UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

A CRIATIVIDADE MATEMÁTICA DE JOHN WALLIS NA OBRA *ARITHMETICA INFINITORUM*: CONTRIBUIÇÕES PARA ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

GABRIELA LUCHEZE DE OLIVEIRA LOPES

Natal
2017

GABRIELA LUCHEZE DE OLIVEIRA LOPES

A CRIATIVIDADE MATEMÁTICA DE JOHN WALLIS NA OBRA *ARITHMETICA INFINITORUM*: CONTRIBUIÇÕES PARA ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutora em Educação.

Orientador: Dr. Iran Abreu Mendes

NATAL
2017

Divisão de Serviços Técnicos.
Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / Biblioteca Setorial do NEPSA / CCSA

Lopes, Gabriela Lucheze de Oliveira.
A criatividade matemática de John Wallis na obra Arithmetica Infinitorum: contribuições para ensino de cálculo diferencial e integral na licenciatura em matemática / Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes. - Natal, 2017.
198f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Iran Abreu Mendes.

Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Educação. Programa de Pós-graduação em Educação.

1. História da Matemática – Tese. 2. John Wallis – Tese. 3. Arithmetica Infinitorum – Tese. 4. Criatividade - Tese. 5. Formação de professores - Matemática - Tese. I. Mendes, Iran Abreu. II. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. III. Título.

RN/UF/BS CDU 511.8(091)

Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes

A criatividade matemática de John Wallis na obra *Arithmetica Infinitorum*:
contribuições para ensino de Cálculo Diferencial e Integral na Licenciatura em Matemática

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutora em Educação.

Aprovada em 24 de fevereiro de 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Presidente

Prof[a]. Dr[a]. Lígia Arantes Sad
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
Examinador Externo

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma
Universidade Federal do Pará
Examinador Externo

Prof[a]. Dr[a]. Bernadete Barbosa Morey
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Examinador Interno

Prof[a]. Dr[a]. Claudianny Amorim Noronha
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Examinador Interno

Prof. Dr. Carlos Aldemir Farias da Silva
Universidade Federal do Pará
Examinador Externo Suplente

Prof. Dr. John Andrew Fossa
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Examinador Interno Suplente

Dedico a minha mãe, Maria Auxiliadora (in memoriam),

com todo o meu amor e gratidão

e aos meus filhos, Matheus e Marco Túlio,

pela renovação diária da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Ao meu pai, Hélio Luccheze Costa, com quem eu aprendi o comprometimento com o trabalho e com as pessoas e que sempre me incentivou a estudar.

Ao meu orientador, professor Dr. Iran Abreu Mendes, pela confiança, paciência, competência e humanidade com que encaminhou a construção desse trabalho.

Ao meu esposo Jaques Silveira Lopes, que eu amo de paixão. Obrigada pela compreensão, paciência, disponibilidade e companheirismo em todos os momentos de nossas vidas juntos.

A todos os professores e colegas, que participaram deste processo de doutoramento, pelo conhecimento e experiência compartilhados.

Aos colegas e amigos do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, por terem tornado viável o meu afastamento das minhas funções, para dedicar-me a este projeto.

Ao Rupert Baker, bibliotecário da *Royal Society* de Londres, pela colaboração na procura de documentos referentes à vida e obra de John Wallis.

Aos professores David Cram e Philip Baley, pela indicação de material sobre as experiências de John Wallis com surdos.

A todos os meus ex-alunos que, em minha caminhada como professora, compartilharam comigo o entusiasmo de ensinar e aprender.

Ao Francisco Cleiton Soares Barbosa, que gentilmente fez as figuras da seção 4.4 e a equipe do Projeto Enibam do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro que desenvolveu e o software: *Tabulæ Colaborativo*.

Às Bibliotèque Nationale de France, University of Oxford e University of Cambridge, por disponibilizarem documentos científicos em repositórios digitais com acesso livre.

E finalmente, ao John Wallis por sua inestimável contribuição para o desenvolvimento científico que reverbera até o nosso tempo.

O pensamento parece uma coisa à toa,
mas como é que a gente voa, quando começa a pensar!
Lupicínio Rodrigues

RESUMO

A pesquisa que originou este texto de tese de doutorado teve como objetivo examinar de que forma as ideias de John Wallis, emergentes na obra *Arithmetica Infinitorum,* datada de 1656, apresentou inovações que podem contribuir para o encaminhamento conceitual e didático de noções básicas da componente curricular de Cálculo Diferencial e Integral, no curso de Licenciatura em Matemática. Nesse sentido, avaliamos o potencial pedagógico da referida obra para subsidiar o ensino de conceitos matemáticos, em particular as noções de integrais, com vistas ao melhoramento do entendimento dos estudantes acerca dessas ideias matemáticas, tratadas nos Cursos de Formação de Professores de Matemática. Por admitirmos que os alunos necessitam ampliar o número de trajetórias que levam ao desenvolvimento de uma ideia Matemática é que, neste trabalho, nos propusemos a responder a seguinte questão: como a exploração didática do exercício criativo de um matemático na história pode contribuir na abordagem pedagógica para o ensino de conteúdos de Cálculo e Análise na Licenciatura em Matemática? Para tal, apoiamo-nos em princípios de criatividade elaborados por Mihaly Csikszentmihalyi, que propôs um modelo para criatividade que leva em consideração o contexto social e cultural. Por considerarmos fundamental a explicação do ciclo do pensamento referente à invenção matemática, associamos a esses princípios os processos do Pensamento Matemático Avançado, proposto por Tommy Dreyfus, de modo que destacamos como esses processos se conectam com as noções de criatividade. Assim, formulamos um modelo para examinarmos a obra *Arithmetica Infinitorum*, indicando seus potenciais pedagógicos para subsidiar o ensino de conceitos matemáticos baseado em um caráter investigativo. De maneira que foi possível estabelecermos uma proposta de conexão entre conhecimento matemático desenvolvido historicamente por diferentes matemáticos e seus potenciais conceituais epistemológicos, com a possibilidade de ser implementada na ação do professor de Matemática formador de professores de Matemática, com vistas a desenvolver competências e habilidades para uma futura atuação do professor em formação.

Palavras-chave: John Wallis. *Arithmetica Infinitorum*. Criatividadade. História da Maetemática. Formação de professores de Matemática.

ABSTRACT

The research which arose this doctorate's thesis had as purpose examining in which ways John Wallis' ideas, emerging in *Arithmetica Infinitorum*, dated 1656, has presented contributing innovations for the didactic and conceptual guiding of Differential and Integral Calculus' curricular components basic notions, in Mathematics Licentiate course. For that matter, we evaluated the production's pedagogical potential to subsidize mathematical concepts' teaching, mainly integral notions, aiming theim provement of students' understanding about these mathematical ideas, which are contemplated in the Mathematics Teachers training course. Acknowledging that the students need to expand the number of paths which lead to the development of a Mathematical idea, in this study we propose to answer the following question: how can the didactic exploration of a mathematician's creative exercise contribute to the pedagogical approach for the Calculus and Analysis teaching, in Mathematics Licentiate course? For that we leaned on the creativity criteria discussed by Mihaly Csikszentmihalyi, due to considering it substantial in the thinking cycle explanation regarding the Mathematics creation. We relate to these principles the processes developed by Advanced Mathematical Thinking, suggested by Tommy Dreyfus, in order to highlight how these processes attach to creativity notions. Therefore, we formulated a model to examine the writing *Arithmetica Infinitorum* pointing its pedagogical potential to subsidize mathematical concepts' teaching, based on aninvestigative character. This way, it was possible to establish a connection proposal between mathematical knowledge historically developed by different mathematicians and their conceptual and epistemological potentials, with a possibility of being implemented in Mathematics teacher's actions, Mathematics teacher's trainer, in order to grow expertise and abilities for a forthcoming actuation of the training teacher.

Key-words: John Wallis. *Arithmetica Infinitorum.* Creativity. Mathematical History. Mathematical training teacher.

RESUMEN

La investigación que dio origen a este texto tesis doctoral tuvo como objetivo examinar cómo las ideas de John Wallis, que emerge en el trabajo *Arithmetica Infinitorum*, fechado en 1656, que se presentan innovaciones que pueden contribuir a los principios básicos de enrutamiento conceptuales y didácticas de componente curricular Cálculo diferencial e integral en el Grado en Matemáticas. En este sentido, se evalúa el potencial educativo de la labor de apoyo a la enseñanza de los conceptos matemáticos, en particular, las nociones de conjunto, con el fin de mejorar la comprensión de los estudiantes acerca de estas ideas matemáticas, tratados en cursos de formación de maestros de Matemáticas. Por qué se supone que los estudiantes necesitan para aumentar el número de caminos que conducen al desarrollo de la idea de las matemáticas es que, en este estudio, nos propusimos responder a la siguiente pregunta: ¿cómo la exploración didáctica del ejercicio creativo de un matemático de la historia puede contribuir al enfoque pedagógico para la enseñanza de Cálculo y análisis del contenido del Título de Grado en Matemáticas? Para ello, nos basamos en los principios de la creatividad desarrollados por Mihaly Csikszentmihalyi, quien propuso un modelo para la creatividad que tiene en cuenta el contexto social y cultural. Puesto que se considera la explicación fundamental del pensamiento del ciclo relativo a la invención matemática asociada con estos principios los procesos del Advanced Mathematical Thinking, propuestas por Tommy Dreyfus, lo que repercute en cómo estos procesos están conectados con las ideas creativas. Por lo tanto, hemos formulado un modelo para examinar el trabajo *Arithmetica Infinitorum*, lo que indica su potencial de enseñanza para apoyar la enseñanza de conceptos matemáticos basados en un carácter investigativo. Por lo tanto, era posible establecer una de propuesta de conexión de los conocimientos matemáticos desarrollados históricamente por diferentes matemáticos y su potencial epistemológico conceptual, con la posibilidad de ser implementado en la acción del profesor de Matemáticas formador de profesores, con el fin de desarrollar habilidades y capacidades para una futuro papel del maestro en la formación.

Palabras claves: John Wallis. *Arithmetica Infinitorum.* Criatividadad. Historia de las matemáticas. La formación de profesores de Matemáticas.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Pouco tempo depois do início de minha atuação como professora de magistério superior, que se deu no ano de 2001 em Brasília/DF, comecei a procurar formas e ações que melhorassem minha prática pedagógica. Tinha a ideia de que meus alunos, em sua maioria dos Cursos de Engenharia da Universidade de Brasília (UnB) e do Curso de Licenciatura em Matemática do Centro Universitário de Brasília (UniCeub), compreendessem com mais clareza os conteúdos que lhes eram ensinados. Procurei ler artigos na área de Educação Matemática que pudessem me servir de norte nessa jornada.

Em 2005, ainda em Brasília, tive a oportunidade de participar do VI Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM), quando fui "imersa" no mundo da História da Matemática, numa nova perspectiva para minha carreira. Pude perceber o uso da história da Matemática, não apenas no sentido de mostrar fatos e curiosidades históricas pertinentes à Matemática, mas na perspectiva apontada por Mendes (2001), de que a história da Matemática pode ser utilizada como um instrumento metodológico para a superação das dificuldades no aprendizado da Matemática.

A maior parte dos artigos aos quais me debrucei naquela época abordava aspectos voltados para o ensino de conteúdos específicos de componentes curriculares. Não encontrei aquilo que buscava, interessavam-me trabalhos cujo conteúdo explorado fosse o de uma componente curricular de Cursos de Graduação. Contudo, chamou-me muito a atenção o artigo "*O Uso da Dimensão Histórica no Estudo do volume da Esfera em um Curso de Formação de Professores*", de Maria Terezinha Jesus Gaspar, nos Anais do V SNHM que eu adquiri na ocasião do VI SNHM. Nele pude compreender como a investigação do conteúdo matemático, com o viés da história da Matemática, pode funcionar como importante instrumento metodológico.

Entretanto, esse panorama vem se alterando, onde a escassez de pesquisas e trabalhos, que utilizam a história da Matemática como um instrumento metodológico para o ensino da Matemática, tem sido substituída por uma grande quantidade e variedade de estudos, particularmente sensíveis em investigações voltadas para o ensino superior (BARROS, 2016). Esse novo quadro se deu pelos esforços de pesquisadores que se aglutinam em torno da Sociedade Brasileira de História da Matemática e pelo interesse de professores de Matemática que desejam utilizar a história da Matemática em suas aulas, mas não apenas como um instrumento ocasional na tentativa de motivar os estudantes relatando anedotas biográficas ou problemas históricos da Matemática.

Nos anos subsequentes, não deixamos de lado nossa preocupação com os aspectos ligados ao ensino e aprendizagem da Matemática em cursos de graduação. Com o passar do tempo, fomos, cada vez mais, aproximando-nos do ensino para futuros professores de Matemática. Participamos da organização de Semanas Acadêmicas de Matemática, onde buscamos direcionar estes eventos aos aspectos que agregassem à formação e capacitação dos participantes, que futuramente seriam professores. Além disso, foram-me oportunizadas participações em importantes comissões voltadas aos interesses da formação de professores, dos quais posso destacar as elaborações de Projetos Pedagógicos de Cursos de Matemática e a construção do Projeto da área de Matemática do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação a Docência.

Em 2013, participamos de uma série de seminários orientados pela professora Bernadete Morey, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), todos eles voltados para o aprofundamento de temas da história da Matemática. Nestes seminários pudemos nos debruçar sobre a história da Análise, o que se tornou num momento decisivo, pois enxergamos a oportunidade de levar a diante uma pesquisa que abrangeria vários aspectos que, se bem trabalhados com os alunos, teriam impactos marcantes na formação e atuação do futuro professor de Matemática. Procuramos conhecer um pouco mais sobre a atenção que é dada aos números reais nos cursos de graduação em Matemática no Brasil.

Aprofundar a compreensão sobre os números reais nos alunos de Licenciatura em Matemática é importante, visto que estes números cruzam o ensino básico e superior, o que representa um elo entre a Matemática que se aprende na graduação e a Matemática que se ensina na escola de Educação Básica. Além desse aspecto, o conjunto dos números reais trata-se de um tópico que permeia, de forma fundamental, as componentes curriculares da Graduação em Matemática, principalmente as de Cálculo Diferencial e Integral e Análise Real. Esses dois aspectos têm revelado pelo menos duas facetas:

- O aluno da Licenciatura em Matemática não consegue ver a relação entre o que aprende sobre números reais na graduação e o que vai ensinar na Educação Básica. Esse aluno já concluiu seus estudos da Educação Básica e é sob essa perspectiva que ele vê esses conteúdos.

- As abordagens nas componentes de Cálculo Diferencial e Integral e Análise Real não levam a uma melhor compreensão sobre os números reais.

Também estivemos preocupados em como ensinar Matemática sem cair naquele modo clássico de apenas informar os conteúdos aos alunos. Um ponto que nos inquietava, e que ainda o faz, era de que a responsabilidade sobre a aprendizagem do aluno se centra em como ele estuda, muitas das vezes levando em consideração apenas a quantidade de tempo que o aluno dedicou ao estudo, o que do meu ponto de vista configura um equívoco.

Não nos sentíamos satisfeitos com o uso corriqueiro e inadequado da história da Matemática, nas componentes curriculares que eram ministradas: de vez em quando os alunos tendiam a focar os aspectos bibliográficos de alguns matemáticos, quando lhes eram apresentados problemas clássicos da Matemática que desencadeavam resultados pertinentes àquela componente curricular. Todavia, normalmente não lhes era apresentado o devido aprofundamento epistemológico sobre os conceitos. Fazíamos inconscientemente o uso ornamental da História da Matemática, como destaca Fossa (2001).

O trânsito em diversas componentes curriculares, nos mais variados Cursos de Graduação, possibilitou a tomada de consciência no que se refere às formas de abordagem de uma componente curricular, como por exemplo, Cálculo Diferencial e Integral, que do ponto de vista de um Engenheiro é uma ferramenta, e que do ponto de vista de um professor de Matemática tem um aspecto bem mais abrangente. Atualmente nos cursos de Licenciatura em Matemática, os alunos são formados para ter conhecimento de uma Matemática cristalizada, no que se refere aos componentes curriculares de Cálculo[1] e Análise[2], essas são frutos finais do desenvolvimento e aceitação do conceito de números reais na segunda metade do século XIX.

Nossas experiências no ensino de Matemática nos levaram a constatar que essa forma de ensinar Matemática aos futuros professores, pouco atingia um propósito que julgamos ser de extrema importância à formação de um educador matemático, que é a de compreender o desenvolvimento de um conceito matemático em aspectos mais amplos, tais como os problemas históricos que desencadearam o conceito matemático, o labor dos matemáticos que se debruçaram sobre esses problemas e as articulações entre ciência e o contexto sociocultural em uma determinada época.

Nessa perspectiva, vemos o apoio didático da história da Matemática em sala de aula como suporte condutor que contribui no fortalecimento de uma aprendizagem mais significativa. Um caminho que contribua para uma melhor compreensão de tópicos da graduação em Matemática tem como possibilidade uma abordagem introduzida por

[1] Usaremos Cálculo para fazer referência à componente curricular de Cálculo Diferencial e Integral.
[2] Para a componente curricular Análise Real será utilizada simplesmente a referência Análise.

redescobertas de informações históricas da Matemática. Nesse sentido, Mendes (2001) assegura que

> É com base nessas situações encontradas no conteúdo histórico que podemos favorecer a formalização dos conceitos matemáticos pelo aluno, em razão das informações históricas interpretadas apresentarem as estruturas cognitivas dos mesmos incorporadas à formalização dos conceitos matemáticos, pois quando as informações históricas são interpretadas, elas incorporam à estrutura cognitiva dos alunos, conduzindo-os a um processo de elaboração mental que favoreça a abstração dos conceitos matemáticos estudados. (MENDES, 2001, p. 12)

Perceber como os matemáticos produziram sua Matemática estabelece um diálogo entre o conhecimento a ser aprendido e a ideias que levaram a criação de tais conhecimentos. Nesse movimento apontamos a oportunidade do aluno deixar de ser um receptor passivo e se tornar um agente ativo, adicionando suas reflexões e, assim, construindo seu próprio conjunto de ideias que contribuirão para um melhor conhecimento e compreensão da Matemática e os seus processos de criação. A produção de conhecimentos é encorajada pelo momento social e cultural de uma comunidade em uma determinada época, essa produção está intrinsecamente conectada à necessidade de respostas cognitivas, gerando novas formas de pensar que provocam a ampliação do conhecimento e criação de novos conhecimentos.

Apresentar um dicionário de propriedades das operações de números reais, que liste associatividade da adição, associatividade da multiplicação, comutatividade da adição etc., pode ser útil do ponto de vista estrutural desse conjunto, mas pouco satisfatório na direção de se alcançar a compreensão do funcionamento interno dos elementos deste conjunto. Além disso, esse procedimento oculta o fato de como essas operações desencadeiam conceitos importantes e inerentes ao estudo de Cálculo e Análise. Essa é a prática dominante na Matemática acadêmica, a valorização das estruturas sobre a natureza dos objetos que as compõe (DIUEUDONNÉ, 1990).

Um melhor entendimento, por parte dos alunos, acerca do conjunto dos números reais, e suas operações, é fundamental para a assimilação de conteúdos pertinentes ao Cálculo e Análise. Desta forma, estabelecemos como objeto de pesquisa a **aritmética dos números reais**. Visamos mostrar que é possível, a partir de problemas históricos, construirmos um caminho que desencadeie conteúdos de Cálculo e Análise, de forma a contemplar uma melhor aprendizagem. Primeiramente, buscamos na história da

Matemática aspectos relacionados à criação do Cálculo[3] no século XVII. Esse estudo nos fez ter acesso a vários problemas que foram tomados, historicamente, como sendo os que deram origem às ideias que fizeram com que o Cálculo fosse criado. Entre esses problemas se encontrava a quadratura do círculo. Em uma sessão de orientação, o professor Iran Abreu Mendes, orientador desta tese, sugeriu que investigasse um livro de John Wallis (1616-1703), publicado em 1656, intitulado *Arithmetica Infinitorum,* que abordava o problema da quadratura do círculo. Nossa primeira impressão foi ótima, pois rapidamente, percebemos indicativos do possível potencial pedagógico desta obra. Restava seguir na investigação com mais cuidado e verificar se seria possível investir no tema.

1.1 Justificativa

Os números reais estão na prática Matemática dos alunos da Educação Básica e da Educação Superior. Nos cursos de graduação em Matemática no Brasil é comum em uma componente curricular de Análise, um número real ser apresentado como um corte de Dedekind nos racionais, isto é, um par $\left(A, B\right)$ de subconjuntos não vazios e complementares dos racionais, tais que A não possui um elemento máximo, todo elemento de A é cota inferior para B, e todo elemento de B é cota superior para A. Ou ainda, um número real é uma classe de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais, segundo a seguinte relação: duas sequências são equivalentes se, e somente se, a diferença entre elas converge para zero. Ou ainda, um número real é uma classe de equivalência de intervalos encaixantes, segundo a seguinte relação de equivalência: $\left[a_n, b_n\right] \sim \left[c_n, d_n\right]$se, e somente se, as sequências de números racionais $\left(a_n - c_n\right)$ e $\left(b_n - d_n\right)$ convergem, ambas, para zero. Mas, antes de um curso de Análise na graduação, um número real era apenas um número e, depois, o número pode ser cortes de Dedekind, classes de equivalência de sequências de Cauchy ou classes de equivalência de intervalos encaixantes. O mesmo objeto, número real, pode ser definido de três formas diferentes baseando-se em objetos de naturezas distintas.

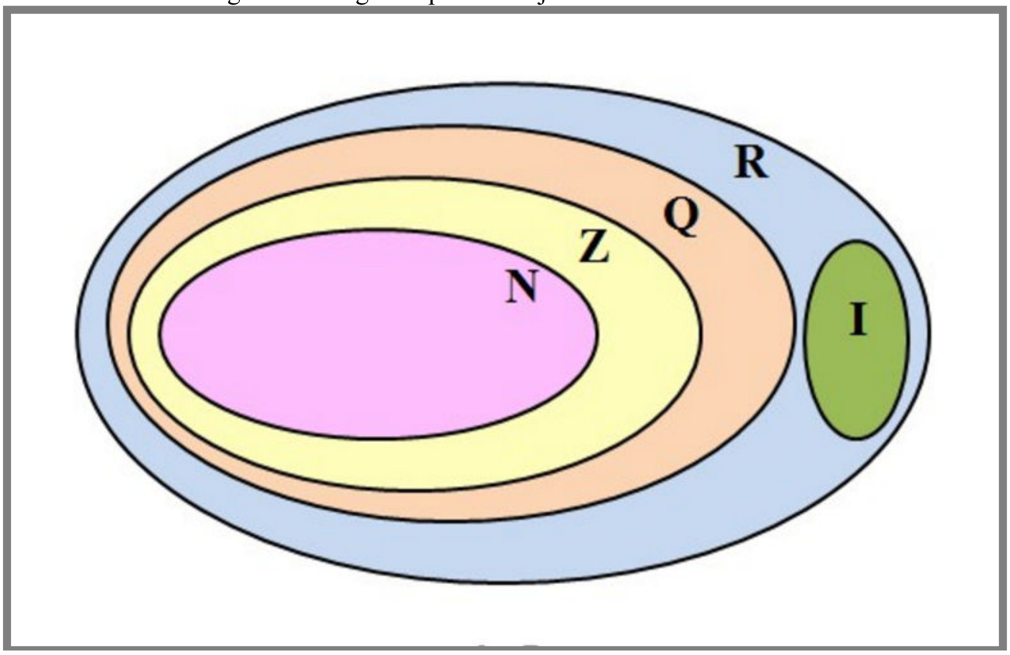
Na Educação Básica a noção do que vem a ser um número real passa por elaboração e reelaboração a partir da ideia básica de número natural. A construção dos inteiros e racionais vem de uma busca em tentar superar limitações particulares da noção

[3] A invenção do Cálculo, tradicionalmente, é atribuída a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1643-1727).

precedente de número. Suas construções são frutos de uma ampliação do conjunto anterior seguindo a rota naturais → inteiros → racionais. Vamos deixar aqui uma pergunta: e os irracionais? As três formas de definir números reais, como exposta anteriormente, "configura uma inversão de rota que entra em conflito com o processo que se desenvolve na escola" de acordo com Moreira e David (2010), já que os reais são "criados" sem uma necessidade explicita e tem fundamentos em objetos de natureza distinta da noção anterior de número real.

Quanto aos números irracionais, as definições, a partir dos cortes de Dedekind, classes de equivalência de sequências de Cauchy ou classes de equivalência de intervalos encaixantes, não representam uma dificuldade de inclusão natural no conjunto dos reais, visto que os irracionais já são contemplados nessas definições. Já no contexto da Educação Básica, os números irracionais são artificialmente agrupados aos números racionais para que juntos constituam o conjunto dos números reais. Muitas vezes nós, alunos e professores, nos deparamo com diagramas como o mencionado na figura 1, a seguir, que não contribui para um entendimento acerca do conjunto dos reais.

Figura 1 - Diagrama para o conjunto dos números reais.



Fonte: <http://www.infoescola.com/matematica/numeros-reais/>. Acesso: 10 dez. 2016

Ao observar o diagrama da figura 1, temos a ideia que os números irracionais não se *misturam* com os racionais, ideia diferente da que é apresentada pela representação dos reais na reta. Além disso, o espaço da cor azul não é constituído por racionais e nem irracionais, e o aluno pode se perguntar, quais números estão lá?

Os números irracionais representam um tema que deve ser estudado com detalhes nos cursos de Licenciatura em Matemática, já que estes se revelam uma dificuldade de natureza cognitiva e pedagógica na ação do professor em sala de aula na Educação Básica.

> A apresentação usual dos reais nesses cursos [Licenciatura em Matemática], em que se valoriza enfaticamente a ideia de estrutura abstrata, em que os números e as operações têm seus significados dados pela estrutura e esta, por sua vez, é constituída através de axiomas, configura, a nosso ver, uma forma de conhecer os reais que se desconecta das questões escolares referentes ao trabalho com esse conjunto numérico. (MOREIRA, DAVID, 2010, p. 81)

Um número irracional, geralmente, é apresentado aos alunos da Educação Básica como um número que não pode se escrever como razão de inteiros ou como uma representação decimal infinita periódica. Mas nenhuma dessas duas apresentações é possível de ser sustentada com base na noção de número atribuída anteriormente e cujo universo numérico se limita aos racionais. E se o aluno não compreende conceitualmente o que significa uma representação decimal finita, ele também não compreenderá o que é um número irracional. E é com essas limitações que o estudante do Ensino Médio chega à Universidade, para o curso de graduação em Matemática, munido apenas de alguns exemplos de números irracionais e sem uma consciência significativa sobre o conjunto dos números reais.

O estudo de sequências e séries de números reais é um ponto de partida para se provar que todo número real, racional ou irracional, admite uma representação decimal infinita. Central ao estudo de sequências e séries está a ideia de **processos infinitos**, como, por exemplo, somas de infinitas parcelas de uma série. Nesse sentido, é importante que o aluno de graduação alcance uma boa compreensão desses processos infinitos e, para isso, é indispensável um entendimento significativo sobre limites, incluindo aí os no infinito. É importante ressaltar nesse momento, que a construção dos inteiros, por ampliação dos naturais, e dos racionais, por ampliação dos inteiros, não tem que, necessariamente, recorrer a processos infinitos.

Nos cursos de Graduação em Matemática, Bacharelado e Licenciatura, o conteúdo de Cálculo é apresentado aos alunos nos primeiros semestres do curso, com uma abordagem clássica e universal, voltado para a parte algorítmica e com o objetivo de ensinar derivadas e integrais, visando simplesmente às aplicações. Notamos que, tradicionalmente, um curso de Cálculo está fragmentado em três partes: limites, derivadas e integrais; no entanto, o conceito de limite está presente nas definições formais de derivadas e integrais. É, também, perceptível que o desenvolvimento desses tópicos nos livros didáticos, comumente indicados como referências bibliografias destas componentes curriculares, tem abordagem predominantemente formal. Isso foi constatado nos Projetos Pedagógicos vigentes dos cursos presenciais de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), da Universidade Federal de Viçosa (UFV) e da Universidade Federal do Tocantins (UFT). Isso também é notado nas ementas oferecidas por outras universidades brasileiras (AMORIM, 2011, p. 60).

Ao abordar o conteúdo de limites, o que prevalece são técnicas de Cálculo de limites carregadas de manipulação de símbolos, que não despertam no aluno um real pensamento matemático. No desenvolvimento do conteúdo de derivadas, o limite da razão incremental toma um papel de significativa importância na introdução do conceito de derivada. Por outro lado, o limite é pouco explorado no que diz respeito a um processo desencadeador dessas definições. Rapidamente a manipulação de símbolos é exigida nos cálculos de derivadas e se sobrepõe a qualquer alternativa de ensino-aprendizagem que leve em consideração o desenvolvimento de processos de pensamento matemático. A esse respeito, Tall (1991) sugere que a apresentação lógica pode não ser apropriada para o desenvolvimento cognitivo do aprendiz.

Esta metodologia de ensino não propicia ao aluno uma compreensão significativa, por exemplo, dos números reais. Em um minicurso[4] da 26ª Semana de Matemática da UFRN, realizado em 2014 e ministrado conjuntamente por mim e a professora Viviane Simioli Campos, nos propusemos a discutir os números reais. Os participantes inscritos já haviam cursado a primeira componente curricular de Cálculo e eram alunos do Curso de Matemática. Dentro de nossa proposta, incluímos os dois seguintes resultados:

$$(1)\quad 0{,}99999999... = 1$$

$$(2)\quad \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = 1$$

Durante o desenvolvimento do trabalho, ao apresentarmos que 0,999999... =1, muitos alunos não concordaram. O argumento colocado por eles concorda com o resultado encontrado na pesquisa de Almeida e Igliori (2013):

> [...] Em entrevistas realizadas com os estudantes foi possível constatar que eles continuaram a conceber a dízima periódica 0,9999... como uma sequência de números mais próxima de 1 e não como um valor fixo. (ALMEIDA e IGLIORI, 2013, p. 1869)

[4] Minicurso intitulado “Sobre os buracos que os racionais deixaram na reta”.

Passamos a construir o caminho que leva a demonstração deste resultado que envolve os conceitos de sequências numéricas, séries numéricas infinitas e limites. Para iniciar a conversa, escrevemos:

$$0{,}99999999... = 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + 0{,}0009 + ...$$

e explicitamos a sequência numérica das somas parciais:

$$\begin{aligned} S_1 &= 0{,}9 \\ S_2 &= 0{,}99 \\ S_3 &= 0{,}999 \\ S_4 &= 0{,}9999 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Na discussão, ficou claro que os alunos perceberam uma propriedade comum a todos os termos da sequência das somas parciais: todos são menores que 1. Alguns alunos acreditavam que o limite da sequência também teria essa propriedade, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} S_n < 1 .$$

De acordo com Tall (1986), a crença em tal resultado pode ter origem no fato de que ao observar propriedades comuns aos termos de uma sequência, o aluno mantém em sua mente um conceito de limite que extrapola o âmbito dos termos e atinge o limite da sequência. Isso levou a alguns alunos acreditarem que existe um número real entre 0,999999... e 1, mesmo que não conseguissem explicitar tal número.

Também, apresentamos a racionalidade do número $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ com uma abordagem algébrica, a saber: Fazendo $x = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$,elevando ao cubo ambos os membros da igualdade e fazendo algumas simplificações teremos,

$$-3\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right) = x^3 - 4 ,$$

isto é,

$$x^3 + 3x - 4 = 0 .$$

Portanto, o número $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ é uma raiz real da equação polinomial acima. Mas, tal equação polinomial pode ser fatorada e escrita da forma

$$(x-1)(x^2 + x + 4) = 0 ,$$

cuja única raiz real é $x = 1$.

As outras duas raízes complexas são $x = \dfrac{-1+\sqrt{-15}}{2}i$ e $x = \dfrac{-1-\sqrt{-15}}{2}i$. Concluímos que

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = 1,$$

portanto é um racional.

O que propusemos fazer foi demonstrar que $0{,}99999999\ldots = 1$ com a utilização de procedimentos que envolvessem limites. Demonstramos, também, que $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = 1$. Para tal, utilizamos teoremas e proposições de álgebra que levassem a procedimentos que se assemelham mais da forma de pensar conduzida pela manipulação de símbolos. O envolvimento dos alunos com essa atividade se mostrou mais sensível na demonstração de $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = 1$.

Essa experiência vivenciada em um ambiente de ensino-aprendizagem veio reforçar nossa reflexão sobre os processos que estão implícitos no reconhecimento, ou não, de um resultado matemático e suas relações com o desenvolvimento de uma consciência crítica diante de uma informação. Focamos nossas atenções nos **processos infinitos,** o que nos motivou a pensar em questões de pesquisas em busca de propostas para melhorar a aprendizagem ou superar dificuldades na formação conceitual e didática dos futuros professores de Matemática. Nesse sentido, adotamos que investigar o exercício criativo dos matemáticos na história pode trazer informações que contribuam com o encaminhamento conceitual e didático de noções das componentes curriculares de Cálculo e Análise para serem abordados em sala de aula. Dessa maneira perguntamos: **De que modo a exploração didática do exercício criativo de um matemático na história pode contribuir na constituição de uma abordagem pedagógica para o ensino de conteúdos de Cálculo e Análise na Licenciatura em Matemática?**

Particularmente, como tratamos de uma obra específica, podemos perguntar: De que modo o exercício criativo ou a imaginação criativa de John Wallis, que emergem na obra *Arithmetica Infinitorum*, pode contribuir na constituição de uma abordagem pedagógica para o ensino de conteúdos de Cálculo e Análise no curso de Licenciatura em Matemática?

Outras questões surgem para nos ajudar a responder esta questão central: Quais conhecimentos matemáticos estavam em uso no período do exercício criativo do matemático? Como se constituiu esse exercício criativo? Qual era o contexto cultural em que viveu o matemático? De que modo o conhecimento das ideias do matemático, na história, pode contribuir para uma atitude investigativa por parte dos alunos de Licenciatura?

Todos esses questionamentos foram necessários para conseguirmos obter elementos suficientes para uma melhor abordagem compreensiva do que cerca nossa questão central. A construção das respostas a esses questionamentos convergem para uma resposta ampla a nossa pergunta central.

A seguir, apresentaremos e discutiremos os objetivos da nossa pesquisa.

1.2 Objetivos da Pesquisa

Os objetivos a seguir, representam o delineamento que tomamos na busca de respostas para nossos questionamentos.

O objetivo geral da pesquisa foi Examinar de que forma as ideias inovadoras de John Wallis, emergentes na obra *Arithmetica Infinitorum*, podem contribuir para o encaminhamento conceitual e didático de limite, tendo em vista, estabelecer o potencial didático desta obra para o ensino de conteúdos de Cálculo nos cursos de Licenciatura em Matemática.

Para que esse objetivo fosse alcançado, traçamos alguns objetivos específicos em nossa pesquisa:

- Estabelecer relações entre o contexto cultural da época e o exercício criativo de John Wallis em sua obra.

- Investigar a trajetória das ideias sobre limite na obra *Arithmetica Infinitorum* de John Wallis.

- Apontar algumas categorias criativas presentes na obra investigada, considerando os modos de tratar do problema central da obra, tomando como referência os conceitos elaborados por Mihaly Csikszentmihalyi (1998).

- Discutir os potenciais pedagógicos na obra *Arithmetica Infinitorum* de John Wallis, para o ensino de conteúdos de Cálculo do curso inicial de formação de professores de Matemática.

1.3 Sobre a Natureza da Matemática como Objeto de Conhecimento Humano

Uma definição para Matemática tem sido discutida por diversos estudiosos entre eles destacamos três classes: matemáticos, filósofos e educadores. No entanto, um consenso não foi alcançado nem internamente em cada uma delas, tão pouco nas três classes. Essa problemática demonstra o caráter complexo da Matemática, por exemplo, no que diz respeito ao seu crescimento, que ocorre em múltiplas direções. Nesse contexto descrito aqui, enxergamos uma questão pertinente à nossa atuação como professores de Matemática: "Qual Matemática ensinamos?". Além disso, como temos buscado responder a essa pergunta é algo que, para mim, deve ser pesquisado e devidamente discutido.

Diversas são as formas como a Matemática tem sido encarada. Ponte (1997, p.1) destaca algumas dessas perspectivas: "sistema organizado, linguagem, instrumento ...". Há também duas formas de ver a Matemática: uma como "atividade", outra como um "corpo de conhecimentos". Os processos e métodos envolvidos no desenvolvimento dessas duas maneiras podem ser mais essenciais para uma do que para outra. Esses processos incluem axiomatização, formalização, dedução e indução. No entanto, esses processos e métodos têm origem no pensamento do ser humano.

Ponte propõe refletir sobre a Natureza da Matemática ancorada em uma dualidade entre os aspectos internalistas e externalistas da produção desse conhecimento. Se por um lado, a epistemologia da Matemática busca responder questões relacionadas à lógica interna dessa produção, essa abordagem é limitada no tocante à atividade Matemática, que está relacionada a um contexto mais amplo. Assim,

> Se a Matemática for descrita em termos dos seus conceitos, características histórias e práticas, abre-se espaço para que a filosofia da Matemática, para além de refletir sobre questões internas relativas ao conhecimento matemático, sua existência e justificação, se debruce também sobre questões externas relacionadas, nomeadamente, com a origem histórica e os contextos sociais de produção de conhecimento. A atividade Matemática poderá, assim, ser discutida como parte integrante da cultura humana em geral. (PONTE, 1997, p.1)

Não podemos pensar em uma arquitetura da Matemática em que os fatores internos e externos ocupem lugares em extremidades opostas, mas que caminhem concomitantemente. O que nos leva a intuir que o conjunto desses dois fatores é mais preponderante na atuação do professor em sala de aula, do que no labor do matemático na construção de sua Matemática. Isso porque o professor de Matemática quer se fazer entender por todos os alunos, e isso exige que ele aborde, de formas diversas, os conceitos e conteúdos a serem estudados, enquanto que o trabalho do matemático exige uma lógica interna é um método de construção e descrição processual pré-estabelecido por sua comunidade alvo de sua comunicação.

A natureza dos objetos matemáticos desempenha um papel central na edificação da Matemática, pois esses objetos são manipulados, organizados e sistematizados de forma coerente. O debate sobre essa natureza é proposto por Ponte, considerando o papel da experiência e da razão na gênese e desenvolvimento da Matemática, na perspectiva do empirismo e do racionalismo.

Em um percurso histórico, Ponte aborda o tema por duas perspectivas diferentes, uma relacionada à imaterialidade dos objetos matemáticos e outra que procura olhar esses objetos na sua relação com o sujeito que os conhece ou procura conhecer.

Na discussão da primeira perspectiva, a abordagem segue uma linha temporal que aponta na direção de que os textos antigos das civilizações egípcias e babilônicas dizem respeito aos objetos concretos: enumeração de coisas; medidas de grandezas, como comprimento, área, volume e peso. No século V a.C., com os pensadores gregos surge, nas primeiras demonstrações, a necessidade de precisar figuras, posição, grandeza, quantidade e medida. No cerne das discussões deste período, sobre as figuras de Platão e Aristóteles, atribuíam àqueles objetos matemáticos um caráter de objetos de pensamento. O precursor do método dedutivo, Euclides, também utilizou desse caráter.

Os matemáticos trabalham com objetos, sobre os quais raciocinam. E estes são "seres imateriais" obtidos, por abstração, a partir dos objetos acessíveis aos sentidos, mas de que deles são apenas "imagens". Para garantirem novos progressos na Matemática, a partir do século XIX, os matemáticos tiveram que introduzir novos objetos matemáticos que deixaram de apoiar-se em "imagens" sensíveis. Este fato desencadeou uma ideia que se relaciona

> com a constatação de que numa teoria Matemática, mais importante do que a natureza dos objetos, que aí figuram, são as relações entre esses objetos, podendo acontecer que em teorias diferentes haja relações que se exprimam da mesma maneira (PONTE, 1997, p. 4).

Na segunda perspectiva, que procura olhar o objeto matemático na relação com o sujeito, o debate de Ponte se focaliza nas concepções idealista e realista. Essa relação com o sujeito é estabelecida pela discussão sobre existência do objeto matemático ser ou não independente do sujeito que os estuda.

> O idealismo, enquanto perspectiva filosófica, insiste em que toda a realidade Matemática é condicionada pelas construções dos matemáticos que inventam

> essa realidade. Neste âmbito, os objetos matemáticos são livres invenções do espírito humano, que não existem autonomamente e que possuem, apenas, as propriedades que o pensamento puder determinar. O realismo supõe a realidade de um universo matemático autônomo. Os objetos têm propriedades próprias que existem independentemente do sujeito. O homem não inventa esta realidade objectiva que lhe é exterior. Limita-se a descobri-la (PONTE, 1997, p. 3).

No que diz respeito à existência e realidade dos objetos matemáticos, o realismo e o idealismo se posicionam de formas bem distintas, que desencadeiam duas vertentes matemáticas: ou eles (os objetos) são inventados decorrentes da concepção idealista ou eles são descobertos decorrentes da concepção realista.

