PROCEEDINGS OF THE
Cambridge Philosophical Society

VOL. 33 — *October*, 1937 — PART 4

QUELQUES REMARQUES À PROPOS D'UNE NOTE DE G. H. HARDY: THE RESULTANT OF TWO FOURIER KERNELS (1)

BY MICHEL PLANCHEREL, à Zurich

[Communicated by PROF. G. H. HARDY]

[*Received* 4 June, *read* 25 October 1937]

En prenant connaissance d'un mémoire récent de M. G. Doetsch (2), mon attention a été ramenée sur quelques remarques de nature élémentaire que la lecture de la note de M. Hardy, citée ci-dessus, m'avait suggérées et qui me paraissent apporter quelque clarté sur l'origine des résultats obtenus par ces auteurs relativement à la composition des noyaux de Fourier. Des remarques analogues sont contenues dans un article de M. Hermann Kober qui paraîtra prochainement (3) et dont M. Hardy m'a obligeamment communiqué les épreuves. La voie que j'ai suivie diffère de celle de M. Kober; je l'expose brièvement ci-dessous.

1. Les transformations étudiées par M. Hardy font partie de la classe des transformations unitaires de l'espace hilbertien $L_2(0, \infty)$ (des fonctions mesurables et de carré intégrable dans $(0, \infty)$) qui vérifient l'équation fonctionnelle

$$T[f(\alpha x) \mid y] = \alpha^{-1} T[f(x) \mid \alpha^{-1} y] \tag{1}$$

pour toute valeur positive de α (4). M. Watson a donné la forme analytique générale de ces transformations (5). Nous appellerons donc *transformations de Watson* les transformations de cette classe.

THÉORÈME 1. *Si T_1, T_2, T_3 sont des transformations linéaires bornées de $L_2(0, \infty)$ qui vérifient l'équation fonctionnelle* (1), *la transformation $T_1 T_2 T_3$ est aussi une solution de cette équation.*

Le produit de transformations unitaires étant encore une transformation unitaire, il résulte du théorème précédent et de la définition des transformations de Watson le

THÉORÈME 2. *Le produit de trois transformations de Watson est une transformation de Watson.*

Le théorème 1 peut se démontrer comme suit: Soient

$$f_3(y) = T_3[f(x) \mid y], \quad f_{23}(y) = T_2[f_3(x) \mid y], \quad f_{123}(y) = T_1[f_{23}(x) \mid y].$$

Alors, en vertu de (1), on a successivement

$$T_3[f(\alpha x)\,|\,y] = \alpha^{-1}T_3[f(x)\,|\,\alpha^{-1}y] = \alpha^{-1}f_3(\alpha^{-1}y),$$
$$T_2T_3[f(\alpha x)\,|\,y] = \alpha^{-1}T_2[f_3(\alpha^{-1}x)\,|\,y] = T_2[f_3(x)\,|\,\alpha y] = f_{23}(\alpha y),$$
$$T_1T_2T_3[f(\alpha x)\,|\,y] = T_1[f_{23}(\alpha x)\,|\,y] = \alpha^{-1}T_1[f_{23}(x)\,|\,\alpha^{-1}y]$$
$$= \alpha^{-1}f_{123}(\alpha^{-1}y) = \alpha^{-1}T_1T_2T_3[f(x)\,|\,\alpha^{-1}y].$$

Incidemment, on voit que le *produit* T_2T_3 *de deux transformations linéaires bornées de* $L_2(0,\infty)$ *qui vérifient l'équation fonctionnelle* (1), *s'il n'est pas nul, n'est pas une solution de cette équation, mais de la suivante*:

$$T[f(\alpha x)\,|\,y] = T[f(x)\,|\,\alpha y]. \tag{2}$$

Le produit de deux transformations de Watson n'est donc jamais une transformation de Watson.

Les transformations du type $T[f(x)\,|\,y] = \int_0^\infty K(xy)f(x)\,dx$, où $K(x)$ est une fonction de $L_2(0,\infty)$, forment une classe très particulière dans l'ensemble des transformations linéaires bornées satisfaisant à l'équation (1). La vérification du théorème 1 est immédiate pour les transformations de ce type particulier.

2. On sait qu'une transformation linéaire bornée T de $L_2(0,\infty)$ possède une fonction *génératrice* $\tau(x;y)$ définie dans le domaine $(0 \leqslant x < \infty, 0 \leqslant y < \infty)$ et univoquement caractérisée par les trois conditions (6):

(a) Pour chaque valeur de $y, \tau(x;y)$ est une fonction absolument continue de x.

