiantes. En ella se observa que los nueve problemas de mayor dificultad han sido en este orden:

• Problema 18 (ID = 0.00), sobre aplicación de la regla de Laplace, se evalúa si los estudiantes saben calcular la probabilidad de un evento, en este caso la probabilidad de sacar una bola de color azul de una caja con cinco bolas rojas y cinco azules.
• Problema 22 (ID = 0.13), sobre la probabilidad de sacar una carta (el 12 de espadas) de la baraja española, aplicando cualquier estrategia conocida por ellos.
• Problema 21 (ID = 0.15), sobre asignación de probabilidades, se pide determinar cuál es la probabilidad de sacar una carta de la baraja española con numeración menor que cinco.
• Problema 20 y 24 (ID = 0.21), sobre probabilidad simple, se evalúa el conocimiento que tienen los estudiantes para determinar numéricamente la probabilidad de un evento sencillo en estos casos utilizando una baraja española.
• Problema 23 (ID = 0.23), sobre determinar la probabilidad de sacar una carta del palo de espadas de la baraja española, aplicando cualquier estrategia conocida por ellos.
• Problema 14 y 19 (ID = 0.26), sobre asignación de probabilidades, de determinar cuál es la probabilidad de ganar o perder en un juego sencillo de palillos, y la probabilidad de sacar una carta cualquiera de la baraja española.
El análisis de la dificultad de los anteriores problemas corroboran los resultados obtenidos en el análisis de las respuestas evidenciando una vez más que el conocimiento evaluado de determinar la probabilidad simple en un evento sencillo por parte de los estudiantes es muy bajo.

• Problema 2 (ID = 0.38), hace referencia a determinar si un suceso es probable, seguro o imposible, para reconocer la aleatoriedad de los sucesos de la vida diaria.

Los problemas con una dificultad media han sido:
• Problema 4 (ID = 0.51), hace referencia a determinar si un suceso es probable, seguro o imposible, a partir de una situación de carácter naturalista (que mañana salga el sol) reconociendo el grado de aleatoriedad de los sucesos de la vida diaria.
• Problema 5 (ID = 0.55) hace referencia a determinar si un suceso es probable, seguro o imposible a partir de una situación de la vida diaria. (que salga agua por un grifo).

• Problema 8 (ID = 0.57), sobre el concepto de suceso seguro, probable e imposible, determinar el concepto de aleatoriedad a partir de un suceso de su diario vivir (probabilidad de escuchar música).

• Problema 11 (ID = 0.60), sobre el concepto de probabilidad simple, a partir de un juego conocido (piedra, papel o tijera) se estudian los conocimientos de los estudiantes sobre la noción de espacio muestral.

• Problema 17 (ID = 0.68), sobre el concepto de suerte desde el punto de vista matemático.

• Problema 10 (ID = 0.60), determinar el concepto de azar desde el punto de vista matemático.

• Problema 3 (ID = 0.74), sobre el concepto de suceso seguro, probable e imposible a partir de un suceso de su diario acontecer (probabilidad de encontrar un monstruo debajo de la cama).

• Problema 7 y problema 15 (ID = 0.77), sobre el concepto de aleatoriedad de los sucesos de la vida diaria (que un pájaro cante en este momento) y descubrir si un juego es justo o no lo es desde el punto de vista matemático.

Entre los problemas con menor dificultad están:

• Problema 12 y 13 (ID = 0.81), determinar si los estudiantes determinan que un juego es justo o no lo es y examinar el concepto de suerte, desde el punto de vista matemático a partir de un juego (piedra, papel o tijera).

• Problema 6 y 16 (ID = 0.83), sobre clasificar los sucesos en seguros, probables, e imposibles, y examinar si los estudiantes reconocen el concepto de suerte, desde el punto de vista matemático.

• Problema 1 y 9 (ID = 0.96), sobre determinar si los estudiantes reconocen la aleatoriedad de los sucesos de la vida diaria, y reconocer el grado de aleatoriedad o no de algunos juegos.

Tabla 3 Índice de dificultad de los problemas del cuestionario

PROBLEMAS	INDICE DE DIFICULTAD
PROBLEMA 1	0,96
PROBLEMA 2	0,38
PROBLEMA 3	0,74
PROBLEMA 4	0,51
PROBLEMA 5	0,55
PROBLEMA 6	0,83
PROBLEMA 7	0,77
PROBLEMA 8	0,57
PROBLEMA 9	0,96
PROBLEMA 10	0,70
PROBLEMA 11	0,60
PROBLEMA 12	0,81
PROBLEMA 13	0,81
PROBLEMA 14	0,26
PROBLEMA 15	0,77
PROBLEMA 16	0,83
PROBLEMA 17	0,68
PROBLEMA 18	0,00
PROBLEMA 19	0,26
PROBLEMA 20	0,21
PROBLEMA 21	0,15
PROBLEMA 22	0,13
PROBLEMA 23	0,23
PROBLEMA 24	0,21

Capítulo 5

Conclusiones, recomendaciones, limitaciones del estudio y líneas de investigación.

