SUR LA H-RIGIDITÉ DES SURFACES COMPLÈTES DE $\mathbf{R}^3$

FRANÇOIS HAAB

Le théorème fondamental de la théorie locale des surfaces affirme que toute immersion C^3 d'une surface dans $\mathbf{R}^3$ est déterminée, à congruence près, par sa première et deuxième forme fondamentale. Nous montrerons dans cette note qu'une surface complète C^5 de $\mathbf{R}^3$ avec $|dH| \neq 0$ est en fait essentiellement déterminée, à congruence près, par la première forme fondamentale et la trace de la seconde, i.e. par la métrique et la fonction courbure moyenne H.

Une surface de $\mathbf{R}^3$ est dite *H-déformable* s'il existe une famille à un paramètre de surfaces isométriques non congruentes possédant la même fonction courbure moyenne H. O. Bonnet remarqua en 1867 que les surfaces de courbure moyenne constante sans ombilics sont H-déformables. E. Cartan prouva en [**1**] que toute surface H-déformable est une surface de Weingarten dont la fonction courbure moyenne satisfait une équation différentielle ordinaire non linéaire du troisième ordre. En [**2**], S. S. Chern donne une méthode locale pour construire de telles surfaces. Par contre les surfaces compactes, orientables et H-déformables de $\mathbf{R}^3$ possèdent forcément (Umehara [**8**]) une courbure moyenne constante. Il n'existe par conséquent pas de surface H-déformable de genre zéro, en effet par le théorème de Hopf [**5**, 6.2.1] une telle surface serait une sphère de rayon constant, laquelle est bien évidemment rigide. Par contre les surfaces de genre $g > 0$ possèdent toutes des immersions de courbure moyenne constante dans $\mathbf{R}^3$. Il résulte de [**7**], voir également [**8**], que toutes les surfaces compactes possèdent au plus deux immersions isométriques non congruentes ayant la même fonction courbure moyenne.

Le Théorème A répond négativement à une question de Kenmotsu [**6**] sur l'existence d'immersions isométriques H-déformables avec $|dH| \neq 0$ de surfaces complètes mais non compactes dans $\mathbf{R}^3$.

THÉORÈME A. *Les immersions isométriques dans $\mathbf{R}^3$ d'une surface non compacte, complète, non contractile et non homéomorphe à un anneau, avec $|dH| \neq 0$ ne sont pas H-déformables.*

COROLLAIRE B. *Soit une surface non compacte M munie d'une métrique riemanienne complète et une fonction C^3, $H\colon M \to \mathbf{R}$, avec $|dH| \neq 0$. Si $\pi_1(M)$ n'est pas commutatif, M possède au plus deux immersions isométriques non congruentes dans $\mathbf{R}^3$ avec la même fonction courbure moyenne H.*

Démonstration des résultats

Nous utiliserons de manière essentielle la conséquence suivante de la caractérisation locale, établie récemment par Kenmotsu, de la métrique riemanienne d'une surface de Weingarten H-déformable de courbure moyenne non constante.

Received 22 December 1995.
1991 *Mathematics Subject Classification* 53A05, 53A10.

LEMME 1 [6]. *Soit U un ouvert contractile et soit une immersion isométrique $X\colon U \to \mathbf{R}^3$ H-déformable avec $|dH| \neq 0$ qui ne posséde pas d'ombilics. Il existe alors un système de coordonnées isothermes (u,v) avec $ds^2 = \Lambda(du^2+dv^2)$ tel que Λ et la fonction courbure moyenne H soient des fonctions d'une seule variable, u par exemple.*

Rappelons également le lemme suivant.

LEMME 2 [3]. *Une immersion isométrique $X\colon M \to \mathbf{R}^3$ sans ombilics est H-déformable si et seulement si la courbure de Gauss de la métrique conforme définie par $ds^{\sharp^2} = \sigma\, dX\cdot dX$, avec $\sigma = |dH|^2/(H^2-K)$, est constante et égale à -1.*

Preuve du Théorème A. Soit $X\colon M \to \mathbf{R}^3$ une immersion isométrique complète H-déformable avec $|dH| \neq 0$. X induit une métrique C^2 sur M, M peut ainsi être muni d'une structure de surface de Riemann de manière naturelle.

Rappelons que les ombilics d'une immersion isométrique H-déformable sont isolés [7] et désignons par Z l'ensemble des ombilics de X. Le revêtement universel $\hat{M}$ de $M\backslash Z$ est, par le théorème d'uniformisation, conformément équivalent soit au plan complexe, soit au disque de Poincaré, la sphère de Riemann étant exclue par non compacité de $M\backslash Z$. Soit $\pi\colon \hat{M} \to M\backslash Z$ la projection de revêtement, $\hat{X} = X\circ\pi$ définit une immersion de $\hat{M}$ sans ombilics avec $|dH| \neq 0$.

Observons que $\hat{X}$ est H-déformable. Soit ds^2 (respectivement $d\hat{s}^2$) la métrique induite par X (respectivement $\hat{X}$) sur M (respectivement $\hat{M}$) et $ds^{\sharp^2} = \sigma\, ds^2$ (respectivement $d\hat{s}^{\sharp^2} = \sigma^\sharp\, d\hat{s}^2$) avec $\sigma = \sigma^\sharp = |dH|^2/(H^2-K)$ la métrique conforme définie sur $M\backslash Z$ (respectivement $\hat{M}$). L'application de revêtement π est une isométrie locale de $(\hat{M}, d\hat{s}^2)$ sur $(M\backslash Z, ds^2)$ et de $(\hat{M}, d\hat{s}^{\sharp^2})$ sur $(M\backslash Z, ds^{\sharp^2})$. Par conséquent la courbure de Gauss de la métrique $d\hat{s}^{\sharp^2}$ en $x\in\hat{M}$ est égale à celle de la métrique $ds^{\sharp^2}$ en $\pi(x)\in M\backslash Z$. Le fait que $\hat{X}$ est H-déformable résulte directement du Lemme 2 et de la H-déformabilité de X.