(b) La transformée $F = Tf$ est donnée par

$$\int_0^y F(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,\overline{\frac{\partial\tau(x;y)}{\partial x}}\,dx. \tag{3}$$

(c) Pour toute valeur de y

$$\tau(0;y) = 0. \tag{4}$$

La fonction τ possède encore les propriétés suivantes: $\tau(x;y)$ est une fonction continue de (x,y) et absolument continue de y; les intégrales $\int_0^\infty \left|\frac{\partial\tau(\xi;y)}{\partial\xi}\right|^2 d\xi$ et $\int_0^\infty \left|\frac{\partial\tau(y;\xi)}{\partial\xi}\right|^2 d\xi$ sont des fonctions continues de y; $\tau(x;0) = 0$, et pour toute fonction f de $L_2(0,\infty)$ la formule

$$\int_0^x F^*(y)\,dy = \int_0^\infty f(y)\,\frac{\partial\tau(x;y)}{\partial y}\,dy \tag{5}$$

définit une fonction F^* de $L_2(0,\infty)$. La transformation T^* définie par $F^* = T^*f$ est linéaire et bornée; elle n'est autre que *l'adjointe* ou *l'associée* de T. Sa génératrice $\tau^*(x;y)$ est égale à $\overline{\tau(y;x)}$. L'adjointe T^* peut se caractériser directement par la relation

$$\int_0^\infty Tf_1\overline{f_2}\,dx = \int_0^\infty f_1\,\overline{T^*f_2}\,dx, \tag{6}$$

où f_1, f_2 sont des fonctions arbitraires de $L_2(0,\infty)$.

Les transformations linéaires bornées qui vérifient l'équation fonctionnelle (1) peuvent encore être caractérisées par le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *La génératrice $\tau(x;y)$ d'une transformation T linéaire et bornée de $L_2(0,\infty)$ vérifiant l'équation fonctionnelle* (1) *ne dépend que du produit xy. Réciproquement, si la génératrice $\tau(x;y)$ d'une transformation linéaire bornée T de $L_2(0,\infty)$ ne dépend que du produit xy, T satisfait à l'équation fonctionnelle* (1).

Car, si T vérifie (1), en intégrant les deux membres de (1) dans l'intervalle $(0,y)$ et en exprimant leurs valeurs à l'aide de (3), on obtient la relation

$$\int_0^\infty f(\alpha x)\frac{\partial\overline{\tau(x;y)}}{\partial x}\,dx = \alpha^{-1}\int_0^\infty f(x)\frac{\partial\overline{\tau(x;\alpha^{-1}y)}}{\partial x}\,dx,$$

d'où

$$\int_0^\infty f(x)\left[\frac{\partial\overline{\tau(\alpha^{-1}x;y)}}{\partial x} - \frac{\partial\overline{\tau(x;\alpha^{-1}y)}}{\partial x}\right]dx = 0.$$

Cette relation ayant lieu pour toute fonction f de $L_2(0,\infty)$, le crochet doit être presque partout nul relativement à x. $\tau(x;y)$ étant une fonction absolument continue de x et vérifiant (4), il s'en suit que pour toutes les valeurs de x, de y et de α $\tau(\alpha^{-1}x;y) = \tau(x;\alpha^{-1}y)$, ce qui démontre que $\tau(x;y)$ ne dépend que du produit xy.

Réciproquement, si la génératrice τ de T ne dépend que du produit xy, on a, en vertu de (3),

$$\int_0^y T[f(\alpha x)\,|\,\xi]\,d\xi = \int_0^\infty f(\alpha x)\frac{\partial\tau(x;y)}{\partial x}\,dx = \int_0^\infty f(x)\,\frac{\partial\tau(x;\alpha^{-1}y)}{\partial x}\,dx$$
$$= \int_0^{\alpha^{-1}y} T[f(x)\,|\,\xi]\,d\xi.$$

Donc, T vérifie (1).

Lorsque $\tau(x;y)$ ne dépend que du produit xy, on peut poser

$$\tau(x;1) = \tau(x) \tag{7}$$

et introduire une fonction $\chi(x)$ que nous appellerons le *noyau* de la transformation T par la définition

$$\frac{\chi(x)}{x} = \tau'(x). \tag{8}$$

$\chi(x)\,x^{-1}$ appartient à $L_2(0,\infty)$ et M. Watson a démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que la transformation $F(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^\infty f(\xi)\,\frac{\overline{\chi(x\xi)}}{\xi}\,d\xi$ soit unitaire est que(7)

$$\int_0^\infty \chi(x\xi)\,\overline{\chi(y\xi)}\,\frac{d\xi}{\xi^2} = \mathrm{Min}\,(x,y). \tag{9}$$