En este trabajo de investigación se ha hecho un análisis de un cuestionario sobre probabilidad, en él se ha utilizado las nociones teóricas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la Cognición e Instrucción Matemática propuesto por Godino y sus colaboradores, este marco teórico ha permitido analizar las respuestas de los estudiantes a los problemas de probabilidad propuestos en dicho cuestionario para determinar el conocimiento matemático de los estudiantes de grado quinto de la I.E Sagrada Familia, sobre probabilidad.

Una vez expuestos los resultados de los estudiantes, se finaliza esta investigación con la presentación de las conclusiones obtenidas, además se indican algunas recomendaciones, limitaciones del estudio y posibles líneas para continuar y completar esta investigación.

5.1 Conclusiones

En esta investigación proporcionamos información respecto al conocimiento probabilístico de los estudiantes de grado quinto de la I.E Sagrada Familia en tres aspectos como son, experimentos aleatorios, el azar y la vida cotidiana (a través de dos juegos conocidos por los estudiantes “PIEDRA, PAPEL Y TIJERA” y “LA PERSONA QUE ELIJA EL PALILLO MAS CORTO PIERDE”), y el cálculo de probabilidades, el análisis a las respuestas ha sido muy detallado.

La aplicación de las preguntas desde un contexto real y conocido por los estudiantes ha sido una gran certeza, pues es a partir de estas ideas previas que los estudiantes van afianzando su pensamiento aleatorio y las concepciones de lo probabilístico, sin embargo aún se encuentran estudiantes que se dejan influenciar por sus creencias culturales y personales al momento de resolver las preguntas planteadas y le dan mayor validez a la suerte que a los conceptos aleatorios.

Con respecto al cuestionario es importante que con las preguntas planteadas, además de las opciones de respuesta, se indague por las justificaciones dadas para escoger dicha respuesta, pues esto permitiría un mayor análisis sobre el conocimiento del estudiante.

En el ítem 15 las opciones de respuesta son muy ambiguas por lo que deben ser más explicitas.

El ítem 18 fue la pregunta que mayor dificultad causó a los estudiantes pues ningún estudiante; a pesar de que se les dio a conocer la regla de Laplace; fue capaz de responderla adecuadamente. Existe un vacío enorme en este sentido el cual es preocupante, para el nivel en el que se encuentran los estudiantes es un conocimiento mínimo que deberían haber adquirido, además si no lo tiene claro en esta etapa le va a causar dificultades en un futuro cuando se realiza un estudio de la probabilidad en mayor profundidad.

Los estudiantes participaron con agrado y disponibilidad de la prueba, además de manera responsable y seria, con el mayor de los compromisos lo que hace que los resultados obtenidos sean confiables.

En general en su gran mayoría los estudiantes a partir de las situaciones planteadas apreciaron las regularidades del azar, distinguieron entre sucesos seguros, probables e imposibles, diferenciaron entre experimento aleatorio y determinista, sin embargo presentaron grandes vacíos ya que por ninguna de las estrategias posibles lograron estimar probabilidades.

5.2 Recomendaciones:

Sea hace necesario plantear distintos tipos de situaciones y de preguntas en contextos conocidos y de interés para los estudiantes, que les permita entender con facilidad entre aquellos datos que son pertinentes para responder a las preguntas.

Según Vásquez y Alsina (2014) es importante tener en cuenta a la hora de iniciar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad algunas ideas claves como la importancia de centrarse, primeramente, en el desarrollo informal de la probabilidad a partir de la intuición y del planteamiento de actividades a partir de lo cotidiano, de un contexto cercano para los estudiantes, para así, posteriormente (Batanero y Godino, 2004):

- Proporcionar una amplia variedad de experiencias que permitan observar los fenómenos aleatorios y diferenciarlos de los deterministas.
- Estimular la expresión de predicciones sobre el comportamiento de estos fenómenos y los resultados, así como su probabilidad.
- Organizar la recogida de datos de experimentación de forma que los alumnos tengan posibilidad de contrastar sus predicciones con los resultados producidos y revisar sus creencias en función de los resultados.
- Resaltar el carácter imprevisible de cada resultado aislado, así como la variabilidad de las pequeñas muestras, mediante la comparación de resultados de cada niño o por parejas.
- Ayudar a apreciar el fenómeno de la convergencia mediante la acumulación de resultados de toda la clase y comparar la fiabilidad de pequeñas y grandes muestras.