La fonction courbure moyenne H est une submersion de M (respectivement $\hat{M}$) dont les niveaux définissent un feuilletage $\mathscr{F}$ de M (respectivement $\hat{\mathscr{F}} = \pi^*(\mathscr{F}|_{M\backslash Z})$ de $\hat{M}$) sans points singuliers. Il existe par le Lemme 1 un système de coordonnées isothermes spéciales sur $\hat{M}$ avec $ds^2 = \Lambda(du^2+dv^2)$ tel que la fonction courbure moyenne H, ainsi que Λ, soient des fonctions de la seule variable u. Il existe ainsi un difféomorphisme ϕ de $\hat{M}$ tel que le feuilletage $\phi^*\hat{\mathscr{F}}$ soit trivial. Ceci a plusieurs conséquences importantes.

COROLLAIRE C. *Une immersion isométrique, H-déformable avec $|dH| \neq 0$ d'une surface ne possède pas de points ombilics.*

Preuve du Corollaire C. Soit, par l'absurde, $p\in M$ un ombilic et F la feuille de $\mathscr{F}$ contenant p. Comme p disconnecte F, la fibre $(H|_{M\backslash Z})^{-1}(H(p))$ est composée de plusieurs feuilles de $\mathscr{F}|_{M\backslash Z}$. Le feuilletage $\hat{\mathscr{F}} = \pi^*\mathscr{F}$ possède donc au moins deux feuilles F_1 et F_2 sur lesquelles $H|_{M\backslash Z}\circ\pi$ prend la même valeur. Il existe, par trivialité du feuilletage $\phi^*\hat{\mathscr{F}}$, un arc $\Gamma\subset\hat{M}$ transverse aux feuilles de $\hat{\mathscr{F}}$ avec une extrémité sur chacune des feuilles F_1 et F_2. La fonction courbure moyenne sur $\hat{M}$, $H = (H|_{M\backslash Z})\circ\pi$ possède un extremum q sur Γ car elle prend la même valeur aux deux extrémités de Γ. Le point $q\in\hat{M}$ est un point singulier de H; sa projection $\pi(q)\in M\backslash Z$ également. Contradiction.

Fin de la démonstration du Théorème A. L'ensemble Z des ombilics de M est vide, $M = M\backslash Z$ est donc une surface complète. Par conséquent le revêtement universel (holomorphe) $\hat{M}$ de $M = M\backslash Z$ est complet. $\hat{M}$ est le disque de Poincaré car $\pi_1(M)$ est non commutatif par hypothèse. Les feuilles de $\phi^*\hat{\mathscr{F}} \subset \hat{M}$ sont les lignes de coordonnées $\{u = \text{constante}\}$ d'un système de coordonnées isothermes spéciales conformément équivalent à la métrique de Poincaré. La première forme fondamentale ds^2 est invariante sur chaque feuille de $\phi^*\hat{\mathscr{F}}$. La longueur de chaque feuille est donc finie. D'autre part chaque feuille de $\phi^*\hat{\mathscr{F}}$ est un chemin divergent. Nous obtenons la contradiction cherchée en rappelant (voir, par exemple, [**4**, 3.3.6]) qu'une variété riemanienne M est complète si et seulement si tout chemin divergent C^1, $\gamma\colon [0,1) \to M$, a une longueur infinie.

Preuve de Corollaire B. S'il existe par l'absurde deux autres immersions isométriques non congruentes de M dans $\mathbf{R}^3$ avec la même fonction courbure moyenne H, M est [**8**, Proposition 1] localement H-déformable. La courbure de Gauss de la métrique conforme définie par $\sigma\, ds^2$, $\sigma = |dH|^2/(H^2 - K)$ est égale à -1 sur $M\backslash Z$. On procède maintenant comme dans la démonstration du théorème.

Références

1. E. Cartan, 'Sur les couples de surfaces applicables avec conservations des courbures principales', *Bull. Sci. Math.* 66 (1942) 1–30; ou *Oeuvres complètes*, Partie III, Vol. 2, 1591–1620.
2. S. S. Chern, 'Deformations of surfaces preserving principal curvatures', *Differential geometry and complex analysis*, H. E. Rauch Memorial Volume (ed. I. Chavel and H. M. Farkas, Springer, Berlin, 1985) 155–163.
3. A. G. Colares and K. Kenmotsu, 'Isometric deformation of surfaces in $\mathbf{R}^3$ preserving the mean curvature function', *Pacific J. Math.* 136 (1989) 71–80.
4. U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster and O. Wohlrab, *Minimal surfaces I* (Springer, Berlin, 1992).
5. H. Hopf, *Differential geometry in the large*, Lectures Notes in Math. 1000 (Springer, Berlin, 1983).
6. K. Kenmotsu, 'An intrinsic characterization of H-deformable surfaces', *J. London Math. Soc.* 49 (1994) 555–568.
7. H. B. Lawson and R. Tribuzy, 'On the mean curvature function for compact surfaces', *J. Differential Geom.* 16 (1981) 179–183.
8. M. Umehara, 'A characterization of compact surfaces with constant mean curvature', *Proc. Amer. Math. Soc.* 108 (1990) 483–489.

Institut de Mathématiques, BCH
Université de Lausanne
1015 Lausanne-Dorigny
Switzerland