Nos dicionários observamos que a definição de invenção inclui a descoberta e vice-versa. No nosso estudo levamos em conta o disposto anteriormente e o que disse Kant:

> Inventar alguma coisa é totalmente diferente de descobrir. A coisa que se descobre admite-se como já preexistente, apesar de ainda não conhecida, como a América antes de Colombo; contudo o que se inventa como a pólvora, não existia em absoluto antes de quem a inventou. (KANT apud ABAGNANO, 2012, p. 673)

O conhecimento dos objetos matemáticos é consequência de um árduo trabalho intelectual de procura do alcance da verdade. Essa visão absolutista do conhecimento matemático está na raiz da origem das correntes mais importantes que sustentam o pensamento matemático: formalismo, logicismo e intuicionismo. Essas escolas do pensamento matemático procuraram bases seguras para a Matemática, no sentido de esclarecer quais eram os fundamentos da Matemática.

> O Absolutismo filosófico não é tanto de quem fala do absoluto ou de quem lhe reconhece a existência, mas de quem afirma que o próprio absoluto apoia suas palavras e lhes dá garantia incondicional de veracidade (ABAGNANO, 2012, p. 2).

O problema da natureza dos objetos matemáticos não parece ser possível de uma solução definitiva. Cada uma das abordagens tem seus méritos e suas insuficiências. Basearemo-nos na discussão de nossa pesquisa para lançar luz a esse tema e ampliarmos nossa capacidade de interpretação e entendimento do assunto. E, na próxima seção, daremos continuidade a essa discussão, fornecendo mais suporte teórico e trazendo as reflexões e implicações, sobre nossa pesquisa, disso que discutimos a respeito da natureza da Matemática.

1.4 Sobre essa Natureza da Matemática e a Implicação na nossa Pesquisa

Para darmos início à argumentação sobre a Natureza da Matemática, falamos, primeiramente, de como Hersh (1986) aborda o tema, ele

> apoiando-se na experiência diária dos que estudam Matemática, sugere que: (1) Os objetos matemáticos são inventados ou criados pelos seres humanos; (2) são criados não, arbitrariamente, mas emanam da atividade desenvolvida a partir de outros objetos matemáticos já existentes e de necessidades da ciência e da vida diária. (3) Uma vez criados, os objetos têm propriedades bem determinadas que podemos ter grande dificuldade em descobrir, mas que possuem independentemente do nosso conhecimento acerca deles (HERSH, 1986, p. 22 e p.23).

Existem alguns pontos que devemos esclarecer a partir deste momento. Inicialmente, notamos que a afirmação anterior (1) nos leva, claramente, a distinção entre os objetos matemáticos e objetos materiais, como árvore, cachorro, lua, estrelas. Os objetos matemáticos são oriundos de uma atividade humana que ocorre em relação ao pensamento. Segundo Bruter (1998), representar e observar são processos mútuos que subsidiam o pensamento. As representações podem ser realizadas mentalmente ou sobre suportes físicos que as tornem visíveis. O matemático em sua atividade faz uso desses dois tipos de representação, mas fundamentalmente da representação mental. Dessa forma, a invenção de novas representações é um importante fator para o progresso da Matemática, pois faz dela um domínio que se serve de si mesma.

Agora, se o ser humano cria objetos matemáticos como resposta às demandas da ciência, isso expressa o absoluto valor dado à Matemática pelos filósofos e cientistas ao longo do seu desenvolvimento. Neste sentido, salientamos a importância da própria Matemática para seu desenvolvimento como ciência, isto é, a Matemática atendendo as suas próprias demandas, o que denominamos como "Matemática Internalista". Por exemplo, a maior parte dos conteúdos matemáticos referentes à Análise tem como verdadeiro responsável a definição, e um adequado entendimento, do Conjunto dos Números Reais. Se há uma estrutura algébrica que dividiu a Matemática em duas eras, esta é, com certeza, o Conjunto dos Números Reais com suas operações usuais. Este conceito só foi satisfatoriamente definido em meados do século XIX, graças às contribuições de Dedekind e Cantor. Neste momento histórico, pessoas como Cauchy e Weierstrass já defendiam a necessidade de que o sistema de números reais se tornasse mais rigoroso e formal (KATZ, 2009). Essa aritmetização da Análise foi concretizada por uma gama de matemáticos influenciados por estes pensamentos da época, como sugerem Berlingoff e Gouvêa (2008, p. 47-53).

Dentre os processos incluídos para o estabelecimento da “Matemática Pura” estão a abstração, a axiomatização e a generalização, que provêm da própria atividade do nosso pensamento. A Matemática é dita pura quando é formalizada sem vínculo com qualquer objeto do mundo físico ou de outro mundo que não seja o mundo matemático. Essa Matemática se organiza em questionamentos e problematização que objetivam ampliar as explicações internas da Matemática, ou seja, tratam especificamente das questões internalistas da Matemática.

Outro ponto é a questão da criação dos objetos matemáticos como resposta à necessidade da vida diária, que evidencia a perspectiva de uma “Matemática utilitária” exigida pelo mundo real e cotidiano. Esta Matemática que designamos, normalmente, como “Matemática Aplicada” reforça a importância do contexto social na produção do conhecimento matemático. Para atender as demandas da sociedade, esta Matemática Aplicada utiliza-se da Matemática Pura para construir modelos que possam resolver os problemas de maneira satisfatória. Essa resposta começa a ser construída em relação ao pensamento que cria e testa a hipótese sobre um modelo de um fenômeno que descreve uma situação real ou não. O pesquisador ampara-se na Matemática Pura para programar seu modelo, que, neste ponto, poderá ganhar uma representação visível. De posse dessa representação ele simula situações sob diversas condições pré-estabelecidas. Ele colhe e organiza os dados que fomentam a previsão de consequências e características da evolução daquele fenômeno. Por exemplo, a elaboração de cenários de acidentes com derramamento de óleo no mar pode ser feita com uma modelagem Matemática que mede a concentração de óleo em cada ponto da superfície evoluindo com a variável tempo. E o tratamento desse modelo pode ser feito via equações diferenciais (que é do mundo da Matemática Pura).

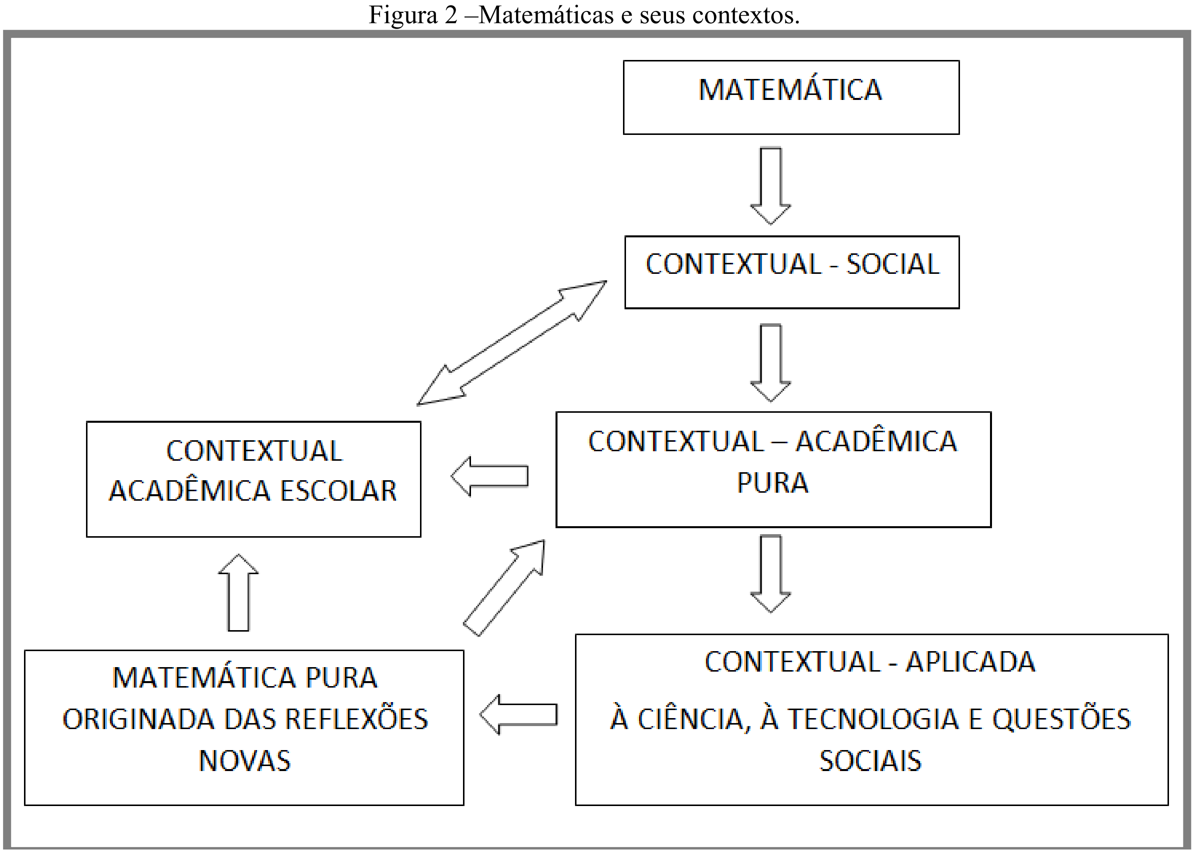
Nesses dois aspectos, identificamos que o desenvolvimento da Matemática ao longo dos tempos tem se dado por tendências simultaneamente internalistas e externalistas. Além disso, podemos perceber que os objetos matemáticos são criados a partir de atividades e reflexões desenvolvidas com base em outros objetos e conhecimentos matemáticos. O que revela que o matemático, em sua atividade criativa, junta peças para dar um passo à diante e criar algo novo. O que torna isso mais instigante é que esse novo objeto pode ter propriedades bem específicas, que podem ser difíceis de serem identificadas e trabalhadas. Por exemplo, a definição do conceito de séries infinitas, que tem propriedades que são sofisticadas até para a Matemática atual.

Uma das principais funções da Matemática é ser uma ferramenta conceitual. Assim, ela se torna um instrumento universal de inteligibilidade. Para o manejo desse ferramental são necessárias pessoas capazes de compreendê-lo e utilizá-lo. Nesse sentido, Bruter (1998) assegura que

> todas as sociedades um pouco evoluídas nos planos técnicos e comercial reconheceram evidentemente este valor pragmático da Matemática, e realizaram os esforços necessários para ministrar um ensino que respondesse às exigências econômicas da época (BRUTER, 1998, p. 23).

Este é um aspecto fundamental no delineamento e na implementação da Matemática Escolar. No descritor apresentado na figura 2, a seguir, é possível perceber como essas vertentes interagem bem no cerne da Matemática:

Figura 2 –Matemáticas e seus contextos.



Fonte: Elaborado pela autora.

Essas perspectivas sobre a natureza e criação dos objetos matemáticos encontraram e ainda encontram sérias dificuldades, mas todas são razoáveis sob o aspecto do progresso da Matemática. Quanto isso é relevante aos professores de Matemática, vale refletir como sua visão da natureza dos objetos matemáticos influencia suas práticas em sala de aula.

Isso depende, em parte, da maneira como o professor esteja formatando sua prática docente, ou ela pautada no idealismo ou no realismo.

Sobre a implicação da natureza da Matemática na formação e ação do professor em sua docência, podemos ver que em comparação com outras áreas de estudo do ser humano, a Matemática é considerada um domínio de "grande precisão" e os conceitos devem ser colocados, também, nesta perspectiva de forma a proporcionar um alicerce sólido no qual a teoria Matemática se desenvolverá. Por parte expressiva da comunidade discente, a Matemática tem sido vista como uma componente curricular de difícil compreensão levando título de dura, rígida, absoluta dentre outros adjetivos. A supervalorização de fórmulas e regras em contraponto de um método ativo e dialógico, levam o aluno a crer que ao memorizar as fórmulas e treinar em exercícios, que remetem a apenas a repetição dos exemplos apresentados pelo professor em sala de aula, ele estará aprendendo Matemática. No entanto, de acordo com pesquisas recentes neste âmbito, esse tipo mecanicista de "aprendizado" tem gerado o tolhimento da atividade criativa do aluno. Desta forma o aluno não se vê independente da prática do professor em sala de aula e, ao encarar problemas novos, sente-se inábil a resolvê-los.

As regras propostas pela Matemática, em grande parte, não são compreendidas pelo aluno e este sente dificuldades em praticar tal jogo lógico. Uma forma de contornar essa situação é o professor levar o aluno a estabelecer, por si só, seus processos lógicos de construção para os conceitos matemáticos. Para tanto, o aluno deve ser instigado pelo professor a fazer conjecturas e reflexões em todo o percurso de construção de um conceito. O professor, por sua vez, compreende as conjecturas do aluno quando ele as responde ou refaz a pergunta de modo que o aluno se satisfaça. Nesse cenário o professor pode colher bons frutos ao aprimorar a forma de apresentar o conteúdo. Por sua vez, o aluno não deve apenas ouvir as palavras do professor, mas escutá-las e discutir e refletir. A reação do aluno é muitas vezes interpretada pelo professor como uma sinalização de que o aluno está devidamente, ou não, compreendendo os avanços almejados pelo professor.

A seguir abordaremos o caráter criativo de um indivíduo e alguns modelos de criatividade e seus contextos sociais. Levantando como essas reflexões podem enriquecer nossa análise sobre o desenvolvimento da Matemática, tanto pura, quanto aplicada. Traremos a discussão das modificações que podem ocorrer com essa área da ciência e com os principais atores (pesquisadores, professores e alunos) inseridos nesse cenário.

1.5 Pressupostos Teóricos

Nesta seção, delineamos as perspectivas teóricas que direcionaram nossa pesquisa em conformidade com a realização da tarefa de alcançar todos os nossos objetivos. Discutimos, inicialmente, a noção de criatividade, apresentando alguns direcionamentos dados por pesquisadores na investigação desse tema. Ressaltamos as categorias de estudo da criatividade destacando as abordagens que emergiram com o desenvolvimento e difusão das pesquisas no assunto.

A palavra criatividade nos remete a uma manifestação da capacidade das pessoas criarem ou expressarem-se de maneira potencial. A multiplicidade de conceitos para criatividade, expressa a subjetividade intrínseca do tema. Nas prateleiras de livrarias e bibliotecas, por exemplo, livros que remetem ao tema são encontrados, primeiramente, nas prateleiras de Administração, Autoajuda, Pedagogia, Filosofia, Artes, Psicologia etc. Nestes livros, claramente, não é apresentada uma conceituação, ou definição, da Criatividade. Como poderíamos esperar, existem múltiplas perspectivas, o que gera bastante confusão.

Para iniciarmos nossa discussão acerca da noção de criatividade, vamos pavimentar um caminho, que nos seja útil, à luz da Matemática. Os estudos sobre criatividade foram mais percebidos a partir do início do século XX, quando foram detectadas as primeiras tentativas dos cientistas em organizar os estudos sobre este assunto, que se encaixasse nos métodos científicos tradicionais de análise. Atualmente,

> a pesquisa em criatividade não é uma corrente principal. Ao longo dos anos, alguns tópicos dentro de um campo se tornam uma corrente principal e outros permanecem nas margens. Na psicologia e educação, a criatividade sempre ficou nas margens. (STERNBERG, 2006, p. 3)

Agora, é claro, que trabalhar nas margens de um domínio (ou área de conhecimento), pode apresentar algumas desvantagens, como a escassez de financiamentos e baixo reconhecimento pela sociedade. Entretanto, Runco e Pritzker (1999) e Sternberg (2006) indicam que o tema criatividade tem atraído o interesse de novos pesquisadores, que têm atuado em diversas áreas, como artes e negócios e, obviamente, a área de educação, onde se situa nosso trabalho de Tese. Um dos fatores apontados que confirmam esse crescimento é a significativa quantidade de artigos de investigação em criatividade publicados em revistas e periódicos, que no período de 1960 a 1999 foram mais de 10.000

e que, só na década de 1990, foram editados mais 600 livros sobre este tema (RUNCO e PRITZKER, 1999).

A criatividade rotineiramente é associada à invenção e é um processo que pode ocorrer em vários domínios, como nas ciências, na literatura, na arte etc. Esse seu caráter é o que é apresentado na maioria dos dicionários que trazem uma significação para a palavra.

No contexto da atividade Matemática a invenção é um aspecto desafiador, do qual o matemático é um perseguidor. Uma investigação foi sugerida por Poincaré, trazendo que "é tempo de aprofundar e ver o que ocorre na própria mente do matemático. Para isso, creio que o melhor é evocar recordações pessoais" (POINCARÉ, 1910, p. 326). Esta frase demonstra que sua visão sobre a invenção Matemática é delimitada pelo esforço do indivíduo matemático, amparado apenas por seus processos cognitivos. E a compreensão desses processos cognitivos pode ser alcançada na descrição e análise das atividades e experiências desenvolvidas no processo criativo da Matemática. Nesse sentido, o matemático francês, Jacques Hadamard (1865-1963), estudou e organizou experiências de reconhecidos matemáticos.

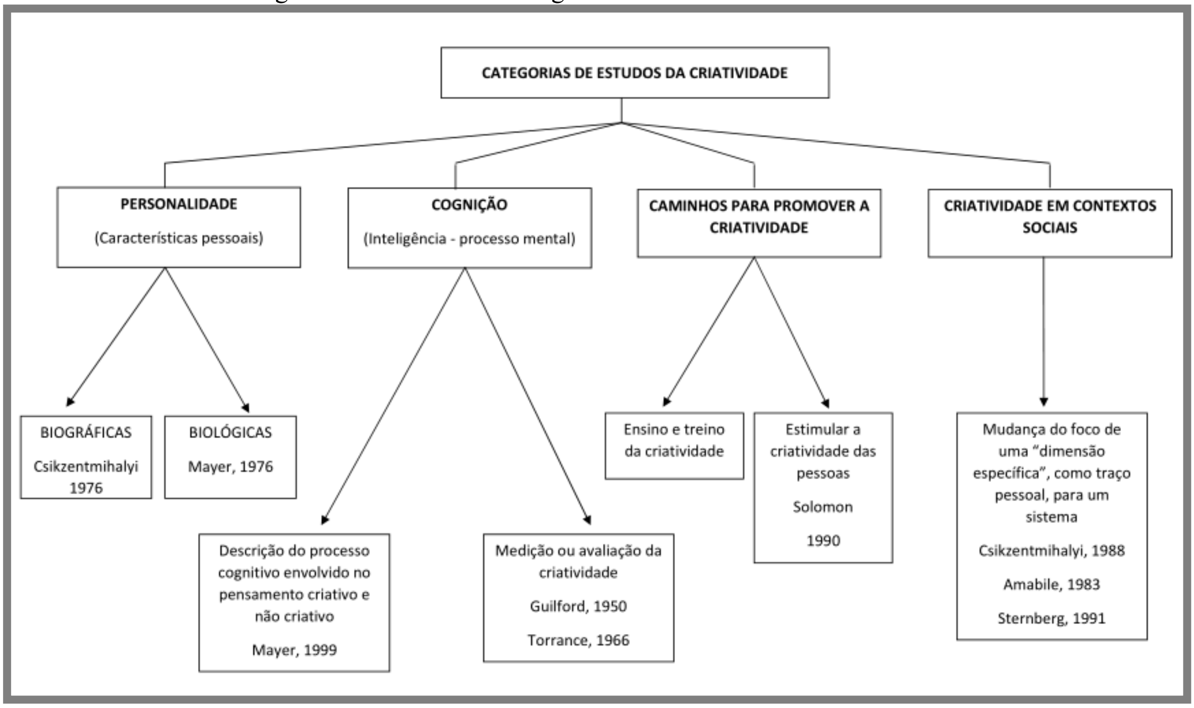
Em 1944, Hadamard publica, nos EUA, seu livro *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, que em suas palavras: "foi inicialmente inspirado pela célebre conferência de Henri Poincaré na Sociedade de Psicologia em Paris" (HADAMARD, 2009, p.11). Hadamard examinou a literatura disponível e declarou que o assunto da invenção já foi muito explorado, mas ainda existem muitos pontos obscuros. Além dessa dinâmica, ele considerou sua própria atividade Matemática como um dos alvos de sua investigação, ou seja, ele se põe na posição de investigador e investigado. Ele também apoia suas conclusões em questionários e depoimentos colhidos junto aos matemáticos.

O estudo sobre a invenção Matemática de Hadamard (2009) foi alicerçada nas experiências de matemáticos experientes. A ótica escolhida por ele revela aspectos da criatividade pertinentes ao matemático "maduro" e apresenta apenas características individuais. O foco de sua pesquisa assume abordagens específicas, que estão relacionadas aos traços pessoais do matemático. Este trabalho de Hadamard é elencado por Runco e Pritzker (1999) como um dos eventos relevantes no estudo sobre criatividade que desencadeou outros trabalhos e ideias sobre o tema, posteriormente.

Atualmente, as principais linhas de pesquisa em criatividade são identificadas em quatro categorias de estudos que abordam aspectos da personalidade, da cognição, estímulo da criatividade e da criatividade no contexto social como eixo central. O descritor apresentado na Figura 3, a seguir, foi elaborado tomando como base o artigo de Kuo

(2011) e exibe as principais categorias de estudos da criatividade, suas abordagens e os pesquisadores precursores nesses eixos.

Figura 3 - Descritor de Categorias de Estudos da Criatividade.



Fonte: Elaborado pela autora a partir do trabalho de Kuo (2011)

O descritor sugere que existem atualmente quatro categorias de estudos da criatividade: personalidade, cognição, caminhos para promover a criatividade e criatividade em contextos sociais. Essas categorias foram surgindo pela evolução e influência de diversos fatores, como por exemplo, a busca de uma melhor compreensão do fenômeno da criatividade e seus processos que resultasse em uma teoria sustentável e cientificamente reconhecida. De acordo com o descritor, a categoria de estudo da personalidade vai à direção de levantar as características pessoais de um indivíduo criativo, como motivação, resiliência e perseverança, cujas principais abordagens são a bibliográfica e a biológica. Dentro da categoria que estuda a criatividade sob o ponto de vista da cognição, os pesquisadores investem em estudar a inteligência e o processo mental envolvido no pensamento criativo, as abordagens destacadas nesta categoria incluem a descrição do processo cognitivo envolvido no pensamento criativo ou não e a medição ou avaliação da criatividade. Há também, os pesquisadores que se empenham em encontrar e descrever caminhos que promovam a criatividade sendo que as abordagens mais frequentes nas pesquisas são a de ensino, treino e estimulação da criatividade.

Essas três primeiras categorias apresentam os seus estudos centrados no indivíduo, os pesquisadores que se alinham na última categoria, voltam sua atenção para a influência de fatores sociais, culturais e históricos no desenvolvimento da criatividade, constituindo dessa forma uma abordagem sistemática para a criatividade. A abordagem de sistemas para o estudo da criatividade muda a forma como ela é definida e reconhecida, sendo que esta passa a não ser definida plenamente por referências à qualidades pessoais. A seguir trataremos de forma sucinta os três principais modelos de abordagem sistêmica para o estudo da criatividade.

O primeiro modelo de criatividade desenvolvido dentro de um contexto social é o de Teresa Amabile em 1983, *Componential Model of Creativity* (Modelo Componencial de Criatividade) Esse modelo toma de forma abrangente aspectos cognitivos, de personalidade, motivação e influência social sobre o processo criativo. Para a pesquisadora, a criatividade é a produção de uma resposta, produto ou uma solução nova e apropriada para um problema em aberto. A criatividade é um processo que ocorre em cinco etapas: identificação do problema ou da tarefa; preparação; geração de resposta; comunicação e validação de resposta; e avaliação dos resultados (AMABILE, 1983, 1996). Essa pesquisadora é a primeira que investiga as influências de fatores que podem interferir nas diferentes etapas do processo criativo. Como meio em que essas etapas interagem, a pesquisadora coloca como componentes inerentes ao indivíduo criativo: *a motivação de tarefas* (motivação intrínseca que leva o individuo a participar da resolução do problema por interesse, prazer ou um senso pessoal de desafio), *habilidades de domínio* (especialização no domínio) e *habilidades relevantes para a criatividade* (processos cognitivos e traços de personalidade que são propícios ao pensamento novo). O componente externo ao indivíduo é o ambiente social e este desenvolve o papel de dar suporte à criatividade. Sua teoria específica que a criatividade exige a confluência de todas as três componentes e a autora asinala que um produto ou uma resposta serão julgados criativos na extensão em que (a) são novos e apropriados, úteis ou de valor para uma tarefa e (b) a tarefa é heurística e não algorítmica. (AMABILE, 1996). O seu trabalho empenha-se em descrever o processo criativo e as várias influências do contexto social sobre o processo e o produto criativo.

O modelo de Sternberg e Lubart, apresentado em 1991, também investiga a criatividade em contextos sociais, a *Investment Theory of Creativity* (Teoria do investimento da criatividade) investiga os diferentes fatores que podem influenciar favoravelmente, ou não, a criatividade. Para esses pesquisadores, pessoas criativas são aquelas que dispostas e capazes de *comprar na baixa e vender na alta,* no âmbito das ideias. Sternberg (2006) explica que *comprar na baixa* significa que os indivíduos buscam ideias que são desconhecidas ou pouco utilizadas, mas que têm crescimento potencial. Segundo seus estudos, Sternberg e Lubart (1995) dizem que o processo criativo requer a assistência de seis elementos: inteligência, estilos intelectuais, conhecimento, personalidade, motivação e contexto ambiental. Da convergência desses seis fatores inter-relacionados origina-se uma produção criativa.

O modelo de criatividade, de Csikszentmihalyi, trata da relação entre criatividade e evolução cultural. O autor defende a ideia de que o foco dos estudos em criatividade deve ser nos sistemas sociais e não no indivíduo, a criatividade não ocorre dentro dos indivíduos, mas é resultado de interações entre os pensamentos do indivíduo e o contexto sociocultural. A criatividade deve ser compreendida não como um fenômeno individual, mas como um processo sistêmico (CSIKSZENTMIHALYI, 1998, p. 23) e para compreender esse processo é necessário considerar os ambientes social, cultural e histórico. Esse modelo pode ser mais bem entendido como uma confluência de três subsistemas: individual, domínio e de campo e, a criatividade é um processo que resulta da interação desses três fatores. Reunimos as informações colocadas anteriormente sobre a criatividade em contextos sociais na figura 4, apresentado a seguir.

Figura 4 – Criatividade em Contextos Sociais.

Autores	Modelo	Abordagens
Teresa Amabile	Modelo Componencial de Criatividade	Os três componentes necessários para o trabalho criativo são: motivação de tarefas, habilidades de domínio, habilidades relevantes para a criatividade. Esses três componentes devem interagir entre si. A influência do ambiente social desempenha um papel fundamental central na teoria podendo minar a motivação intrínseca.
Robert Sternberg e Todd Lubart	Teoria do Investimento em Criatividade	Os recursos necessários à expressão da criatividade são o contexto, a motivação, a inteligência, o estilo intelectual, o conhencimento e a personalidade. Todos esses recursos interagem entre si.
Mihalyi Csikenzentmihalyi	Modelo de Sistemas de Criatividade	Interação de três subsistemas: domínio, campo e indivíduo.

Fonte: Elaborado pela autora.

Essas abordagens de criatividade têm como foco central a ideia que valoriza os fatores sociais, culturais e históricos no processo criativo e não somente no papel do indivíduo em seu trabalho. Dessa forma, concordamos com Alencar e Fleith que afirmam:

> A criatividade deixou de ser vista como produto apenas de um lampejo de inspiração, e a preparação de indivíduo, sua disciplina, dedicação, esforço conscistente, trabalho prolongado e conhecimento amplo em uma área do saber, como pré-requisitos para a produção criativa, passaram a ser enfatizados. (ALENCAR, FLEITH, 2009, P. 16)

Nas teorias de Amabile e Sternber e Lubart o contexto social age como pano de fundo para o desencadeamento da criatividade, enquanto que a teoria de Csikszentmihalyi tem a característica de valorizar o contexto social de uma personalidade criativa, considerando-o como parte fundamental na relação entre indivíduo-domínio-campo. A perspectiva de Csikszentmihalyi é sustentada pelo processo de evolução cultural, fornecendo, assim, a possibilidade de estudar a criatividade na história. Para desenvolver nosso trabalho utilizaremos o *Modelo de Sistemas de Criatividade* de Csikszentmihalyi, por se tratar de um modelo que tem a característica de valorizar o contexto social histórico de uma personalidade criativa. Esse tema será detalhadamente discorrido no Capítulo 2.

A respeito de nossa investigação contemplar o estudo de uma obra histórica vetorizada para a abordagem de temas de Matemática no ensino de alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática, fundamentamo-nos em Mendes (2006) que aponta a investigação em história da Matemática como um *agente de cognição* na Educação Matemática. O termo *agente de cognição* é relacionado com criatividade por Mendes (2015a) dando o sentido de oferecer ao estudante, utilizando a história da Matemática mediada pelo professor, uma oportunidade de se desafiarem a decidirem tomar parte em um processo de criatividade Matemática como parte de sua aprendizagem. Para nosso trabalho, a citada mediação dada pelo professor foi enxergada como parte da correlação entre os termos criatividade e cognição Matemática dada no âmbito da pesquisa em história da Matemática que apresenta a

> perspectiva que a cognição Matemática se concretiza quando identificamos a presença dessa criatividade nas matemáticas das obras históricas investigadas e no modo como reorientamos as informações extraídas dessas investigações, na elaboração de transposições didáticas a serem propostas no ensino de Matemática para estudantes da Educação Básica ou mesmo na formação de professores de Matemática. (MENDES, 2015a, p. 186)

Seguindo as pondenderações de Mendes (2015b), buscamos no exercício de criatividade Matemática de John Wallis, apontado em sua obra histórica *Arithmetica Infinitorum*, elementos que possam ser levados para sala de aula, com o intuito de alcançar uma prática desafiadora pelos alunos, de forma que cada um deles tenha um aumento de seu domínio dos conteúdos abordados nos cursos de Cálculo e Análise.

Na próxima seção, trazemos os procedimentos metodológicos que balizaram nosso estudo. Listamos e colocamos alguns detalhes dos tópicos que tratamos na Tese, a saber: o Pensamento Matemático Avançado e seu *link* com a criatividade, com o viés da Matemática. Usamos a obra de John Wallis para conduzir nossa discussão acerca desse tema criatividade, e as consequências de seu trabalho na teoria e no ensino do Cálculo e da Análise.

1.6 Procedimentos metodológicos

Para o desenvolvimento de nossa pesquisa e elaboração desse texto, partimos da busca da bibliografia para uma abordagem que realmente acrescentasse no desenvolvimento dos temas que tratamos aqui. Deparamos com muitos livros e artigos de importantes precursores na área, e isso foi de suma importância para a construção de nosso senso e de nossa autonomia para a contração do caminho aqui proposto.

Como os temas, aqui discutidos, vêm ganhando notoriedade, embarcamos em uma jornada que apresentou, em alguns momentos, pontos de recorrência, que são centralizadores das questões, mais comumente, destacadas pela comunidade científica. A seguir colocamos um quadro resumindo esses temas norteadores de nossa pesquisa, que serão tratados ao longo deste texto de tese:

Figura 5 – Temas norteadores de nossa pesquisa

Criatividade e Criatividade Matemática	Iniciamos nosso estudo sobre criatividade e criatividade Matemática, buscando na literatura aportes para compreender como se dá o trabalho criativo de um matemático. Além de colher informações de como a criatividade pode auxiliar professores e alunos no processo de ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos reconhecidamente sofisticados.
Pensamento Matemático Avançado (PMA)	Este estudo teve como eixo o livro *Advanced Mathematical Thinking*, de David Tall, publicado em 1991. A partir desta leitura, procuramos outros documentos e fontes que nos ajudassem no aprofundamento acerca desta temática, principalmente, em relação aos processos do PMA, propostos por Dreyfus (1991)

Elaboração de uma versão do livro *Arithmetica Infinitorum* de John Wallis	Utilizamos a versão em inglês, de Jaqueline A. Stedall, de 2004, *The Arithmetic of Infinitesimals*, além disso por várias vezes fomos amparados pelo original *Arithmetica Infinitorum* de John Wallis (1656) em Latim.
Exame da obra *Arithmetica Infinitorum*	Nesta etapa do trabalho, recorremos a vários estudos sobre o tema, com a intenção de ampliar nossa compreensão acerca da obra, de seu contexto e de seus desdobramentos para a Matemática a ser ensinada nos cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática. Para tanto, neste trabalho fazemos um exame da obra *Arithmetica Infinitorum* (1656), buscando evidenciar como as ideias de John Wallis contribuíram para o desenvolvimento de alguns conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral ou Análise Real, levando sua produção a ser reconhecida como criativa e inovadora na área da Matemática. Para analisar tais aspectos nos apoiamos na relação entre criatividade e o Pensamento Matemático Avançado, a fim de mostrar como as elaborações de Wallis se configuram em resultados de uma atividade criativa em Matemática.
Indicação de uma proposta de ensino de conteúdos de Cálculo	Baseamo-nos no caminho percorrido anteriormente, para indicação de uma proposta de abordagem para o ensino de tópicos do Cálculo e Análise, utilizando o potencial pedagógico das ideias de Wallis.

Fonte: Elaborado pela autora

Além deste capítulo introdutório, nosso trabalho contém outros quatro capítulos e as referências bibliográficas utilizadas na pesquisa e na elaboração deste texto. Tratamos, a seguir, no capítulo 2, aspectos voltados à construção da Matemática, relacionando-a Criatividade Matemática e ao Pensamento Matemático Avançado. A Matemática, como um domínio de conhecimentos, apresenta grande número de pesquisadores e interessados, que se relacionam sobremaneira e que tem, se assim podemos dizer, o papel de validar e estabelecer conhecimentos e teorias matemáticas. Isso coloca a Matemática passível de ser enquadrada e examinada como um subsistema do *Modelo de Sistemas de Criatividade* de Csikszentmihalyi (1998), como detalhamos na seção 2.2.

O capítulo 3, traz detalhes sobre o contexto histórico dos séculos XVI e XVII, abordando aspectos políticos, sociais, econômicos, teológicos e filosóficos que influenciaram a Europa, e em especial a Inglaterra, esse período engloba a época vivenciada por John Wallis (1616-1703). Trazemos uma apresentação de nossa personagem histórica centralizadora de nossa pesquisa. Listamos sua produção científica e o contexto histórico-social em que ela estava inserida; assim como vamos discorrer sobre uma experiência de Wallis, cujo foco era ensinar uma criança surda a falar. Apresentamos, ainda, algumas das personagens contemporâneos de Wallis, que compunham seu "campo", sendo que parte delas trocava correspondências frequentes com a nossa personalidade central.

No capítulo 4, apresentamos nosso exame de parte da obra *Arithmetica Infinitorum* (1656), a partir de um recorte que consideramos potencialmente adequado para explicitar as ideias de John Wallis acerca de alguns conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral presentes na obra. Na impossibilidade de me afastar da professora que sou e da pesquisadora que se forma, apontarei alguns tópicos atuais da Matemática que já configuravam na obra examinada ou que os desencadearam na forma que os conhecemos hoje. Ainda neste capítulo, explicitamos o potencial pedagógico da obra *Arithmetica Infinitorum*. Nele trazemos a indicação e discussão de uma abordagem pedagógica para a introdução da integral utilizando as ideias de Wallis. Como já foi mencionado anteriormente, utilizamos a versão em inglês, de Jaqueline A. Stedall, de 2004, *The Arithmetic of Infinitesimals*; além de que, por várias vezes, fomos amparados pelo original em Latim na busca de uma melhor compreensão de algumas ideias matemáticas**.**

Com esse caminho trilhado, percorrido e cheio de idas e vindas no percurso de nosso estudo, confiamos que, além de adentrarmos o nosso objeto de estudo, pudemos responder nossa questão de pesquisa e alcançado nossos objetivos. Nesta direção, consideramos a necessidade de apontarmos categorias criativas na obra *Arithmetica Infinitorum*, foco de nosso estudo, assim, no próximo capítulo discorreremos sobre a criatividade e o pensamento matemático avançado.

2. SOBRE A CRIATIVIDADE E O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Neste capítulo, descrevemos e sistematizaremos um estudo baseado em fontes bibliográficas, cuja finalidade foi fundamentar nossa pesquisa, no sentido de examinar as relações entre Criatividade Matemática e Pensamento Matemático Avançado e suas implicações no Ensino de Matemática nos Cursos de Formação de Professores de Matemática. Em nossa abordagem sobre Criatividade, baseamo-nos no Modelo de criatividade proposto por Mihaly Csikszentmihalyi e discutimos aspectos centrais do Pensamento Matemático Avançado que se conectam com as noções de criatividade aqui determinadas. Do exame da literatura e de nossas reflexões partimos para a construção de um modelo de exame de uma obra histórica de Matemática, no nosso caso, a obra a ser examinada neste modelo é *Arithmetica Infinitorum* de John Wallis.

2.1 A invenção Matemática na perspectiva de um matemático

No início do século XX, Henry Poincaré proferiu uma palestra para a Sociedade de Psicologia de Paris intitulada *Criação Matemática* (Poincaré, 1910). Os aspectos iniciais abordados por Poincaré falaram a respeito da compreensão da Matemática por uma pessoa, ele colocou que "se a Matemática está se fundamenta apenas em nas regras lógicas que toda mente clara aceita, como existem pessoas que são refratárias à Matemática". Ele ligou a criação Matemática a uma sensação, que ele denomina de intuição de ordem Matemática, e esta seria a chave para se conseguir inventar em Matemática. Poincaré descreveu o que considerava como uma invenção Matemática, a partir de suas reflexões sobre os seus próprios exercícios de atividade Matemática. No entanto, sua palestra foi finalizada com uma colocação na qual explicitava que o tema de estudos sobre invenção Matemática deveria ainda ser mais bem estudado.

Talvez esse tenha sido o desafio que levou o matemático Jacques Hadamard a se inspirar nas ideias e reflexões argumentativas apresentadas na palestra de Poincaré para também enveredar nos estudos sobre invenção Matemática e, assim, apresentar as suas reflexões em 1946.

A perspectiva para invenção na Matemática, oferecida por Hadamard, seguindo os passos descritos por Poincaré, é constituída por uma combinação de ideias. Entretanto, isso

> não consiste em fazer novas combinações com entes matemáticos já conhecidos. Qualquer um poderia fazer isso, mas as combinações assim conseguidas seriam em número limitado e na sua maioria totalmente desprovidas de interesse. Criar consiste, precisamente, não em construir as combinações inúteis e que estão em ínfima minoria. Criar é discernir, escolher ... (POINCARÉ, 1910, p.324).

O ponto levantado enfatiza que existem várias combinações de ideias e na maioria delas não é apresentado um grau de fecundidade necessário para o desencadeamento de uma invenção. Podemos combinar vários teoremas e proposições que não geram uma ideia nova. Eles podem só estar se encaixando como um ladrilhamento imperfeito ou sem sentido ou não provocando uma conexão coerente que em sua essência traga o embrião para uma invenção. Para que ocorra a invenção Matemática no sentido dado por Poincaré, o matemático deve ser capaz de eleger em um elenco, conhecido por ele, as ideias que provocarão o ajuste necessário de forma a uma nova ideia ser gerada, constituindo assim, uma invenção Matemática. Dessa forma, a sugestão dada por Poincaré, nos remete a ideia de que para haver uma invenção Matemática o matemático deve conhecer muito bem a Matemática com que trabalha.

Para que essas combinações ocorram, de modo a desencadear uma invenção, é necessário um trabalho mental contínuo do matemático, caracterizando um processo de invenção. As ideias de Poincaré, retomadas por Hadamard (2009), estabelecem que esse processo de invenção inclua quatro etapas: preparação, incubação, iluminação e exposição. Para que esse processo se inicie, o matemático deve ter tido acesso a algum trabalho (ou problema) anteriormente divulgado. No caso de Poincaré, sobre a invenção das funções fuchsianas, seu Professor Charles Hermite havia lhe recomendado a leitura dos trabalhos de Lazarus Fuchs. No caso do Último Teorema de Fermat[5], a invenção da teoria decorreu diretamente do estudo do problema já posto.

A fase da preparação é o momento em que o problema é definido e há uma necessidade ou desejo por parte do matemático em resolvê-lo. O matemático explora as dimensões do problema. Nesse ponto de grande reflexão, o matemático, estudando um problema específico, o examina minuciosamente e faz experimentos mentais na busca de

---

[5]Fermat substituiu o expoente 2 na fórmula de Pitágoras $x^2 + y^2 = z^2$ por um número n qualquer maior do que 2, transformando essa formula em $x^n + y^n = z^n$ e afirmou que,nesse caso, a equação não tem solução, se n for um inteiro maior do que 2 e se x, y e z forem inteiros positivos.

uma melhor compreensão do problema e estabelece critérios para verificar a consistência do mesmo, isto é, o matemático verifica se o problema é plausível de solução.

Agora, na fase da incubação, o matemático se afasta do problema e se volta a atividades que pouco diz a respeito do seu problema, isso é necessário para fornecer tempo para a mente digerir o material que foi reunido na fase de preparação. Posteriormente, a mente trabalha em um movimento do pensamento em que o ele elabora muitas combinações de ideias e, dentre essas, é preciso selecionar as que são úteis. Dessa forma,

> quando o pesquisador parte de um falso princípio, como acontece muitas vezes, ele resvala insensivelmente para uma trilha e pode ter dificuldades para sair dela. [...] A incubação consistiria em livrar-se dessas falsas vias e dessas hipóteses confusas. (POINCARÉ, 1910, p. 329)

Como a preparação, a incubação pode durar minutos, horas, semanas ou até anos. Ao final desta etapa, a mente do pesquisador fica livre e habilitada, cheia de potencial, para encarar o problema posto. As ideias incubadas são mais claramente compreendidas do que eram no início do processo.