Es importante la utilización de los juegos de azar, como por ejemplo: dados, cartas, ruletas, etc. con los cuales los estudiantes están muy familiarizados, y así introducir de forma progresiva la noción de probabilidad. Los juegos de azar tuvieron gran importancia en el origen de la teoría de probabilidad y son uno de los principales contextos en el que los niños pueden comprender las características de las situaciones aleatorias (Batanero, 2005). Estos juegos forman parte de la cultura del niño fuera de la escuela, y, a través de los mismos, los niños adquieren conocimientos probabilísticos incluso antes de una instrucción formal (Peard, 1990).

Se debe instruir a los estudiantes en que una forma adecuada y que facilita dar respuestas a las situaciones planteadas es a través de la organización y análisis de los datos por medio del uso de distintos tipos de registros lo que permitirá la realización de inferencias y predicciones.

En este nivel se hace necesario para los estudiantes la adquisición de las nociones básicas relacionadas con la probabilidad e incertidumbre, pues a partir de ellas podrán fácilmente aplicarlas en situaciones de la vida diaria y más adelante realizar un estudio de la probabilidad en mayor profundidad. Aquí se debe hacer énfasis en las diferentes estrategias de estimar una probabilidad, pues es el punto que mayor dificultad causó a los estudiantes en el cuestionario.

Y finalmente es importante que los profesores cuenten con una formación que los lleve a tener una actitud reflexiva y crítica sobre los conceptos que deben enseñar, sus estrategias de enseñanza y de la manera en cómo aprenden sus estudiantes, para empoderar que progresivamente consideren la probabilidad como una herramienta para el análisis de información, modelamiento y resolución de problemas provenientes de distintos ámbitos. Vásquez y Alsina (2014).

5.3 Limitaciones del estudio.

En la presente investigación para determinar el desarrollo del conocimiento de los estudiantes de grado quinto de la I.E Sagrada Familia educación primaria, se ha utilizado una muestra de tamaño bajo, la cual se puede aumentar. Por esto no se pretende generalizar estos resultados, sino que solo se refieren al grupo de estudiantes participantes y a las situaciones planteadas en el cuestionario.

Los datos han sido obtenidos mediante un cuestionario escrito, en el que la mayoría de las preguntas 23 de ellas son de selección múltiple sin justificación y solo una era para que el estudiante representara matemáticamente una probabilidad, sin una interacción directa con los participantes; por lo tanto, no pueden describirse de una forma exhaustiva la complejidad y riqueza de los conocimientos de los estudiantes de grado quinto. Los resultados se podrían completar adicionando esta opción a las preguntas planteadas y con entrevistas clínicas en profundidad a los estudiantes que presenten las mayores falencias para explicar con mayor detalle las causas de ellas.

5.4 Líneas de investigación futuras

A partir de las limitaciones de este trabajo, indicadas en el apartado anterior, surgen nuevas líneas de investigación para continuar el análisis del conocimiento de los estudiantes de grado quinto sobre probabilidad.

a) Anexar al cuestionario trabajado la parte de justificación de las respuestas, lo que permitiría un análisis más detallado del conocimiento del estudiante.

b) Ampliar el tamaño de la muestra con nuevos estudiantes, incluyendo a los que se encuentran adelantando cursos en otras instituciones del municipio.

c) Comparar nuestros resultados con estudiantes de grado quinto de otras instituciones, del municipio o de otros municipios lo que puede contribuir a tener una visión global del problema, detectando las semejanzas o diferencias entre dichos colectivos.

d) Realizar este tipo de estudios a profesores de educación primaria en activo, de los que existen pocas investigaciones.

e) Ampliar los problemas del cuestionario incluyendo un mayor número de problemas y utilizando diferentes contextos.

Bibliografía

Amir, G. y Williams, J. S. (1999). Cultural influences on children's probabilistic thinking. Journal of Mathematical Behavior, 18(10), 85-107.

Arteaga, P., Batanero C,. & Contreras J. M. (2011). Gráficos estadísticos en la educación primaria y en la formación de profesores.

Batanero, C. (2000). Hacia dónde va la educación estadística Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, batanero@goliat.ugr.es Blaix15, 2-13, 2000.

Batanero C. (2001) Didáctica de la Estadística.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. Revista Latinoamericana de Educación Matemática, 8(3), 247-263.

Batanero. C., & Godino. J. D., (2001). Análisis de Datos y su Didáctica.

Batanero, C. y Serrano, L. (1995). Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. UNO, 15-28.