3. Si $\tau_1(x;y)$, $\tau_2(x;y)$ sont les génératrices des transformations linéaires bornées T_1, T_2 de $L_2(0,\infty)$, la transformation linéaire bornée T_2T_1 a pour génératrice la fonction (8)

$$\tau_{21}(x;y) = \int_0^\infty \frac{\partial\tau_1(x;\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\tau_2(\xi;y)\,d\xi}{\partial\xi}. \tag{10}$$

Donc, si T_1 et T_2 sont des solutions de (1) et si χ_1, χ_2 sont les noyaux correspondants, la transformation T_2T_1—qui n'est plus une solution de (1), mais de (2)—a la génératrice

$$\tau_{21}(x;y) = \int_0^\infty \chi_1(x\xi)\,\chi_2(\xi y)\frac{d\xi}{\xi^2}. \tag{11}$$

Si T_3 est une troisième transformation linéaire bornée de $L_2(0,\infty)$ vérifiant (1) et si χ_3 est son noyau, la transformation $T_3T_2T_1 = T_3(T_2T_1)$ a pour génératrice

$$\int_0^\infty \chi_3(ty)\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \chi_1(x\xi)\,\chi_2(\xi t)\frac{d\xi}{\xi^2}\right)\frac{dt}{t}. \tag{12}$$

Or, $T_3T_2T_1$ étant aussi une solution de l'équation fonctionnelle (1), sa génératrice ne dépend que du produit xy. On peut donc permuter x et y dans l'expression (12) sans changer sa valeur; elle est donc égale à

$$\int_0^\infty \chi_3(tx)\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \chi_1(y\xi)\,\chi_2(\xi t)\frac{d\xi}{\xi^2}\right)\frac{dt}{t}. \tag{13}$$

Or, (13) n'est autre chose que la génératrice de $(T_1T_2)\,T_3 = T_1T_2T_3$. Nous obtenons ainsi le (9)

THÉORÈME 4. *Si T_1, T_2, T_3 sont des transformations linéaires bornées de $L_2(0,\infty)$ satisfaisant à l'équation fonctionnelle* (1), *on a*

$$T_1T_2T_3 = T_3T_2T_1.$$

Il serait intéressant d'avoir une démonstration directe de ce théorème, c'est à dire une démonstration n'utilisant pas la représentation analytique des transformations par les génératrices.

La formule (11) montre que $\tau_{21}(x;y)$ ne dépend que du quotient y/x. On montrerait, par des considérations analogues à celles qui ont conduit au théorème 3, le

THÉORÈME 5. *La génératrice $\tau(x;y)$ d'une transformation linéaire bornée de $L_2(0,\infty)$ qui vérifie l'équation fonctionnelle* (2) *ne dépend que du quotient y/x. Réciproquement, si la génératrice $\tau(x;y)$ d'une transformation linéaire bornée de $L_2(0,\infty)$ ne dépend que du quotient y/x, cette transformation vérifie l'équation fonctionnelle* (2).

4. Les résultats obtenus par M. Hardy se rattachent aux théorèmes précédents par l'intermédiaire de la transformation de Watson particulière R définie par

$$R[f(x)\,|\,y] = y^{-1}f(y^{-1}). \tag{14}$$

La génératrice $\tau_R(x;y)$ de R est égale à $\log(xy)$ lorsque $1 \leqslant xy < \infty$ et à 0 lorsque $0 \leqslant xy \leqslant 1$; le noyau correspondant est

$$\chi_R(x) = \begin{cases} 1, & 1 < x < \infty \\ 0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Par suite, si T, T_1 et T_2 sont des transformations linéaires bornées de $L_2(0,\infty)$ satisfaisant à l'équation fonctionnelle (1), nous savons que les transformations

$$RTR, \quad T_2T_1R = RT_1T_2, \quad T_2RT_1 = T_1RT_2 \tag{15}$$

sont aussi des solutions de la même équation fonctionnelle; de plus, si T, T_1, T_2 sont des transformations de Watson, il en est de même des produits ci-dessus. On peut donc exprimer les génératrices ou les noyaux de ces transformations en fonction des noyaux χ_T, χ_{T_1}, χ_{T_2} de T, T_1, T_2. On obtient ainsi pour le noyau de RTR

$$\chi_{RTR}(x) = \int_{x^{-1}}^{\infty} \chi_T(u)\, u^{-2} du - x\chi_T(x^{-1}),$$

et pour la génératrice de T_2T_1R

$$\tau_{T_2T_1R}(x) = \int_0^x \chi_{T_2T_1R}(\xi)\frac{d\xi}{\xi} = \int_{x^{-1}}^{\infty} \frac{dt}{t}\frac{d}{dt}\int_0^{\infty} \chi_{T_1}(t\xi)\,\chi_{T_2}(\xi)\frac{d\xi}{\xi^2}.$$

Par suite,
$$\int_0^x \chi_{T_2T_1R}(\xi^{-1})\,d\xi = \int_0^{\infty} \chi_{T_1}(x\xi)\,\chi_{T_2}(\xi)\frac{d\xi}{\xi^2}.$$

La transformation T_2T_1R n'est autre que la transformation qui a pour noyau celui que M. Hardy (10) a appelé le noyau *résultant* des noyaux χ_{T_2} et χ_{T_1}.