Quando as ideias em estado incubado assumem uma forma definitiva inicia-se a fase da iluminação. Após uma "meditação" exaustiva sobre o problema, o matemático alcança uma visão clara do problema, seguida de imediata certeza da conexão das ideias, que são os produtos novos, sem equivalentes anteriores. Diferentemente das duas etapas iniciais, essa fase pode ser breve e o matemático pode ter uma reação emocional de alegria.

A etapa de exposição tem a finalidade de expor os resultados decorrentes do pensamento do matemático. No entanto, para isso são realizadas tarefas, que têm a finalidade de convencer um público das afirmações feitas pelo matemático, são elas: verificação, acabamento e resultados intermediários. A verificação é o uso de nossa razão para validação dos resultados (HADAMARD, 2009, p. 75), o matemático se pergunta: a solução funciona ou precisa de revisão? O processo de verificação pode ser trivial ou pode envolver muito trabalho. O acabamento é feito para relatar os resultados com precisão. Já nos resultados intermediários, temos a articulação das tarefas de verificação e acabamento, com o prosseguimento da pesquisa do matemático. "Depois que certo estágio da pesquisa é completado, o seguinte exige um novo impulso" (HADAMARD, 2009, p.80) que remete o matemático de volta à primeira fase de preparação para elaborar "resultados intermediários precisos" que levem a pesquisa para um próximo estágio.

Nesta etapa da exposição, algum erro pode ser encontrado, mas o trabalho, em seu conjunto todo, não precisa ser abandonado. Isso aconteceu, por exemplo, no trabalho de

Andrew Wiles, que demonstrou, em 1994, o Último Teorema de Fermat. Wiles era professor na Universidade de Princeton, nos Estados Unidos, quando anunciou, em 23 de junho de 1993, na Universidade de Cambridge, que havia demonstrado o teorema. O anúncio inicial foi seguido de um período de intensa atividade. O manuscrito foi enviado a vários investigadores para ser avaliado. Após sete meses de suspense o mundo matemático em dezembro de 1993, ficou sabendo que vários erros haviam sido encontrados. Muitos dos problemas foram resolvidos facilmente, mas um deles havia provado ser realmente difícil, e Wiles concluiu que a demonstração permanecia incompleta. Quase um ano mais tarde, em outubro de 1994, pesquisadores em teoria de números receberam uma agradável surpresa: um manuscrito, grande, por Wiles, reduzindo o problema à demonstração de um resultado sobre o anel de operadores de Heche. Junto desse, outro manuscrito, por Wiles e Taylor, continha a demonstração do resultado que estava faltando: o teorema estava demonstrado.

Poincaré e Hadamard não foram os únicos matemáticos que fizeram um exercício de reflexão sobre suas atividades matemáticas de invenção, Bartel Leendert Van der Waerden, (1903-1996) um matemático dos Países Baixos também praticou esse exercício, ao escrever dois artigos. No primeiro, *Beweis einer Baudetschen Vermutung*[6] publicado em 1927 é provada uma conjectura de Baudet. No segundo, *How the proof of Baudet's conjecture was foud*[7] publicado em 1971, ele narra como ele encontrou essa prova. Para concretizarem seus empreendimentos os três matemáticos Poincaré, Hadamard e Van der Waerden levaram em consideração para suas reflexões, apenas aspectos individuais.

Os estudos de Jacques Hadamard se limitaram a investigar como os matemáticos ou físicos pensam em suas atividades criativas e ele descreve o seu próprio pensamento matemático. Para cumprir os objetivos de nossa pesquisa procuramos um referencial que também abordasse outros aspectos, como o contexto social e cultural de uma personalidade criativa, além dos processos individuais envolvidos na atividade criativa de um matemático. Para contemplar nossa expectativa, na próxima seção, abordaremos o Modelo de Sistemas de Criatividade de Csikszentmihalyi.

---

[6]Referência desse artigo: B.L.Van Der Waerden, *Beweis einer Baudetschen Vermutung*, Nieuw. Arch. Wisk. 15, 1927.

[7] Referência desse artigo: B.L.Van Der Waerden, *How the proof of Baudet's conjecture was foud,* in"Studies in Pure Mathematics" (L.Mirsky, Ed.), p. 251-260, Academic Press, 1971.

2.2 O Modelo de Criatividade de Csikszentmihalyi

O *Modelo de Sistemas de Criatividade* elaborado por Csikszentmihalyi (1996, 1998 e 1999) tem como princípio que as ideias ou produtos criativos surgem de muitas fontes e não apenas da mente de uma pessoa. Para o autor a atividade criativa é uma interação entre os pensamentos de um indivíduo e o contexto sociocultural em que ele vive. A criatividade é mais um fenômeno sistêmico do que individual. Buscamos a noção de criatividade dada por esse autor, pois desejamos uma teoria que nos subsidie na perspectiva do estudo da atividade criativa de uma personagem histórica, pois sentimos que se levássemos em consideração apenas as abordagens de cunho individual, não conseguiremos alcançar os objetivos almejados no nosso trabalho. Ao estudar os aspectos que caracterizam o modelo em discussão, percebemos que o seu foco está na interação de aspectos individuais, sociais e culturais. Os aspectos sociais e culturais de um dado período histórico podem ser esclarecidos pela História e a Filosofia, e podemos tentar elucidar os aspectos individuais de um matemático buscando sua história, biografias, autobiografias e seus trabalhos.

Em uma investigação de 30 anos, Mihaly Csikszentmihalyi estudou o fenômeno da criatividade que desencadeou na publicação do livro *Creativity: Flow na the Psychology of Discovery and Invention*, de 1996, com tradução para o espanhol, em 1998, intitulado *Creatividad: El fluir y la psicologia de descubrimiento y la invención*. Nesse livro, o autor deu uma descrição do que é a criatividade e examinou o modo como trabalham e vivem as pessoas criativas. Ele sintetizou seu estudo baseado em entrevistas com 91 personalidades vivas que são consideradas excepcionalmente criativas em suas áreas de atuação, dentre os entrevistados estão artistas, músicos, atores, escritores, cientistas e empresários.

Para Csikszentmihalyi (1998), o termo criativo refere-se a muitas realidades diferentes e que provocam confusão. Com a intenção de elucidar sobre qual perspectiva de criativo ele se ocupa em distinguir três fenômenos diferentes que são conhecidos por criativo. O primeiro são as pessoas interessantes e estimulantes com uma mente ágil e que expressam pensamentos inusitados, pessoas desse tipo foram referidas como *brilhantes* e não como criativas. A segunda forma em que o termo pode ser aplicado é fazendo referência a pessoas cujas ideias são novas e que podem fazer descobrimentos que apenas elas conhecem, essas pessoas são chamadas por Csikszentmihalyi de *pessoalmente criativas*. O terceiro fenômeno ao qual o autor trata se diz respeito a pessoas como Leonardo da Vinci, Thomas Edison, Pablo Picasso ou Albert Einstein que mudaram a nossa cultura em algum aspecto importante, essas pessoas são chamadas apenas de *criativas*. Suas realizações são públicas tornando mais fácil o estudo sobre elas, essas pessoas são o alvo da investigação de Csikszentmihalyi.

Para o estudo da atividade criativa tomamos como referencial o *Modelo de Sistemas de Criatividade* de Csikszentmihalyi, por se tratar de um modelo que contempla o estudo histórico, visto que ele não contempla apenas os aspectos individuais de uma personalidade criativa ou se baseia em estudos métricos da criatividade. Uma vez que a compreensão da criatividade se alarga para além das qualidades individuais, alcançando aspectos sociais e culturais de um momento histórico, temos mais elementos que podem nos auxiliar no entendimento da atividade criativa.

O nosso futuro está vinculado à criatividade do ser humano, pois as novas ideias e invenções estão estritamente vinculadas ao nosso modo de viver. Mas essas ideias criativas precisam de uma platéia, para serem ouvidas, reconhecidas, registradas e levadas à prática. A criatividade muda algum aspecto da nossa cultura, conforme propõe Csikszentmihalyi (1998) quando enuncia que a criatividade é resultado da interação de um sistema composto por três componentes: uma cultura que contém regras simbólicas, uma pessoa que fornece novidade ao campo simbólico e um grupo de especialistas que reconhecem e validam a inovação, para esse autor

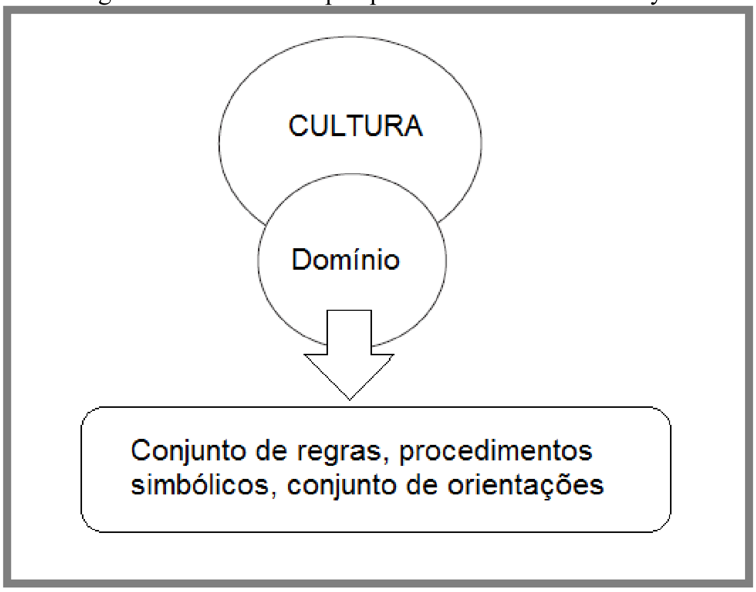
> não se pode estudar a criatividade, isolando indivíduos e suas obras do meio social e histórico em que as suas ações são realizadas. Isso é porque o que chamamos criativo, não resulta apenas da ação individual; é o produto de três principais forças que a moldam: um conjunto de instituições sociais, ou *campo*, que seleciona a partir das mudanças produzidas por indivíduos aquelas que valem a pena preservar; um *domínio* cultural estável que irá preservar e transmitir às novas ideias selecionadas para a geração seguinte; e, finalmente, o *indivíduo* que propõe alguma mudança no domínio, mudança que o campo considerará ser criativa.(CSIKSZENTMIHALYI, 1988, p.325, tradução nossa, grifo do autor)

Discutiremos, a seguir, cada uma dessas três componentes, além da interação entre elas.

O **domínio** consiste em uma série de regras e procedimentos simbólicos (CSIKSZENTMIHALYI, 1998, p. 46). Em outras palavras, o domínio é um conjunto de conhecimento acumulado, organizado, difundido e compartilhado em uma sociedade ou por várias sociedades. Por exemplo, a Matemática, por ser um corpo estruturado de conhecimentos, é um domínio cujas regras e procedimentos simbólicos incluem lógica e objetos matemáticos tais como teoremas, proposições, lemas e demonstrações. Podemos dizer que as áreas do conhecimento como Álgebra, Análise, Geometria e Topologia são subdomínios da Matemática. Cada domínio está composto por seus próprios elementos simbólicos, suas próprias regras e geralmente tem seu próprio sistema de notação.

Um domínio é constituído por um processo dinâmico sensível ao tempo, pois novas regras e procedimentos são incorporados ao domínio na medida em que o conhecimento se desenvolve. O conhecimento compartilhado por uma sociedade está localizado em uma cultura, portanto, um domínio está enraizado em uma cultura. Cada domínio é compartilhado entre as pessoas dentro de uma cultura e este pode ser transmitido de uma pessoa para outra. O conhecimento mediado por símbolos não se transmite através de códigos químicos inscritos em nossos cromossomos, sendo que deve ser comunicado e aprendido em uma cultura. Algumas pessoas só aprendem o que lhes é transmitido, outras, no entanto, apresentam uma tendência a ir adiante, modificando o domínio. A essa ação Csikszentmihalyi (1998) denomina processo criativo.

Figura 6 – Domínio na perspectiva de Csikszentmihalyi.

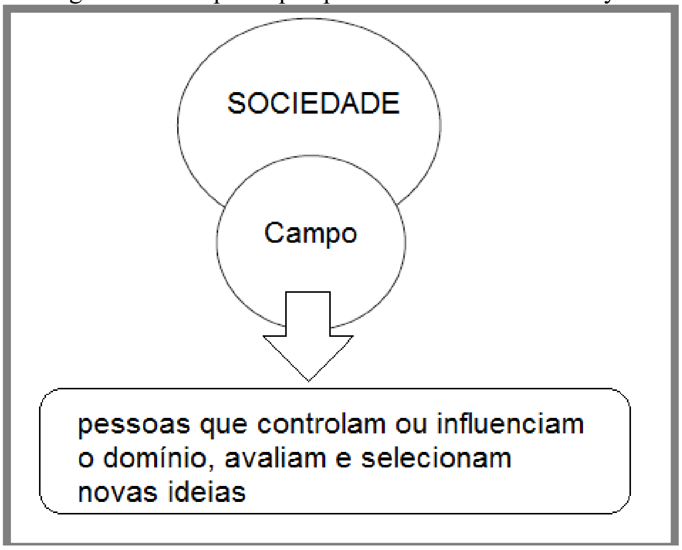


Fonte: Elaborado pela autora.

Uma modificação ou transformação de um domínio é aprovada por um grupo de pessoas especialistas naquele domínio. A esse grupo, pertencente à sociedade, Csikszentmihalyi (1998, p. 46) denominou **Campo**. Essa comunidade seleciona, a partir das modificações produzidas por um indivíduo, aquelas que são consideradas dignas de preservação. Para o domínio da Matemática o campo é constituído por instituições, professores e pesquisadores ou uma associação deles, por exemplo.

Os integrantes de um campo conhecem profundamente o domínio e tem seu saber reconhecido pela sociedade. As regras para que uma pessoa faça parte de um campo são estabelecidas por uma sociedade particular. Por exemplo, para que uma pessoa seja um membro de uma banca examinadora de doutorado no Brasil, ela deve cumprir no mínimo o requisito de ser doutor naquela área específica, o que foi estabelecido por uma sociedade particular (A UFRN, por exemplo).

Figura 7 – Campo na perspectiva de Csikszentmihalyi.



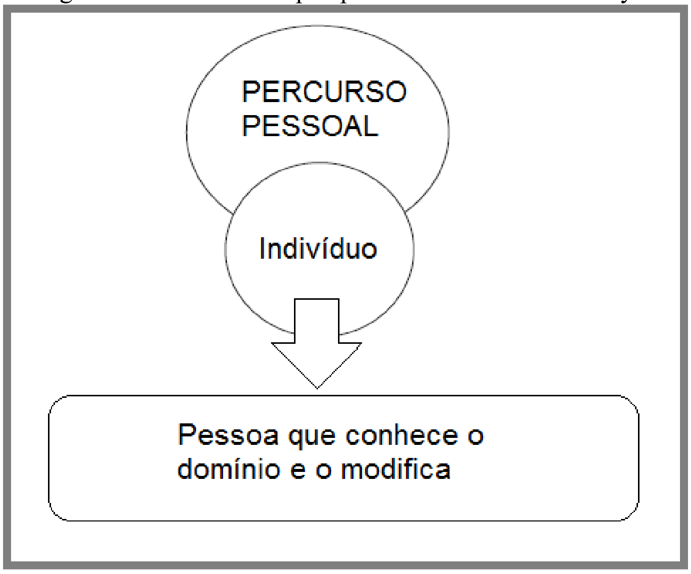
Fonte: Elaborado pela autora.

O **indivíduo** baseia-se em informações de um domínio e tem uma ideia nova. E quando essa ideia é selecionada pelo campo ela é incorporada ao domínio, modificando-o. Para essa ação, de produzir inovação e alteração no domínio, é necessário que o indivíduo conheça profundamente o domínio em que atua. Isso explicita uma característica pessoal: a experiência.

> A maioria das pesquisas se concentra na pessoal criativa, na crença de que a compreensão de como sua mente funciona revelará a chave da criatividade. Mas isso não é necessariamente assim, embora seja verdade que por trás de cada ideia nova ou novo produto há uma pessoa, não se segue que tais pessoas possuem uma característica exclusiva responsável pela novidade.(CSIKSZENTMIHALYI, 1998, p. 65, tradução nossa).

Csikszentmihalyi (1999) levanta alguns traços individuais que favorecem a criatividade. Uma delas é a bagagem genética que exerce papel importante na direção em que o indivíduo apresenta um interesse por um domínio em particular. A curiosidade e o gosto pela aprendizagem e acesso ao domínio são outras características. Lembremos que o domínio inclui um conjunto de regras e práticas, e que em toda cultura existem diversos domínios independentes e as atividades humanas são afetadas pelas regras de alguns desses domínios. O indivíduo faz uma nova variação no conteúdo do domínio e a inovação será avaliada pela componente campo desse sistema. Os especialistas e estudiosos, que compõem o campo, têm, no cerne de sua ação, a atribuição de escolher quais variações podem incrementar o domínio.

Figura 8 – Indivíduo na perspectiva de Csikszentmihalyi.



Fonte: Elaborado pela autora.

Diante da perspectiva de que a criatividade se encontra na interação entre domínio, campo e indivíduo, Csikszentmihalyi define criatividade e pessoa criativa como sendo:

> **Criatividade** é qualquer ato, ideia ou produto que muda um domínio já existente, ou que transforma um domínio já existente em um novo. E **Pessoa Criativa** é: alguém cujos pensamentos e atos mudam um domínio ou estabelece um novo domínio.(CSIKSZENTMIHALYI, 1998, p. 47, tradução nossa, negrito nosso)

O papel do tempo é percebido no Modelo de Sistemas de Criatividade de Csikszentmihalyi da seguinte forma: o domínio nutri o indivíduo com as regras e procedimentos simbólicos e este inicialmente aceita e utiliza esses sistemas de símbolos. O indivíduo pode sentir que esse conjunto convencional é inadequado ou insuficiente para a sua atividade e ele pode tentar fazer ajustes para atender as suas necessidades ou pode desenvolver um novo sistema de símbolos para resolver o seu problema de forma eficaz.

Essas mudanças, propostas pelo indivíduo, devem ser divulgadas e compartilhadas de forma a alcançar o campo, isto é, a eficiência da divulgação é notada quando o trabalho de um indivíduo é avaliado pelo campo. Esse trabalho pode ser descartado quando os juízes, o campo, não o julgar suficientemente competente para ser incluído ao domínio, mas se ao contrário, o trabalho for julgado excepcional, por merecimento, ele será incluído ao domínio, com isso teremos um novo domínio aprovado pelo campo e que será a nova fonte de conhecimentos que será transmitida aos indivíduos da próxima geração. Podemos, então, considerar essa ação do tempo no Modelo de Sistemas de Criatividade de Csikszentmihalyi:

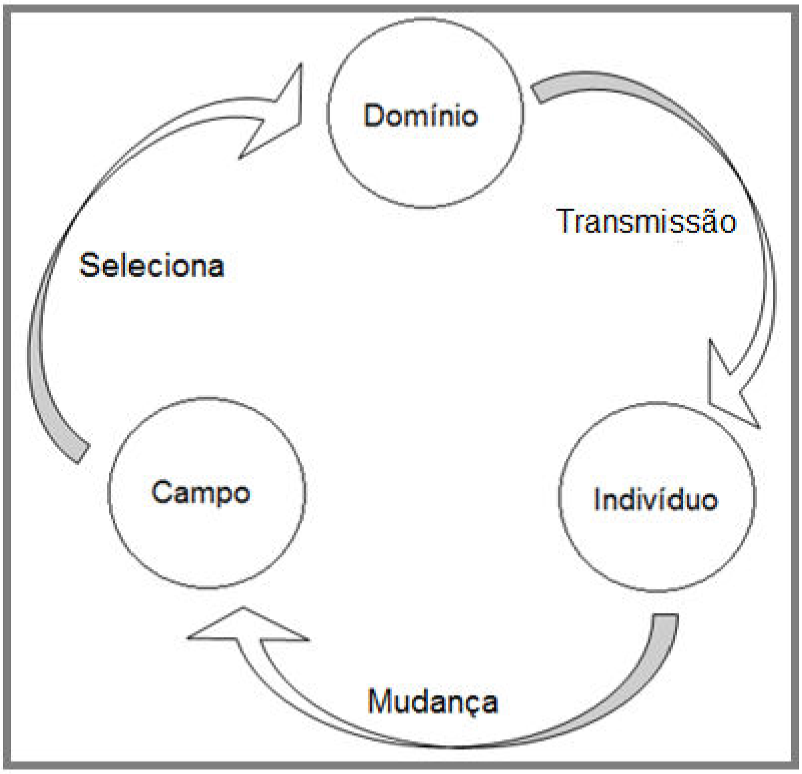
O domínio é transmitido culturalmente a um indivíduo que propõe uma mudança no domínio, que é avaliada e selecionada pelo campo, que autoriza a mudança no domínio, que é transmitido culturalmente a um indivíduo...

Podemos descrever esse processo como um ciclo na cadeia de evolução cultural:

... → Domínio transmite conhecimento → Indivíduo propõe uma mudança → Campo autoriza a mudança → Domínio transmite conhecimento → Indivíduo propõe uma mudança → Campo autoriza a mudança → ...

A figura 9, a seguir descreve, também, essa situação, onde o ciclo indica o movimento contínuo da relação indivíduo-campo-domínio.

Figura 9 – Ciclo da relação indivíduo-campo-domínio.



Fonte: Elaborado pela autora.

No Modelo de Sistemas de Criatividade de Csikszentmihalyi a manifestação da criatividade só pode ocorrer em domínios já existentes, pois para um indivíduo proporcionar uma mudança em um domínio ele já deve conhecer as regras e procedimentos deste domínio. E o grupo de pessoas que reconhecerá e legitimará as novidades já estará constituído. Outro aspecto a ser observado é que a admissão desta mudança no domínio pode ser rapidamente efetivada ou demorar bastante para se fixar no domínio. No caso da Matemática, por se tratar de um domínio cujas regras são rígidas, as mudanças propostas por um indivíduo podem ser mais rapidamente incorporadas ao domínio do que, por exemplo, uma Teoria em Educação.

Como já destacamos, aqui, o produto criativo de um indivíduo deve ser sempre sancionado por algum grupo que tem a tarefa, ou direito, de tomar decisões sobre o que deve ou não ser incluído no domínio. Esse grupo, composto de indivíduos que conhecem sobremaneira o domínio e que tem o seu conhecimento reconhecido pela sociedade, é o campo. Para que a sua inovação seja incluída no domínio, o indivíduo que a propôs, também, tem o papel de convencer o campo do valor de sua inovação. O campo específico em que o individuo faz parte ou almeja se integrar pode encorajar ou não a geração de novas ideias. Por exemplo, historicamente, o domínio da Matemática tem lançado desafios aos indivíduos no sentido de solucionar problemas, e as soluções, muitas vezes, são cheias de inovações. Dessa forma, o campo evidencia os problemas e desafios da Matemática, influenciando o indivíduo na escolha do que estudar.

Mas também, um campo, diferente daquele cuja inovação foi apresentada, pode exercer uma influência desfavorável ao reconhecimento de uma ideia atribuída a um individuo. Por exemplo, o italiano Giordano Bruno foi acusado de heresia, negando-se a revogar suas ideias, dentre elas uma do domínio da cosmologia, a que atacava o Sistema Aristotélico e exaltava o Sistema de Copérnico. Ele foi condenado à morte por membros da Igreja Católica Romana. Destacamos, assim, o importante papel desempenhado pela sociedade no Modelo de Sistemas de Criatividade de Csikszentmihalyi. Há, também, um aspecto positivo que favorece a integralização de mudanças em um domínio: a sociedade exerce pressão apresentando demandas ao indivíduo que fazem com que ele produza novidades. Por exemplo, no domínio da tecnologia de comunicação móvel a inovação de internet que permite ao consumidor a transmissão de grande quantidade de dados num curto intervalo de tempo, algo que não era possível há alguns anos atrás. Essa transmissão de dados, mesmo que não seja de grande porte, tem, às vezes, a necessidade de ser extremamente sigilosa, que faz com que sejam utilizadas robustas ferramentas de Criptografia. Um exemplo claro disso é a movimentação, via Smartphones, de informações bancárias protegidas por códigos criptográficos cada vez mais modernos e seguros.

Historicamente, o desenvolvimento da Teoria dos Números é que tornou viável este tipo de operação, revolucionando a maneira com a qual cada indivíduo lida com o seu banco, economizando bilhões de reais aos agentes bancários e o escasso tempo que as pessoas disponibilizam.

O reconhecimento pelo campo pode ser alterado em cada época à medida que muda o conhecimento histórico de cada domínio, de tal forma que este último estabelece um padrão de seleção de novidades a ser seguido pelo campo. Segundo Csikszentmihalyi,

> se a criatividade é algo mais que intuição individual e é co-criada por domínios, campos e indivíduos, então a criatividade se pode construir, desconstruir e reconstruir várias vezes ao longo do curso da história (CSIKSZENTMIHALYI, 1998, p. 48-49, tradução nossa).

Um exemplo apresentado por Csikszentmihalyi (1998, p. 52) é o pintor renascentista Rafael, que pode ser considerado criativo nos séculos XV e XIX quando a comunidade se sente movida por sua obra e descobre novas possibilidades em suas pinturas.

No caso da Matemática, Arquimedes representa um exemplo, pois suas contribuições são consideradas criativas na Antiguidade Clássica e nos séculos XVI e XVII, neste segundo caso é em função do advento de novos procedimentos simbólicos efetivados na Álgebra e Aritmética. Arquimedes foi uma personalidade criativa, pois foram descobertas novas possibilidades em seu trabalho. Segundo Roque (2012),

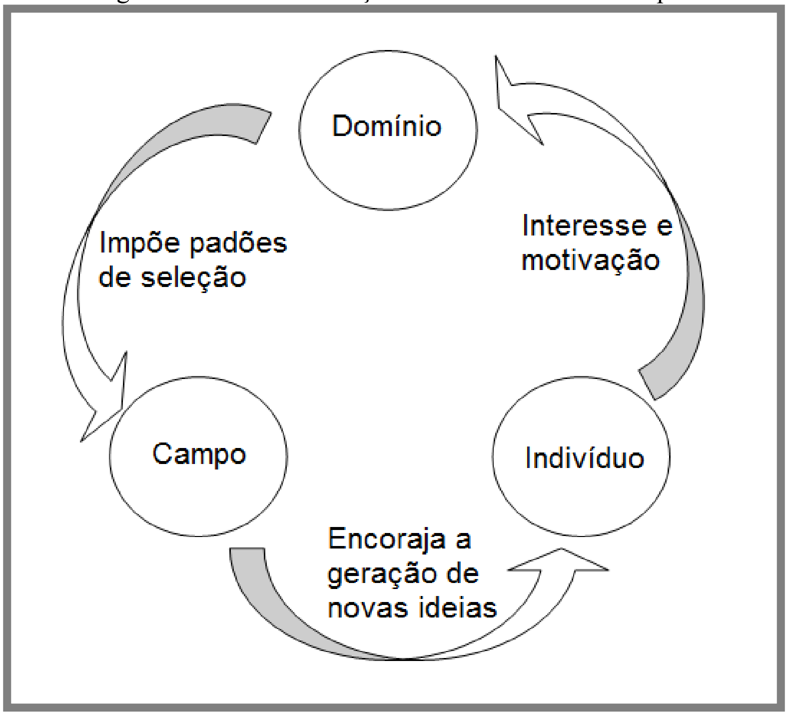
> a Europa ocidental conheceu os tratados mecânicos de Arquimedes com as traduções do século XIII, entretanto, só começou realmente a se apropriar de seus trabalhos no século XVI. Renascimento da mecânica não se deveu à atuação das universidades nem dos humanistas e sim de engenheiros interessados em questões teóricas ... (ROQUE, 2012, p. 295)

Notamos, então, que por mais influente que fora o redescobrimento dos clássicos da Antiguidade, a alavancada da Matemática neste período não se pode explicar apenas da repentina possibilidade de dispor de informação, mas também a disponibilidade e preparo do campo em admitir as mudanças propostas pelos indivíduos. A sociedade em geral, também, pode exercer esse papel. Nesse sentido, Csikszentmihalyi assegura que

> talvez a conseqüência mais importante do modelo de sistemas é que o grau de criatividade presente em um lugar e tempo determinados não depende apenas da quantidade de criatividade individual. Também depende igualmente de quão bem preparados estão os respectivos domínios e campos para o reconhecimento e difusão das ideias novas. (CSIKSZENTMIHALYI, 1998, p. 49 e p. 50, tradução nossa)

A figura a seguir descreve a relação indivíduo-domínio-campo segundo o Modelo de Sistemas de Criatividade Csikszentmihalyi (1998).

Figura 10 – Ciclo da relação indivíduo-domínio-campo.



Fonte: Elaborado pela autora.

Para explorar um domínio um indivíduo tem que aprender suas regras e isso o torna um candidato a explorar esse mundo, podendo assim dar uma contribuição ao domínio. Para isso o indivíduo deve investir energia mental suficiente para aprender as regras de um domínio. Muitas pessoas escolhem o seu domínio de atuação como uma forma de lhes garantir uma vida financeira confortável. Para Csikszentmihalyi (1998), os indivíduos criativos escolhem um domínio por sentirem uma alta afinidade com este, por se adequarem ao domínio.

> Para eles a adequação é tão perfeita, que o atuar dentro das regras do domínio os gratificam, seguirão fazendo do que não tem retorno financeiro, simplesmente pelo gosto de realizar essa atividade (CSIKSZENTMIHALYI, 1998, p. 57, tradução nossa).

De uma forma geral, ao aprender as regras de um domínio, penetramos no âmbito da evolução cultural. Isso amplia a nossa capacidade de nos relacionarmos com o mundo.

Vale ressaltar que o pesquisador em educação que estiver empenhado em estabelecer conexões entre a criatividade e aspectos pedagógicos do ensino de um domínio, ao realizar a investigação da criatividade sob a abordagem de sistemas, ganha no fato de que muitos aspectos sociais e culturais emergem dessa investigação. Nesse sentido, poderá haver um enriquecimento de informações sobre outros domínios além daquele específico proposto originalmente.

Na próxima seção, apresentamos uma discussão sobre o Pensamento Matemático Avançado elaborado por Dreyfus (1991), apontando a relação entre alguns conceitos centrais desta teoria com a de criatividade Csikszentmihalyi (1998) e as ideias sobre invenção matemática de Hadamard (2009).

2.3 Sobre o Pensamento Matemático Avançado (PMA)

Nossa pesquisa objetiva examinar de que forma as ideias inovadoras de John Wallis, emergentes na obra *Arithmetica Infinitorum*, podem contribuir para o encaminhamento conceitual e didático do conceito de limite, tendo em vista o estabelecimento do potencial didático desta obra para o ensino de conteúdos de Cálculo no Curso de Licenciatura em Matemática. Para alcançar esse objetivo, destacamos os aspectos centrais ao Pensamento Matemático Avançado propostos por Dreyfus (1991), e os relacionaremos à Criatividade Csikszentmihalyi e a invenção matemática do ponto de vista de Hadamerd. Assim, levantaremos subsídios necessários para construir algumas categorias criativas que nos guiarão no exame da obra *Arithmetica Infinitorum.*

De acordo com Dreyfus (1991) a reflexão sobre a própria experiência Matemática é aspecto importante da metacognição[8]. Tal reflexão é uma característica do Pensamento Matemático Avançado, que se associa ao estudo de Hadamard, discutido na primeira seção deste capítulo. Isso é útil ao aluno na medida em que ele passa para o âmbito do pensamento, o que pode favorecê-lo na tarefa de resolução de um problema matemático específico. A Matemática apresentada, de forma polida, pelo professor é uma Matemática final e ela não deixa transparecer a atividade criativa do matemático no seu trabalho, que é cheia de tentativa e erro. Isso nos remete a abordagem dada por Poincaré à conexão de ideias, que na visão de Hadamard ocorre na fase de incubação e isso faz parte da reflexão sobre a experiência Matemática. Instruir o aluno apenas com a Matemática ajustada ao

[8] Favell 1979

formalismo polido[9], não o dá a oportunidade de construir suas reflexões sobre sua própria experiência Matemática. Nesse sentido, percebemos a pertinente contribuição de nossa abordagem à obra específica de John Wallis, pois apontamos para a reflexão as ideias criativas deste autor, e como sua invenção pode ser conectada à teoria atual de integrais, oportunizando ao aluno momentos de amadurecimentos das ideias envolvidas.

É desejável para o sucesso do aluno, com relação ao aprendizado de um conteúdo matemático em uma determinada componente curricular, que ocorra a substituição da atividade do estudante meramente ligada à execução de procedimentos padronizados baseados na repetição, por aquela ligada à abstração, à representação e à análise do conteúdo. Para tal, o exame da criatividade de autores matemáticos exerce um relevante papel. Para Dreyfus (1991) uma longa sequência de atividades de aprendizagem é a base para a compreensão dos conceitos matemáticos. A realização dessas atividades implica a execução de uma variedade de processos que se interagem.

O Pensamento Matemático Avançado utiliza estruturas cognitivas produzidas por um leque de atividades matemáticas para construir novas ideias que permitem que o estudante de graduação possa compreender os teoremas demonstrados e que sejam capazes de construir demonstrações de forma a alargar um sistema sempre crescente de construção destes resultados matemáticos. Esse sistema é constituído de uma parcela da Matemática Acadêmica[10], aquela que configura nos programas de componentes curriculares dos cursos de graduação em Matemática. A esse sistema denominamos Domínio Acadêmico.

Dreyfus (1991) caracteriza o Pensamento Matemático Avançado como uma inter-relação entre determinados processos cognitivos complexos que dão origem ao conhecimento matemático. Tall (1991) afirma que já nos anos iniciais de ensino, muitos dos processos do pensamento matemático avançado já são existentes e aponta que a transição do pensamento elementar para o pensamento avançado

> envolve uma significativa transição: do descrever para definir, do convencer para provar de uma forma lógica com as definições. Esta transição requer uma reconstrução cognitiva que pode ser observada durante a luta inicial dos estudantes universitários(...) (TALL, 1991, p. 20, tradução nossa).

[9] Formalismo polido é uma terminologia dada por Dreyfus (1991) para uma abordagem formal no ensino da Matemática em que prevalece a estrutura teorema-prova-aplicação.

[10] Segundo Maria Manuela David, Plínio Cavalcanti Moreira, Vanessa Sena Tomaz, a Matemática Acadêmica é vista como um conjunto de práticas e saberes associados à constituição de um corpo científico de conhecimentos, conforme produzido pelos matemáticos profissionais e reconhecido socialmente como tal.

Percebemos em nossos alunos de graduação essa característica da transição, mas observamos que um grande percentual deles segue, durante toda a graduação, lutando para que essa reconstrução cognitiva se estabeleça em suas mentes. Dreyfus (1991) defende que são dois os processos de pensamentos matemáticos mais evidenciados: a Representaçãoe a Abstração. Estes estão associados tanto ao pensamento matemático dos anos iniciais de ensino quanto ao pensamento matemático avançado, sendo que a principal distinção está relacionada à complexidade dos processos em cada tipo de pensamento, que geralmente é gerenciada pelo professor.

Para Dreyfus (1991), o processo de Representação, que pode ser mental ou simbólico, está relacionado com as ações de encontrar uma representação, de visualizar ou mudar representações, transladar e modelar. Ao passo que o processo de Abstração está intimamente ligado às ações de generalizar, sintetizar e abstrair. Para que seja possível a manifestação da criatividade, segundo Csikszentmihalyi, é necessário que o indivíduo tenha conhecimento do domínio em que deseja atuar. Esse conhecimento é alcançado quando se dá uma transmissão das informações culturais ligadas a um domínio, e essa transmissão ocorre de indivíduo para indivíduo. No caso específico da Matemática, as representações mentais e simbólicas são os dois primeiros processos que devem ser desenvolvidos por um indivíduo na direção de dominar as regras e procedimentos simbólicos que constituem o domínio. Dessa forma, o indivíduo se prepara para dar um passo em uma nova direção. Para que isso ocorra é necessário que o aprendiz esteja preparado com base em experiências anteriores.

A Matemática é um domínio muito específico das ciências no que diz respeito ao acesso aos objetos matemáticos, visto que as representações desses objetos que são estabelecidas e manipuladas por um indivíduo. Essa manipulação quando se dá no âmbito mental é individual e desempenha um papel decisivo no pensamento e no processo de aprendizagem da Matemática. Quando pedimos a um aluno para pensar sobre o que vem a ser uma sequência, cada aluno elabora em sua própria mente alguma ideia. Essa ideia pode ser conflitante com objeto matemático, gerando uma falha na compreensão desse objeto matemático por parte do estudante. Como essa representação ocorre mentalmente numa ação individual, pode existir uma discrepância entre a representação do professor e do aluno, e isso pode ocasionar dificuldades na aprendizagem por parte do aluno.

Outro aspecto essencial no desenvolvimento e no ensino da Matemática é a simbologia. Os símbolos representam objetos matemáticos e têm a característica depoderem ser registrados, seja na forma escrita ou oral. Nesse sentido, os símbolos são socializados e desenvolvem um papel substancial no ensino da Matemática. A introdução de uma representação simbólica em sala de aula, ou em outro ambiente, deve ser precedida por uma associação dessa representação ao significado ou noção do objeto que se queira representar. O uso de símbolos para representar um conceito matemático é essencial para que haja uma manipulação mental satisfatória dos objetos matemáticos por parte do indivíduo, pois

> os símbolos bem escolhidos permitem uma condensação de vários aspectos de um conceito em um único conjunto que é evocado cada vez que o símbolo ocorre em um texto. Dessa maneira, a utilização do símbolo libera "espaço de memória" na mente que se torna disponível para outro, conceito, até então, conhecido ou não (ERVYNCK, 1991, P. 50, tradução nossa).

As representações mentais e simbólicas exercem funções indispensáveis para a nossa comunicação e entendimento do mundo. Entretanto, existem diferenças entre esses dois tipos de representação e Dreyfus (1991) destaca que

> Representar um conceito, então, significa gerar um caso, espécime, exemplo, uma imagem dele. Mas esta breve descrição é insuficiente para nós, porque não especifica se a circunstância gerada é simbólica ou mental, nem indica o que "gerar" significa em termos dos processos pelos quais as representações mentais vêm à tona e como elas se desenvolvem. Uma representação simbólica é escrita ou falada externamente, geralmente com o objetivo de facilitar a comunicação sobre o conceito. Uma representação mental, por outro lado, refere-se a esquemas internos ou quadros de referência que uma pessoa usa para interagir com o mundo exterior. É o que ocorre na mente quando se pensa em uma parte específica do mundo exterior e pode diferir de pessoa para pessoa (DREYFUS, 1991, P. 31, tradução nossa).

Para que o estudante desempenhe um exercício criativo em seu processo de aprendizagem é fundamental que ele seja capaz de gerar múltiplas representações mentais, que se conectem entre si na composição de uma única representação mental ampliada, e isso favorece um exercício de flexibilidade do pensamento possibilitando ao indivíduo ampliar suas experiências e alcançar uma combinação de ideias que gere uma ideia nova, conforme foi mencionado por Poincaré (1910). A ação de visualizar é um processo pelo qual as representações mentais ganham existência. Podemos dizer que nessa ação o exercício de pensar é apoiado em uma imagem que é construída mentalmente, mas que pode se concretizar exteriormente. Uma pessoa pode criar uma ou mais representações mentais para um mesmo objeto matemático. Por exemplo, no caso dos vetores no plano, uma seta é uma concretização desse tipo e um par ordenado de números reais é outra. As representações visuais exercem um papel fundamental no estudo de alguns objetos matemáticos. E o que acontece, por exemplo, no estudo do conceito de sequências, que é compreendido com mais clareza quando utilizamos uma imagem de uma reta com pontos indicando os termos de uma sequência.

O processo de aprendizagem é diretamente afetado pelo processo de mudança de representações, pois uma compreensão abundante de um objeto matemático fundamenta-se no uso flexível e articulado de várias representações por parte do estudante. Este processo de mudança de representação está relacionado com o processo de tradução, que está associado à reformulação de um problema, ou proposição Matemática, em outro; de maneira a visualizar ou facilitar a resolução do problema original (DREYFUS, 1991). Esse processo é imprescindível na resolução de problemas aplicados.

O processo de representação é parte fundamental do processo de aprendizagem e está presente em todos os níveis do pensamento matemático, inclusive nos mais elementares. À medida que os estudantes avançam no sistema educacional, eles são levados a conhecer conteúdos matemáticos mais avançados, e alargam cada vez mais suas experiências matemáticas que levam a um maior conhecimento do domínio. Com isso, há um desenvolvimento da cognição do indivíduo que segue na direção de suprimir as novas demandas geradas pela inclusão desses conteúdos mais avançados em seu repertório de estudo. Esse desenvolvimento cognitivo é amparado pelas ações mentais de generalizar, sintetizar e abstrair, que constituem base para o desenvolvimento da abstração.