Batanero, C., Gómez, E., Serrano, L., & Contreras, J.L. (2012). Comprensión de la Aleatoriedad por Futuros Profesores de Educación Primaria. Journal of Research in Mathematics Education, 1(3), 222-245. doi: 10.4471/redimat.2012.13

Batanero, C., Ortiz J., & Serrano L., Investigación en didáctica de la probabilidad.

Batanero, C., Serrano, L. y Green, D. R. (1998). Randomness, its meanings and implications for teaching probability. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 29 (1), 113-123.

Cañizares, M. J. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias (Doctoral dissertation, Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada).

Cañizares. M. J. y Batanero, C. (1998). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 14, 99-114.

Cañizares M. J., Batanero. C., Serrano. L, & Ortiz. J.J. (1999). Comprensión de la idea de juego equitativo en los niños. Números, 37, 37-55, 1999.

Cañizares. M. J. & Batanero, C. (1998). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 14, 99-114.

Cardeñoso, Azcárate y Serradó, (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto. Statistics Education Research Journal, 4(2), 59-81, http://www.stat.auckland.ac.nz/serj © International Association for Statistical Education (IASE/ISI), Nov, 2005.

Del Puerto S., Seminara. S., & Minnard, C. (2007). Identificación y análisis de los errores cometidos por los alumnos en estadística descriptiva. Revista Iberoamericana de Educación (ISSN: 1681-5653) n.º 43/3 – 25 de junio de 2007 EDITA: Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI).

Delors. J. (1997). La educación encierra un tesoro.

El ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DE LA COGNICIÓN MATEMATICA TOMADO DE (http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/1313/02.ARP_BLOQUE_II_Marco_teorico.pdf;jsessionid=4C96F78D6B854022115F941D5B0152DA.tdx1?sequence=2).

Entidad pública empresarial Red.es. Programa Internet en el Aula. Ministerio de educación y ciencia España.

http://repositorio.educa.jccm.es/portal/odes/matematicas/azar_y_probabilidad/mt11_oa01_es/index.html.

Estrada. A., Batanero. C., & Fortuny. J. M. Dificultades de los profesores en formación en conceptos estadísticos elementales.

Falk, R. (1983). Children's choice behaviour in probabilistic situations. In D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett y G. M. constable (Eds.), Proceedings of de First International Conference on Teaching Statisitics (pp. 714-716). Sheffield, England: Teaching Statistics Trust.

Falk, R. y Wilkening, F. (1998). Children's construction of fair chances: Adjusting probabilities. Developmental Psychology, 34(6), 1340-1357.

Fischbein, E. (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Dordrecht: Reidel

Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15, 1-24.

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. Educaçao Matemática Pesquisa, 8 (1), 67-98.

Galicia Mayen. Azucena Silvia (2005) COMPRENSIÓN DE LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL en estudiantes de mexico. Tesis doctoral.

García, G. R. (2013) Aprendizaje de la Estadística y la Probabilidad en secundaria.

Garfield, J. B. y Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (1), 44 - 63.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactique des Mathematiques, 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2003). Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico

de la cognición e instrucción matemática. Departamento de Didáctica de
la Matemática. Universidad de Granada. On line: www.ugr.es/local/jgodino/.

Godino. J.D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. Revista iberoamericana de educación matemática. Número 20, páginas 13-31SSN: 1815-0640.

Godino. J. D. Síntesis del Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática, "Problemas y metodologías de investigación en el marco del Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática". Conferencia del en el XI Congreso Puertorriqueño de Investigación en la Educación.

Godino, J. D. (2011). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Universidad de Granada.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathématigues*, 14(3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998a). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Educations. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.). *Mathematics education a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998b). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En I. Vale y J. Portela (Eds.). *IX Seminário de Ivestigaçao em Educaçao Matemática (p. 25-45).* Associaçao de Profesores de Matemática. Portugal.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007) Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático. Consultado en diciembre 15, 2009.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. Educational Studies in Mathematics, 60 (1), 3-36.

Godino. J., Bencomo. D., Font. V., & Wilhelmi. M. Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Godino. J., Font. V., & Wilhelmi. M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio basado en el enfoque ontosemiotico.

Godino. J., Arteaga. P., Estepa. A., & Rivas. H. (2011). Desafíos de la enseñanza de la estadística basada en proyectos. Universidad de Granada, Universidad de Jaén. Pontificia Universidad Católica de Chile.

Godino. J, Batanero. C., & Cañizares. M. J. Azar y Probabilidad, Matemáticas cultura y aprendizaje, editorial síntesis.