La transformation T_2RT_1 a pour noyau la fonction

$$x\frac{d}{dx}\int_0^{\infty} \chi_{T_2}(xt)\,\chi_{T_1}(t^{-1})\frac{dt}{t}$$

déjà rencontrée par MM. Kober (11) et Doetsch (12).

S_λ désignant la transformation unitaire

$$S_\lambda[f(x) \mid y] = \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} f(y^{\frac{1}{\lambda}})\, y^{\frac{1-\lambda}{2\lambda}}, \quad (\lambda \text{ réel} \neq 0),$$

on a $S_\lambda S_\mu = S_{\lambda\mu}$, $S_{\frac{1}{\lambda}} = S_\lambda^{-1}$, $S_{-1} = R$. S_λ n'est pas, sauf si $\lambda = -1$, une transformation de Watson, car elle ne vérifie pas l'équation (1), mais la suivante

$$S_\lambda[f(\alpha x) \mid y] = \alpha^{\frac{1}{2}(\lambda-1)} S_\lambda[f(x) \mid \alpha^\lambda y].$$

Un calcul analogue à celui qui a conduit au théorème 1 permet de démontrer le

Théorème 6. *Si T est une transformation linéaire bornée de $L_2(0,\infty)$ qui vérifie l'équation fonctionnelle* (1), *$S_\lambda^{-1}TS_\lambda$ est une transformation linéaire bornée qui vérifie encore cette équation. Si T est une transformation de Watson, $S_\lambda^{-1}TS_\lambda$ en est aussi une.*

L'expression assez compliquée du noyau de $S_\lambda^{-1}TS_\lambda$ se simplifie lorsque le noyau $\chi_T(x)$ de T est une fonction absolument continue de x. Sa dérivée est alors $\chi'_{S_\lambda^{-1}TS_\lambda}(x) = |\lambda| x^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}\chi'(x^\lambda)$, formule déjà donnée par M. Hardy (13).

REFERENCES ET REMARQUES

(1) *Proc. Camb. Phil. Soc.* 31 (1935), 1–6.

(2) "Zur Theorie der involutorischen Transformationen (General Transforms) und der selbstreziproken Funktionen", *Math. Annalen*, 113 (1937), 664–76, § 3.

(3) "Eine Verallgemeinerung der Transformationen vom Fourier-Typ", §§ 5 et 6. Paraîtra dans le *Quart. J. Math.* (Oxford series).

(4) Soit $g(x)=f(\alpha x)$. Désignons par $F(x)$ la transformée de $f(x)$, par $G(x)$ celle de $g(x)=f(\alpha x)$. L'équation (1) veut dire que $G(y)=\alpha^{-1}F(\alpha^{-1}y)$.

(5) "On general transforms", *Proc. London. Math. Soc.* (2), 35 (1932), 156–99.

(6) M. Plancherel, "Contribution à la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies", *Rend. di Palermo* 30 (1910), 289–335. Voir aussi *loc cit.* (8).

(7) *Loc. cit.* (5). Voir aussi E. C. Titchmarsh, *J. London. Math. Soc.* 8 (1933), 217–20; M. Plancherel, *ibid.* 8 (1933), 220–26; I. W. Busbridge, *ibid.* 9 (1934), 179–86; G. Doetsch, *loc. cit.* (2).

(8) Voir M. Plancherel, "Note sur les transformations linéaires et les transformations de Fourier des fonctions de plusieurs variables", *Commentarii math. helvetici* 9 (1937), 249–262.

(9) Les théorèmes 1, 2 et 4 sont obtenus par M. Kober (*loc. cit.* (3)) à l'aide d'une méthode basée sur l'emploi de la transformation de Mellin et déjà utilisée par Mlle I. W. Busbridge (*loc. cit.* (7)) pour démontrer le théorème de Watson.

(10) *Loc. cit* (1).

(11) *Math. Zeits.* 39 (1935), 619.

(12) *Loc. cit* (2).

(13) *Loc. cit.* (1).