Nas primeiras fases do desenvolvimento de uma teoria os alunos podem ser levados, pelo professor, a se desafiarem abrindo espaço para possíveis conjecturas, que podem evidenciar um processo de criatividade matemática como parte da aprendizagem, como sugerido por Mendes (2015). Esse movimento é necessário para que o aluno possa desempenhar um exercício da criatividade e o desenvolvimento dos processos do Pensamento Matemático Avançado faz parte desse movimento. Por outro lado, a criatividade desempenha um papel essencial para a pesquisa em Matemática, contribuindo para o alargamento do domínio. Nestas perspectivas, a criatividade só será evidenciada na medida em que o indivíduo, pesquisador, interage dentro do domínio, conhece o que está sendo feito no domínio, se apropria das informações do domínio e faz com que essas informações sejam interconectadas (combinadas entre si) para produzir informações novas. Esse movimento é impulsionado pelo desejo do indivíduo atender às exigências do campo, e esse movimento é possível quando o processo de abstração está bem desenvolvido pelo indivíduo.

Para alcançar a criatividade Matemática seguindo os conceitos estabelecidos por Csikszentmihalyi (1998) é necessário que o indivíduo desenvolva o Pensamento Matemático Avançado, alcançando um grau elevado de abstração, e para isso as ações mentais de generalizar, sintetizar e abstrair devem ser desenvolvidas. Ao alcançar um grau elevado de abstração, o indivíduo, também, passa a conhecer as regras pelas quais o campo seleciona as novidades e as incorpora no domínio. Dessa forma, o indivíduo pode trabalhar tendo em vista essas regras e maximizar os seus esforços na sua atividade criativa.

O processo de generalização consiste em deduzir ou induzir resultados gerais a partir de casos particulares e das características semelhantes identificadas, expandindo os espaços de validade das conclusões originais para contextos mais amplos. Para que o processo de generalização se instale é necessário identificar o que há de comum nas condições iniciais, fazer conjecturas e validar a generalização.

O processo de síntese se refere à capacidade de combinar ou compor partes de maneira a formar um todo, mas esse todo frequentemente agrega mais que a soma das partes que o compõe. Trata-se de um processo que busca inter-relacionar resultados, ideias e algoritmos que foram aprendidos de maneira isolada, fragmentada e que ressurgem como fusão, mesclados em novo resultado, um novo conhecimento, mais coeso e poderoso de acordo com Dreyfus (1991).

O principal objetivo a ser alcançado no desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado é o processo de abstração. Neste sentido, quanto mais desenvolvido for o processo de abstração, maior é a compreensão do domínio pelo indivíduo, o que aumenta o reconhecimento dos padrões de seleção impostos pelo domínio, dando assim a chance do indivíduo manifestar a criatividade. A abstração é um processo construtivo, que parte da compreensão das propriedades dos objetos matemáticos e das relações entre elas em direção do entendimento das estruturas dessas propriedades e relações. Dessa forma, é necessária uma mudança no foco de atenção para que ocorra a construção da abstração, que deve mudar os objetos particulares para se concentrar em estruturas específicas e apropriadas dos objetos e das relações entre estas, como descreve Dreyfus (1991).

As conexões entre o Modelo de Sistemas de Criatividade de Csikszentmihalyi e os processos centrais do Pensamento Matemático Avançado de Dreyfus nos asseguram a possibilidade de apontar algumas categorias criativas na obra *Arithmetica Infinitorum*, tendo em vista indicar de que forma o exercício criativo de um matemático na história pode contribuir na constituição de uma abordagem pedagógica para o ensino de conteúdos de Cálculo e Análise na Licenciatura em Matemática. Na elaboração da nossa abordagem pedagógica, contamos ainda com a indicação de uso da Matemática na perspectiva dada por Mendes (2015b) de modo a reorientarmos as informações extraídas do estudo de um exercíco criativo na história para a sala de aula.

2.4 Modelo para o Exame da Obra *Arithmetica Infinitorum*

A partir dos princípios teóricos mencionados nas seções anteriores, apresentamos nosso modelo de criatividade para o exame da obra *Arithmetica Infinitorum* de John Wallis, cujas bases conceituais foram estabelecidas a partir das conexões entre o Modelo de Sistemas de Criatividade propostos por Csikszentmihalyi e os pilares do Pensamento Matemático Avançado enunciado e experimentado por Dreyfus.

Csikszentmihalyi partiu da ideia de que considerar que a criatividade é um tipo de atividade mental, uma intuição que tem lugar dentro da cabeça de algumas pessoas especias leva a um erro, ele elaborou uma perspectiva sistêmica para a criatividade que é a consequência da interação de três subsistemas: indivíduo, campo e domínio. E ele ressalta "que a pessoa deve aprender as regras e o conteúdo do domínio, assim como os critérios de seleção, as preferências do campo. Na ciência é particularmente impossível fazer uma contribuição criativa sem interiorizar o conhecimento fundamental do domínio." (CSIKSZENTMIHALYI, 1998, p. 68, tradução nossa)

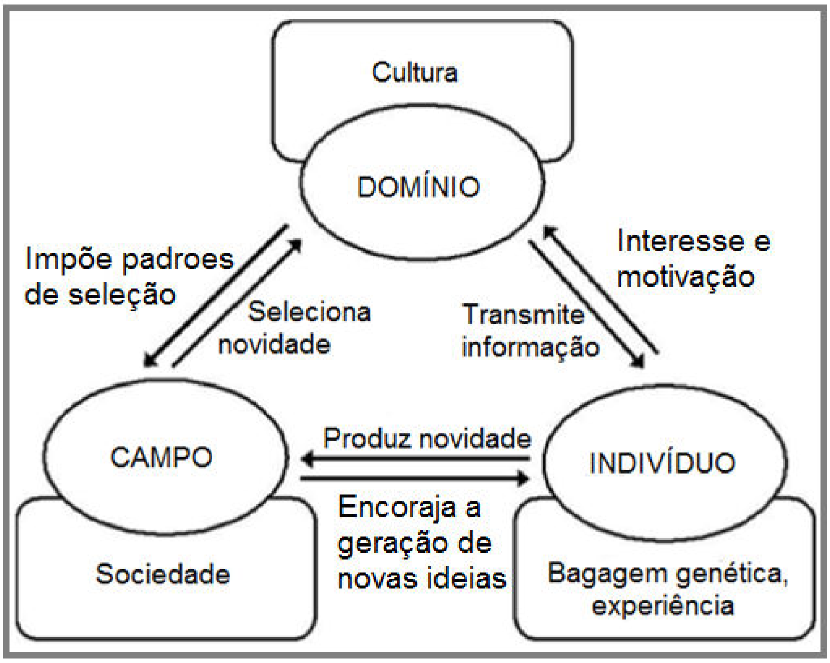
O esforço de um indivíduo em estudar e familiarizar-se com um assunto é que desperta e desenvolve na mente desse indivíduo os processos que contém o potencial de criatividade Matemática, esses são os processos do Pensamento Matemático Avançado: representação e abstração; apresentados e discutidos na seção anterior. As ações de generalizar e sintetizar desempenham um papel importante nas primeiras fases do desenvolvimento de uma teoria, na medida em que essas ações fazem parte do exercício de investigação baseado na formulação de conjecturas.

Outro fator a ser considerado é a reflexão sobre a própria experiência Matemática que é uma característica do Pensamento Matemático Avançado, essa reflexão pode levar o indivíduo a imaginação e inspiração, para que formule novos resultados a partir de resultados já conhecidos. Para tanto é necessário que o indivíduo se familiarize com o domínio a ponto de compreender os processos mentais que estão envolvidos no seu desenvolvimento.

A criatividade Matemática é uma invenção ou uma transformação de uma ideia em uma informação que é aceita pelo campo. Essa novidade só será aceita e incluída no domínio da Matemática se o indivíduo constrói um argumento lógico sustentável que a valide, mediante as regras e procedimentos do domínio. Para tanto, o indivíduo deve apoiar-se no ferramental matemático de uma época e isso só é possível se ele conhece bem o domínio da Matemática.

A figura 11, a seguir, mostra um fluxograma que resume aquilo que é apresentado nas figuras 9 e 10, da seção 2.2, e sintetiza as ideias elaboradas por Csikszentmihalyi para o seu Modelo de Sistemas de Criatividade.

Figura 11 – Modelo de Sistemas de Criatividade de Csikszentmihalyi



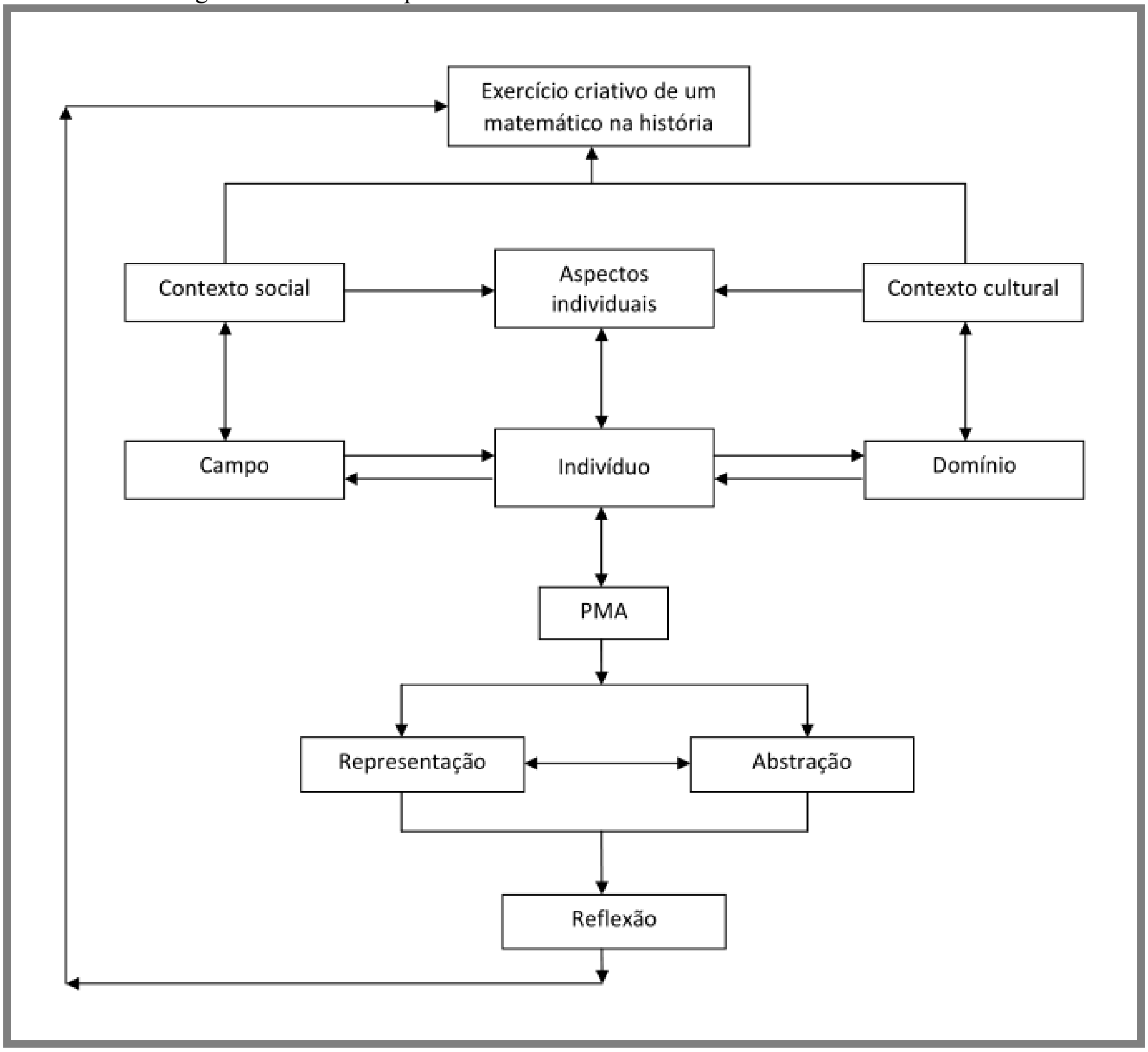
Fonte: Adaptado pela autora a partir de Csikszentmihalyi (1999).

Para caracterizar a obra de Wallis como um exercício de criatividade Matemática, tomamos como referência central os conceitos elaborados por Csikszentmihalyi. Isso nos remeteu a estabelecer as relações entre o contexto social, cultural e intelectual da Inglaterra do século XVII, época em que Wallis viveu, que foi exposto no capítulo 3 deste texto. As relações evidenciadas na seção anterior, 2.3, entre o Modelo de Sistemas de Criatividade de Csikszentmihalyi e os processos do Pensamento Matemático de Dreyfus serviram como subsídio para apontarmos algumas categorias criativas presentes na obra de Wallis.

No caso particular da criatividade Matemática, o exercício criativo de um matemático ocorre quando o Pensamento Matemático Avançado no indivíduo foi desenvolvido, a tal ponto, que este alcançou o grau de representação e abstração que o possibilita compreender o domínio e reconhecer os processos de seleção do campo. Isso faz com que o indivíduo, pela reflexão de sua atividade mental, concretize o exercício criativo, que pode ser na forma de um livro, artigo, ou manuscrito. Nossa tarefa, também, é estudar esse documento, que é o resultado material da atividade mental de um matemático na história, e identificar a materialização dos processos de representação e abstração, considerando as inter-relações entre os contextos social e cultural apontadas pelo modelo de Csikszentmihalyi

O descritor, a seguir, mostra uma síntese das discussões realizadas nas seções anteriores deste capítulo, tendo em vista a realização desta tarefa.

Figura 12 – Descritor para o exame do exercício criativo de um matemático.



Fonte: Elaborado pela autora.

De acordo com o descritor apresentado anteriormente na figura 2, o exercício criativo de um matemático na história deve ser examinado à luz dos contextos social e cultural da época. Esses dois contextos influenciam os aspectos individuais do matemático, como por exemplo, flexibilizando, ou não, um maior acesso do matemático ao domínio, como compra de livros ou cursos. O campo e o domínio são partes integrantes dos contextos social e cultural, respectivamente. Estes dois juntamente com o indivíduo interagem no sentido da criatividade dada por Csikszentmihalyi. Para contemplar essa perspectiva, o exame do exercício criativo de um matemático na história deve partir de um estudo dos contextos social e cultural, apontando suas inter-relações que contextualiza o tempo e o espaço em que viveu o matemático. Partindo do pressuposto que o contexto cultural evolui e consequentemente o domínio também, para uma compreensão mais ampla do exercício criativo, podemos fazer um recorte temporal mais abrangente do período de vida do nosso matemático.

O professor identificando um exercício criativo de um matemático na história com potencial pedagógico para ser levado para sala de aula pode fazer o tratamento desse material, e a partir disso ele pode desenvolver atividades com os estudantes, buscando alcançar, em suas aulas, um ambiente que promova a exploração desse material em uma direção que leve os alunos a conjecturar e testar sobre as ideias do matemático na história. Concordamos com a visão de Mendes (2006) de

> que os estudantes podem vivenciar experiências manipulativas resgatadas das informações históricas, com vistas a desenvolver o seu espírito investigativo, sua curiosidade científica e suas habilidades matemática, de modo a alcançar sua autonomia intelectual (...) (MENDES, 2006, p. 87).

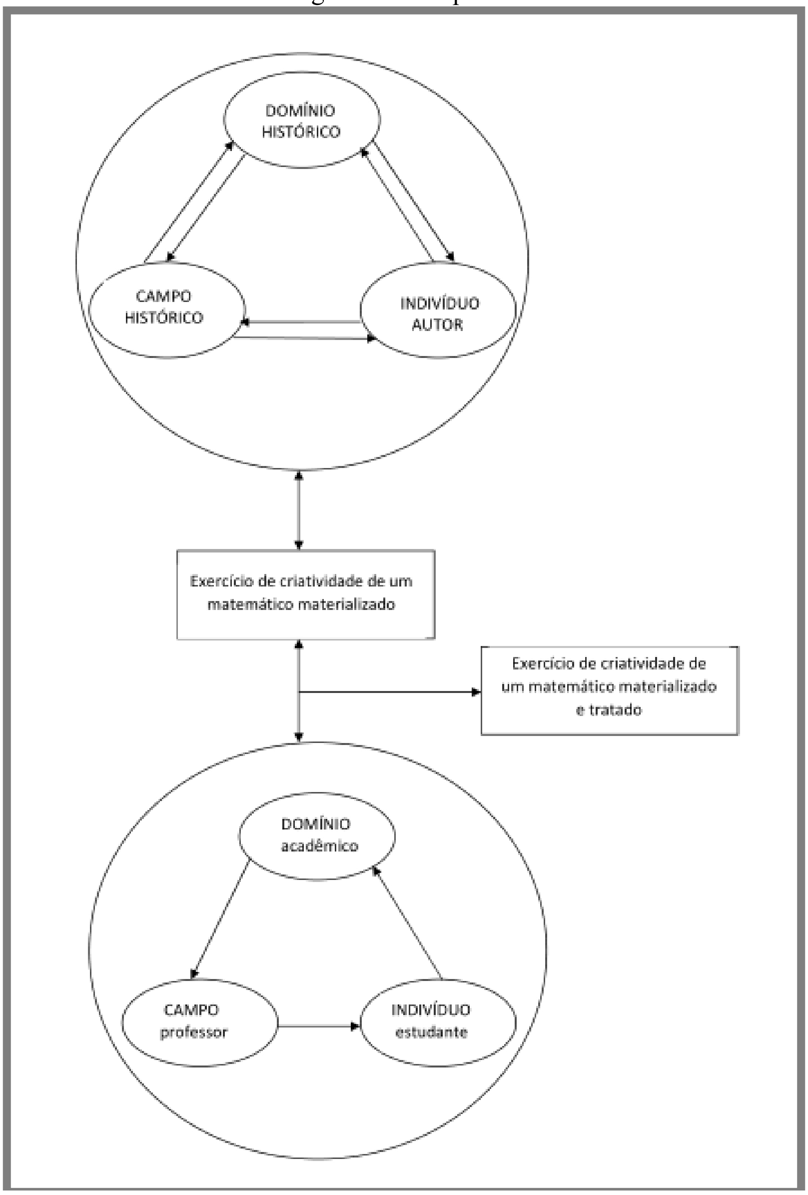
Uma forma do professor estabelecer esse ambiente em sala, com o uso de informações históricas, é que o material escolhido seja examinado pelo modelo de exame estabelecido por nós anteriormente.

O professor, que conhecendo o Domínio Acadêmico, examina a obra em busca de subsídios para uma abordagem pedagógica de conteúdos para serem utilizados em sala de aula. Isto é, ele constrói atividades e lança desafios, contribuindo, desta forma, para que o estudante possa conjecturar e melhor compreender os conteúdos de uma componente curricular, promovendo os processos de representação e abstração. Consequentemente, o estudante desenvolve processos cognitivos que lhe fornecem melhores condições de compreender as regras e procedimentos simbólicos do domínio acadêmico e é levado a refletir sobre suas próprias experiências matemáticas.

Outro ponto a destacar é que o professor, como parte do campo, gera condições no ambiente da sala de aula que podem favorecer ou inibir a produção criativa do aluno. Nesse sentido, destacamos que o estudante deve ser levado a compreender o seu papel como parte do desenvolvimento de sua aprendizagem e o professor é responsável por encorajar o aluno no uso de conhecimemtos prévios para a construção de um novo resultado.

O esquema descrito pela figura 13, a seguir, sintetiza essa discussão.

Figura 13 – Esquema



Fonte: Elaborado pela autora.

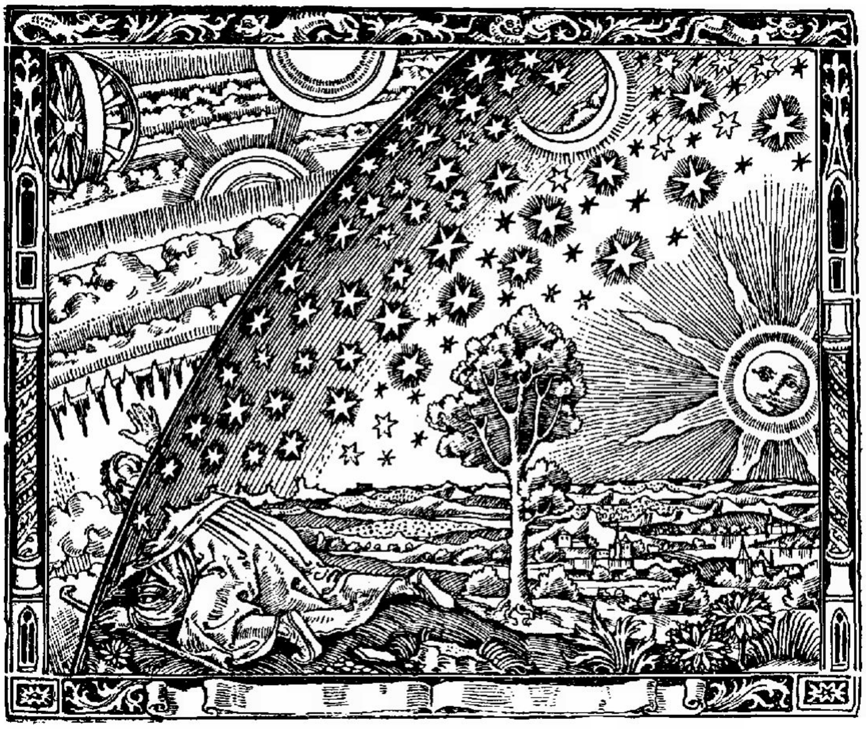
O material escolhido direciona o estudo da criatividade do autor. O Modelo de Sistemas de Criatividade de Csizentmihakyi contribui para que o professor possa melhor compreender a atividade criativa do autor, ganhando a possibilidade de enriquecer suas aulas, discutindo com seus alunos os aspectos sociais e culturais que sobressaíram desse estudo, estabelecendo assim uma integralização da Matemática aos contextos social e cultural de um período. Esse pensamento se alinha ao ponto de vista de Valdés (2006), quando assegura que a história deveria ser um potente auxiliar para alcançar o objetivo de demarcar temporalmente e espacialmente as grandes ideias, problemas, junto com a sua motivação, os seus precedentes; além de contribuir para desmistificar a visão individualista dada aos matemáticos que mudaram o domínio da Matemática acrescentando suas ideias criativas, declarados como gênios pela maioria das pessoas, ignorando dessa forma o papel exercido pelo trabalho coletivo de gerações e de grupos de matemáticos.

No próximo capítulo, faremos uma descrição de John Wallis (1616-1703), a personagem histórica principal que serviu de canal condutor de nossa pesquisa. Apresentamos sua produção científica e o contexto histórico-social em que ele estava inserido. Apontamos algumas contribuições dadas por de gerações anteriores a de Wallis tratavam dos infinitesimais.

3. JOHN WALLIS: UMA MENTE POLIVALENTE

Iniciamos este capítulo com um passeio que pretende ressaltar alguns aspectos acerca do contexto histórico-cultural da Europa da segunda metade do século XVI e primeira metade do século XVII. Neste sentido, particularmente tratamos da Inglaterra, país natal de nossa personagem principal, John Wallis. Também, abordarmos parte das diversas facetas dessa figura tão plural quanto foi John Wallis na Inglaterra do século XVII. Apresentamos uma breve biografia, mostrando como ele foi catalisador de importantes discussões e demandas de sua época. Traçamos um retrato de como Wallis foi influenciado pelos seus antecessores, e o quanto ele influenciou sua geração de maneira significativa e no seu modo de pensar sobre alguns problemas clássicos da Matemática. Damos, ainda, mostra de como ele foi um inovador no ensino de pessoas portadoras de problemas de audição e de fala. Além disso, retratamos um pouco da elevada capacidade de Wallis no labor de ensinar Matemática, e as implicações disso para as gerações posteriores.

Figura 14 - Xilogravura de Flammarion.[11]



Fonte: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k408619m/f168.item, acessado em 17/10/2016.

[11] A xilogravura de Flammarion é assim conhecida por ter sido usada no livro *L'atmosphère: Descrição des grands Phenomenes de la Nature* (A Atmosfera: Descrição de Grandes Fenômenos da Natureza) de Camille Flammarion, em 1888. Existem várias interpretações e utilizações desta imagem, uma delas é a representação de cosmologia medieval. A terra é plana, há uma calota celestial onde as estrelas estão. O homem ajoelhado movido pela curiosidade descobre um novo mundo por trás daquilo que ele já conhece.

3.1 A Inglaterra do Século XVII

Para compreendermos aspectos importantes à respeito da vida da obra de John Wallis, consideramos ser de fundamental importância apresentar fatos que contribuíram para a composição do cenário cultural da Inglaterra em meados do século XVII. O cenário cultural ao qual nos referimos é tecido por aspectos social, político, econômico, teológico e científico. Assim, procuraremos evidenciar os entrelaçamentos destes aspectos que influenciaram de forma explícita ou não, o percurso de John Wallis. Nosso fio condutor está baseado na pergunta: O que ajudou a criar uma atmosfera favorável à ciência na Inglaterra do século XVII? Esboçaremos algumas respostas a esta questão fundadas em trabalhos de História e Filosofia da Ciência.

A cultura ocidental viveu uma revolução epistemológica aproximadamente no século XV, que conduziu a uma transformação no modo de pensar do homem que havia sido desenhada pela filosofia da Antiguidade e da Idade Média. O que prevalecia era um modo metafísico de pensar, alicerçado por uma metodologia ontológica que procurava explicar as coisas pela sua essência[12]. O que passa a predominar é o modo científico de pensar as coisas, fundamentado por uma metodologia epistemológica que buscava conhecer o fenômeno. Se antes o sujeito se submetia ao objeto, essa nova forma de pensar os objetos desenvolve a racionalização do sujeito e este passa a dominar o objeto. Assinala Severino:

> A grande revolução cultural que deu início à época moderna é marcada assim, no plano filosófico, por um incisivo racionalismo e pelo naturalismo que se expressam: no âmbito econômico, pelo capitalismo; no âmbito religioso, pelo protestantismo; e no âmbito social, pelo individualismo burguês. (SEVERINO, 1992, p. 61)

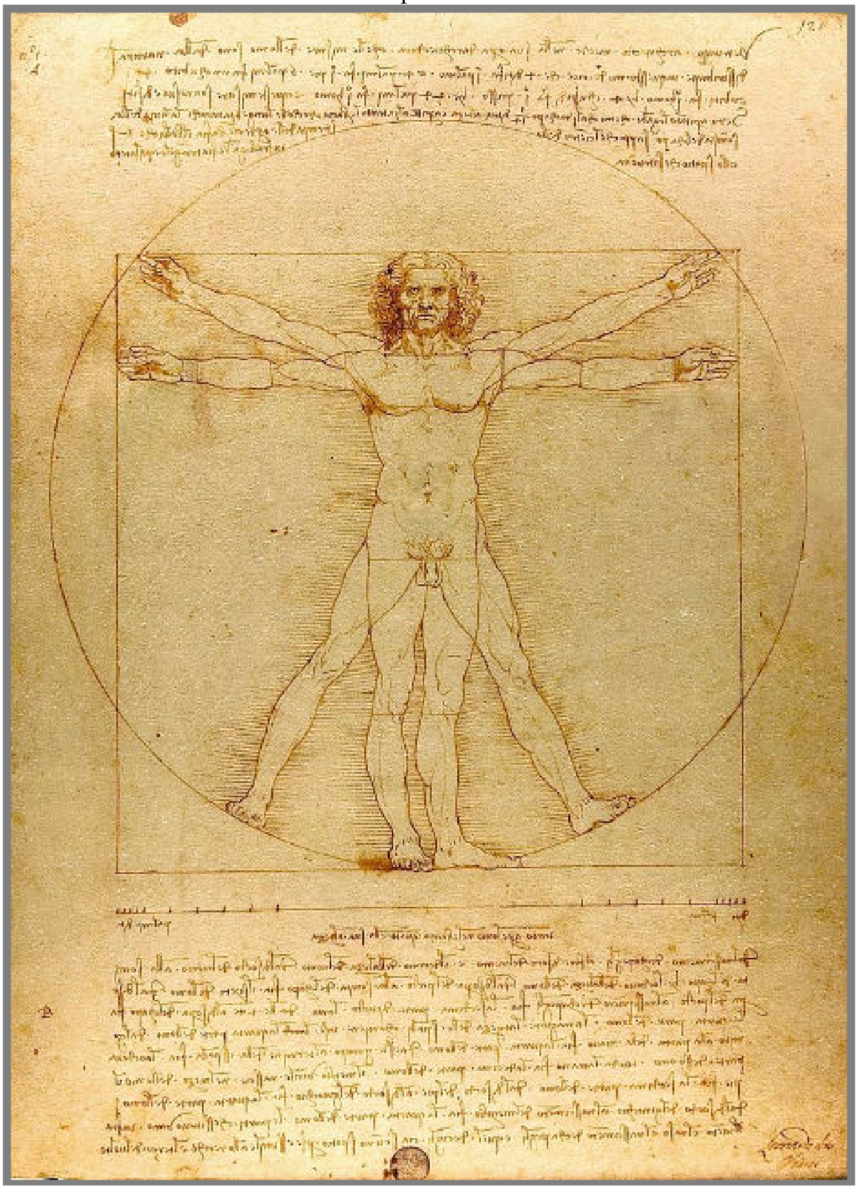
Na virada da Idade Média para a Idade Moderna, o ser mais importante de toda a realidade se altera, passando o homem a ocupar o lugar central e estrutural na ordem da existência real em detrimento de Deus. Isso acarreta a mesma mudança no centro de referência de toda a explicação filosófica passando o homem a ocupar esse lugar.

> O *Homem Virtruviano*, pintado por Leonardo da Vinci em 1490, exprime a relação do humanismo com os clássicos da Antiguidade. O quadro é baseado na obra do arquiteto romano Vitrúvio, do século I a.E.C., que já tentara encaixar as

[12] Essência é o núcleo básico, conjunto de todas as características que fazem com que uma coisa seja o que ela é; é o que define e especifica a natureza dessa coisa. A essência de um ser é aquilo que é fundamental e imprescindível para que ele seja o que é, em sua especificidade e identidade, distinto de outros seres. (SEVERINO, 1992, p. 76)

> proporções do corpo humano dentro da figura de um quadrado e um círculo, mas seus desenhos haviam ficado imperfeitos. Leonardo pintou esse encaixe dentro dos padrões matemáticos esperados, ou seja, seguindo proporções harmônicas do corpo humano (ROQUE, 2012, p.289).

Figura 15 - Homem Vitruviamo de Leonardo da Vinci, desenho que representa o antropocentrimo.



Fonte: Google imagens, acessado em 17/10/2016.

A relação do humanismo com os clássicos da Antiguidade tem relação com uma releitura dos clássicos da cultura grega e romana, incorporando uma reformulação voltada a uma valorização do homem e de suas capacidades, além de destacar o mundo natural em que esse homem vive. A ciência, um novo conhecimento, diferente do metafísico, foi ganhando espaço. A razão não conseguia atingir a essência dos objetos, mas ela conseguia atingir os fenômenos dos mesmos.

Novas atitudes dos pensadores, que simultaneamente eram teóricas e práticas, geraram novas explicações sobre diversas questões da natureza. Em 1543, Copérnico publica o seu *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, onde apresenta um novo modelo alternativo ao modelo Ptolomaico. Neste modelo heliocêntrico, Copérnico introduz novos problemas que viriam a canalizar, por um período de aproximadamente 150 anos, as atenções dos astrônomos e filósofos da época. Pesquisadores que trabalhavam fora das universidades, como, por exemplo, Galileu e Kepler filiam-se a essa nova ordem, onde se desenvolviam vários conhecimentos experimentais, com impacto na Matemática.

Esse novo conhecimento despertou grandes avanços no campo teórico, gerando maior abrangência do caráter explicativo. Já no campo prático, o novo conhecimento incentivou uma reformulação e ampliação no plano técnico. Isso permitiu ao Ser Humano arquitetar e construir novos instrumentos que capacitaram o alargamento do manuseio da natureza. Fatores como o mercantilismo e colonialismo na Europa aqueceram a economia e motivaram embates entre os países em busca da manutenção de suas colônias. A nova astronomia é um elemento preponderante para os países que desejavam ter êxito nas navegações. Esse quadro promoveu um espaço fecundo que favoreceu inventos e descobertas no campo tecnológico.

No campo da ciência, as pessoas, como grupo de pensadores apresentaram uma nova perspectiva de representação do mundo acarretando mudanças no campo filosófico, os filósofos modernos são instigados a encontrar novas formas de exercer a reflexão filosófica. O mundo ocidental realiza simultaneamente dois grandes feitos inaugura a ciência como uma nova forma de conhecimento e transforma o modo de se orientar a reflexão filosófica.

O aumento do domínio industrial na sociedade e a reforma protestante fazem parte do início do movimento em que são formulados novos corpos de ideias, contrapondo-se àqueles anteriormente aceitos. Copérnico, Paracelso e Lutero foram contemporâneos, isto ilustra que esse novo corpo de ideias não ficou restrito ao campo da ciência, mas abrangeu também o campo religioso.

Com a imprensa, recém inventada, os saberes passam a ser mais amplamente divulgados. O conhecimento científico e tecnológico ganhara, então, circulação em uma literatura baseada na experiência dos artesãos, dos práticos e dos viajantes escrita em vernáculo (ROQUE, 2002, p. 296), alastrando-se entre pessoas que não estavam ligadas às universidades.

Essas transformações, também, atingiram a Inglaterra e juntamente com vários outros aspectos que se entrelaçaram nesse cenário compuseram um período de profundas mudanças nas esferas social, política e econômica desta nação. Durante o século XVII, uma sociedade e um Estado inglês modernos começaram a tomar forma, e a posição da Inglaterra perante o mundo mudou. A primeira metade do século XVII inglês foi marcada por insatisfações sociais refletida principalmente pelo levante da burguesia contra o regime de monarquia absolutista. O processo revolucionário conhecido como Revolução Inglesa teve o seu início em 1640 com a revolução Puritana e terminou com a revolução Gloriosa em 1688. Esse movimento teve o seu apogeu na Guerra Civil[13] entre os anos de 1642 e 1651; movida contra o rei e onde os bispos e a Câmara dos Lordes foram abolidos.

Mas de onde surgiram ideias tão revolucionárias que puseram os homens em ação e acabaram por motivar a única decapitação de um rei da Inglaterra? Essas ideias contribuíram para o desenvolvimento da ciência na Inglaterra?

Respostas à primeira das questões mencionadas anteriormente foram propostas por Christopher Hill, em seus estudos sobre a Inglaterra seiscentista ele aponta uma estreita relação entre o crescimento do puritanismo e o desenvolvimento da ciência. No livro Origens Intelectuais da Revolução Inglesa, Hill (1992) destaca uma separação de ideias entre as Universidades, particularmente Cambridge e Oxford, associadas ao papismo e à monarquia, cujo ensino era predominantemente à moda escolástica; e o *Gresham College*[14], cujo ensino era voltado a uma ciência utilitária voltada a artesãos, marinheiros construtores, etc. A figura de Francis Bacon, permeia sua argumentação como um dos principais orientadores de uma atitude científica que acabou por definir um método científico que influenciou os cientistas e filósofos ingleses do século XVII e repercute até os dias atuais.

O pensamento inglês era influenciado principalmente pela Igreja da Inglaterra (anglicana), com orientação em meio o catolicismo e o protestantismo. O papismo era visto pela maioria dos ingleses como contra os interesses da nação, era temido por estar associado ao perigo de intervenção estrangeira. Os ingleses que almejavam uma reforma mais profunda da Igreja Anglicana se organizaram como puritanos e estes, segundo Hill (1992), atraíram e coordenaram pessoas das classes anônimas e sem privilégios do campo e

[13] O interessado em uma visão geral sobre a Guerra Civil inglesa pode assistir o filme *Morte ao Rei* (título original: To Kill a King), Países de produção: Alemanha e Inglaterra, diretor: Mike Barker, ano de produção: 2003.

[14] Instituição de ensino superior de Londres fundada em 1597, por Sir Thomas Gresham, importante comerciante londrino. *Gresham College* é considerada crucial no movimento de criação da *Royal Society*.

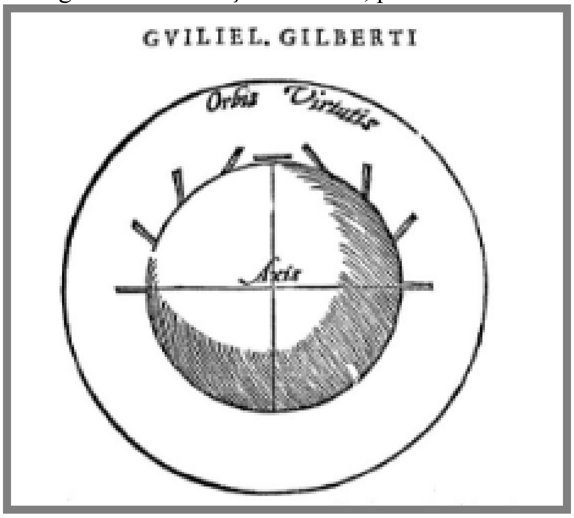
da cidade (mercadores, comerciantes, artesãos e pequenos proprietários rurais) que fomentaram e compuseram a força militar na guerra vitoriosa dos parlamentaristas contra o rei. O Parlamento inglês do século XVII "era um corpo conservador que representava as classes proprietárias de terras e de bens [...] era um corpo deliberativo que permitia um grau sem precedentes de divergências, debate e livre expressão de ideias" (ALEXANDER, 2016, p. 324) a maior parte do Parlamento era constituído por puritanos. Então, o espírito dos homens para a revolução foi preparado em parte pelas ideias do puritanismo.

Havia nesse tempo um enfrentamento entre os partidários dos modernos representando a ciência e os antigos, representando a escolástica. O primeiro grupo tinha a tendência de uma libertação dos pensamentos dos antigos que eram tradicionalmente aceitos, e o segundo acreditava ser impossível aperfeiçoar a sabedoria da Antiguidade Clássica. Nesse embate o espírito novo venceu. Ideias de intelectuais, como o cientista e filósofo Francis Bacon (1561-1626), foram uma das engrenagens do motor que transformou profundamente a Inglaterra neste período. Sua obra principal, publicada em 1620, recebeu o nome de *Novum Organum,* fazendo uma alusão à obra *Organon* de Aristoteles; nela Bacon explicitou sua crítica à lógica aristotélica e indicou "a necessidade de se fundar um novo método para interpretar a natureza" (ROQUE, 202, p. 314).

A proposta do cientista e filósofo britânico Francis Bacon abria terreno para um novo sistema para se investigar o mundo, o método estabelecido por ele, para a condução das experiências cientificas, era fundado nos experimentos e na observação. Bacon assumiu que as ideias que levam ao conhecimento possível e válido eram oriundas das impressões sensíveis. O ponto principal do conjunto de pensamentos de Bacon era assentado nas descobertas científicas voltada às aplicações práticas. Essas ideias influenciaram os cientistas revolucionando suas práticas científicas. Um espírito de aventura parecia ser despertado na mente dos homens, instigando-os a explorar os vastos campos do conhecimento.

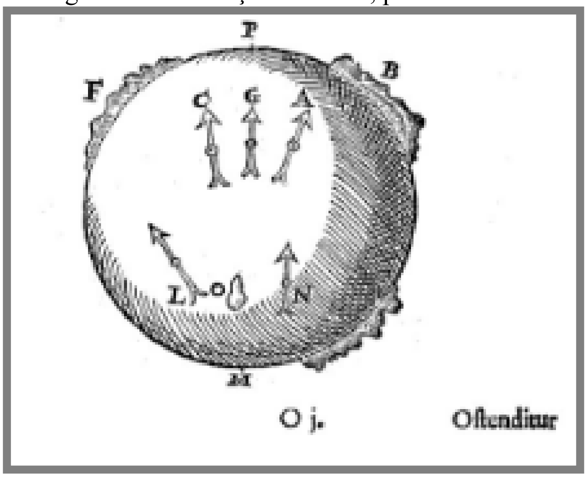
O físico e médico inglês, Willian Gilbert (1544-1603) em seu principal trabalho, intitulado *De Magnete, Magneticisque Corporibus, et de Magno Magnete Tellure* e publicado em 1600, descreve de forma rigorosa suas experiências que o levaram a concluir que a Terra é magnética e esse era o motivo pelo qual a agulha das bússolas sempre apontavam para o norte, contrariando a ideia de isso se devia à posição da estrela Polar. Figuras 16 e 17. Seus estudos foram importantes para a época, pois os europeus estavam fazendo longas viagens pelos oceanos e a bússola era um instrumento de grande utilidade.

Figura 16 - Ilustração da Terra, por de Gilbert.



Fonte: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k33585/f94.item.r=William%20Gilbert, acessado em 17/10/2016.

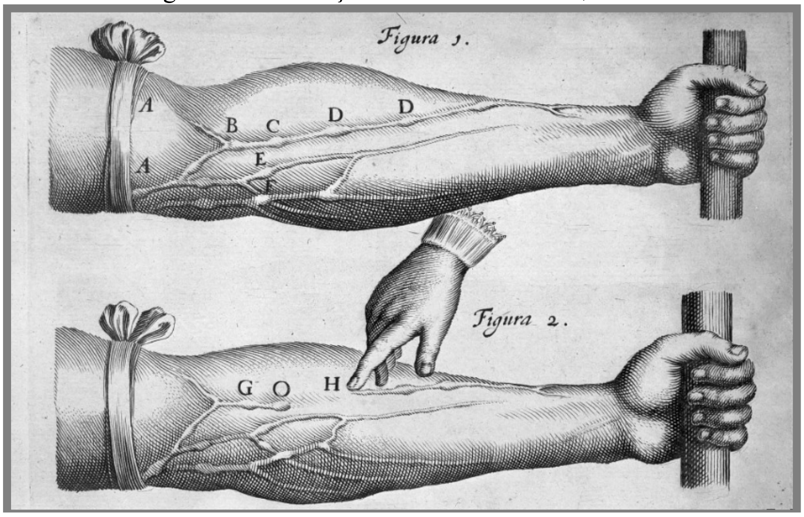
Figura 17 - Ilustração da Terra, por de Gilbert.