HISTORIA DE LA PROBABILIDAD. Retomado de https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Historia%20de%20la%20probabilidad.pdf

http://www.vitutor.com/pro/3/a_1.html.

Lecoutre, M. P. y Durand, J. L. (1988). Judgements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aleatoire. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 357- 368.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.

Ley general de educación ley 115/1994.

Lineamientos curriculares de Matemáticas (MEN 1998).

Martínez. C. & Penalva. M. (2006). Proceso de simbolización del concepto de potencia: análisis de libros de texto de secundaria, enseñanza de las ciencias, 2006, 24(2), 285–298.

Metz, K. E. (1998b). Emergen understanding and attribution of randomness: Comparative analisys of reasoning of primary grade children an undergraduates. Cognition and Instruction, 16, 285-365.

Ministerio de educación nacional MEN (2006).Estándares básicos de competencias en matemáticas.

Mohamed, N. (2012). Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad. Tesis doctoral. Departamento de didáctica de la matemática universidad de Granada.

Moliner. M. (1993). Diccionario de uso de español.

Muñiz, J. (1994). *Teoría clásica de los tests*. Madrid, Pirámide.

Niño. J. (2012). Tratamiento de la Probabilidad y la Estadística para Principiantes.

Nisbett, R. y Ross, L. (1980). Human inference: Strategies and shortcomings of social judgments. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Ortiz. J. J., Batanero. C., & Contreras. J. M. (2012). Conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 15(1), 63-91. Recuperado en 19 de noviembre de 2015, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362012000100004&lng=es&tlng=es.

Ortiz, J. J.; Mohamed, N.; Serrano, L. & Rodríguez, J. (2007). Competencias de futuros profesores de Educación Primaria en la asignación de probabilidades. En R. Luengo; B. Gómez; M. Camacho y L. Blanco (eds.), Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XII Simposio de la SEIEM. Badajoz. pp.

Peard, R. F. (1990). Probabilistic concepts in school mathematics. Australian Mathematics Teacher, 46(2), 14-15.

Pirela. J., Peña. T. (2005). Nuevos desafíos para la formación del profesional de la información frente al surgimiento de la cibersociedad: un enfoque de competencias (2005) revista scielo.

Piaget, J., e Inhelder, B. (1951). La genése de l'idée de hasard chez l'enfant. Paris: Presses Universitaires de France.

Rivas, H., Godino, J. D., Arteaga, P. y Estepa, A. (2013). Desarrollo del conocimiento estadístico común y avanzado en estudiantes de magisterio. Investigación en Educación Matemática XVII (pp. 467-474). Bilbao: SEIEM.

Ruiz. K. (2013). Análisis de recursos en internet para la enseñanza de estadística en primaria.

Serrano, L. (1996). Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial a la enseñanza de la probabilidad. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Serrano. L., Batanero. C. & Ortiz. J. J. (1996). Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de bachillerato. Suma, 22, 43-50, 1996.

Truran, J. (1994b). Examination of a relationship between children's estimation of probabilities and their understanding of proportion. En J. P. Ponte and J. F. Matos (Eds), *Proceedings ot the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (v4, pp. 337-344). University of Lisbon.

Vásquez, C., & Alsina, Á. (2014). Enseñanza de la probabilidad en Educación Primaria. Un desafío para la formación inicial y continua del profesorado. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *85*, 5-23.

Vasquez. L., & Cubides. F. (2011). Estrategia didáctica de enseñanza orientada desde las fases concreta, gráfica y simbólica para el aprendizaje significativo del concepto de potenciación con números naturales. 12 encuentro colombiano de matemática educativa.

Watson, J. M. (2001). Profiling teachers competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of chance and data. Journal of Mathematics Teacher Education 4(4), 305-337.

Watson, J. M., Collis, K. F. y Moritz, J. B. (1997). The development of chance measurement. Mathematics Education Research Jornal, 9, 60-82.

Way, J. (1996). Children's strategies for comparing two types of random generators. In L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), Proceedings of the 20th conference of the International Group for the Psycology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 419-526). Valencia, Spain: Universidad de Valencia.

ANEXOS

ANEXO 1

CUESTIONARIO[4]

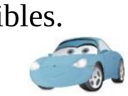
La siguiente prueba consta de varias preguntas sobre **PROBABILIDAD**, te invito a responderlas individualmente de la manera más responsable y atenta posible.

AZAR Y PROBABILIDAD

Muchos de los sucesos que ocurren no pueden predecirse, decimos que son debidos al azar. Como saber que dos amigos se encontrarían hoy después de varios años sin verse?

¿Cómo podrían saber que precisamente hoy iba a llover?

Hay procesos que pueden ser calificados como imposibles.
Es imposible que un auto funcione sin gasolina.