Fonte: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k33585/f175.item.r=William%20Gilbert, acessado em a17/10/2016.

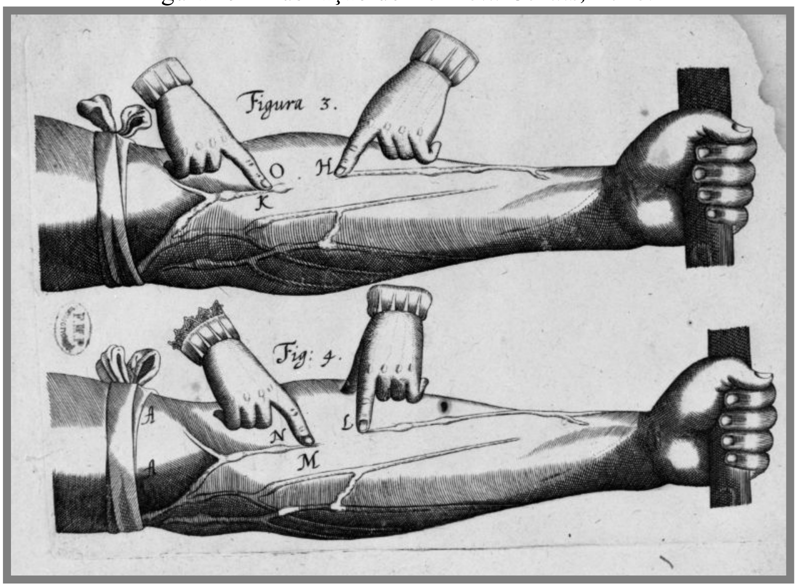
Outro exemplo, é o médico britânico Wiliam Harvey (1578-1657) que usava técnicas empíricas para explorar o corpo humano. E a sua obra *De Motu Cordis et sanguinis in animalibus,* publicado em 1628, contém a primeira explicação acurada sobre a circulação sanguínea, a figura 18 é uma ilustração que mostra uma das técnicas utilizadas por Harvey para o estudo da sirculação sanguínea. Essa descoberta só ganhou proeminência depois de 1640 como observado por Hill (2011). Observe no detelhe das figuras 18 e 19 a utilização de um torniquete para a retenção do sangue no antebraço, tornando possível uma melhor observação.

Figura 18 - Ilustração de *De Motu Cordis, 1628.*



Fonte: http://www.biusante.parisdescartes.fr/histoire/images/index.php?refphot=08778, acesso em: 17/10/2016.

Figura 19 - Ilustração de *De Motu Cordis, 1628.*



Fonte: http://www.biusante.parisdescartes.fr/histoire/images/index.php?refphot=01073, acesso em: 17/10/2016.

Para uma melhor compreensão da relação do protestantismo com a ciência, essencial para o futuro progresso da ciência, Hill (p. 126) destaca que uma tendência do pensamento protestante a partir de Lutero "equiparava a caridade às obras realizadas com o propósito de beneficiar a comunidade ou a humanidade" e que

> Ao atacar a separação acadêmica entre teoria e prática, ele [Bacon] enfatizava que na "filosofia natural, os resultados práticos não são apenas o meio de *aperfeiçoar o bem-estar do homem*. São também garantia da verdade [...]. A ciência também deve ser conhecida por suas obras. É pelo testemunho das obras, e não pela lógica, ou mesmo pela observação, que a verdade é revelada e estabelecida. Decorre daí que o *aperfeiçoamento do destino humano e o*

> *aperfeiçoamento da inteligência humana são a mesma coisa*". A prática, Bacon não se cansava de repetir, é a única forma de comprovação da verdade; "se o conhecimento é possível ou não, é algo que deve ser estabelecido não pelos argumentos, mas pela experiência"[...](HILL, p. 129).

Os mercadores tiveram papel fundamental na disseminação da educação na Inglaterra, eles fundaram escolas para libertar a educação do controle clerical e com isso atingiram os ingleses de classe média que buscavam se alfabetizar para ler a Bíblia. Mas muito mais foi alcançado além deste propósito. Nessas escolas os cientistas eruditos passaram a escrever para técnicos sobre a construção de instrumentos e a explicar como utilizar os conhecimentos tornando-os de utilidade prática. Uma dessas escolas foi a *Gresham College*, onde eram abordados assuntos ligados à vida cotidiana.

Por exemplo, Edward Wright (1558-1615) após viagens marítimas em 1589, explicou teoricamente o método de fazer mapas com base na projeção de Mercator, estabelecendo-a como uma aplicação prática para os navegadores. Henry Briggs (1561-1630) percebeu a importância dos logaritmos de Napier no Gresham College e foi responsável pela sua divulgação. Em 1616 a publicação da tradução do latim para o inglês, iniciada por Wright e terminada por Briggs, de uma das obras de Napier sobre logaritmos com o título *A description of Admirable table of logarithmes* foi dedicada à Companhia das Índias Orientais e popularizou o uso de logaritmos por navegantes e agrimensores. O modelo de navegação empírica foi substituído por um modelo de navegação científica e confirmou a supremacia dos ingleses na teoria e prática da arte da navegação, este fato representou a glorificação da integração que era observada entre os conhecimentos teóricos e seu uso prático.

A Igreja Católica Apostólica Romana criou um mecanismo com o objetivo de evitar o progresso do protestantismo, as publicações que versavam sobre teorias que a Igreja não apoiasse entravam para o *Index Librorum Prohibitorum* (Índice dos livros proibidos). Vários pensadores tiveram obras inseridas no Index, Galileu Galilei, Nicolau Copérnico, Giordano Bruno, Thomas Hobbes, René Descartes entre outros. Para promover a luta contra o papismo, Sir Thomas Bodley (1545-1613) que foi um diplomata e estudioso, fundou sua própria biblioteca em 1602, hoje conhecida como a *Bodleian Library* localizada em Oxford. Mais do que exercer sobre Oxford uma influência anticatólica a biblioteca bodleiana realizou uma importante ação para o desenvolvimento da ciência. O primeiro bibliotecário da Bodleian, Thomas James (1573-1629), usou o Index Romano como uma lista de sugestões de livros a serem adquiridos, em suas palavras, "para que possamos saber quais os livros e edições comprar, uma vez que a proibição dos mesmos representa uma excelente orientação a esse respeito" (HILL, 1992, p. 39). Obras de Copérnico, Paracelso, Vesálio e Mercator estavam ao lado de obras de grandes filósofos e teólogos. Em 1610, Bodley acertou um contrato com a *Stationers' Company of London*[15] em que cada livro publicado na Inglaterra deveria ter uma cópia depositada na nova biblioteca, isso tornou o acervo em crescente expansão.

O palco de grandes avanços na ciência até o inicio de século XVII na Inglaterra foi Londres, pessoas interessadas em ciência estabeleciam-se na capital. Entretanto, com a intenção de desenvolver a ciência em Oxford, Sir Henry Savile (1549-1622) fundou as posições de *Savilian Geometry Professor* e *Savilian Astronomy Professor*. No documento de instituição das duas cadeiras, Sir Henry Savile declarou que "a geometria é quase inteiramente desconhecida e relegada a segundo plano na Inglaterra" (HILL, 1992, p. 76). O primeiro a ocupar a cadeira de Geometria foi Henry Briggs que permaneceu na posição até o ano de sua morte em 1631. Seus trabalhos em astronomia, navegação e geografia apontaram para o uso prático da Matemática, sua obra mais importante foi e Briggs foi *Arithmetica Logarithmia*, na qual ele, além de calcular o logaritmo dos números de 1 a 20.000 e de 90.001 a 100.000 com quatorze casa decimais, ele descreveu e explicou o seu método de cálculo. O fato de um cientista como Briggs assumir tal posição, retrata ainda mais o avanço de temas modernos sobre os antigos.

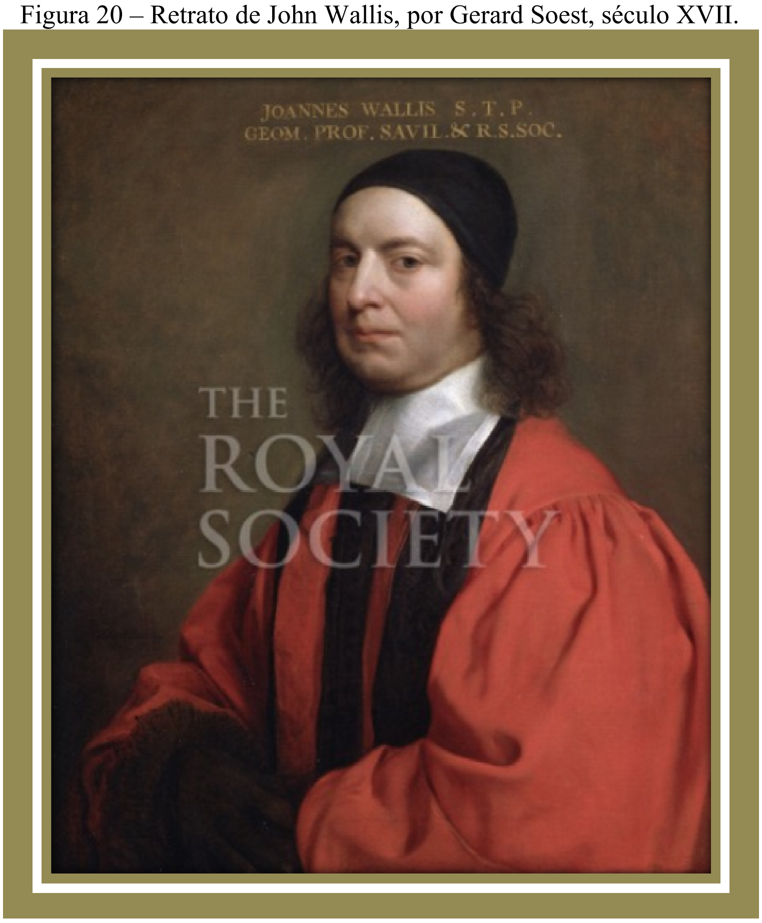
Em conformidade com a proposição de Hill, o método de Bacon realizou feitos, que atingiram as várias esferas da cultura inglesa, "ofereceu um programa cooperativo e um senso de propósito aos mercadores, artesãos e filósofos" e cientistas, o que assegurou um intercâmbio de ideias, fomentou a cooperação e confiança mútua e amplificou o respeito pelo trabalho dos artesãos; estabeleceu "que a investigação científica não só não entrava em conflito com a teologia como era positivamente virtuosa", esse fato foi importantíssimo para conquistar o apoio dos parlamentares puritanos; e, fez com que o "pensamento científico não apenas alcançasse dignidade social, mas também a força de um sistema filosófico", o que acabou por desencadear o distanciamento do pensamento científico de ideias fundadas na magia e alquimia. A figura de Bacon é central na Revolução Científica, cujos escritos viabilizaram o crescimento e a expansão da ciência, particularmente a ciência inglesa.

[15] *Stationers' Company of London* foi uma empresa reguladora fundada em 1557, associada à indústria editorial.

A Itália era considerada o país da tradição Matemática, com vários geômetras reconhecidos por seus trabalhos, mas houve um declínio italiano acentuado na segunda metade do século XVII, com causas nos âmbitos político, econômico, intelectual e religioso, mas não é de nosso interesse esmiuçar essa história[16]. Queremos salientar que o desenvolvimento da Matemática ocidental passa a ter relevo nos países mais ao Norte da Europa, como França, Países Baixos e Inglaterra. Para nosso estudo, vamos voltar nossa atenção particularmente para o matemático inglês John Wallis.

3.2 John Wallis em seu Tempo e Espaço

Figura 20 – Retrato de John Wallis, por Gerard Soest, século XVII.



Fonte: https://pictures.royalsociety.org/image-rs-9752, acessado em 17/10/2016.

John Wallis nasceu em 23 de novembro de 1616, em Ashford no condado de Kent na Inglaterra, em um período de profundas mudanças políticas neste país. Seu pai, Reverendo John Wallis, foi reverendo de Ashford, no fim do reinado da Rainha Elizabeth e

[16] Uma explanação sobre esse assunto pode ser encontrado em Amir (2016): *Infinitesimal a Teoria matemática que mudou o mundo*, 2016.

início do reinado do Rei James, ele foi um homem de grande estima e reputação e em seu serviço foi um eminente e poderoso pregador, líder em sua comunidade. Em sua autobiografia datada de 1698, John Wallis escreveu após 76 anos do falecimento de seu pai que a morte dele foi "muito lamentada; e deixou uma boa memória, que ainda não foi extinta". Sua mãe, Joanna Chapman, era filha e herdeira de um eminente comerciante de Londres, enviuvou em 1622, ela se tornou responsável pelos cuidados educação dos cinco filhos, dois mais velhos e dois mais novos que Wallis, que nesta época tinha apenas seis anos. No ano de 1625 houve uma grande praga em Londres e outras localidades, particularmente em Ashord, o que fez com que muitos habitantes se mudassem de lá. Wallis foi enviado para uma escola privada de Tenterden, mantida pelo cavalheiro Finch, cujos alunos eram filhos de famílias abastadas da região. Lá recebeu instruções equiparadas a de grandes escolas da Inglaterra. Aprendeu técnicas da gramática de modo a compreender suas regras e as razões para tais regras, diz Wallis em sua autobiografia "com a utilização dos mesmos autores que são normalmente lidos em escolas de gramática".

No final de 1630, sua mãe resistiu em enviá-lo para o exterior com o seu tutor e outros jovens cavalheiros que viajariam para a França e a Itália. Wallis foi encaminhado para uma escola em Felsted, em Essex, onde aprofundou seus estudos em latim e grego; e aprendeu um pouco de hebraico. No Natal de 1631, na casa de sua mãe em Ashord, Wallis encontra o seu irmão mais novo e, movido por sua curiosidade, ele aprende "em cerca de 8 ou 12 dias" a "escrever em cifras" e a operações comuns no comércio, 'adição, subtração, multiplicação, divisão e regra de três". Em sua autobiografia Wallis declara que foi seu primeiro contato com a Matemática. Todavia,

> A Matemática que Wallis descobriu não tinha nenhuma geometria, era só a aritmética e a álgebra rudimentares de contabilidade. Não havia teoremas nem provas nesse tipo de Matemática e nenhum sopro das grandiosas afirmações filosóficas enunciadas em nome da geometria euclideana (ALEXANDER, 2016, p. 262).

Essa Matemática era uma ferramenta prática e útil para comerciantes e marinheiros resolverem problemas com que deparavam.

Ele busca aprofundar-se nos conhecimentos matemáticos, em seu colégio dos quase duzentos alunos Wallis diz que talvez "não existissem dois que conheciam de Matemática mais do que ele" e que o "estudo de Matemática neste tempo, estava mais cultivado em Londres do que nas universidades". A Matemática naquela época era um instrumental principalmente para mecânicos e comerciantes. O domínio da escolástica tinha afrouxado, mas para jovens cuja reputação estava sendo formada, era exigido proficiência particularmente em retórica e lógica, e a essas atividades Wallis dirigiu sua atenção.

Wallis foi enviado para a universidade de Cambrigde no final de 1632 e admitido no Emannuel College, onde sua orientação principal foi para a Lógica e ele se tornou um perito em silogismo, desenvolvendo uma boa habilidade de contestar e defender. Seguindo o curso normal imposto para a educação na época, ele estudou ética e metafísica. As fronteiras prescritas pela tradição foram ultrapassadas por Wallis, ele estudou anatomia e foi o "o primeiro dos alunos do professor [Glisson] a manter um debate público sobre a doutrina da circulação do sangue" (SCOTT, 1981, p.4) expondo o seu lado debatedor.

Formou-se Bacharel em Artes em 1636 e quatro anos mais tarde lhe foi concedido o grau de Mestre. Atuou por um curto período de tempo no Queen's College; e apesar de sua simpatia pela Matemática, seu interesse principal estava ligado ao campo da teologia, em 1640 foi ordenado e nomeado capelão de Buttercrambe um distrito de Yorkshire em 1642, tornou-se o capelão privado de Lady Vere, neste período ele colocou em prática sua extraordinária habilidade de decodificador quando decodificou uma carta mostrada por Sir William Waller um general do parlamentarismo em um jantar. Naquela mesma noite, antes de ir dormir Wallis decifrou a carta (SCOTT, 1981, p. 37). Após este episódio, Wallis usou habilidades em criptografia na decodificação de várias mensagens para os parlamentaristas, grupo ao qual era alinhado. A esse respeito, surgiram várias correspondências com pedidos de seus correspondentes para que Wallis revelasse suas técnicas de decodificação, algumas das suas respostas apresentam pistas de como ele procedia. Por causa de seus esforços em nome dos parlamentaristas, além de sua marcante formação religiosa, ele foi designado Capelão da igreja de *St. Gabriel's* de Londres, em 1643.

Em 1644, casou com Susanna e tem cinco filhos dos quais dois morreram enquanto crianças. Neste mesmo ano, Wallis foi nomeado secretário da Assembleia de Teólogos de Westminster, esta Assembléia foi convocada pelo Parlamento "e encarregava-se de apresentar um plano para substituir a estabelecida Igreja da Inglaterra por uma ou mais igrejas novas" (HILL, 2016, p. 266). Em 1645, Wallis vivia em Londres e neste período ele teve a oportunidade de ampliar o seu círculo de amizades e foi familiarizado na *Nova Filosofia*. Ele passou a freqüentar encontros semanais informais de um grupo de intelectuais para discutir e tratar assuntos sobre essa nova filosofia, além de questões de teologia e relações de Estado; entre os membros deste grupo estavam John Wilkins, Robert Boyle, Crhistofer Wren, Robert Hooke. Dentre os vários assuntos abordados nestas reuniões, Wallis destacou a circulação do sangue, a hipótese de Copérnico, a natureza dos cometas e estrelas novas, melhoria dos telescópios, peso do ar, Experimento de Torricelli (SCOTT, 1981, p. 40).

Os presbiterianos eram a maioria dos parlamentaristas aos poucos foi substituindo suas posições radicais, do início da guerra contra o rei, por posições mais amenas e a carreira de Wallis seguiu essa tendência, "em 1948, ele assinou um pedido ao exército para proteger a vida do rei, um ato honrado que não contribuiu em nada para salvar o soberano da execução", pouco depois Wallis e um grupo de pastores londrinos, assinaram uma representação[17] protestando contra a expulsão de membros do parlamento considerados moderados demais (ALEXANDER, 2016, p. 267). Essa atitude deixou Wallis em situação difícil na capital Londres sem conseguir muito patrocínio, o clima político tinha se voltado contra os presbiterianos que agora era uma força deteriorada.

Mas o nosso matemático teve a oportunidade de sair dessa situação em grande estilo. Anthony Woods, um grande estudioso da Antiguidade e contemporâneo de Wallis, declarou que a boa relação entre Martin Holdbeach, que tinha uma alta opinião sobre Wallis, e Oliver Cromwell[18], foi um dos pontos que levou o nosso matemático a ser nomeado *Savilian Professor of Geometry* em Oxford (ALEXANDER, 2016, p. 269). Sendo o terceiro a ocupar tal cadeira, Henry Briggs ocupou a posição da sua criação em 1619 até o ano de sua morte em 1631, Peter Tuner foi nomeado em 1631 e foi afastado da função pelos parlamentares em 1648. Wallis não tinha histórico de publicar nem lecionar Matemática, até então, ele tinha estudado o livro *Clavis mathematicae*, de William Oughtred e escrito um tratado sobre seções angulares[19] (SCOTT, 1981, p. 13) A Matemática, que até então, tinha sido uma diversão agradável, agora tomaria conotações de um estudo sério, disse Wallis em sua autobiografia (SCRIBA, 1970, p. 40). Wallis parecia não ter credenciais matemáticas para assumir tal posição, mas

> foi designado por razões políticas, nem mais nem menos, e é seguro dizer que ninguém esperava que ele se tornasse um matemático sério. Hoje, é um mistério para nós como alguém com tão pouco a recomendá-lo obteve uma posição de tal importância, mas Wallis não deixava de ser um empreendedor. Apenas alguns anos após deixar Cambridge, ele conseguira colocar-se no centro da política nacional, tornando-se secretário da Assembleia dos Sacerdotes de Westminister. Agora quando todas as vias de progresso pareciam estar fechadas, realizou o

[17] Pride´s Purge (Expurgo do Orgulho). O título completo da representação: *A serious and faithful representation of the judgements of Ministers of the gospel within the Province of London, contained in a letther from them to theGeneral and his Counsel of War, delivered to his Excellency by some of the subscribers, January 18, 1649.*

[18] Oliver Cromwell foi um general ligado ao parlamento na Guerra Civil inglesa. Após a decapitação do Rei Carlos I em 1649, ele foi declarado lorde protetor da Inglaterra pela nova constituição.

[19] *A Treatise of Angular Sections* só foi publicada em 1685.

> feito de ganhar o mais almejado posto de matemático do país. (ALEXANDER, 2016, p. 268)

Ele permaneceu no cargo de *Savilian Professor of Geometry* em Oxford até a sua morte em 1703. Nos anos de 1648 e 1649 alguns integrantes do grupo foram enviados para outras cidades, os remanescentes em Londres continuaram seus encontros.

Wallis, removido para Oxford junto de outros intelectuais, continuou com as reuniões sobre a *nova filosofia* e nas ocasiões em que teve oportunidade de estar em Londres se reunia com o grupo da capital. Em 1660, após a restauração da monarquia, houve a adesão de outros intelectuais ao grupo de Londres, o grupo de Wallis em Oxford foi um desses, e fundou-se a *Royal Society of London*.

Figura 21 - Frontispício do livro de Thomas Sprat de 1667.

Fonte: https://pictures.royalsociety.org/image-rs-3782, acesso em: 20/07/2016.

Até hoje, essa organização está entre as mais importantes instituições científicas do mundo. A figura 21 é o Frontispício do livro *The History of the Royal Society* de Thomas Sprat de 1667, o busto central é do patrono da sociedade, o rei Charles II, o primeiro presidente William Brouncker está à esquerda e à direita temos a figura de Francis Bacon.

Mesmo imerso em um contexto conturbado, seu espírito investigativo, nutrido por sua curiosidade, o levou a explorar várias áreas do conhecimento tais como, Matemática, som, filologia, fenômenos das marés e música. Seus escritos sobre estes temas revelam um profundo conhecimento resultante de incansáveis investigações. Seu domínio de múltiplas línguas como inglês, latim, grego e hebraico (SCRIBA, 1970) o levou a ter acesso a trabalhos de vários pensadores contemporâneos e predecessores. Isso deu a ele a possibilidade de alcançar inúmeros pensamentos presentes em trabalhos antigos e de povos diversos, o que justifica, em parte, tantas ideias inovadoras presentes nas suas obras. Wallis usou muito bem toda a Matemática disponível em sua época para dar um passo adiante.

Wallis relacionava-se não só com matemáticos, mas com muitos intelectuais e políticos de sua época, ele lançava mão das cartas como forma de comunicação. Os conteúdos dessas cartas versavam acerca de princípios filosóficos e científicos de trabalhos e experiências realizadas, bem como sobre suas reflexões teóricas sobre Matemática, filosofia e ciência em geral. Por acreditar que as cartas representavam um registro científico importante, ele chegou a publicar vários desses documentos na *The Philosophical Transactions of the Royal Society*[20], uma revista científica da *Royal Society* de Londres publicada desde 1665. Wallis foi um titã em meio a um grupo excepcional de intelectuais que na segunda metade do século XVII fez valiosas contribuições tanto na ciência quanto no progresso humano.

Foram várias as obras e trabalhos de Wallis, apresentamos uma lista de alguns desses trabalhos:

- Aritmética e Teoria dos números:
    1) *Mathesis Universalis* (*Opus Arithmeticum*) (1657)
    2) *Adversus Marci Meibomii De Proportionibus Dialogum* (1657)
    3) *Commercium epistolicum. De Quæstionibus quibusdam Mathematics habitum* (1658)

- Álgebra e Cálculo Analítico:
    1) *Arithmetica Infinitorum* (1656)
    2) *Treatise of Algebra* (1683/1685)
    3) *A Treatise of Combinations, Alternations and Aliquot Parts* (1685)
    4) *Epistolarum Quarundam Collectio, Rem Mathematicam Spectantium* (1699)

[20] É a segunda mais antiga revista de publicações científicas ainda em atuação, o primeiro número é datado de março de 1665, só perde para a revista francesa *Le Journal dês Savants* da Acadêmia Francesa de Ciências, cujo primeiro número é de janeiro de 1665.

- Geometria:
  1) *De Sectionibus Conicis. Nova Methodo Expositis* (1655)
  2) *Elenchus Geometriae Hobbianae* (1655)
  3) *De Cycloide et de Cissoide* (1659)
  4) *De Angulo Contactus et Semicirculi, Tractatus* (1656)
  5) *Hobbiani Puncti Dispunctio* (1657)
  6) *Cono-Cuneus* (1662)
  7) *De Postulato Quinto* (1663)
  8) *Hobbii Quadratura Circuli* (1669)
  9) *A Treatise of Angular Sections* (1685)
  10) *A Defence of the Angle of Contact* (1685)
  11) *Doutrine of Trigonometry* (1685)

- Mecânica:
  1) *Pars Prima* (1669)
  2*) Pars Secunda* (1670)
  3) *Pars Tertia* (1671)
  4) *De Gravitate ed Gravitatione Disquisitio Geometrica* (1674)

- Traduções:
  1) *Archimedis Syracusani Arenarius, et Dimensione Circuli* (1676)
  2) *Cludii Ptolemae Harmonicorum Libri Tres.* (1681/1682)
  3) *Aristarco-Pappo (Libro Secendo)* (1688)

- Astronomia:
  12) *Eclipsis solaris observatio* (1655)
  13) *De Aestu Maris Hypothesis Nova* (1666/1669)
  14) *Jeremiae Horrocii & Guilielmi Crabtree Observations Astronomicae* (1670)

- Música:
  Harmonica di Tolomeo e Connessi (1681/1682)

- Lógica:

1) *Truth Tried* (1643)
2) *Institutio Logicae* (1687)

- Línguas:
  1) *Grammatica Linguae Anglicanae* (1653)
  2) *Tractatus Grammatico-Physicus* (1653)

- Escritos Teológicos e Morais:
  1) *Commento Alla Lettera Paolina a Tito* (1654)
  2) *Questioni Teologiche* (1654)
  3) *Mens Sóbria Serio Commendata* (1656)
  4) *De Foedere Evangélico* (1661)
  5) *Interpretationes Numeri 666* (1667)
  6) *Resurrectio a Mortuis Coprobata* (1679)
  7) *Cypriani Computus* (1682)
  8) *De Sacra Trinitate* (1691)
  9) *De Melchizedeco. De Jobo. De Psalmorum Titulis* (1692)
  10) *Defensio Sabbati Christiani* (1692/1693)
  11) *De Paedo Baptismo Dissetatio* (1695/1696)

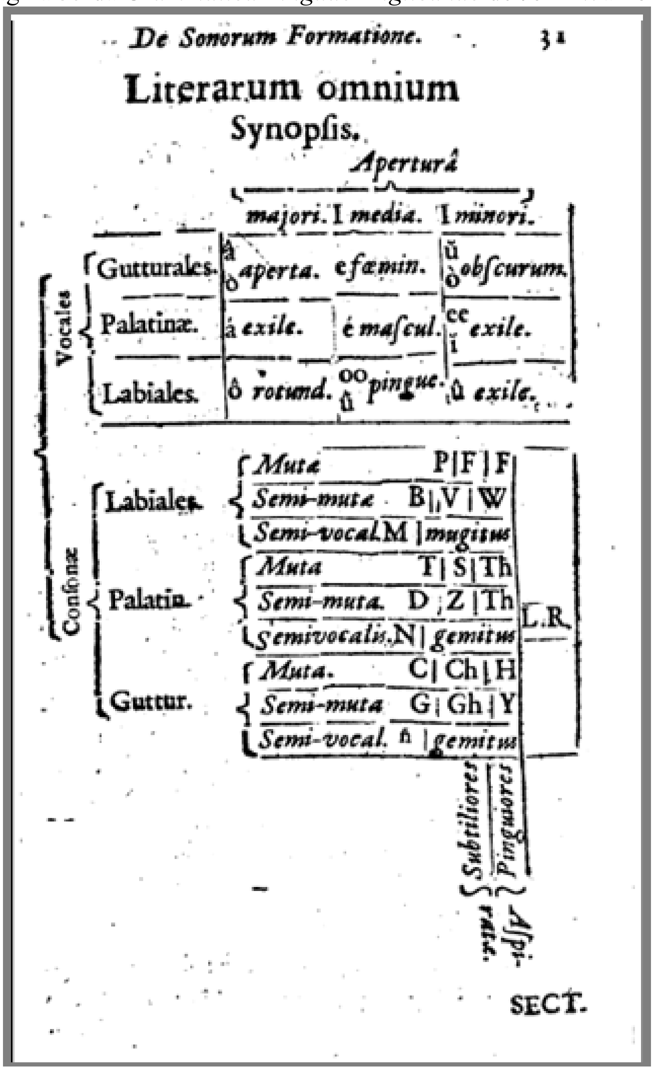
Vários outros trabalhos de Wallis foram publicados na revista *Philosofical Transactions* da *Royal Society.* E foram muitas as suas contribuições para o desenvolvimento da ciência. Veremos na próxima seção, um aspecto de seu trabalho que se mostrou como um grande desafio para Wallis, onde se pode notar sua habilidade como professor de indivíduos com deficiência de audição e de fala.

3.3 Contribuições de John Wallis para o Ensino de Matemática para Surdos

Nesta seção, abordaremos uma experiência realizada por Wallis na tentativa de ensinar uma criança surda a falar, ler e contar, considerando a necessidade da criança assumir lugar no contexto social em que vivia. Entre suas obras de cunho não matemático está incuido um livro sobre a etimologia e gramática, *Grammatica Linguae Anglicanae*, publicada na Universidade de Oxford, em 1653. Essa gramática foi um passo importante no conhecimento dos sons linguísticos, uma vez que a obra contém descrição e classificação dos modos como são feitas as articulações do aparelho fonador para a pronúncia fonética das letras e das palavras.

De acordo com estudiosos da obra, o livro descreve como o autor compreendia o funcionamento do sistema vocálico e em seguida propõe suas contribuições para o entendimento das línguas maternas. A figura 22 mostra uma das páginas do tratado *Grammatica Linguae Anglicanae*, de John Wallis sobre a fonética articulatória, onde enuncia os fonemas e suas implicações na fala e na compreensão da fala pela pronúncia das palavras.

Figura 22 - Página 35 da *Grammatica Linguae Anglicanae* de John Wallis data de 1653.



Fonte: https://books.google.com.br/books/reader?id=vKs14s0f8-cC&hl=pt-BR&printsec=frontcover&output=reader&pg=GBS.PA35, acesso em: 18/04/2015.

Embora, seu tratado *Grammatica Linguae Anglicanae* tenha centrado as atenções na articulação dos sons com vistas ao treinamento da fala ou da exploração dos sons da fala, nele Wallis reuniu informações mais esclarecedoras possíveis sobre esse assunto, para a época, pois percebia que os recursos propostos no tratado ofereciam possibilidades de solucionar, mesmo que parcialmente, as dificuldades de fala e de audição das pessoas, além de oferecer subsídios para a formulação e uso de uma linguagem baseada nos gestos.

Para Berthier (1840, p.18-20), John Wallis era, na época, um dos mais célebres professores da Universidade de Oxford, e o primeiro na Inglaterra, a se consagrar pela dedicação a uma obra de humanidade. Ele avançou bastante no estudo sobre essa temática muita além de seus antecessores, principalmente no que se refere à confiabilidade pedagógica do ensino planejado e realizado para a aprendizagem de surdos.

Um dos aspectos particulares do trabalho de Wallis foi sua face educativa, mais especificamente no que diz respeito ao ensino de Matemática para surdos. Os fatos relacionados a este tema ocorreram nos primeiros anos de fundação da *Royal Society* de Londres, após a restauração da Monarquia e ascensão do rei Carlos II. Os assuntos discutidos pelos intelectuais nas reuniões desta sociedade eram abordados com base nos fundamentos da *nova filosofia* e segundo Cram (2016, no perlo)[21], a questão era saber se era possível ensinar um menino que tinha nascido com surdez profunda a falar; ou, como alguém no século XVII teria dito: Pode-se ensinar o "surdo-mudo" a falar? Em consonância com os objetivos da recém formada *Royal Society*, esta questão foi formulada não simplesmente como uma questão especulativa e filosófica, mas como uma questão a ser investigada experimentalmente. Haviam dois membros eminentes da sociedade que assumiram este desafio, John Wallis e William Holder.

A criança mencionada nos documentos históricos localizados por nós tem como nome Alexander Popham. O menino nasceu surdo, e permaneceu sem falar até cerca de dez anos de idade. Era sobrinho de Alexander Popham que tinha um alto cargo político e foi membro da Câmara dos Comuns da Inglaterra. Uma questão levantada é: por que ensiná-lo a falar? Comentadores sobre tal fato argumentam que na época os surdos-mudos (como eram denominados naquela época) não poderiam ser beneficiários de heranças (Blackstone, 1765-1769)[22] e, em virtude dos interesses de alguns grupos familiares e

[21] O referido artigo é intitulado "John Wallis on Teaching Language to the Deaf" e segundo o professor David Cram, autor deste artigo, "*To appear in Blityri, the recently-established Italian journal devoted to the history of linguistic theory*" (a aparecer na Blityri, o recém criado jornal italiano dedicado à história da teoria lingüística). Este artigo é uma versão de uma palestra proferida pelo autor na *Royal Society* em 09 de novembro de 2012 e o audio encontre-se em: <https://royalsociety.org/science-events-and-lectures/2012/wallis-holder-dispute/>, *acesso* em 10 out. 2016. Este artigo foi encaminhado para a autora, por e-mail, no dia 14 de abril de 2016.

[22] Os comentários sobre esse tema em Blackstone (1765-1669) podem ser encontrados espcificamente nos endereços: <http://lonang.com/library/reference/blackstone-commentaries-law-england/bla-108/> <http://lonang.com/library/reference/blackstone-commentaries-law-england/bla-232/>. Acesso em: 10 out. 2016.

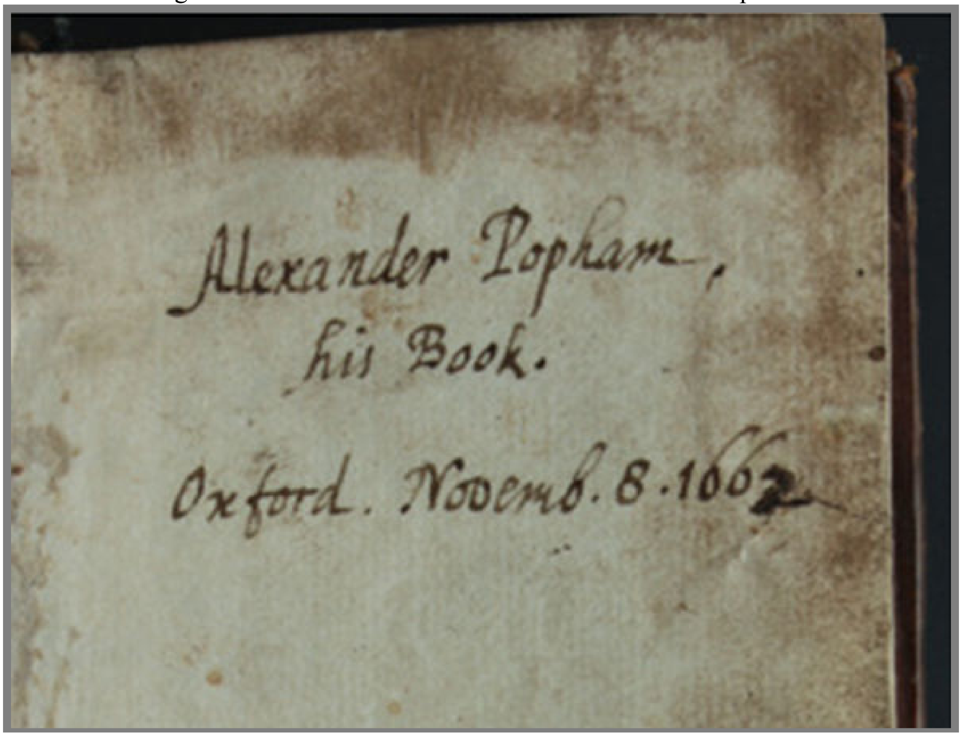
amigos da família de Popham, foi considerado importante, o investimento na sua aprendizagem da fala e da língua materna. Junto com esse aprendizado, viriam os conhecimentos sobre aritmética e geometria, necessários para os membros da elite da época.

Figura 23 - Alexander Popham no colo de sua mãe.

Fonte: https://twitter.com/deafheritageuk/status/561892498361319424, acessado em 16/10/2016.

O fato histórico referente a esse assunto foi tema de controvérsias entre John Wallis e William Holder. Mais informações a esse respeito foram encontradas em 2008, no momento em que um caderno foi localizado em uma mansão inglesa, em Berkshire, denominada *Littecote House*. Esse caderno, com capa de couro, pertenceu ao jovem *Alexander Popham*. Trata-se de um manual de instrução para ensinar surdos a se comunicarem e, pelo que indica o documento, o mesmo foi escrito por Wallis. As informações contidas no referido caderno, nos fornecem detalhes a respeito do método de ensino utilizado por Wallis para a educação de Popham.

Figura 24 - Folha de rosto do caderno de Alexander Popham.



Fonte: http://hiphilangsci.net/2013/11/06/teaching-language-to-a-boy-born-deaf-in-the-seventeenth-century-the-holder-wallis-debate/, acesso em 16/10/2016.

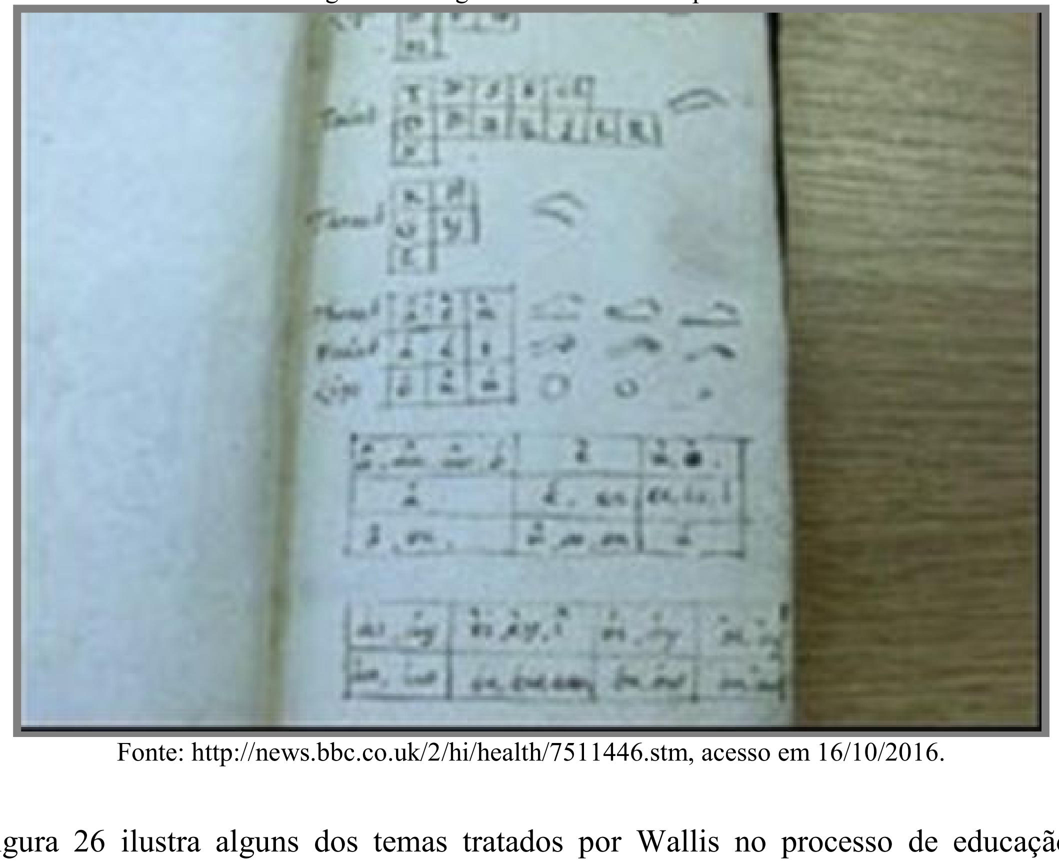
De acordo com informações sobre o assunto, admite-seque o ensino de Popham se desenvolveu, pelo menos em parte com sucesso, como as habilidades de falar, ler e escrever, com apoio de dois professores: inicialmente pelo líder religioso chamado William Holder, em 1659. Quando Alexander Popham tinha 10 anos, seus pais confiaram sua educação aos cuidados de Holder, que se comprometeu a ensiná-lo a falar e Popham foi capaz de pronunciar as primeiras palavras e pequenas frases. Dois anos depois do início dessa aprendizagem, devido a Holder ter que se mudar para outra paróquia, em setembro de 1662, John Wallis passou a assumir a responsabilidade de ensiná-lo, o que perdurou por alguns anos até que Popham tivesse em condições de assumir responsabilidades adequadas a sua posição na sociedade inglesa em que vivia.

O convite para Wallis assumir tal tarefa ocorreu devido ao fato dele já ter adquirido reconhecimento ao ensinar o jovem Daniel Whaley, de 25 anos, a pronunciar várias palavras, no final de 1661. Resultado este que foi mostrado a recém criada *Royal Society*, em maio de 1662. Além disso, Wallis também mostrou o jovem Whaley para o Rei Charles II e sua Corte em Londres pouco depois, o que favoreceu para que ele assumisse a educação de Popham.

A abordagem desenvolvida por Wallis para a educação oral do jovem Popham iniciou com base em observações que o educador já havia feito a respeito dos modos como a língua, o palato e os lábios se posicionavam quando eram pronunciadas determinadas palavras pelas pessoas e como os sons de cada fonema eram emitidos ao pronunciarem tais palavras, ou seja, como eram produzidos certos sons vocálicos.

Com base nessas constatações, Wallis formulou alguns diagramas que representassem esse movimento dos órgãos da fala e passou, então a utilizá-los para mostrar a Popham como ele poderia exercitar tais órgãos de modo a poder formar sons que representassem as palavras e posteriormente pequenas frases. Este aspecto bastante provocante, foi encontrado no caderno de Popham está evidenciado nos diagramas criados por Wallis para orientar o jovem estudante no posicionamento da língua para aprendizagem da emissão dos sons referentes a cada fonema, de modo a se tornar possível o exercício da fala, mostrados na figura 25, a seguir.

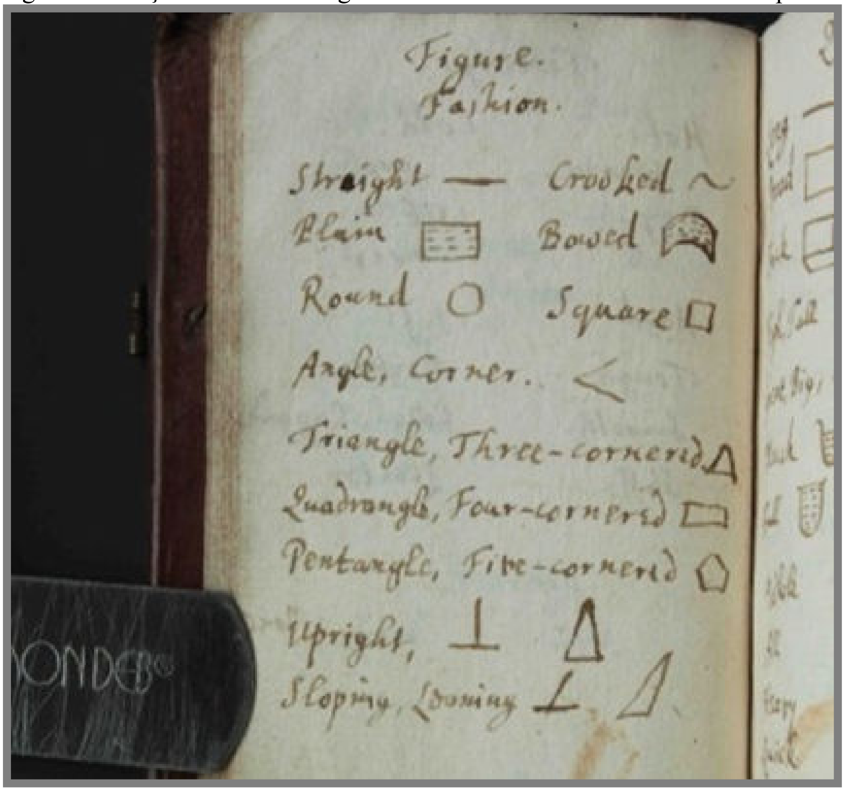
Figura 25 - Página do caderno de Popham.



Fonte: http://news.bbc.co.uk/2/hi/health/7511446.stm, acesso em 16/10/2016.

A figura 26 ilustra alguns dos temas tratados por Wallis no processo de educação de Popham, no que se refere ao ensino de formas geométricas, bem como sobre algumas propriedades dessas formas, podemos ver a representação de reta, plano, quadrado, ângulo entre outros objetos matemáticos

Figura 26 - Lição sobre formas geométricas no caderno de Alexander Popham.



Fonte: http://www.livescience.com/24654-early-sign-language-manual.html, acesso em 16/10/2016.

Nas correspondências estabelecidas por Wallis com alguns intelectuais de sua geração, consta uma carta enviada por ele para Robert Boyle (*Philosophical Transactions* Vol. 5, 1670, p. 1087-1099), que dentre diversos assuntos, refere-se aos comentários de alguns médicos sobre suas experiências de ensino com uma criança surda, na tentativa de fazê-la falar e compreender seu idioma (o inglês); o que foi segundo os comentários, alcançado com sucesso.

Na referida carta a Boyle, Wallis menciona que ensinar a língua inglesa seria muito fácil, mas ensinar tal coisa (Matemática) a um surdo-mudo não poderia ser possível, pois além de exigir muita dedicação e tempo devido a criança necessitar primeiro aprender a falar, o que seria uma primeira língua e depois aprender sua segunda língua (a língua materna); muito mais difícil seria aprender Matemática posteriormente.

A esse respeito Wallis assegurava ser evidente que haveria duas línguas que poderiam ser ensinadas, uma era diferente da outra. Entretanto ponderava que o conhecimento de uma era o subsídio necessário para aprendizagem da outra. Isso porque existia uma linguagem comum, na qual o professor poderia interpretar o modo como o aluno atribuía significado às palavras e noções que ele não sabia explicar concretamente, e que mesmo assim expressaria seus próprios pensamentos.

Wallis considerava uma desvantagem ensinar um primeiro idioma para um surdo, pois a surdez aumentava a dificuldade do ensino uma vez que estava evidente em sua experiência que a forma mais vantajosa de ensinar para uma criança a sua primeira língua, é pela exploração do seu próprio discurso, ou seja, pela sua maneira de expressar o pensamento sobre as coisas observadas e vividas, o que para ele era particularmente viável quando o ensino fosse baseado em divertimentos agradáveis para a criança ou alguns esportes de seu interesse. Caso contrário, o professor teria de aprender a decifrar as manifestações de comunicação da criança e estimulá-la nesse processo de expressão do pensamento.

Wallis afirmava que as crianças, a cada dia, tinham conhecimento de palavras pelos ouvidos, com as suas várias construções e significações, de modo que, em poucos anos alcançam uma capacidade competente de se exprimir na sua língua materna, pelo menos quanto às formas mais habituais e noções comuns. Para Wallis era intrigante o porquê de se julgar impossível, que o olho (embora com alguma desvantagem) poderia muito bem compreender uma complicada união de letras ou outros caracteres, para representar as várias concepções da mente; além do porquê de o ouvido, poder compreender uma complexa mistura de sons.

O método ou a teoria adotada por Wallis para a educação de jovens como Popham e Whaley era a teoria da fonética articulatória, contida em seu livro *Grammatica Linguae Anglicanae*. Em sua fonética articulatória o autor trata de um dos principais ramos da fonética, que é a ciência responsável pelo estudo dos sons utilizados na linguagem humana. Tendo como ponto de vista de análise os aspectos fisiológicos e articulatórios da produção da fala, a fonética articulatória se encarrega da observação, descrição, classificação e transcrição dos sons produzidos. Alguns de seus comentadores consideram que foi a partir dessa fonética que Wallis planejou e passou a experimentar, de forma rudimentar, a língua de sinais e figuras articuladas aos sinais para ensinar seus alunos falarem e a compreenderem um pouco da Matemática que ele lhes queria ensinar. Segundo Cram (2016, no prelo), a abordagem adotada por Wallis apresenta dois aspectos, primero, ele insiste pela dissociação entre a tarefa de ensinar o surdo a falar e de ensiná-los a compreender uma língua. O segundo, ele argumenta que, para ambas as tarefas, a chave é construir uma aprendizagem sobre o tipo de comunicação por sinal e que o surdo já usava.

O que se sabe é que no decorrer de sua vida Popham aprendeu a falar, aprendeu a língua inglesa, sua língua materna, e depois de algum tempo constituiu família e foi pai de cinco filhos e nenhum nasceu com problema de surdez. E Cram (2016, no perlo) assegura que vários documentos legais, devidamente assinados e selados, por Alexander Popham são preservados entre o arquivo da família, a existência desses documentos indica que ele desempenhou um papel ativo na gestão da sua propriedade e seus assuntos familiares.

Com base nos estudos preliminares feitos a respeito do caderno de Popham, foi verificado que o documento se caracteriza como um manual de instrução para ensinar surdos a se comunicarem e, pelo que indica o documento escrito por Wallis, também trata de aspectos matemáticos básicos referentes à formação educacional do jovem. As informações que conseguimos identificadas nas poucas imagens, até agora disponibilizadas sobre o referido caderno, nos fornecem elementos para uma aproximação a respeito do método de ensino utilizado por Wallis para a educação de Popham.

Por se tratar de um tema cujas informações ainda não foram disponibilizadas ao público interessado no assunto, somente nos foi possível pesquisar informações básicas já mencionadas por estudiosos sobre a história do ensino de surdos e nas fontes originais referentes às publicações de Wallis, como cartas e outros documentos disponíveis em bibliotecas digitais, para que fosse possível obter informações mais fidedignas possíveis sobre o fato histórico analisado.

Os resultados obtidos foram bastante satisfatórios para uma primeira aproximação da construção historiográfica do tema. Além disso, percebemos que é muito provável que, tanto Holder quanto Wallis tenham alcançado um mérito acadêmico pelo fato de terem possivelmente se apoiado no trabalho pioneiro de John Wilkins (1614-1672), um estudioso que muitos anos antes deles, já havia chegado à conclusão e demonstrado como órgãos como a epiglote, a laringe, a traqueia e o esôfago são fundamentais na produção de vários sons que compõem nosso processo de fala, conforme foi destacado por Scott (1981, p.87) quando se refere a esse assunto.

Essa experiência vivenciada por Wallis nos fornece um retrado da situação em que os intelectuais ingleses agrupados pela *Royal Society* trabalhavam, eles discutiam e esforçavam em encontrar procedimentos de investigações em conformidade com os fundamentos da Filosofia Natural. O foco central do nosso estudo foi o trabalho matemático de Wallis em sua obra *Arthmetica Infinitorum*, as ideias expressas por ele nesta obra são oriundas de trabalhos de seus predecessores. O domínio e o campo, nos sentidos dados por Csikszentmihalyi em seu *Sistema de Modelo de Criatividade*, são essenciais para compreendermos o exercício criativo de Wallis. Alguns fatos que nos auxiliaram a clarificar esses dois aspectos são vistos a seguir.

3.4 O Legado dos Matemáticos Predecessores de Wallis

Um caminho tradicional apresentar o desenvolvimento dos infinitesimais, desde as suas origens, nos remete aos gregos, aos primeiros filósofos jônicos representados aqui por Demócrito (460-370 a. C.), que buscavam fundamentos para a ciência. Desenvolveram a "doutrina do atomismo físico", para o campo da geometria. É, por exemplo, creditado a Demócrito, por Plutarco (45-120) o seguinte dilema:

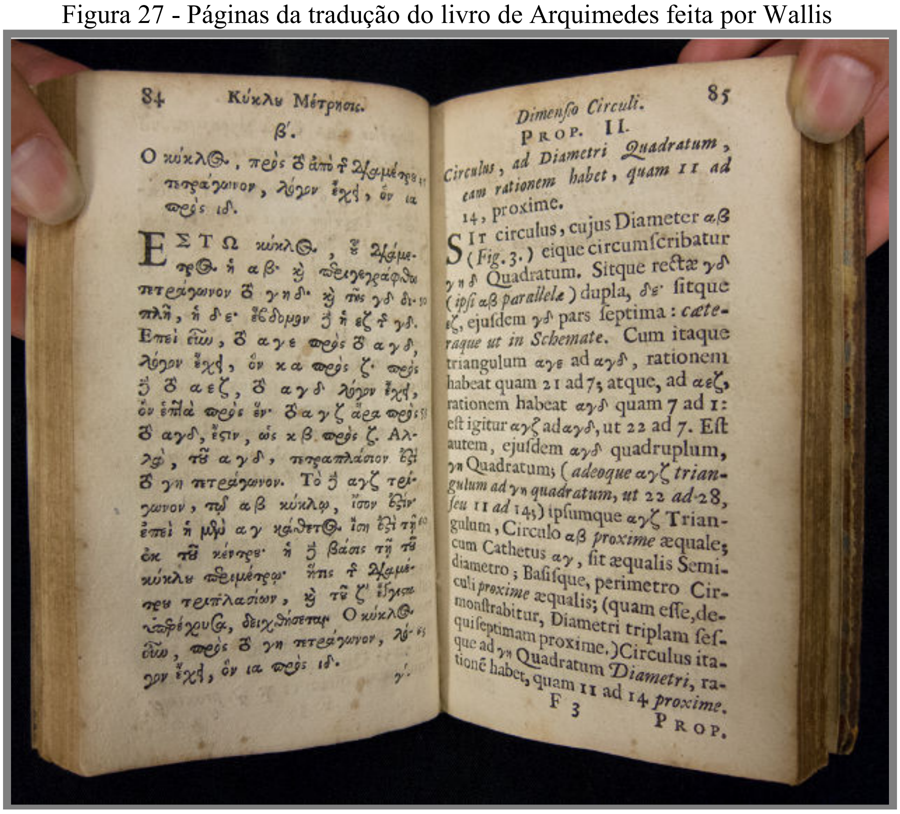
> Se cortarmos um cone por um plano paralelo à base, [plano bem próximo à base], o que podemos dizer das superfícies que formam as seções? Elas são iguais ou diferentes? Se elas são diferentes, elas tornaram o cone irregular, cheio de dentes, como degraus, e imparidades; mas se elas são iguais, as seções serão iguais, e parece que o cone terá a propriedade do cilindro de ser construído por círculos iguais e não diferentes: o que é um grande absurdo (BARON, 1985, vol. 1, p. 20).

Uma interpretação dada a esse dilema indica que a noção de sólido, admitido por Demócrito, era de um sólido composto de seções planas paralelas à base. Ou seja, esse dilema induz o pensamento matemático a despeito da natureza do "infinitesimal". No trecho do texto de Baron, mencionado anteriormente, "se cortarmos um cone por um plano paralelo à base [plano bem próximo à base]..." está implícito em seu subtexto o conceito de infinitesimal. Porque não é somente fazer recortes paralelos no cone, mas sim recortes paralelos com distâncias infinitesimais entre si (para simplicidade da situação são tomados os cortes próximos ao plano de apoio do cone). Ainda de acordo com Baron (1985), o raciocínio de Demócrito é colocado como dilema, pois, de maneira simplista, quando é abandonada a noção de proximidade infinitesimal entre as seções, veja o trecho "Elas são iguais ou diferentes?, é como se o cone fosse composto de degraus de alturas não infinitesimais, como uma Torre de Hanói". Esse tipo de paradoxo é até esperado pela falta de amadurecimento, próprio da época, da ideia de distâncias infinitamente pequenas entre as seções. Mas já há neste dilema fortes indícios de que ao desconsiderar o infinitesimal somos levados a situações absurdas, como na passagem "mas se elas são iguais (as superfícies que formam as seções), as seções serão iguais, e parece que o cone terá a propriedade do cilindro de ser construído por círculos iguais". Outros paradoxos clássicos, como, por exemplo, o da Tartaruga e a Lebre, exemplificam que o abandono da continuidade e completude dos reais, decodificada pela noção do infinitesimal sempre nos levou a situações absurdas e incoerentes.

O "método de exaustão" termo estabelecido no século XVII, atribuído a Eudoxo (409-355 a.C.), foi amplamente utilizado em demonstrações de fórmulas para áreas e volumes envolvendo curvas e superfícies. O procedimento envolvia um raciocínio por redução ao absurdo: "Quando se supunha um valor diferente daquele conjecturado para a área ou volume em consideração, bastava apresentar um polígono com número suficientemente grande de lados para gerar uma contradição" (BARON, 1985, p.37). O método de exaustão encontrou terreno fértil nas ideias de Arquimedes, mas em suas obras é percebida uma multiplicidade de métodos utilizados para resolver problemas geométricos dentre eles métodos empíricos que faziam uso de argumentações envolvendo infinitésimos.

Os trabalhos de Arquimedes, já traduzidos para o latim, foram fontes abundantemente exploradas e exerceram um papel fundamental de inspiração para os trabalhos científicos nos séculos XVI e XVII. Uma tradução do grego para o Latim foi feita por Wallis e publicada em 1676, a figura 27 mostra duas páginas deste livro que foi constituído pela versão em grego e a tradução em latim.

Figura 27 - Páginas da tradução do livro de Arquimedes feita por Wallis


84 Κύκλου Μέτρησις.

β'.

Dimensio Circuli. 85

PROP. II.

Circulus, ad Diametri Quadratum, eam rationem habet, quam 11 ad 14, proxime.

SIt circulus, cujus Diameter αβ (*Fig.* 3.) eique circumscribatur γη Quadratum. Sitque rectæ γδ (*ipsi* αβ *parallelæ*) dupla, δε· sitque ζ, ejusdem γδ pars septima: *cætera que ut in Schemate.* Cum itaque triangulum αγε ad αγδ, rationem habeat quam 21 ad 7; atque, ad αεζ, rationem habeat αγδ quam 7 ad 1: est igitur αγζ ad αγδ, ut 22 ad 7. Est autem, ejusdem αγδ quadruplum, γη Quadratum; (*adeoque* αγζ *triangulum ad* γη *quadratum, ut* 22 *ad* 28, *seu* 11 *ad* 14;) ipsumque αγζ Triangulum, Circulo αβ *proxime* æquale; cum Cathetus αγ, sit æqualis Semidiametro; Basisque, perimetro Circuli *proxime* æqualis; (quam esse, demonstrabitur, Diametri triplam sesquiseptimam proxime.) Circulus itaque ad γη Quadratum *Diametri*, rationẽ habet, quam 11 ad 14 *proxime*.

F 3 PROP.

Fonte: http://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-archimedes-as-translated-by-john-wallis, acesso em 16/10/2016.

As narrativas tradicionais da história da Matemática nos contam que na idade Média, as invasões dos árabes na península ibérica trouxeram grandes contribuições para a Matemática ocidental. Os gregos deixam uma Matemática limitada com um instrumental operativo escasso, mas com a introdução de uma Matemática que, segundo Roque (2012), "ultrapassou a divisão entre número e grandeza, que era constituinte da Matemática euclideana", o poder da Matemática ocidental se multiplicou. A Matemática grega com o arranjo da álgebra ganha técnicas de manipulações que fazem com que uma abordagem simbólica para os problemas sejam desenvolvidos.

Durante o Século XVII matemáticos italianos, franceses ingleses e dos Países Baixos se encantaram com os problemas associados a áreas, volumes e comprimento de arcos. Em meio às discussões sobre os métodos empregados nas demonstrações de geometria clássica, novos métodos foram surgindo impulsionados pela corrente que trazia o uso do simbolismo algébrico introduzido por François Viète (1540-1603) no século XVI. Os problemas antigos eram, então, abordados usando-se novos métodos, ora estendidos ou generalizados e novos problemas foram colocados.

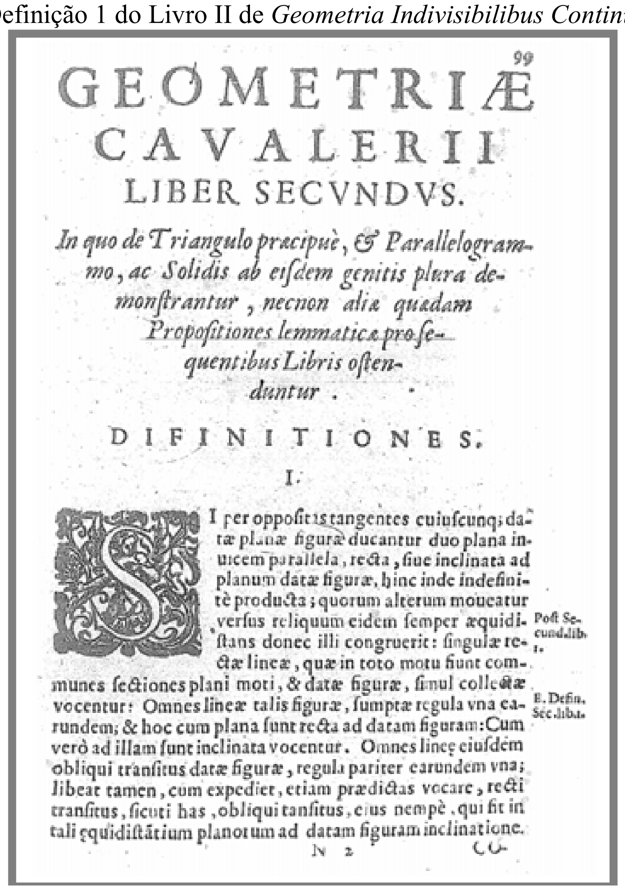
Os astrônomos Joahnnes Kepler (1571-1630) e Galileu Galilei (1564-1642) foram os primeiros a modificar, de forma marcante, a maneira de fazer uma demonstração Matemática, sem usar as técnicas clássicas propostas nos trabalhos de Arquimedes.

Até as demonstrações matemáticas nos trabalhos do holandês Kepler, o cálculo de áreas e volumes de diversos sólidos e superfícies não traziam o uso dos indivisíveis. Pela primeira vez era percebido de maneira significativa um pensamento, mesmo que ainda ingênuo, de infinito. Ele considerava que sólidos e superfícies eram formas compostas de repetições "infinitas" de retas e planos. Comparou seus métodos com os utilizados por Arquimedes, ampliando significativamente o número de sólidos tratados, considerando, por exemplo, os sólidos de revolução que não foram abordados nos cálculos de volumes de Arquimedes. Segundo Boyer (1996, p. 224) o seu método de calcular volumes consistia em considerar os sólidos como compostos de uma "infinidade" de elementos infinitesimais. Desencadeou, assim, uma série de estudos sobre indivisíveis e infinitesimais. Sua obra *Doliometria*, de 1615, reunia suas principais ideias sobre estes temas. Ideias estas que, posteriormente, estimularam os trabalhos de Cavalieri, que abordaremos um pouco mais adiante, mas não antes de apresentar as contribuições de Galileu Galilei.

Em seus estudos sobre cinemática, o italiano Galileu Galilei, além de apresentar novas curvas e formas geométricas oriundas do movimento, deu uma grande contribuição nesta abordagem inicial dos infinitesimais. O infinitamente pequeno era extremamente importante para Galileu, pois era, para ele, essencial na explicação e compreensão dinâmica do movimento. O mesmo já não acontecia com o infinitamente grande. Assim, como destacamos uma importante obra de Kepler, neste contexto, um marcante trabalho de Galileu é o *Discorsi e Dismonstrazioni Matematiche Intorno Duo Nuove Scienze,* de 1638, onde Galileu apresenta, de maneira ainda bastante intuitiva e ingênua, o infinitamente pequeno. Por exemplo, ao considerar que é tão fácil decompor um segmento de reta em um número infinito de partes quanto dividi-lo em números finitos de partes. Esta abordagem intuitiva, especulativa e fantasiosa, não é segundo Roque (2012, p. 304), um fato sem explicação, vindo dos desenvolvimentos teóricos de Galileu que se basearam no conhecimento de artesãos, arquitetos e engenheiros do século XVI.

O também italiano Bonaventura Cavalieri (1598-1647) publicou em 1635 sua principal obra, *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova*, em que dá continuidade aos argumentos sugeridos por Kepler e Galileu acerca dos problemas de áreas e volumes, utilizando as ideias do infinitamente pequeno. A primeira definição no livro II introduz o conceito de *omnes lineæ* (todas as linhas). Este conceito é muito importante na teoria para figuras planas de Cavalieri e diz respeito aos indivisíveis.

Figura 28 - Definição 1 do Livro II de *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova*.



99

GEOMETRIÆ
CAVALERII
LIBER SECVNDVS.

In quo de Triangulo præcipuè, & Parallelogrammo, ac Solidis ab eisdem genitis plura demonstrantur, necnon aliæ quædam Propositiones lemmaticæ pro sequentibus Libris ostenduntur.

DIFINITIONES.

I.

SI per oppositas tangentes cuiuscunq; datæ planæ figuræ ducantur duo plana inuicem parallela, recta, siue inclinata ad planum datæ figuræ, hinc inde indefinitè producta; quorum alterum moueatur versus reliquum eidem semper æquidistans donec illi congruerit: singulæ rectæ lineæ, quæ in toto motu fiunt communes sectiones plani moti, & datæ figuræ, simul collectæ vocentur: Omnes lineæ talis figuræ, sumptæ regula vna earundem; & hoc cum plana sunt recta ad datam figuram: Cum verò ad illam sunt inclinata vocentur. Omnes lineę eiusdem obliqui transitus datæ figuræ, regula pariter earundem vna; libeat tamen, cum expedier, etiam prædictas vocare, recti transitus, sicuti has, obliqui tansitus, eius nempè, qui fit in tali ęquidistātium planorum ad datam figuram inclinatione.

Post Secund. lib. 1.

E. Defin. Sec. lib. 1.

N 2 CO-

Fonte: http://math.mit.edu/classes/18.01/F2011/cavalieri-integration.pdf, acesso em 17/10/2016.

De acordo com Andersen (1985, p. 321), a obra de Cavalieri foi escrita com a intenção de criar um novo método de quadraturas e cubaturas, pois ele não estava interessado em apenas encontrar novos resultados, mas também em mostrar a sua maneira de trabalhar o assunto, o que ele fez usando seu método para explorar ou provar os teoremas já conhecidos.

Neste trabalho Cavalieri também parte do pressuposto que um sólido pode ser formado de regiões que têm volumes infinitamente pequenos. Os pensamentos usados por ele têm raízes naqueles apresentados nos trabalhos de Arquimedes e Demócrito, mas diferindo fundamentalmente na maneira de demonstrar os resultados. Boyer (1996, p. 226) e Eves (2004, p. 425) destacam este aspecto. Entretanto, Arquimedes e Demócrito se utilizaram de argumentos puramente geométricos. A teoria de Cavalieri permitia a determinação rápida de áreas e volumes de figuras geométricas.

Na sua obra intitulada *De Dimensione Parabolae*, Evangelista Torricelli (1608-1647) revelou a clareza e a simplicidade na abordagem dos problemas por infinitésimais, mas tinha perfeita percepção da ausência de rigor causada pelo uso de tal procedimento. A sutileza de Torricelli em suas demonstrações contribuiu muito para o trabalho de todos os matemáticos no que diz respeito à arte da demonstração.

Euclides usou definições e postulados para construir o seu sistema comprovado de proposições dedutíveis a partir dos primeiros princípios. Essa geometria foi objeto de grande admiração no século XVII e suas demonstrações eram todas apoiadas em construções geométricas. A introdução da álgebra de Viète trouxe uma nova abordagem para as curvas, de acordo com Roque (2012)

> Em vez de construções geométricas, foram admitidas técnicas algébricas na definição de curvas, constituídas em objeto central da geometria. A segunda metade do século XVII sentiu os efeitos dessa mudança e o trabalho com curvas, incluindo a busca de volumes e áreas, incentivou o desenvolvimento dos métodos infinitesimais (ROQUE, 2012, p. 345).

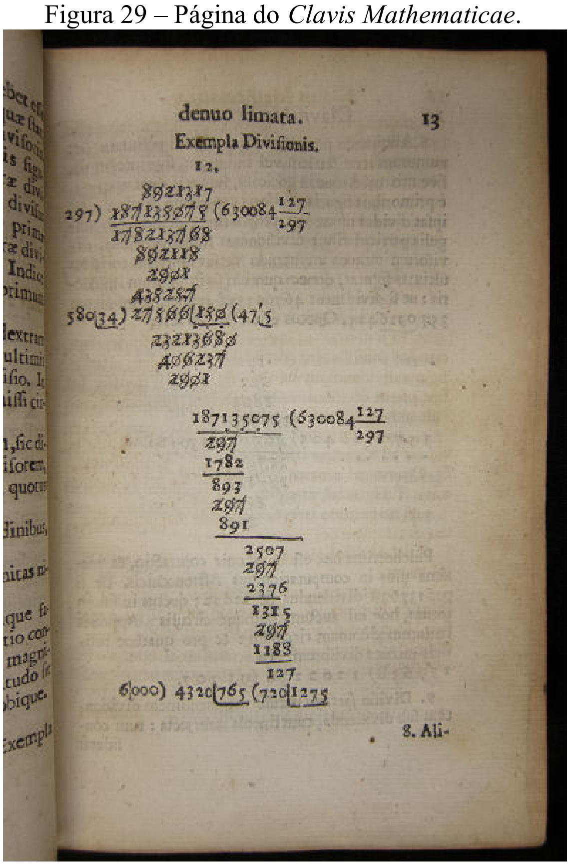
O estabelecimento do Cálculo foi impulsionado pelo estudo de diversos problemas. A integração derivou de problemas de quadratura, cubatura e retificação de curvas e diferenciação derivou dos métodos de tangentes, examinados por Roberval, Descartes e Fermat em relação com estudos sobre máximos e mínimos.

Assentou-se, assim, o solo em que John Wallis viria a plantar suas ideias. Em sua primeira obra *De Sectionibus Conicis. Nova Methodo Expositis* (1655), ele lança suas primeiras ideias sobre o indivisível e faz seus estudos iniciais sobre as cônicas, mas não na perspectiva de Apolônio, onde essas curvas foram consideradas cortes do cone.

A partir do que foi posto e de uma pesquisa feita em uma bibliografia especializada na vida e a obra de Wallis, a saber: Scott (1981) que traz "*The Mathematical Work of John Wallis*"; Scriba (1970) com "*The Autobiography of John Wallis*"; além dos quatro volumes das "*Correspondence of John Wallis (1616-1703)*", de Belley e Scriba (2003), (2005), (2012) e (2014), vamos caracterizar, um pouco melhor, o campo de John Wallis na perspectiva do Modelo de Sistemas de Craitividade de Csikszentmihalyi (1998). Isto é, apresentamos a seguir, a comunidade de estudiososem torno da figura central do nosso estudo. Para tal, apresentamos algumas biografias resumidas desses estudiosos e indicamos de que maneira eles se relacionavam com de John Wallis, posteriormente apresentamos um quadro que situa temporalmente os estudiosos citados.

Como já foi colocado anteriormente na seção 3.2, John Wallis foi despertado para a Matemática por seu irmão mais novo no Natal de 1631. Em 1947 ele leu o popular livro de William Oughtred, *Clavis Mathematicae* (Chave Matemática). A figura 29 ilustra uma operação de divisão deste livro.

Figura 29 – Página do *Clavis Mathematicae*.



Fonte: <http://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-oughtreds-clavis-mathematicae>.Acesso em: 03 jul.2015.

William Oughtred (1575-1660) foi um matemático Inglês, filho do Reverendo Benjamin Oughtred. Nascido em Eton e educadona faculdade lá. Entrou Faculdade do Rei, Cambridge, em 1592. Despertou grande interesse pela Matemática já na graduação e foi membro da Faculdade do Rei em 1595. Em 1610 tornou-se Reitor da Albury, perto de Guildford, onde permaneceu pelo resto de sua vida. Projetou a tábua de cálculo logarítmica circular e foi um importante professor de Matemática, deu aulas particulares para Seath Ward, e Christopher Wren e Wallis. Seu livro *Clavis Mathematicae* datado de 1631 foi escrito quando ele era tutor do filho do conde de Arundel. Este livro apresenta um tratamento sistemático sobre aritmética e álgebra da época e nele, Oughtred introduziu uma série de novos símbolos em Matemática, incluindo o de multiplicação posteriormente utilizado por Wallis em seu *Arithmetica Infinitorum.* Wallis dedicou essa obra a Oughtred e em sua dedicatória revela que os métodos dos Indivisíveis de Cavalieri lhe foram propostos como tema de estudo por ele.

O célebre matemático que nasceu em Milão na Itália, Bonaventura Cavalieri (1598-1647), desde cedo, mostrou zelo para seus estudos, tanto que ele foi enviado para Pisa. Lá ele conheceu Castelli, que estimulou seu interesse pela Matemática. Ele tornou-se Professor de Matemática em Bolonha, e seus trabalhos mostram que ele dominava o método dos indivisíveis, já em 1629. Isto, no entanto, não foi publicado até 1635, quando apareceu sua obra *Geometria lndivisibilibus Continuorum Nova Quadam Ratione Promota* (Bologna). Este tratado, que foi novamente publicado em 1653, reavivou o interesse no assunto, e encorajou Wallis a desenvolver o assunto ainda mais, sendo que a abordagem dada por Wallis foi aritmética e não geométrica. Cavalieri também publicou *Treatise on Conic Sections,* com o título *La Specchio Usterio, ovvero Trattato delle Settione Goniche* (Bolonha, 1632), e um sistema de trigonometria com o título *Directorium Generale Uranometricum* (1632). Sua *Exercitationes Geometricae Sex*, que apareceu em 1647, contém exemplos sobre o métododos indivisíveis. Em uma delas, ele mostrou que seu método não era nada além do método de esgotamentos que tinha sido empregado pelos geômetras antigos.

Na dedicatória do *Arithmetica Infinitorum,* Wallis relatou seu primeiro contato com a geometria dos indivisíveis de Cavalieri ocorreu em 1651 quando ele leu o *Opera geometrica* de Torricelli, publicado em 1644 (STEDALL, 2004, p. 3). De acordo com a perspectiva do Modelo de Sistema de Criatividade de Csikszentmihalyi (1998), foi na sua busca de conhecer e dominar o domínio que Wallis estudou e compreendeu as ideias geométricas sobre indivisíveis de Cavalieri e, também, a abordagem dada por Torricelli.

Outros matemáticos e seus trabalhos foram citados por Wallis como fonte de conhecimento utilizada para a escrita de sua obra sobre a quadratura do círculo. Como, por exemplo, Grégoire de Saint-Vincent, (I584-1667) um geômetra nascido nos Países Baixos; considerado um escritor muito difuso e que é lembrado principalmente por suas tentativas da quadratura do círculo, cujas tentativas frustradas foram apontadas por Huygens. Contudo, seu trabalho mais importante em Matemática, o *Opus Geometricum Quadraturae Circuli et Sectionum Coni* (1647), foi citado por Wallis como um trabalho consultado (STEDALL, 2004, p. 5). No referido trabalho está contido grande número de novos teoremas sobre propriedades do círculo e seções cônicas, progressões geométricas e volumes de sólidos de revoluções. Um deles conduziu à expansão do *log(1-x*), em potências de x ascendentes. Em um trabalho anterior *Theoremata Mathematica* (1624), Saint-Vincent deu um relato conciso do Método de esgotamentos que é aplicado a várias quadraturas, nomeadamente a da hipérbole.

A obra *Theoremata de quadratura hyperbolae, elipsis et circuli ... Quibus subjuncta est Exetasis cyclometriae* de Christiaan Huygens (1629-95), datada de 1651, foi também apontada por Wallis como consultada (STEDALL, 2004, p. 6) Huygens foi nascido em Haia, filho do diplomata, poeta, e erudito em Latim Constantijn Huygens (1596-1687) e Suzanna van Baerle. Educado em grande parte por seu pai e professores particulares, incluindo Jan Stampioen. Entrou na Universidade de Leiden em 1645, para estudar Matemática e direito. No período 1647-49 estudou Direito na *Collegium Auriacum* em Breda. Em 1655 concluiu doutoramento em Direito em Angers. De 1654 em diante trabalhou em lentes, microscópios e telescópios construídos. Inventou o relógio de pêndulo em 1655. Realizou numerosas investigações astronômicas, especialmente sobre os anéis de Saturno. Em 1659, publicou *Systema Saturnium*. Teve importantes resultados obtidos na teoria de curvas e superfícies (tangentes, quadraturas, cubaturas e retificações). Aplicou teorias matemáticas aos problemas de física, astronomia e tecnologia. Visitou Paris numerosas vezes entre 1650 e 1660, bem como visitas a Inglaterra. Entrou para a *Royal Society* em 1663 e também foi membro assalariado da *Académie Royale dês Sciences*.

O amigo de Wallis, William Brouncker (1620-1684), nasceu em Dublin, Irlanda, filho de Sir William Brouncker, Visconde Brouncker de Lyon, e sua esposa Winifred. Estudou em Oxford a partir de 1636 e sucedeu aos títulos de seu pai em 1645. Estabeleceu-se em Londres e foi o primeiro Presidente da *Royal Society*. Publicou, em 1653, a tradução para o inglês da *Musicae compendium* de Descartes. Estabeleceu intensa correspondência com Wallis em conexão com os desafios de Fermat na teoria dos números. Em sua obra *Arithmetica Infinitorum*, Wallis publica uma fração continua para $\frac{4}{\pi}$ obtido por Brouncker (STEDALL, 2004, p. 167). Foi Presidente do *Gresham College* em 1664-7. Morreu em sua casa em St. James Street, Westminster, em 5 de abril de 1684.

Nascido em Oxfordshire, Inglaterra, filho de um Ministro da Igreja, John Collins (1625-1683) foi aprendiz do livreiro Thomas Allen em Oxford. Durante 1642-49 serviua bordo no navio mercante inglês contratado pela República de Veneza, onde seu tempo de lazer era dedicado ao estudo da Matemática e as contas dos comerciantes. Ao cessar estas funções, trabalhou como professor de Matemática em Londres. Foi eleito membro da *Royal Society*, em outubro de 1667. Muitas vezes aconselhou Oldenburg em temas matemáticos. Juntamente com inúmeras publicações matemáticas de sua própria autoria, ele ajudou, em várias vezes, nas obras de outros, incluindo motivando Wallis a escrever *Treatise of Algebra*. Teve como principais correspondentes: Newton, Leibniz, Wallis, Flamsteed e Sluse. Foi denominado por lsaac Barrow como o "Mersenne Inglês".

Um dos temas matemáticos estudados por Thomas Hobbes (1588-1679) foi a quadratura do círculo. Hobbes graduou-se B.A. (Bacharelado em artes) em 1607/8. Foi Tutor de vários membros da família Cavendish, incluindo William (1591-1628), o Segundo Conde de Devonshire, e William (1617-1684), o Terceiro Conde de Devonshire. Durante o período de 1629-1631 estabeleceu-se em Paris e foi recebido nos círculos de Mersenne e Descartes. Encontrou-se com Galileu em 1636. Depois de voltar brevemente para Inglaterra, fugiu para a França 1640. Ensinou elementos de Matemática para o Príncipe de Gales durante o seu exílio em Paris 1646-48. O alvoroço da publicação do *Leviathan* (1651) fez com que retornasse à Inglaterra. Em 1653 voltou e permaneceu na casa Cavendish, primeiro em Londres e depois para *Hardwick Hall* e *Chatsworth*, Derbyshire. Outras publicações incluem *De corpore* (1655), *De homine* (1658), e *Problemata Physica* (1662). As suas tentativas de produzir soluções para problemas matemáticos clássicos os levaram a longos e demorados debates com Ward e principalmente com Wallis.

O filósofo e matemático Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) foi filho de Friedrich Leibniz, professor de filosofia moral na Universidade de Leipzig, e sua esposa Catharina. Formou-se em B.A. (Bacharelado em artes) em dezembro de 1662 e concluiu o mestrado no início de 1664 e teve o seu doutoramento concluído em 1667. De janeiro a março de 1673, viajou para Londres, onde teve reuniões na *Royal Society*: reuniu-se com

John Collins, Henry Oldenburg, Robert Boyle e John Pell. Leibniz se correspondia com John Wallis e por meio destas cartas ele anunciava e discutia seus resultados. Em abril de 1673 foi eleito membro da *Royal Society*. Realizou investigações matemáticas importantes que levaram ao desenvolvimento de princípios fundamentais do cálculo infinitesimal. Realizou um extenso trabalho sobre as questões de filosofia, direito, Matemática, ciências físicas, etc. Em 1684 teve sua primeira publicação, do cálculo diferencial, *"Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus"* na *Acta eruditorum*. Em 1700 foi membro estrangeiro da *Académie Royale dês Sciences* em Paris. De 1712-1714 morou em Viena; onde foi nomeado conselheiro da corte imperial para os Habsburgos. Em 1714, retornou para Hanover onde morreu em 14 de novembro de 1716.