Otros procesos pueden ser calificados como probables, por ejemplo es probable que un perro encuentre un hueso enterrado por otro perro.

Otros procesos pueden ser calificados como seguros. Como en una bolsa de solo dulces de chocolate, es seguro que el dulce que saques sea de chocolate.

CLASIFICA CADA UNA DE LAS SIGUIENTES SITUACIONES EN SEGURO, PROBABLE E IMPOSIBLE.

1. La probabilidad de que este hombre vuele. ______________________

[4] TOMADO DE http://repositorio.educa.jccm.es/portal/odes/matematicas/azar_y_probabilidad/mt11_oa01_es/index.html

2. La probabilidad de que Mario apruebe el examen si ha estudiado. ___________

3. La probabilidad de que haya un monstruo debajo de la cama. ____________

4. La probabilidad de que mañana salga el sol. _________________

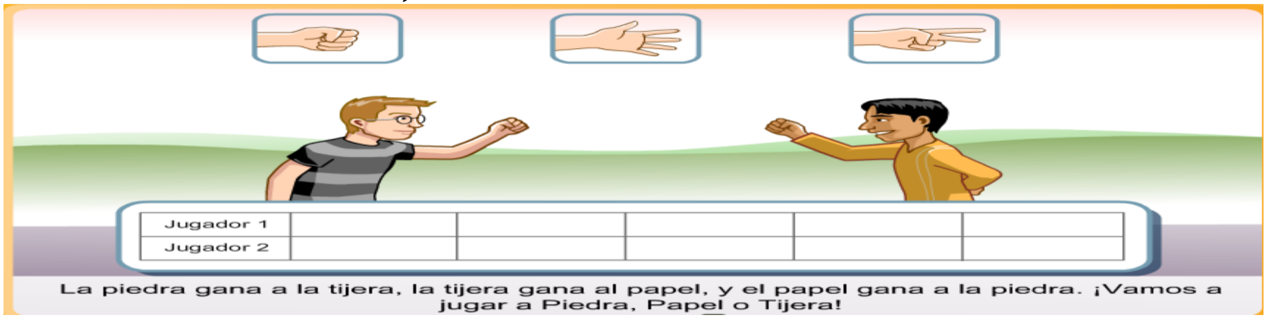
5. La probabilidad de que caiga agua cuando se abra la llave del lavamanos. _______________________________

6. La probabilidad de que una moneda caiga cara.- ___________________

7. La probabilidad de que un pájaro cante en este momento.________________________

8. La probabilidad de que la joven este escuchando salsa. ______________

RESPONDE LAS PREGUNTAS 9 A LA 13 DE ACUERDO CON LA INFORMACIÓN, SELECCIONANDO UNA SOLA OPCIÓN.
VAMOS A JUGAR PIEDRA, PAPEL O TIJERA.



9. ¿Cuándo se produce un empate en este juego?
   e. Cuando los dos contrincantes eligen la misma opción.
   f. Cuando un contrincante elige piedra y el otro papel.
   g. Cuando un contrincante elige papel y el otro tijera.
   h. Nunca se puede empatar.

10. ¿Qué situación es la más frecuente?
   e. El empate.
   f. Que gane el jugador 1.
   g. Que gane le jugador 2.
   h. No se puede saber porque es un juego de azar.

11. ¿Cuántas posibilidades hay de que un contrincante elija salir con piedra?
   e. No hay ninguna, porque la piedra siempre pierde.
   f. Las mismas probabilidades de que elija tijera o papel.
   g. Es casi seguro de que siempre se salga con piedra.
   h. Siempre hay que salir eligiendo la opción piedra porque siempre se gana.

12. ¿Hay algún truco para ganar?
   e. Sí, saliendo con piedra.
   f. Sí, saliendo con tijera.
   g. Sí, saliendo con papel.
   h. No, porque es un juego de azar.

13. ¿Sirve para ganar tener algún amuleto?
   e. Sí, si tienes un amuleto siempre se gana.
   f. Depende del tipo de amuleto.
   g. No, porque es un juego de azar.
   h. Sí, los amuletos siempre dan buena suerte.

RESPONDE LAS PREGUNTAS DE LA 14 A LA 17 DE ACUERDO CON LA INFORMACIÓN.
LA PERSONA QUE ELIJE EL PALILLO MAS CORTO PIERDE:

14. ¿Qué probabilidad hay de perder, si en total hay 8 palillos?
e. Las posibilidades de perder son las mismas que las posibilidades de ganar.
f. No hay ninguna posibilidad de perder.
g. Hay una posibilidad de perder y siete de ganar.
h. Siempre se pierde.