O matemático inglês Isaac Newton (1642-1727) é considerado um dos mais influentes cientistas de todos os tempos. Filho de lsaac Newton, agricultor, seu pai morreu antes do seu nascimento. Foi admitido no Trinity College, em Cambridge, em maio de 1661. Em grande parte autodidata em Matemática, aprofundou seus conhecimentos paralelamente ao seu currículo de graduação. Chegou ao Teorema Binomial em 1665, após estudar a obra *Arithmetica Iinfinitorum* de John Wallis. Neste mesmo ano, formou-se B.A. (Bacharelado em artes) Voltou para Woolsthorpe entre o verão de 1665 e a primavera 1667 por conta de uma praga em Cambridge. Deu tratamento definitivo aos métodos dos fluxões produzidos até aquele momento. Após o retorno ao Cambridge em 1667, foi eleito membro do Trinity College. Em 1669, produziu "*De analysi per aequationem numero terminorum Infinitis*", que circulou em manuscrito. Foi nomeado Professor Lucasiano (Cátedra de Matemática em Cambridge) e eleito para *Royal Society* em 11 de janeiro 1671/2. Em 1676, depois de Leibniz ter divulgado a derivação de duas séries infinitas, escreveu e enviou uma epístola anterior e uma posterior. Desde o início da década de 1670 realizou estudos intensivos sobre questões teológicas e de alquimia. Em julho 1687 publicou "*Philosophiae naturalis principia mathematica*". Em 1698 foi eleito membro estrangeiro da *Académie Royale dês Sciences*. Em 1701 renunciou ao cargo de professor na Universidade de Cambridge. Foi eleito presidente da *Royal Society*, em novembro de 1703. A publicação do *Opticks* ocorreu em 1703/4, esse texto contém os primeiros trabalhos completos sobre Matemática newtoniana. Com a ajuda de Roger Cotes publicou a segunda edição do *Principia* em 1713. Passou anos ofuscados pela disputa com Leibniz pela prioridade da invenção do Cálculo.

O primeiro secretário da *Royal Society* foi Henry Oldenburg (1618 -1677). Nascido em Bremen, filho do professor Heinrich Oldenburg. Estudou teologia no Gymnasium

Illustree em Bremen. Em 1653 foi enviado para a Inglaterra em missão diplomática. Voltou em 1655 e tornou-se tutor de Richard Jones, o filho de Lady Ranelagh e sobrinho de Robert Boyle. Matriculou-se na Universidade de Oxford 1656, tempo dedicado ao estudo da nova filosofia. No período de 1657-1660 viajou na Europa Continental com Richard Jones, retornando posteriormente à Londres. Membro fundador da *Royal Society*. Em abril de 1663 tornou-se o segundo secretário da *Royal Society*. Instituiu e publicou, no período de 1665-77, a revista *Philosophical Transactions*.

O amigo de Oldenburg, René François Walter de Sluse (1622-1685), estudou Direito na Universidade de Louvain, 1638-1642, estudou línguas antigas, astronomia e Matemática em Roma. Em 1651 foi nomeado pastor em *St, Lambert*, Liège. Publicou a primeira edição do *Mesolabum* em 1659. Foi eleito para *Royal Society* graças à indicação de Oldenburg, em abril de 1674. Foi vice-reitor da catedral de Liège em 1676 e morreu nests cidade em 1685.

Aluno de William Holder, Christopher Wren (1632-1723) foi membro da escola de Westminster de 1641 a 1646. Graduou-se B.A. (Bacharelado em artes) em 1651 e posteriormente, obteve o grau de mestrado em 1653. Professor de astronomia no *Gresham College*, em Londres de 1657 a 1661 e foi um membro fundador da *Royal Society* e professor saviliano de astronomia em Oxford, 1661-1673. Foi nomeado inspector-geral para a reconstrução da Catedral de *St. Paul*, além de outras igrejas paroquiais e edifícios públicos da cidade após o "Grande Incêndio" de Londres em 1666. Arquiteto do teatro *Sheldonian* em Oxford. Foi Presidente da *Royal Society* de 1680 a 1682

O químico experimentalista, Robert Boyle (1627-1691), foi um filósofo natural. Estudioso independente veio de uma rica família irlandesa. Estabeleceu estreitos contatos com um interessante círculo em torno de Samuel Hartlib. Mudou-se para Oxford e se juntou ao grupo de John Wilkins em *Wadham College* em 1654. Principal representante da nova filosofia e membro ativo da *Royal Society*. Foi correspondente de Wallis e uma das cartas enviadas por Wallis continha a descrição do método utilizado por ele para fazer um surdo-mudo falar.

O diplomata inglês, Kenelm Digby (1603-1665), após a morte de sua esposa em 1633, estabeleceu-se na França. Realizou reuniões com Hobbes, Mersenne e Descartes. Voltou para a Inglaterra em 1639, mas foi forçado a fugir do país. Em 1657 foi interlocutor, na França, entre Brouncker, Wallis, Frenicle e Fermat, em conexão com os desafios deste último sobre a teoria dos números. O trabalho de Wallis *Commercium epistolicum de quaestionibus quibusdam mathematicis nuper habitum,* de 1658, é dedicado a Digby e apresenta um retrato do debate entre Wallis e Fermat. Membro ativo da *Royal Society*, nos primeiros anos. Foi um colecionador de livros e manuscritos, muitos dos quais ele presentiou à Biblioteca de Bodleian.

Conhecido como pai da Teoria dos Números moderna o francês, Pierre de Fermat (1607-1665), nasceu em Toulouse.. Escolheu o direito como profissão e perseguiu a Matemática apenas como um amador. Desenvolveu a análise algébrica, com base nas obras de Viète e desenvolveu importantes trabalhos na geometria analítica e óptica. É considerado fundador da teoria dos números moderna seguindo a tradição Diofantina. Seus dois maiores desafios na Matemática, em 1657-8, levaram a extensa correspondência com Wallis, Brouncker e Frenicle. Correspondências estas que podem ser encontradas em *Commercium epistolicum de quaestionibus quibusdam mathematicis nuper habitum* de 1658.

O francês, Gilles Personne de Roberval (1602-1675), teve suas primeiras reuniões com Mersenne em 1627. Em 1631 foi nomeado professor de filosofia na Universidade de *Maitre Gervais*. Em 1634 conquistou sua cadeira na *Royal Collège de France*, em Paris e manteve esta posição até o final de sua vida. Foi professor de Matemática e Membro fundador da *Académie Royale dês Sciences* em 1666. Publicou apenas duas obras: *Traité de mécanique* (1636) e *Aristarchi Samii de mundi Systemate* (1644). Além de artigos publicados postumamente pela *Royale dês Sciences Académie*. Teve um trabalho significativo na Matemática infinitesimal. Aplicou seu método da composição de movimentos para a construção de tangentes. Em 1642-43 estemétodo também aplicou a uma comparação do comprimento das espirais e parábolas. Sob a influência de Kepler acreditava na atração universalcomo a fundação da astronomia planetária. Realizou, em 1645, experiências sobre a questão da existência de um vácuo.

O matemático inglês, Peter Turner (1586-1652), graduou-se em 1605 e tromou-se membro do *Merton College*, Oxford,em 1607. Realizou seu mestrado de 1611 a 1612 e em 1620 foi nomeado professor de geometria no *Gresham College* como sucessor de Henry Briggs. Após a morte de Briggs em 1631 tornou-se *Professor Savilian of Geometry* em Oxford. Participou da revisão dos Estatutos da Universidade, publicado em 1634. Foi preso em 1642, mas foi trocado por prisioneiros parlamentares. Sucedido por Wallis em 1649. Depois de sua expulsão pelos parlamentares foi levado à pobreza e morreu em 1652.

Seth Ward (1617-1689) foi admitido na *Sidney Sussex College*, Cambridge, em 1632. Graduou-se em 1636/7 e concluiu o mestrado em 1640, torndou-se membro da no mesmo ano e lá realizou estudos dedicados à Matemática. Sua intensa leitura da *Clavis*

Mathematicae de Oughtred levou Ward e Charles Scarborough para visitar o autor em Albury. Foi recomendado à cadeira de professor saviliano de astronomia em Oxford em 1649, mesmo ano que Wallis. Entrou no círculo em torno de Wilkins. Como astrônomo, concebeu uma alternativa à teoria de Kepler, tal como formulado no *Astronomia do philolaicae* (1645).

Ativo tanto em Matemática quanto em filosofia experimental John Wilkins (1614-1672) graduou em 1631 e concluiu o mestrado em 1634. Enquanto capelão, em Londres, participou regularmente de reuniões com intelectuais. Casou-se com a irmã de Oliver Cromwell em 1656. Em Wadham, ele formou um círculo de estudiosos interessados em promover a nova filosofia. Foi membro de Cambridge em 1659. Desempenhou papel decisivo na criação da *Royal Society*. Wallis apoio-se no trabalho pioneiro de John Wilkins (1614-1672) sobre os órgãos da fala para desenvolver o seu método para ensinar pessoas surdas e mudas a falarem.

O matemático Isaac Barrow (1630-1677) foi para a mesma escola de Wallis, em Felsted, e em seguida para o *Trinity College* em Cambridge. Ele rapidamente distinguiu-se como um estudioso em muitos ramos do saber, e em 1649 ele foi eleito membro da *Trinity College*. No entanto, ele deixou Cambridge logo depois e viajou em toda a Europa. Em seu retorno em 1660, ele foi ordenado, e no mesmo ano foi escolhido professor de grego em Cambridge. Em 1662, após a morte de Lawrence Rooke, ele foi nomeado *Gresham Professor* of Geometry, e no ano seguinte ele foi eleito para *Royal Society*. Concomitantemente foi nomeado o primeiro professor Lucasiano (Cátedra de Matemática em Cambridge), mas logo em seguida renunciou a esta cadeira que passou a ser ocupada por Newton, cujas habilidades superiores ele sempre reconheceu. Ele também cultivou com sucesso a ciência da Ótica e sua *Lectiones Opticae* é descrita como fonte de proposições da óptica, curiosa, interessante e que a geometria é sempre aplicada com especial elegância. James Gregory ficou tão impressionado com ele que escreveu para Collins: "O Sr. Barrow em sua Ótica mostra-se um geômetra tão sutil, de modo que eu o acho superior a qualquer um que alguma vez tenha encarado". Em 1672 tornou-se gestor da Trinity College, e três anos depois, Vice-Chanceler da Universidade. Como Wallis, Barrow sempre foi classificado como um dos grandes precursores de Newton. Ele desenvolveu vários trabalhos matemáticos, dois dos mais importantes são: *Euclidis Elementa* de 1655 e *Euclidis Data* de 1657. Em ambos ele segue a notação adotada por Oughtred. Em *Lectiones Geometricae* de 1670 ele descreve o seu método de desenhar uma tangente em um determinado ponto em uma curva por meio do seu “triângulo diferencial” e está repleta de profundas pesquisas sobre as propriedades curvas e suas tangentes.

O astrônomo Edmond Halley (1656-1742) foi educado na escola de *St. Paul*, em Londres, e no *Queen´s College* em Oxford. Como um menino que deu provas de ardor para a aprendizagem, sua reputação tornou-se firmemente estabelecida quando, em 1677, Charles II o mandou fazer observações das estrelas do hemisfério sul. Ele residiu em Santa Helena[23] por dois anos, e enquanto ele estava lá, ele lançou os fundamentos da Astronomia do Sul. Em seu retorno, ele compilou com incrível cuidado e precisão seu Catálogo *Stellarum Australium* (1678), e, pouco depois, ele foi eleito membro da *Royal Society*. Em 1680 fez observações de cometas dos qual um deles tem o seu nome associado. Ele se tornou editor da *Royal Society* no período de 1685 a 1693. Com a morte de Ward, ele foi cogitado para a cátedra *Savilian* de Astronomia. Entretanto, ele não foi nomeado, mas quando, contudo, a cadeira saviliana de geometria tornou-se vaga, com a morte de Wallis, Halley foi nomeado para preenchê-la e, a partir desse ano até sua morte, dedicou-se principalmente à geometria. Ele preparou folhetins deobservações para a imprensa, e editou a primeira versão, em 1712, de *Historia Caelestis*. Halley tornou-se secretário da *Royal Society*, em 1713, e Astrônomo Real em 1721 até a sua morte em 1742. Ele também foi um membro estrangeiro da *Académie dês Sciences*. Por suas *Tabelas de Mortalidade* ele pode ser sido pioneiro na ciência das estatísticas de vida.

O eminente algebrista inglês, Thomas Harriot (1560-1681), depois de se formar mestre no *St. Mary Hall*, Oxford, acompanhou Raleigh em sua expedição à Virgínia. Em seu retorno, ele entregou-se a estudos matemáticos, particularmente algébra, e é dado a ele o crédito de ter estabelecido os primeiros avanços no assunto desde Viète. Ele fez algumas importantes descobertas sobre a natureza e formação de equaçõese ele foi o primeiro que decompôs equações em seus fatores simples, mas como ele não reconheceu as raízes imaginárias, ele não conseguiu provar que cada equação poderia ser então decomposta. Seu trabalho neste ramo da Matemática foi exposto em sua *Artis Analyticae Praxis* (1631).

William Holder (1616-1698) foi educado em Pembroke Hall, Cambridge, onde se tornou mestre e, posteriormente, membro em 1640. Ele se tornou reitor da Blechington em 1646 e foi eleito membro da *Royal Society* em 1663. É nessa época que ele se dedicou ao ensino de jovens surdos e mudos e esboçou seus métodos em um tratado *Elements of*

[23]Ilha pertencente ao Reino Unido localizada a cerca de 2.000 km ao sul da África do Sul.

*Speech (*1669). Envolveu-se em uma longa disputa com John Wallis sobre a prioridade de ter ensinado o jovem surdo e mudo, Alexander Popham, a falar.

O matemático escossês, John Napier (1550-1617), é mais lembrado por seu *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Uma desccrição maravilhosa da lei dos logaritmos) de 1614, três anos mais tarde, ele publicou *Rabdologiae,* seu *Numeratio per Virgulas*, no qual ele explicou vários métodos engenhosos de cálculo por meio de "varas" ou "ossos". Napier é geralmente considerado como sendo o inventor da maneira moderna de escrever frações decimais, e na *Rabdologiae*, ele livremente usa a vírgula e o ponto final para indicar a posição do ponto decimal. As seguintes obras foram publicadas após a sua morte: *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* (1619); *Arithmetica Logarithmica* (1624); *De Arte Logistica* (1842).

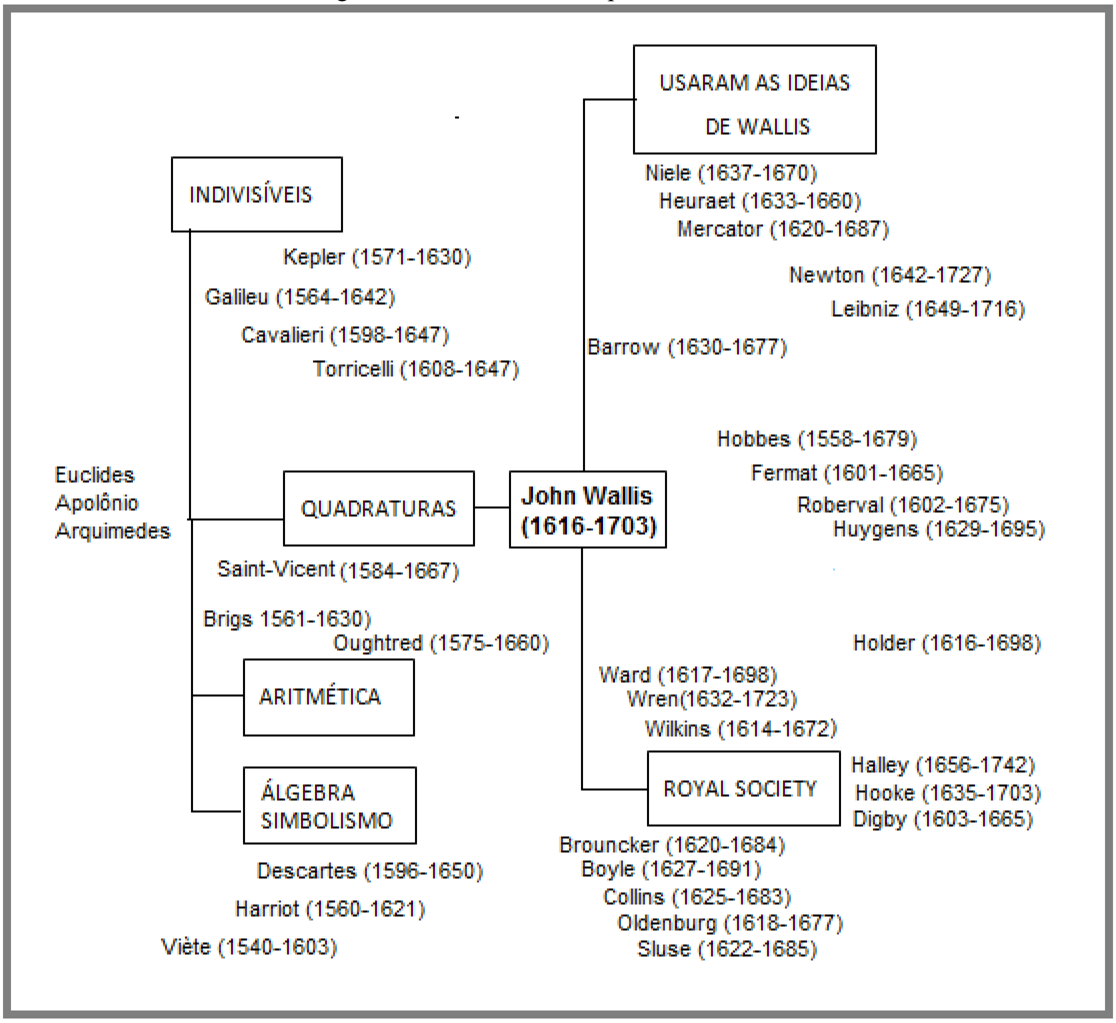
Em seu *Arithmetica Infinitorum*, Wallis também faz referência aos trabalhos de Euclides, Apolônio e Arquimedes; em muitas ocasiões ele lança mão dos resultados obtidos por esses matemáticos para justificar algumas de suas afirmações ou amparar o seu método de indução. Essas inserções de Wallis, nos deixa transparecer que ele tinha um profundo conhecimento dos trabalhos destes matemáticos e isso revela o seu o seu conhecimento do domínio na perspectiva de Csikszentmihalyi (1998).

Na perspectiva do Modelo de Sistemas de Criatividade de Csikszentmihalyi, que é apoiado na interação sistêmica entre indivíduo, domínio e campo, John Wallis é o nosso indivíduo. Na seção 3.1 abordamos principalmente o contexto social, cultural e intelectual da Inglaterra nos anos que sucederam a nomeação de Wallis para a cadeira de *Savilian Professsor of Geometry* em Oxford. Isso nos garantiu um panorama de como estava constituído o campo em que ele era membro. Mostramos, também, de que forma o contexto social e o plano filosófico; fundamentado nas ideias da reforma protestante, desenvolvimento social e na filosofia natural, prepararam o terreno fértil para que Wallis produzisse suas ideias inovadoras.

Como um indivíduo na perspectiva de Csikszentmihalyi, John Wallis demonstrou interesse pelo domínio da Matemática e buscou conhecer suas regras e procedimentos simbólicos através do estudo, quase que independente das instituições inglesas de educação, dos trabalhos de Oughtred, Cavalieri, Torricelli e outros já citados neste capítulo. Isso caracteriza a transmissão de informação dentro de uma cultura e a constituição da experiência do indivíduo.

O principal campo que Wallis fazia parte girava em torno da formação da *Royal Society,* este era constituído por intelectuais que se reuniam para discutir diversos assuntos, dentre eles a filosofia natural. Entretanto, matemáticos de outros países também constituíram esse campo, como alguns citados na seção 3.4. Esse campo além de encorajar a produção de novas ideias foi responsável por selecionar as novidades produzidas por Wallis que mereceram ser preservadas no domínio. Com base nas informações apresentadas e discutidas anteriormente, elaboramos o esquema a seguir.

Figura 30 – Domínio e campo de John Wallis



Fonte: Elaborado pela autora.

No próximo capítulo, apresentamos um exame de parte da obra *Arithmetica Infinitorum* (1656), a partir de um recorte que acreditamos ser potencialmente adequado para explicitar as ideias de John Wallis acerca de alguns conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral presentes na obra. Deste exame, trazemos, posteriormente, a indicação e discussão de uma abordagem pedagógica para a introdução da integral utilizando as ideias de Wallis. Utilizamos a versão em inglês, de Jaqueline A. Stedall, de 2004, *The Arithmetic of Infinitesimals*, além de que, por várias vezes, fomos amparados pelo original em Latim na busca de uma melhor compreensão de algumas ideias matemáticas**.** Além disso, exporemos as algumas implicações para o ensino de Matemática, usando como referência algumas abordagens para o ensino de conceitos que se direcionam para conceito de integral.

4. ARITHMETICA INFINITORUM

Neste capítulo, apresentamos a obra A*rithmetica Infinitorum* (1656) de John Wallis. Nesta obra, por meio da abordagem dos problemas de quadratura, Wallis trata da quadratura do círculo. Para alcançar seu objetivo ele propõe um novo método, onde experimenta, observa e tira conclusões matemáticas. Ele partiu das ideias dos indivisíveis de Cavalieri, entretanto usou técnicas e métodos, baseados em termos analíticos, e conseguiu a quadratura e cubatura de certos tipos de curvas e superfícies. O que, para época, era extremamente original. Ele dá um tratamento aritmético a problemas que seus predecessores só haviam discorrido de forma geométrica. Também, exibimos um pouco da repercussão do A*rithmetica Infinitorum* junto à comunidade científica da época, além de pontuarmos a importância da obra para o desenvolvimento das teorias de Cálculo e Análise. Nas seções 4.2 e 4.4 indicamos alguns temas emergentes desta obra com potencial pedagógico para o ensino de conteúdos da componente curricular de Cálculo, como pro exemplo, o ensino de integral.

Wallis também é lembrado por ter sido o matemático que introduziu, pela primeira vez na literatura matemática, o símbolo ∞ que figurou pela primeira vez na literatura matemática em sua obra *De sectionibus conicis nova methodo expositis tractatus*, de 1655. Inpirados neste fato elaboramos a nuvem de palavras a seguir.

Figura 31 - Nuvem de palavras centralizadoras deste capítulo.

Fonte: Elaborada pela autora em 17/10/2016, programa disponível em www.tagxedo.com

4.1 Ideias de John Wallis

Após a nomeação de John Wallis para a cadeira de *Savilian Professor of Geometry* em Oxford em 1649, ele embarcou na construção de dois trabalhos que foram publicados quase que simultaneamente. O trabalho de Wallis que primeiramente se destacou no circuito matemático da época foi *De sectionibus conicis nova methodo expositis tractatus*, de 1655, que é considerado inovador, por pelo menos uma característica notável para a época: tratar as cônicas como curvas planas e não como seções de um cone tridimensional; encontrando equações para a hipérbole, elipse e parábola em notação diferente da de Descartes (Stedall, 2001, p. 16). O livro é composto por duas partes, na primeira Wallis relembra as proposições fundamentais relativas às cônicas que foram ensinadas por Apolônio, e na segunda parte ele apresenta como todas essas propriedades poderiam ser determinadas sem referência ao cone. Além disso, nesse trabalho Wallis introduz o símbolo de infinito ∞ para o infinito e frequentemente o manipulava como se as regras comuns da aritmética pudessem ser aplicadas a ele. Os resultados obtidos neste trabalho ecoaram por quase toda sua produçãomatemática posterior.

O segundo é A*rithmetica Infinitorum* (1656), onde ele, abordando o problema da quadratura do círculo, consegue uma representação por produto infinito[24] para $\frac{4}{\pi}$:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times9\times11\times11\times13\times13\times\dots}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times10\times10\times12\times12\times14\times\dots}$$

Muito mais foi conseguido com essa obra, as técnicas e o método desenvolvido por ele foi sem dúvida uma importante contribuição para a Matemática. Wallis mostrou como problemas clássicos de quadratura podiam ser manipulados aritmeticamente e algebricamente e ao fazer isso ele deu um impulso a mudança do pensamento geométrico para o algébrico na segunda metade do século XVII.

Desde 1645, John Wallis frequentava o grupo que discutia a nova filosofia que por meio de uma sistemática de experimentações e observação da natureza buscavam um conhecimento novo que poderia alcançar muito mais que as verdades familiares colocadas pelas autoridades antigas. Do ponto de vista do trabalho de um matemático andar na trilhas dessa filosofia representa um grande desafio, a Matemática da época estava

---

[24] A representação para o número π encontrada por Wallis é um produto finito, mas o número π é um número real.

tradicionalmente apoiada em verdades aristotélicas e euclideanas com uma abordagem proeminentemente geométrica, com a sua lógica das deduções. A Matemática como era praticada, parecia não dar espaço para a exploração do novo e desconhecido, ou mesmo das maravilhas escondidas (ALEXANDER, 2001). Galileu, Cavalieri e Torricelli cavalgaram por esse campo quando investigaram a estrutura interna de uma figura geométrica com uma abordagem geométrica. O pensamento essencial de Wallis foi ver como as ideias de Cavalieri podem ser tratadas aritmeticamente, ele comparou áreas de figuras planas com a coleção de linhas que constituíam essas figuras. O nosso matemático deu passos importantes em resposta a essa visão, não apenas em busca de explorar o íntimo e desconhecido dos objetos matemáticos, mas também em busca de um método que atendesse ao propósito de incluir a Matemática como um domínio da nova filosofia.

Na obra *Arithmetica Infinitorum,* Wallis se debruça sobre o problema da quadratura e sua intenção era resolver a quadratura do círculo, uma das principais ferramentas foram séries infinitas, que ele soube lidar muito bem. Na tentativa para alcançar seu objetivo ele propõe um novo método e faz da sua mesa um laboratório, onde ele experimenta, observa, busca padrões e tira conclusões matemáticas. As ideias dos indivisíveis de Cavalieri podem ser citadas como as que mais influenciaram a produção deste trabalho de Wallis (DENNIS; CONFREY, 2000, p. 17), mas usando técnicas e métodos, baseados em termos analíticos, ele conseguiu a quadratura e cubatura de certos tipos de curvas e superfícies. O que, para época, era extremamente original. Originalidade esta que se tornaria uma marca de sua obra. Ele dá um tratamento aritmético de problemas que seus predecessores só haviam discorrido de forma geométrica. Ainda assim, ele não abra mão da principal ferramenta utilizada nas provas geométricas, que são a razão e proporção. E Stedall (2001), assegura que Wallis foi mais inovador em seus métodos, especialmente em sua tentativa de lidar com processos infinitos e quantidades infinitesimais.

Outro ponto de relevância de seu trabalho foi o uso de um método de investigação por ele denominado de indução, método este que não deve ser entendido como a indução Matemática finita moderna. Ele considerava certo número de casos particulares, extraia as relações existentes e suplementava sua observação, com uma extensão na forma de uma regra explícita, que era formalizada como uma proposição mais geral, sem uma prova dedutiva. Sobre sua indução, Wallis declarou que era o método mais simples de investigação (STEDALL, 2004, p. 13). No âmbito da nossa pesquisa, salientamos que a indução de Wallis pode ser vista como fruto de uma atividade mental humana na busca de conhecer e procurar uma confirmação para as suas conjecturas por meio do uso da fecundidade criativa. Muitos dos resultados apresentados no livro já eram conhecidos, entretanto, o livro não era só para mostrar um método para demonstrar resultados já conhecidos, mas para mostrar uma forma de investigação.

Wallis utilizou múltiplas representações em sua obra, tais como: tabelas numéricas, álgebra e geometria. Estas representações são fontes de importantes elementos a serem considerados na ampla formação de um licenciando em Matemática. As tabelas foram utilizadas, principalmente, para expressar a síntese de seus resultados, em algumas delas haviam lacunas, que Wallis procurou preencher por interpolação nas proposições posteriores. Seu tratamento indutivo, associado a sua intuição Matemática frequentemente correta, desencadeou muitos resultados matemáticos interessantes. Sua obra é de grande importância para o desenvolvimento daquilo que hoje conhecemos por Cálculo Diferencial e Integral, influenciando, de maneira significativa, expoentes da física e da Matemática, incluindo Isaac Newton e Leonhard Euler.

4.2 A Obra *Arithmetica Infinitorum*

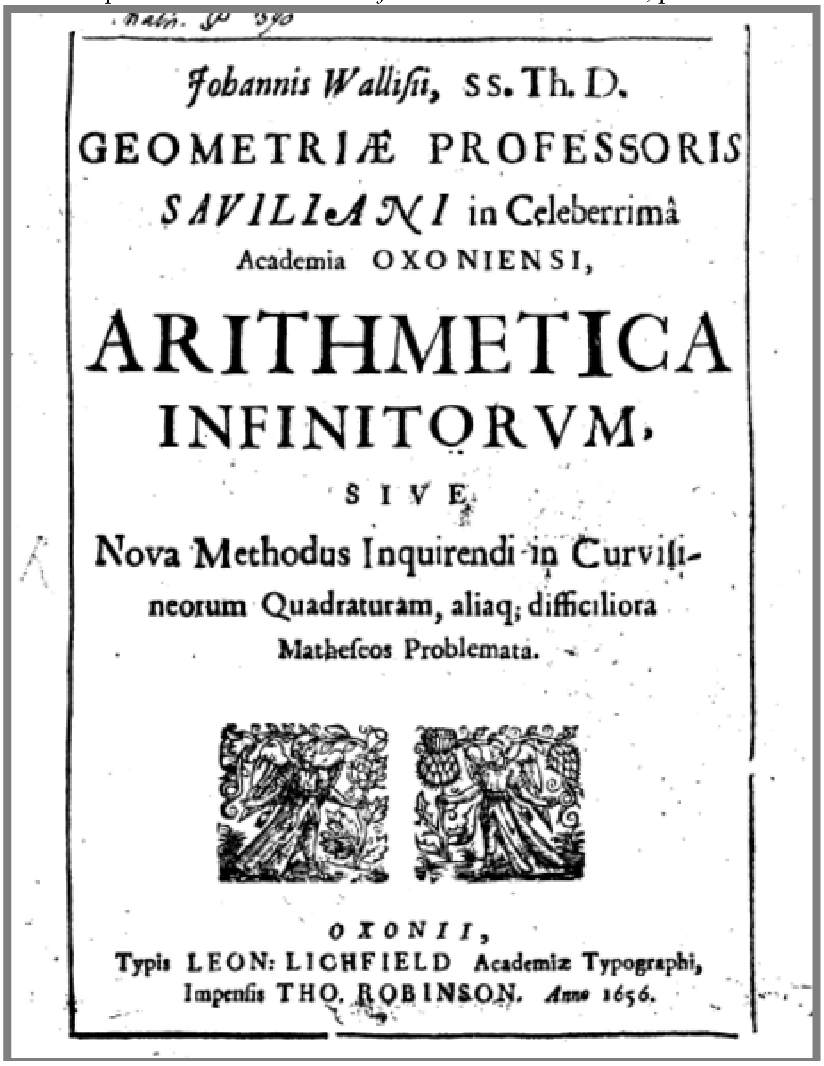
Nosso propósito, nesta seção, é colocar nossa versão em língua portuguesa, de um bom número de proposições contidas em A*rithmetica Infinitorum* (1656). Foi realizado um trabalho que partiu da tradução em língua inglesa, *The Arithmetic of Infinitesimals* (A aritmetica dos infinitesimais), de Jaqueline Stedall (2004), recorrendo, em algumas ocasiões, ao original em latim. De posse de nossa versão da obra, pudemos selecionar aquelas proposições que nos permitissem trazer para esta pesquisa um recorte interessante, dirigido pelo nosso interesse de examinar o exercício criativo de John Wallis no momento da concepção da obra. Intercalamos com algumas proposições de Wallis, importantes intervenções trazendo nossas impressões, entendimentos e apontamentos.

Uma versão em português para o título completo da obra é "*A Aritmética de Infinetesimais,* ou um Novo Método para Investigar a Quadratura de Curvas, e Outros Problemas Matemáticos Mais Difíceis".

> A mudança de geometria para aritmética estava no coração do método de Wallis: ele viu que pela soma, não apenas de progressões aritméticas, mas por sequência de quadrados, cubos e potências mais altas, que poderia determinar áreas (ou volumes) limitadas por uma variedade de curvas. Assim, a geometria dos indivisíveis de Cavalieri se transforma na aritmética de somas infinitas, daí o título: *Arithmetica Infinitorum*. (STEDALL, 2001, p. 3)

O objetivo principal da obra era inventar métodos gerais de quadratura.

Figura 32 - Capa da obra A*rithmetica Infinitorum* de John Wallis, publicada em 1656.



Johannis Wallisii, SS. Th. D.
GEOMETRIÆ PROFESSORIS
SAVILIANI in Celeberrimâ
Academia OXONIENSI,
ARITHMETICA
INFINITORUM,
SIVE
Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaq; difficiliora Mathefeos Problemata.

OXONII,
Typis LEON: LICHFIELD Academiæ Typographi,
Impensis THO. ROBINSON. *Anno* 1656.

Fonte: https://ia802709.us.archive.org/10/items/ArithmeticaInfinitorum/ArithmeticaInfinitorum.pdf. Acesso em: 18 out. 2014.

O livro de John Wallis foi publicado duas vezes, em 1656 e 1695, e foi dedicado ao seu professor William Oughtred. Em sua dedicatória Wallis apresenta uma descrição de alguns autores antigos e seus trabalhos, caracterizando assim, um trabalho de historiografia. A obra possui no total 194 proposições que ele subdivide principalmente em Lemas, Teoremas e Corolários. Além disso, o autor acrescenta 42 comentários, em muitos deles Wallis comentava sobre o trabalho de seus antecessores nesses tópicos.

Damos, no início, uma breve descrição dos conteúdos do conjunto de proposições que julgamos ser suficiente para demonstrar o método de e investigação utilizado por Wallis e a direção que tomará o restante do conjunto de proposições. Além disso, optamos por apresentar apenas parte das proposições, por admitir que o texto se tornaria muito extenso. Escolhemos uma sequência de proposições que se encerram em um resultado importante alcançado por Wallis nesta obra. Esta escolha consciente foi feita a partir da panorâmica percebida ao estudarmos o conjunto completo de proposições.

Figura 33 – Descrição das 64 primeiras proposições de *Arithmetica Infinitorum.*

Lemas	Teoremas	Corolários	Descrição
1	2		Ele apresenta sem uma demonstração dedutiva a fórmula $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ Para n natural positivo.
		3, 4	Ele conclui que a proporção da área de um triângulo e o retângulo circunscrito é $\dfrac{1}{2}$
		5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18	Desejando mostrar a solidez de seu método de indução o aplica na espiral de Arquimedes
19	20, 21		Com argumentos numéricos ele conclui que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0+1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+(n-1)^2+n^2}{\underbrace{n^2+n^2+n^2+n^2+n^2+\ldots+n^2}_{n+1\ vezes}}=\dfrac{1}{3}$
		22, 23	Ele conclui que a proporção da área de uma meia parábola e o retângulo circunscrito é $\dfrac{1}{3}$
		22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38	Desejando mostrar a solidez e aplicabilidade do seu método de indução o aplica em figuras e sólidos geométricos, tais como, cone, pirâmide e espiral.
39	40, 41		Com argumentos numéricos ele conclui que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0+1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+(n-1)^3+n^3}{\underbrace{n^3+n^3+n^3+n^3+n^3+\ldots+n^3}_{n+1\ vezes}}=\dfrac{1}{4}$.
		42	Ele conclui que a razão da área de uma meia cúbica e retângulo circunscrito é $\dfrac{1}{4}$.

43			Utilizando o seu método de indução ele enuncia: $\lim_{n\to\infty} \frac{0+1^4+2^4+3^4+4^4+\ldots+(n-1)^4+n^4}{\underbrace{n^4+n^4+n^4+n^4+n^4+\ldots+n^4}_{n+1 \ vezes}} = \frac{1}{5}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{0+1^5+2^5+3^5+4^5+\ldots+(n-1)^5+n^5}{\underbrace{n^5+n^5+n^5+n^5+n^5+\ldots+n^5}_{n+1 \ vezes}} = \frac{1}{6}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{0+1^6+2^6+3^6+4^6+\ldots+(n-1)^6+n^6}{\underbrace{n^6+n^6+n^6+n^6+n^6+\ldots+n^6}_{n+1 \ vezes}} = \frac{1}{7}$.
	44		Ele utiliza o seu método de indução e sintetiza os resultados encontrados anteriormente em uma tabela. Ele aponta que $\lim_{n\to\infty} \frac{0^k+1^k+2^k+3^k+4^k+\ldots+n^k}{\underbrace{n^k+n^k+n^k+n^k+n^k+\ldots+n^k}_{n+1 \ vezes}} = \frac{1}{k+1}$, para valores naturais de k de 1 a 10.
		45	Ele relaciona os resultados da tabela da proposição 44 com curvas $y = x^k$ sendo k um natural positivo.
46,47			Ele conclui $\lim_{n\to\infty} \frac{0^k+1^k+2^k+3^k+4^k+\ldots+n^k}{\underbrace{n^k+n^k+n^k+n^k+n^k+\ldots+n^k}_{n+1 \ vezes}} = \frac{1}{k+1}$, para qualquer valor de k natural.
		48, 49, 50	Ele aplica os seus resultados aritméticos em figuras e superfícies geométricas.
51			Ele propõe que o seu método de investigação pode ser utilizado para investigar $\lim_{n\to\infty} \frac{0^k+1^k+2^k+3^k+4^k+\ldots+n^k}{\underbrace{n^k+n^k+n^k+n^k+n^k+\ldots+n^k}_{n+1 \ vezes}} = \frac{k}{k+1}$ Para k número fracionário da forma $\frac{1}{i}$ sendo i um natural positivo maior que 1.
		52	Ele relaciona os sólidos à curvas obtidas quando corta esses sólidos com planos.

53			Ele enuncia o seu resultado para $\lim_{n\to\infty}\frac{0^k+1^k+2^k+3^k+4^k+\ldots+n^k}{\underbrace{n^k+n^k+n^k+n^k+n^k+\ldots+n^k}_{n+1\ vezes}}=\frac{k}{k+1}$ Para k número fracionário da forma $\frac{1}{i}$ sendo i um natural positivo maior que 1.
	54		Ele utiliza o seu método de indução e sintetiza os resultados encontrados anteriormente em uma tabela. Ele aponta que $\lim_{n\to\infty}\frac{0^k+1^k+2^k+3^k+4^k+\ldots+n^k}{\underbrace{n^k+n^k+n^k+n^k+n^k+\ldots+n^k}_{n+1\ vezes}}=\frac{k}{k+1}$, para valores naturais de k de 1 a 10.
		55, 56, 57	Ele relaciona o seu resultado aritmético com figuras e superfícies geométricas.
58			Baseado em seus resultados anteriores ele sugere que o seu método de investigação é útil para investigar $\lim_{n\to\infty}\frac{0^k+1^k+2^k+3^k+4^k+\ldots+n^k}{\underbrace{n^k+n^k+n^k+n^k+n^k+\ldots+n^k}_{n+1\ vezes}}$ Sendo k um número fracionário.
	59		Ele indica em uma tabela os valores para $\lim_{n\to\infty}\frac{0^k+1^k+2^k+3^k+4^k+\ldots+n^k}{\underbrace{n^k+n^k+n^k+n^k+n^k+\ldots+n^k}_{n+1\ vezes}}$ Sendo k da forma $\frac{j}{i}$ com $1\le j\le 10$ e $1\le i\le 10$.
		60	Ele relaciona os resultados da tabela da proposição 59 com curvas $y=x^k$ sendo k da forma $\frac{j}{i}$ com $1\le j\le 10$ e $1\le i\le 10$. Estas curvas são as geratrizes de superfícies.
		61	Com os resultados obtidos e sintetizados na proposição 59, Wallis declara que não apenas a quadratura da parábola se torna conhecida, mas também a quadratura de qualquer curva da forma:

			$y = x^k$, sendo k da forma $\frac{j}{i}$ com $1 \le j \le 10$ e $1 \le i \le 10$
		62	Wallis amplia a alcance do seu método para sólidos geométricos.
	64		Após o seu caminho Wallis conclui: $\lim_{n\to\infty} \frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + 4^k + \ldots + n^k}{\underbrace{n^k + n^k + n^k + n^k + n^k + \ldots + n^k}_{n+1 \text{ vezes}}} = \frac{1}{k+1}$.

Fonte: Elaborado pela autora.

Quase a totalidade restante das proposições está subdividida entre lemas, teoremas e corolários vejam na figura 34. A finalidade da maior parte dos corolários é exemplificar a consistência do método aritmético de Wallis, ele escolheu alguns resultados com demonstrações geométricas já conhecidas e os provou com o seu método. Uma característica que ressaltamos é que ele, ao longo do seu texto, vai progressivamente abandonando os corolários. Isso pode considerado como indícios de uma autoconfiança em seu método. As proposições da figura 34 não serão examinadas em detalhes neste texto, mas após o exame da proposição 64, apresentamos uma panorâmica sobre esses resultados.

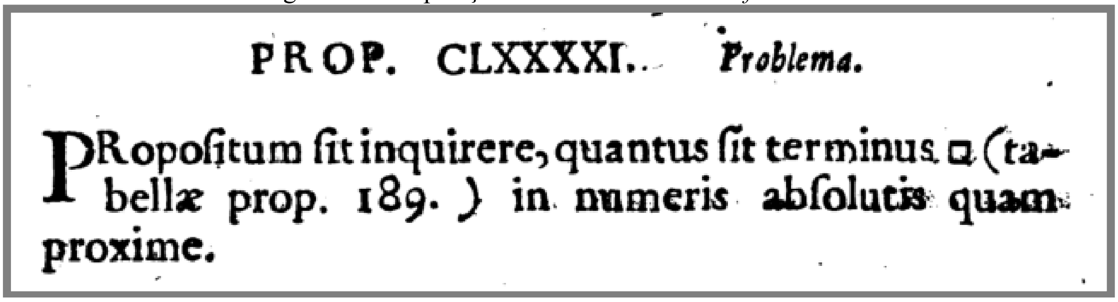
Figura 34 – Classificação das proposições do *Arithmetica Infinitorum*.