15. ¿Ser el primero en elegir un palillo da alguna ventaja?
e. Sí, porque el primer palillo siempre es largo.
f. No, porque se puede sacar un palillo largo o un palillo corto.
g. No, porque el primer palillo siempre será más pequeño que le resto.
h. Sí, porque el que saca primero siempre gana.

16. ¿Qué pasa si juegas un martes 13?
e. En martes y 13 siempre se pierde.
f. Es mejor no jugar un a martes y 13.
g. Lo mismo que si juegas cualquier otro día.
h. Que hay más posibilidades de perder.

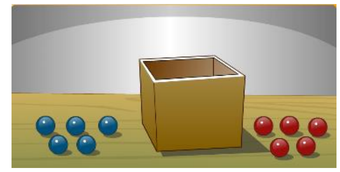
17. ¿Y si juegas con unos pantalones amarillos?
e. El color amarillo da mala suerte.
f. Lo mismo que con pantalones de cualquier otro color.
g. Nunca hay que jugar con ropa de color amarillo.
h. Hay mas posibilidades de perder, aunque también se puede ganar.

CALCULO DE PROBABILIDADES

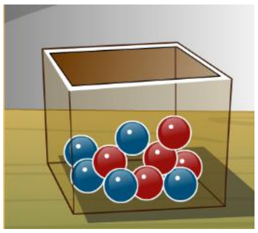
Ahora vas a calcular algunas probabilidades de eventos sencillos.

Recuerda que: **PROBABILIDAD =** $\frac{\textit{NÚMERO DE CASOS FAVORABLES}}{\textit{NÚMERO DE CASOS POSIBLES}}$

Andrés ha metido cinco bolas de color azul y otras cinco bolas de color rojo en la caja.

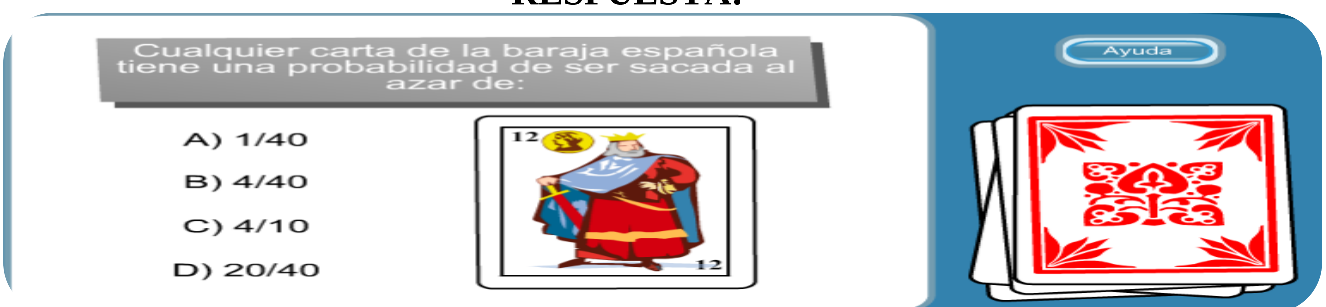


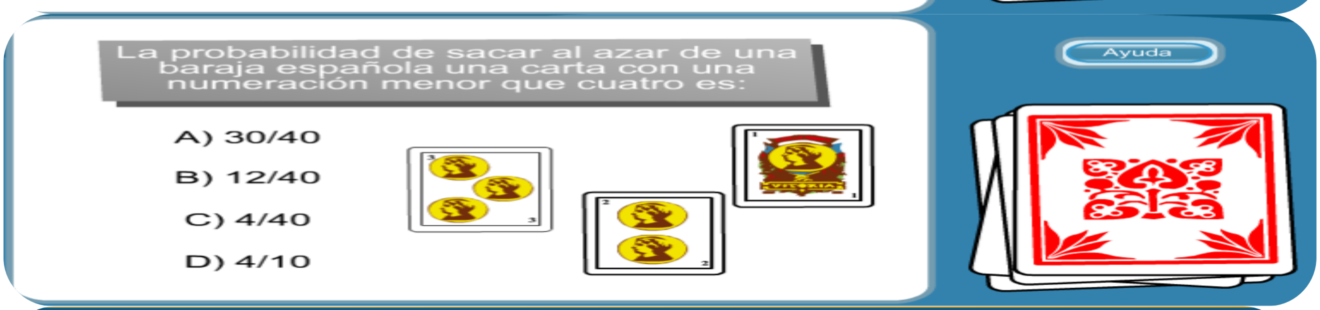
18. ¿Cuál es la probabilidad de que saque sin mirar, una bola de color azul?

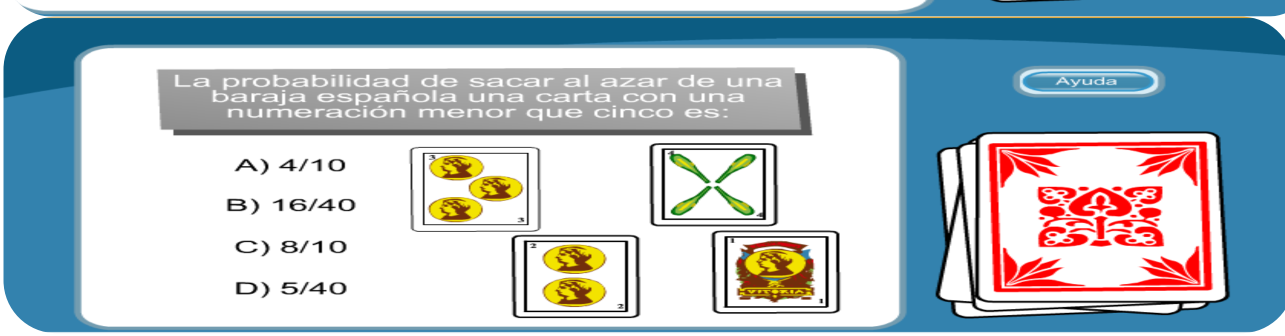


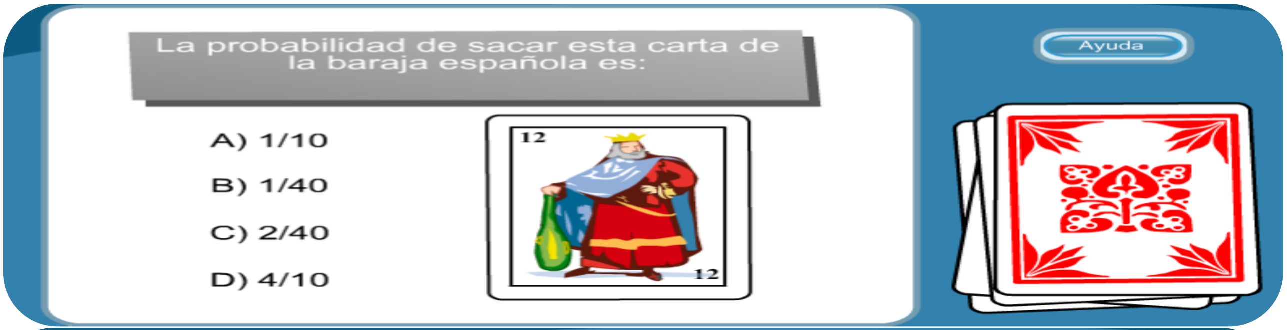
LA BARAJA ESPAÑOLA

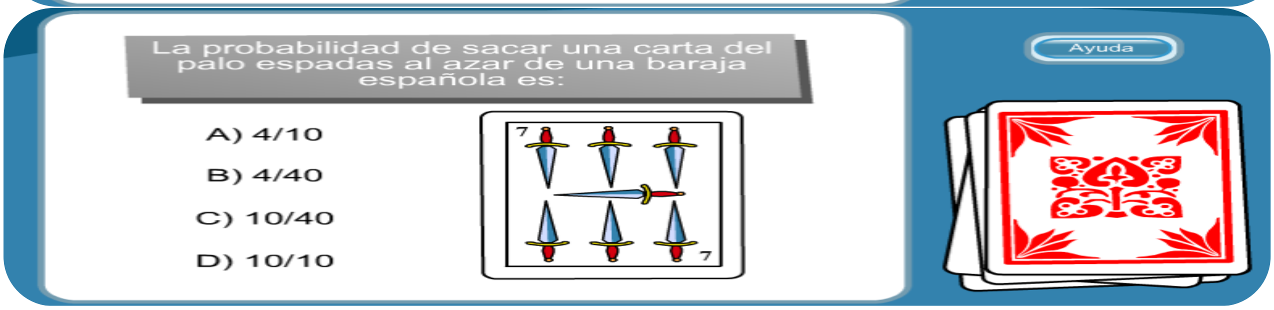
EN LAS SIGUIENTES PREGUNTAS SELECCIONA UNA SOLA RESPUESTA:








Ayuda
La probabilidad de sacar esta carta de la baraja española es:
A) 1/10
B) 1/40
C) 2/40
D) 4/10
12
12


Ayuda
La probabilidad de sacar una carta del palo espadas al azar de una baraja española es:
A) 4/10
B) 4/40
C) 10/40
D) 10/10
7
7

ANEXO 2

FOTOS