Lemas	Teoremas	Corolários
171, 176, 179, 182	65, 66, 73, 102, 103, 104, 105, 106, 108, 111, 114, 116, 117, 118, 125, 126, 127, 128, 130, 131, 132, 133, 139, 141, 143, 144, 145, 146, 147, 150, 152, 153, 154, 155, 158, 159, 160, 161, 166, 167, 169, 170, 172, 175, 177, 178, 180, 181, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 192, 193, 194	67, 68, 69, 70, 71, 72, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 107, 109, 110, 111, 112, 113, 115, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 129, 134, 135, 136, 137, 138, 140, 142, 148, 149, 151, 156, 157, 162, 163, 164, 165, 168, 173, 174

Fonte: Elaborado pela autora

A figura 35, a seguir, é a proposição 191 do livro *Arithmetica Infinitorum* que Wallis denominou de problema e diz "propõe-se investigar, qual é o valor de termo ☐ (na tabela da proposição 189) tão perto quanto se queira usando números inteiros" (STEDALL, 2004, P. 164, tradução nossa). A imagem da figura 35 aparece o símbolo ☐ e este símbolo, utilizado por Wallis, representa a aproximação obtida por ele para o número $\frac{4}{\pi}$.

Figura 35 - Proposição 191 do *Arithmetica Infinitorum.*


PROP. CLXXXXI. Problema.

PRopoſitum ſit inquirere, quantus ſit terminus ☐ (tabellæ prop. 189.) in numeris abſolutis quam proxime.

Fonte: https://ia802709.us.archive.org/10/items/ArithmeticaInfinitorum/ArithmeticaInfinitorum.pdf. Acesso em: 18 out. 2014.

No comentário logo após esta proposição, Wallis apresenta:

$$\frac{4}{\pi}=\frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times9\times11\times11\times13\times13\times\ldots}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times10\times10\times12\times12\times14\times\ldots}$$

Vamos esclarecer alguns detalhes sobre a apresentação da nossa versão nesta seção. Para uma melhor apresentação das proposições escolhidas para o nosso exame, estabelecemos que a nossa versão para o português de cada proposição se encontra dentro de um quadro, em seguida apresentamos o nosso exame:

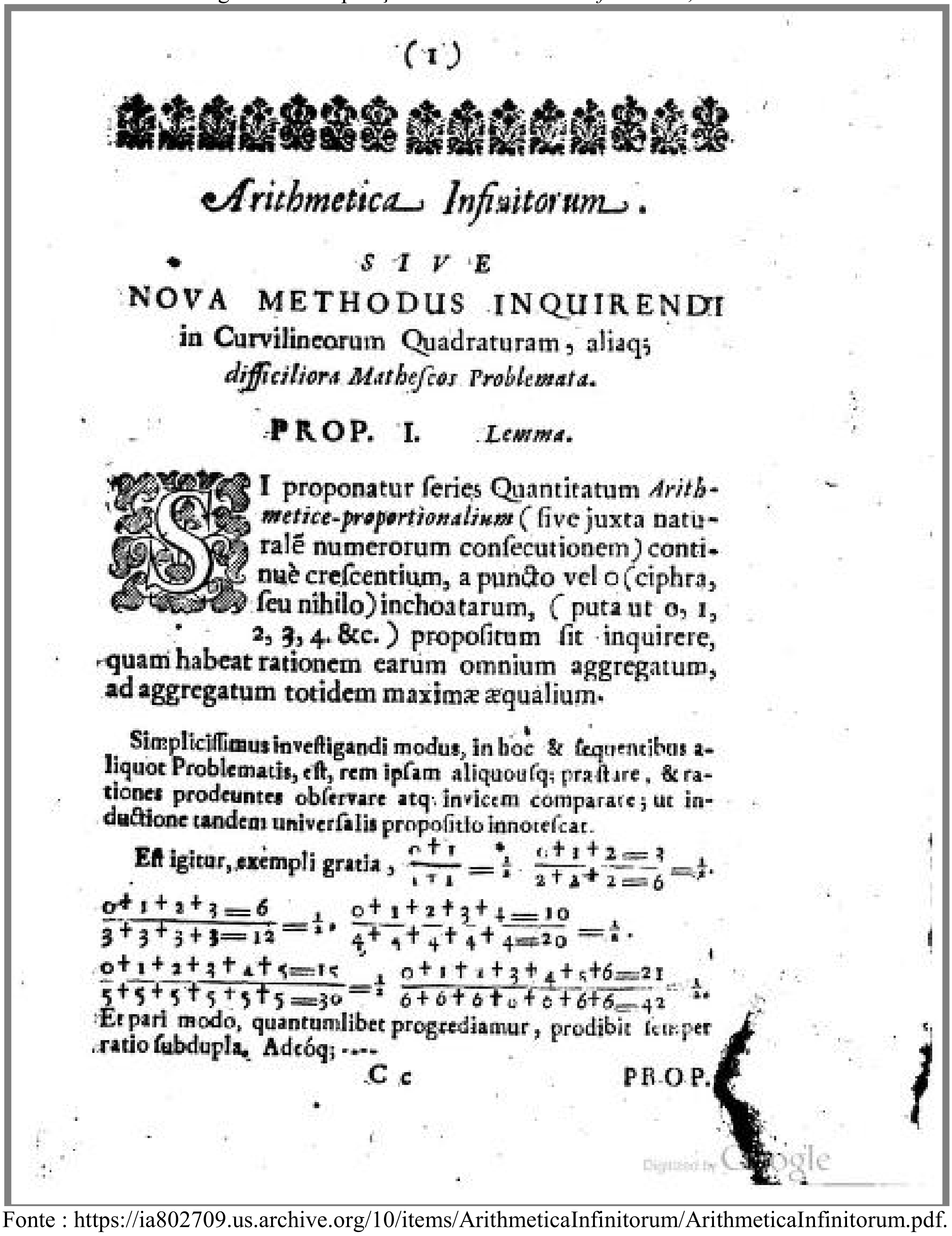
- Observemos na figura 36 que o tamanho da letra escolhida para o enuciado das proposições é maior do que a escolhida para a prova argumentativa dada por Wallis. Para deixar essa diferença clara na apresentação da nossa versão para as proposições do livro *Arithmetica Infinitorum* de 1656, estabelecemos que onde Wallis utilizou letras maiores, ou seja, os enunciados das proposições, utilizamos negrito e a prova argumentativa apresentada por ele ulilizamos letras sem negrito.

- Também utilizamos as figuras originais do livro *Arithmetica Infinitorum* de Wallis (1656).

- Inevitavelmente, ao quadro de algumas proposições foram partidas pela quebra de página. Quando isso acontecer indicamos com a palavra "continua" no canto direito inferior do quadro.

Ao debruçarmos sobre *Arithmetica Infinitorum*, percebemos, de maneira muito clara, já nas duas primeiras proposições, o uso de seu método. O que ilustra bem um dos objetivos de Wallis com esta obra.

Figura 36 - Proposição 1 de *Arithmetica Infinitorum*, 1656.



(1)

Arithmetica Infinitorum.

SIVE

NOVA METHODUS INQUIRENDI in Curvilineorum Quadraturam, aliaq; *difficiliora Mathescos Problemata.*

PROP. I. *Lemma.*

SI proponatur series Quantitatum *Arithmetice-proportionalium* (sive juxta naturalē numerorum consecutionem) continuè crescentium, a puncto vel o (ciphra, seu nihilo) inchoatarum, (puta ut o, 1, 2, 3, 4. &c.) propositum sit inquirere, quam habeat rationem earum omnium aggregatum, ad aggregatum totidem maximæ æqualium.

Simplicissimus investigandi modus, in hoc & sequentibus aliquot Problematis, est, rem ipsam aliquousq; præstare, & rationes prodeuntes observare atq; invicem comparare; ut inductione tandem universalis propositio innotescat.

Est igitur, exempli gratia, $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$. $\frac{0+1+2=3}{2+2+2=6} = \frac{1}{2}$.

$\frac{0+1+2+3=6}{3+3+3+3=12} = \frac{1}{2}$. $\frac{0+1+2+3+4=10}{4+4+4+4+4=20} = \frac{1}{2}$.

$\frac{0+1+2+3+4+5=15}{5+5+5+5+5+5=30} = \frac{1}{2}$ $\frac{0+1+2+3+4+5+6=21}{6+6+6+6+6+6+6=42} = \frac{1}{2}$.

Et pari modo, quantumlibet progrediamur, prodibit semper ratio subdupla. Adeóq; ----

Cc PROP.

Fonte : https://ia802709.us.archive.org/10/items/ArithmeticaInfinitorum/ArithmeticaInfinitorum.pdf. Acesso em: 18 out. 2014.

Proposição 1: Lema

Seja uma série de quantidades, em proporção aritmética (como uma sequência de números naturais), continuamente crescente, começando a partir de um ponto ou de 0 (isto é, nada, ou zero), assim como 0, 1, 2, 3, 4, ...; proposta para investigar qual a razão entre a soma de todos os termos (das quantidades dadas) e a soma com o mesmo número de termos, todos iguais ao maior (daquelas quantidades).

O método mais simples de investigação, neste e em vários problemas que se seguem, é exibir a coisa até certo ponto, e observar as relações produzidas e compará-las umas às outras, para que a extensão de uma proposição geral possa torna-se conhecida por indução.

Por conseguinte o caso, por exemplo, que:

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}.\quad \frac{0+1+2=3}{2+2+2=6}=\frac{1}{2}.$$

$$\frac{0+1+2+3=6}{3+3+3+3=12}=\frac{1}{2}.\quad \frac{0+1+2+3+4=10}{4+4+4+4+4=20}=\frac{1}{2}.$$

$$\frac{0+1+2+3+4+5=15}{5+5+5+5+5+5=30}=\frac{1}{2}\quad \frac{0+1+2+3+4+5+6=21}{6+6+6+6+6+6+6=42}=\frac{1}{2}.$$

E, da mesma maneira, por mais longe que prossigamos, será produzida sempre a mesma razão de uma metade (ou meio). Portanto:

(STEDALL, 2002, p. 13-14, tradução nossa)

EXAME DA PROPOSIÇÃO 1:

Logo no início dessa proposição Wallis diz: "Seja uma *série* de *quantidades*, em *proporção aritmética* (como uma *sequência*de números naturais)" e aqui devemos esclarecer algumas terminologias usadas por ele. A palavra *série,* aqui utilizada pelo autor, exprime a intenção de fazer uma soma de uma quantidade finita de "quantidades". O uso da palavra "quantidade", o que para nós, atualmente, está fundado na abordagem abstrata dada para números, não era conhecida naquela época. As "quantidades" as quais Wallis se refere estão mais próximas da noção de quantidade, no sentido de contagem, ou grandezas. O termo "proporção aritmética" está meio em desuso atualmente, mas para o autor indica, de uma forma geral, que a diferença de quaisquer dois números consecutivos é a mesma constante, isto é: *Se* a, b, c, d estão em proporção aritmética, então $b-a=c-b=d-c$. E como exemplo que ele toma os números naturais.

Wallis considera, para casos particulares, uma lista finita de quantidades em proporção aritmética continuamente crescente, começando a partir de um ponto ou de 0, (0, 1, 2, ..., n). Ele busca uma razão entre a soma dessas quantidades e a soma de n+1 vezes a maior quantidade dessa lista:

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2=3}{2+2+2=6}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3=6}{3+3+3+3=12}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3+4=10}{4+4+4+4+4=20}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3+4+5=15}{5+5+5+5+5+5=30}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2+3+4+5+6=21}{6+6+6+6+6+6+6=42}=\frac{1}{2}$$

Observamos que Wallis leva em consideração números não negativos e, de acordo com Stedall (2004, p.13, nota 3), ao assegurar que a série começa "[...] a partir de um ponto ou de 0", ele nos revela que os termos da série podem ser grandezas geométricas ou números, deixando implícito a sua intenção em relacionar esses dois tipos de grandezas. Nesta proposição, ele investiga seis casos particulares, como pudemos ver. Ele experimenta para observar.

Proposição 2: Teorema

Se for tomada uma série de quantidades, em proporção aritmética (como uma sequência de números naturais), continuamente crescente, começando a partir de um ponto ou de 0, quer seja finita ou infinita em número (não há razão para distinção), esta estará para a série, com o mesmo número de termos todos iguais ao maior, como 1 está para 2.

Ou seja, se o primeiro termo é 0, o segundo 1 (de outra forma um ajuste deve ser aplicado) e o último é l,

continua

a soma deverá ser $\frac{(l+1)}{2}l$ (para o caso em que o número de termos seja $l+1$). Ou (colocando m para o número de termos, qualquer que seja o segundo termo) $\frac{1}{2}ml$.

(STEDALL, 2004, p. 14, tradução nossa)

EXAME DA PROPOSIÇÃO 2:

Nesta proposição, Wallis conclui o que na notação atual é escrito como

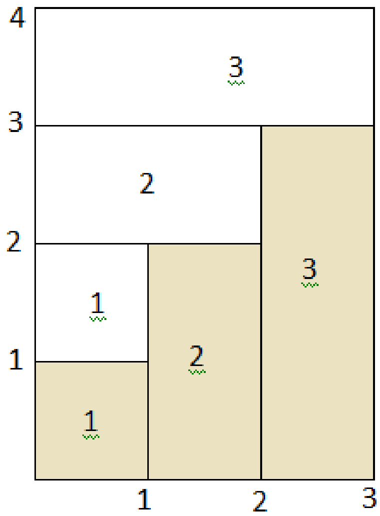
$$\frac{0+1+2+3+\ldots+l}{\underbrace{l+l+l+l+\ldots+l}_{l+1\ vezes}}=\frac{\sum_{i=0}^{l} i}{l\,(l+1)}=\frac{1}{2}.$$

Uma generalização. Não é disponibilizada uma demonstração, mas é colocado um comentário acerca do número de termos da série, assegurando que o resultado é preservado se considerado uma série "[...] quer seja finita ou infinita em número" (STEDALL, 2004, p.14) de termos. Ele escreve a regra, indicando que, se em uma série cujo primeiro termo é 0, o segundo é 1 e o último é *l*, a soma será $\frac{(l+1)}{2}l$. Neste caso, o número de termos considerado foi $l+1$. Propõe, ainda, que em uma série cujo número de termos é igual a *m*, qualquer que seja o segundo termo, a soma será $\frac{m}{2}l$. O ponto que sobressai na observação de Wallis é que ele conserva o primeiro termo igual a um ponto ou 0, mantém o maior termo igual a *l*, além da proporção aritmética continuamente crescente, mas retira a relevância do valor do segundo termo. Isso abre margem para muitos pontos de investigação. Derivado dessa proposição temos a fórmula para a soma dos inteiros de 1 a l, em notação atual:

$$\sum_{i=0}^{l} i=\frac{l\,(l+1)}{2},$$

e segundo Stedall (2001) este resultado em si não era novo, mas no *Arithmetica infinitorum* ele apareceu pela primeira vez impresso como uma derivação e não como uma simples declaração.

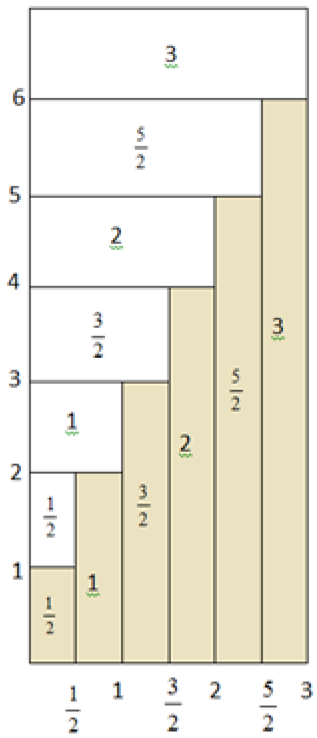
Podemos explorar a ideia de Wallis, como no seguinte exemplo: Fixando o primeiro termo igual a zero e o maior termo igual a 3 no numerador, se seguirmos a indicação da proposição 1, o número de termos será igual a 4. Utilizaremos uma representação geométrica (DENNIS; CONFREY, 2000) para destacar a razão entre a área da região em destaque pela área do retângulo:



Ou seja, temos a seguinte razão: $\dfrac{0+1+2+3}{3+3+3+3}=\dfrac{6}{3.4}=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$

Ao retirar a relevância do segundo termo, como indicado na proposição 2, Wallis nos deixa a possibilidade de explorar a razão, tomando números positivos não inteiros em proporção aritmética, abrindo espaço, por exemplo, para uma introdução ao conceito de somas parciais de séries. Vejamos: fixando o maior termo igual a 3 e, no numerador, o primeiro termo igual a 0. Agora, podemos sugerir uma nova subdivisão da base do retângulo, aumentando o número de termos para 7, em proporção aritmética, colocamos, na próxima figura, o seguinte exemplo:

$$\frac{0+\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}+3}{3+3+3+3+3+3+3}=\frac{\frac{21}{2}}{3.7}=\frac{\frac{21}{2}}{21}=\frac{1}{2}$$



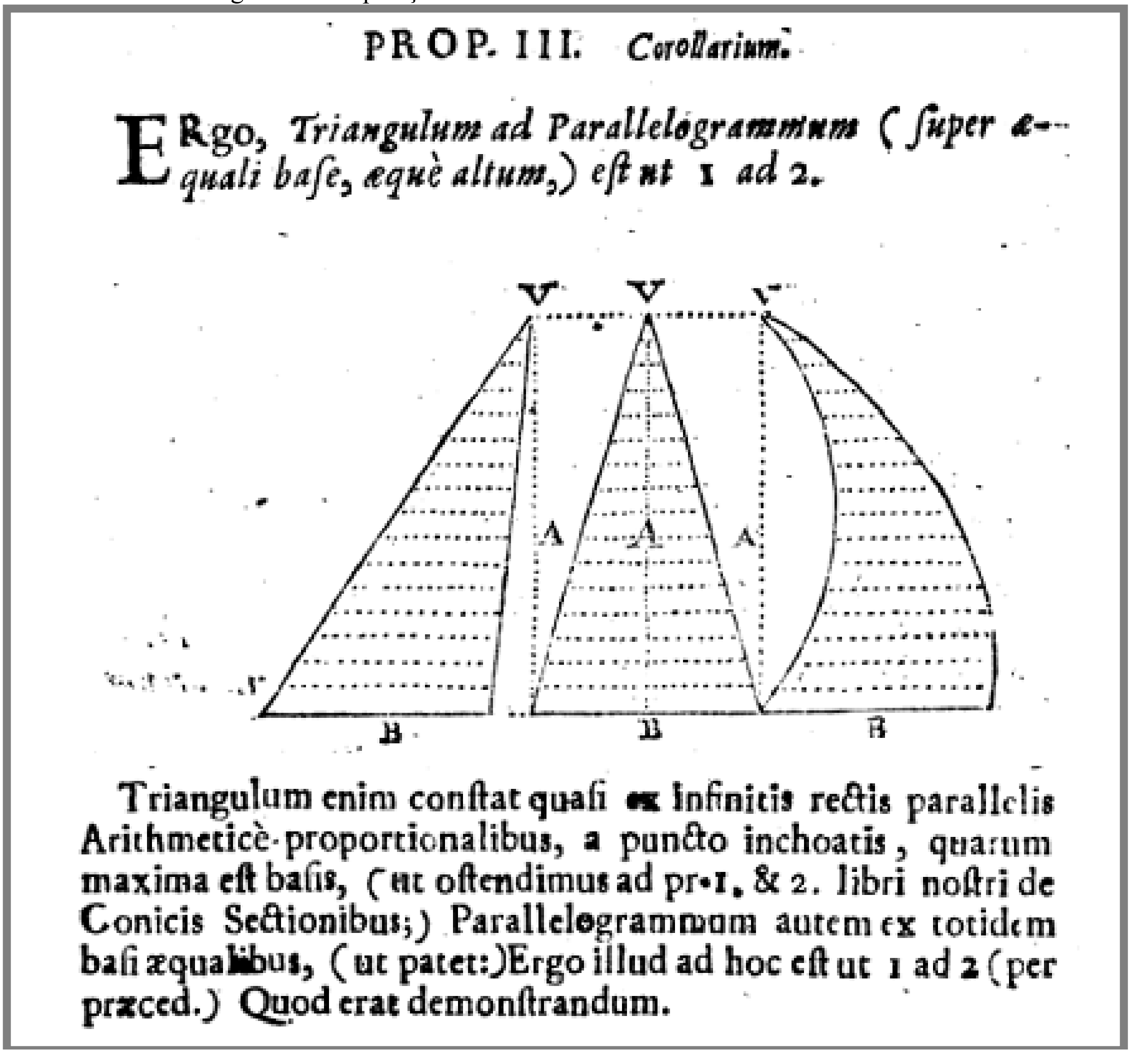
Em mais uma etapa, ainda com o maior termo igual a 3 e tomando o número de termos igual a 13:

$$\frac{0+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+1+\frac{5}{4}+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+2+\frac{9}{4}+\frac{5}{2}+\frac{11}{4}+3}{3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3}=\frac{\frac{78}{4}}{3.13}=\frac{\frac{39}{2}}{39}=\frac{1}{2}.$$

No nosso exemplo, consideramos números racionais, o que abre a oportunidade de explorarmos a proposição buscando a natureza desses números. Encontraríamos o mesmo resultado se tomássemos o último termo dessa série como sendo um número racional? E se fosse irracional? Como seriam os termos intermediários? Essas questões levantadas são uma grande oportunidade de investigação. O que Wallis nos permite fazer a cada etapa é aumentar a quantidade de termos da série em proporção aritmética continuamente crescente, tornando a distância entre os termos cada vez menor. Ao dizer que não há justificativa para distinção do número de termos ser finito ou infinito, ele sugere que a razão se manterá em qualquer dos dois casos. Indicando que o número de termos seja infinitamente grande, a distância entre os termos da série se transformará em um valor pequeno (infinitesimal), em sua notação: $\frac{1}{\infty}$, que não era comum para a época e não foi de imediato aceito no meio matemático. De acordo com Scott (1981), Wallis foi um dos primeiros matemáticos a perceber o significado dos termos *infinito* e *infinitamente* *pequeno*. Mas aqui transparece mais um tópico que pode ser abordado com os estudantes, a noção de partição que é tão necessária para a integral de Riemann.

A proposição 3, será ilustrada pello original em latim e em seguida apresentaremos nossa versão para o português.

Figura 37: Proposição 3 do livro Arithmetica Infinitorum de 1656.



PROP. III. *Corollarium.*

E*Rgo, Triangulum ad Parallelogrammum (ſuper æquali baſe, æquè altum,) eſt ut* 1 *ad* 2.

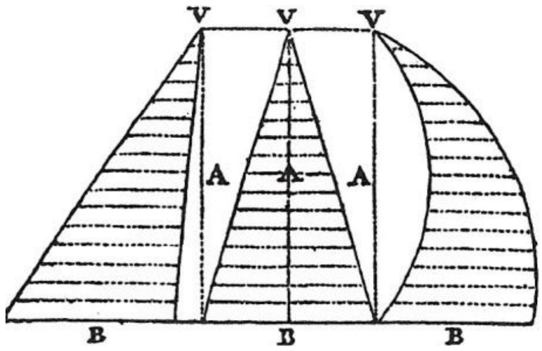
Triangulum enim conſtat quaſi ex Infinitis rectis parallelis Arithmeticè proportionalibus, a puncto inchoatis, quarum maxima eſt baſis, (ut oſtendimus ad pr. 1. & 2. libri noſtri de Conicis Sectionibus;) Parallelogrammum autem ex totidem baſi æqualibus, (ut patet:) Ergo illud ad hoc eſt ut 1 ad 2 (per præced.) Quod erat demonſtrandum.

Fonte : https://ia802709.us.archive.org/10/items/ArithmeticaInfinitorum/ArithmeticaInfinitorum.pdf. Acesso em: 18 out. 2014.

Proposição 3: Corolário

Assim, um triângulo está para um paralelogramo, com bases iguais e da mesma altura, como 1 está para 2.

continua



cUm triângulo consistirá, por assim dizer, de um número infinito de linhas paralelas em proporção aritmética, começando de um ponto, a qual a maior é a base (como mostramos nas Proposições 1 e 2 do nosso livro *On Conic Sections*); e o paralelogramo consistirá do mesmo número de linhas iguais à base (do triângulo, como é claro). Assim, o primeiro estará para o segundo como 1 está para 2 (a partir do que se passou anteriormente). O que era para ser mostrado.

(STEDALL, 2004, p. 14-15, tradução nossa)

EXAME DA PROPOSIÇÃO 3:

O procedimento que inclui aplicações de seu método em geometria foi largamente utilizado para provar a solidez do método. A Proposição 3, que ilustra bem esse fato, é apresentada como um corolário da Proposição 2 e afirma que a área de um triângulo está para a área de um paralelogramo, com a mesma base e altura, como 1 está para 2. O que Wallis deixa transparecer nesta proposição podemos escrever assim,

área do triângulo : área do paralelogramo =
= soma das linhas do triângulo : soma das linhas do paralelogramo =
= soma de uma progressão aritmética : soma do maior termo tomado o mesmo número de vezes dos termos da progressão.

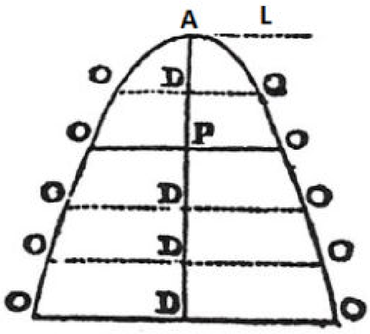
Observamos a relação entre uma linguagem geométrica e uma aritmética.

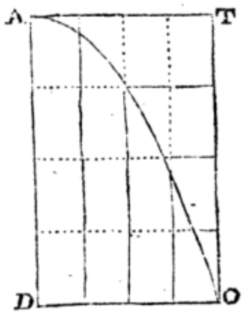
Esse resultado já era conhecido e sua demonstração, até então, era totalmente geométrica. Em sua demonstração, Wallis considera o triângulo consistindo de um número infinito de linhas paralelas em proporção aritmética, começando de um ponto e indo até a maior, que é a linha da base. Além disso, ele toma o paralelogramo consistindo do mesmo número de linhas com comprimento igual ao da base (Figura anterior, de *Arithmetica Infinitorum*).

Esta forma de conceituar o triângulo e o paralelogramo é, em parte, oriunda das ideias de indivisível de Cavalieri, que são puramente geométricas, mas expostas nas Proposições 1 e 2 do trabalho *De sectionibus conicis* de Wallis (1655), considerando que as linhas podem ser somadas. Assim ele afirma que a somas das linhas que constituem o triângulo está para a soma das linhas que constituem o paralelogramo, como 1 está para 2. Um ponto marcante da sua obra é o trabalho com razões e proporções.

Proposição 4: Corolário

Da mesma forma, uma pirâmide parabólica ou conóide está para um prisma ou cilindro (com bases iguais e de mesma altura), como 1 está para 2.





Uma pirâmide parabólica ou conóide consistirá, por assim dizer, de um número infinito de planos em proporção aritmética, começando de um ponto, indo até o maior que é a base (como mostramos na proposição 9 do *On Conic Sections*), e o prisma ou cilindro com o mesmo número de planos iguais ao da base (como é claro). Portanto, pela Proposição 2, o primeiro estará para o segundo, como 1 está para 2.

(STEDALL, 2004, p. 15-16, tradução nossa)

EXAME DA PROPOSIÇÃO 4:

Esta proposição é mais uma aplicação da proposição 2. Wallis, de forma similar aos argumentos utilizados na proposição 3, mostra que o volume de um parabolóide está para o volume do cilindro, com a mesma base e altura, como 1 está para 2 . (Aqui, talvez por descuido, ele não inclui a hipótese de paralelismo entre os planos no trecho "*Uma pirâmide* *parabólica ou conóide consistirá, por assim dizer, de um número infinito de planos em proporção aritmética"*).

O corolário mostra a ideia de Cavalieri, na versão de Wallis, sobre uma parábola ser constituída por linhas paralelas. A proposição explora o volume de um sólido e ele apresenta apenas o desenho de uma parábola, com isso podemos observar que ele poderia ter a concepção de que o parabolóide é um sólido de revolução, como vemos na figura da proposição anterior. Essa proposição vai na direção da cubatura desses sólidos.

Ressaltamos que os resultados apresentados nas Proposições 3 e 4 não apresentam fórmulas para a área ou volume e sim razões entre figuras planas ou sólidos. Esse estilo de abordagem foi usado por Wallis em todas as proposições que versam sobre áreas de figuras planas ou volume de sólidos.

As proposições de 5 a 18 tratam da área da espiral de Arquimedes. Todas essas 13 proposições são denominadas por Wallis de corolário, os resultados apresentados já são conhecidos e o autor as incluiu com a intenção de mostrar a consistência do seu método.

Seguindo a diante, na trilha do método de Wallis, apresentamos:

Proposição 19: Lema

Dada uma série de quantidades, que são como os quadrados de proporções aritméticas (ou como uma sequência de números quadrados), aumentando continuamente, começando de um ponto ou de 0 (assim como 0, 1, 4, 9, etc), deixa proposta a seguinte pergunta: Qual é sua relação (razão) para uma série com o mesmo número de termos iguais ao maior (dos quadrados)?

"A investigação pode ser feita pelo método de indução (como na Proposição 1) e teremos:

$$\frac{0+1=1}{1+1=2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

$$\frac{0+1+4=5}{4+4+4=12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+4+9=14}{9+9+9+9=36}=\frac{7}{18}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18}$$

continua

$$\frac{0+1+4+9+16=30}{16+16+16+16+16=80}=\frac{3}{8}=\frac{9}{24}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$$

$$\frac{0+1+4+9+16+25=55}{25+25+25+25+25+25=150}=\frac{11}{30}=\frac{1}{3}+\frac{1}{30}$$

$$\frac{0+1+4+9+16+25+36=91}{36+36+36+36+36+36+36=252}=\frac{13}{36}=\frac{1}{3}+\frac{1}{36}$$

e assim por diante.

A relação resultante é sempre maior do que um terço, ou $\frac{1}{3}$. Além disso, o excesso diminui continuamente quando o número de termos é aumentado (assim: $\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{18},\frac{1}{24},\frac{1}{30},\frac{1}{36}$, etc.); o denominador da fração ou razão claramente aumenta, em cada passo, em seis (como é claro), de modo que o excesso sobre o $\frac{1}{3}$, da dada razão, transforma-se em 1 (um) sobre seis vezes o número de termos após o 0. Portanto:

(STEDALL, 2004, p. 26-27, tradução nossa)

EXAME DA PROPOSIÇÃO 19:

Nesta proposição, Wallis inicia a investigação da soma de quantidades que são quadrados de proporções aritméticas, continuamente crescentes, começando de um ponto ou de 0 (Como 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, etc). Em seu método, primeiramente ele fazia uma investigação empírica e considerou as seguintes razões:

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

$$\frac{0+1+4}{4+4+4}=\frac{5}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9}=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18}$$

$$\frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16}=\frac{30}{80}=\frac{3}{8}=\frac{9}{24}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$$

$$\frac{0+1+4+9+16+25}{25+25+25+25+25+25}=\frac{55}{150}=\frac{11}{30}=\frac{1}{3}+\frac{1}{30}$$

$$\frac{0+1+4+9+16+25+36}{36+36+36+36+36+36+36}=\frac{91}{252}=\frac{13}{36}=\frac{1}{3}+\frac{1}{36}.$$

Observamos que Wallis tinha um grande potencial para cálculos e busca de relações ou padrões, uma característica de decifradores.

Proposição 20: Teorema

Dada uma série de quantidades, que são como quadrados de proporções aritméticas (ou como uma sequência de números quadrados), aumentando continuamente, começando de um ponto ou de 0, sua relação (razão) para uma série com o mesmo número de termos iguais ao maior (quadrado) excederá $\frac{1}{3}$, e o excesso será a razão de 1 para seis vezes o número de termos após o 0, ou da raiz quadrada do primeiro termo após o 0 para seis vezes a raiz quadrada do maior termo.

Isto é, (se para o primeiro termo após o 0 é colocado 1, e para o último l).

$$\frac{l+1}{3}l^2 + \frac{l+1}{6l}l^2.$$

Ou, denotando o número de termos por m, e o último por l, é claro, da proposição anterior, temos que:

$$\frac{m}{3}l^2 + \frac{m}{6m-6}l^2.$$

Além disso, com o número de termos crescendo, o que excede $\frac{1}{3}$ diminui continuamente, de tal maneira que, finalmente, tornar-se-á menos que qualquer quantidade atribuível (como é claro); se proceder ao infinito, ele (o excesso) irá desaparecer completamente. Portanto:

(STEDALL, 2004, p. 27, tradução nossa)

EXAME DA PROPOSIÇÃO 20:

Note que no trecho acima Wallis, de maneira clara, introduz a noção daquilo que hoje chamamos de "passar ao limite". Mas ele chega a esse resultado não com a noção moderna de limite, mas sim pelos valores encontrados na exploração da proposição 19. Aqui, substituiremos l por n para uma maior adequação a notação mais atual. Podemos observar que, de uma investigação detalhada da proposição 19, resultou a proposição 20, que explicita uma fórmula para a razão da soma de quantidades. Mais especificamente, a razão da soma de quadrados de quantidades em proporção aritmética, continuamente crescentes, começando de um ponto ou de 0, pela soma do maior termo da primeira soma, na mesma quantidade de vezes.

Se 0 é o primeiro termo, 1 é o segundo e o último é n^2, em termos da notação atual, podemos escrever:

$$\frac{0+1+4+9+16+25+36+\ldots+n^2}{\underbrace{n^2+n^2+n^2+n^2+n^2+n^2+n^2+\ldots+n^2}_{n+1\ vezes}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}$$

ou

$$0+1+4+9+16+25+36+\ldots+n^2=\frac{n+1}{3}n^2+\frac{n+1}{6n}n^2.$$

Proposição 21: Teorema

Se for proposta uma série infinita de quantidades, que são como quadrados de proporções aritméticas (ou como uma sequência de números quadrados), aumentando continuamente, começando de um ponto ou de 0, ela estará para uma série de mesmo número de termos, iguais ao maior (dos quadrados), como 1 estará para 3.

Isto está claro, pelo que foi obtido nas proposições anteriores.

(STEDALL, 2004, p. 27, tradução nossa)

EXAME DA PROPOSIÇÃO 21:

Nesta proposição, ele argumenta sobre o número de termos na soma do numerador dizendo que "se este (número de termos) continua para o infinito", o valor $\frac{1}{6n}$ "irá desaparecer completamente". A colocação de Wallis deixa transparecer uma percepção acerca da relação $\frac{c}{n}$, onde c é uma constante e $n \to \infty$, talvez revelando o seu entendimento sobre esse tipo de limite. Esta proposição é, de fato, uma formalização das proposições 19 e 20, sustentadas pelo argumento sobre $\frac{1}{6n}$ e ele explicita (nesta proposição):

> Dada uma série infinita de quantidades que são quadrados de proporções aritméticas (ou como uma sequência de números quadrados), continuamente crescente, começando de um ponto ou de 0, esta está para a série do mesmo número de termos iguais ao maior (dos quadrados), como 1 está para 3. (STEDALL, 2004, p.27)

A partir dessas três proposições desencadeiam uma sucessão de corolários, proposições de 22 a 37, que fornecem uma base para a cubatura de cones e pirâmides e resultados sobre a espiral de Arquimedes. Destas exibiremos a 22 e a 23.

Proposição 22: Corolário

Consequentemente, um cone ou pirâmide, está para um cilindro ou prisma (sobre a mesma, ou com igual, base e de alturas iguais), assim como 1 está para 3.

Para supor o cone, ou pirâmide, ser composto(a) de um número infinito de planos paralelos semelhantes, constituindo uma série de quadrados de proporções aritméticas, dos quais o menor pode ser suposto um ponto, o maior a base dele(a) mesmo(a), e, pelo dito na proposição 6 do *On Conic Sections*, o cilindro, ou prisma, é composto do mesmo número de (planos) iguais ao maior (como é claro). Portanto, a razão é de 1 para 3, pela proposição anterior.

(STEDALL, 2004, p. 28, tradução nossa)

EXAME DA PROPOSIÇÃO 22:

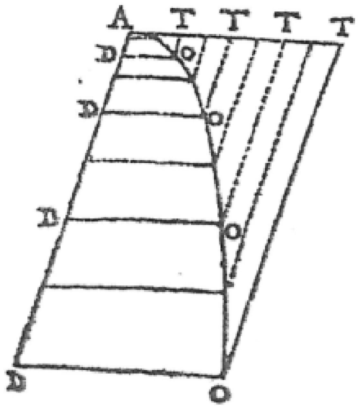
Na proposição encontramos uma reformulação aritmetizada para a prova do seguinte resultado: um cone está para um cilindro ou uma pirâmide está para um prisma, de bases e alturas iguais, como 1 está para 3. O recurso que sustenta a prova de Wallis é considerar um cone, uma pirâmide, um cilindro e um prisma, como sendo constituídos por infinitos planos paralelos e esses sólidos são resultantes das somas desses infinitos planos.

Onservamos que ele recorre ao seu livro *On Conic Sections* (1555) para dar essa explicação.

Proposição 23: Corolário

Da mesma forma, o complemento da metade da parábola (como na figura AOT, que com a metade dessa mesma parábola completa um paralelogramo) está para o paralelogramo TD (na mesma, ou igual, base e de igual altura), assim como 1 está para 3. (E, consequentemente, a metade de si mesma está para o mesmo paralelogramo, como 2 está para 3.)

continua



Visto que na figura AOT, o vértice é A, o diâmetro AT, a base TO, e as outras (várias) paralelas a ele, como desejar, (entre a base e o vértice) TO, TO, etc. Uma vez (pela proposição 21 do *On Conic Sections*) as linhas retas DO, DO, etc, são como as raízes quadradas das linhas AD, AD, etc. Por outro lado, AD, AD, etc, isto é, TO, TO, etc, serão como os quadrados do mesmo DO, DO, etc, isto é AT, AT, etc. Portanto, a figura completa AOT (constituída por um número infinito de linhas retas TO, TO, etc, os quadrados das proporções aritméticas AT, AT, etc) serão, para o paralelogramo de igual altura TD (constituído do mesmo número de linhas retas iguais ao maior de mesma), como 1 será para 3, pela Proposição 21 (o que era para ser provado). E, consequentemente, a metade da parábola AOD (o restante do paralelogramo) está para o mesmo paralelogramo como 2 está para 3.

(STEDALL, 2004, p. 28, tradução nossa)

EXAME DA PROPOSIÇÃO 23:

De forma análoga, nesta proposição, Wallis mostra que o complemento de uma meia parábola no paralelogramo está para o paralelogramo, como 1 está para 3. E, consequentemente, a meia parábola está para o paralelogramo, como 2 está para 3. Notemos que estes resultados podem ser obtidos com o uso, atual, de integrais. Aqui podemos perceber o embrião daquilo que vemos hoje na definição formal de integrais via particionamento, gerando uma soma de áreas de retângulos ajustados à curva.

Proposição 39: Lema

Dada uma série de quantidades, que são como os cubos de proporções aritméticas (ou como uma sequência de números cubos) continuamente crescente, começando de um ponto ou de 0 (isto é, como 0, 1, 8, 27, 64, etc), deixa proposta a seguinte pergunta: Qual é a sua razão para uma série com o mesmo número de termos iguais ao maior (dos cubos)?

continua

A investigação pode ser feita pelo método de indução (como nas Proposições 1 e 19). E teremos:

$$\frac{0+1=1}{1+1=2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{0+1+8=9}{8+8+8=24}=\frac{3}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

$$\frac{0+1+8+27=36}{27+27+27+27=108}=\frac{4}{12}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+8+27+64=100}{64+64+64+64+64=320}=\frac{5}{16}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$$

$$\frac{0+1+8+27+64+125=225}{125+125+125+125+125+125=750}=\frac{6}{20}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$$

$$\frac{0+1+8+27+64+125+216=441}{216+216+216+216+216+216+216=1512}=\frac{7}{24}=\frac{1}{4}+\frac{1}{24}.$$

E assim por diante.

A razão resultante é sempre maior do que um quarto, ou $\frac{1}{4}$. Além disso, o excesso é continuamente decrescente, com o crescimento do número de termos, como $\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{12},\frac{1}{16},\frac{1}{20},\frac{1}{24},$ etc; o denominador de cada fração (ou razão) aumenta, claramente, em cada etapa, em 4 (unidades); de modo que este excesso sobre um quarto (ou $\frac{1}{4}$), da razão resultante, transforma-se em uma razão de 1 para 4 vezes o número de termos depois do 0. Portanto:

(STEDALL, 2004, p. 39, tradução nossa)

EXAME DA PROPOSIÇÃO 39:

A proposição é uma investigação acerca da soma dos cubos de uma sequência em proporção aritmética:

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{0+1+8}{8+8+8}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

$$\frac{0+1+8+27}{27+27+27+27}=\frac{36}{108}=\frac{4}{12}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+8+27+64}{64+64+64+64+64}=\frac{100}{320}=\frac{5}{16}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$$

$$\frac{0+1+8+27+64+125}{125+125+125+125+125+125}=\frac{225}{750}=\frac{6}{20}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$$

$$\frac{0+1+8+27+64+125+216}{216+216+216+216+216+216+216}=\frac{441}{1512}=\frac{7}{24}=\frac{1}{4}+\frac{1}{24}.$$

O método é o mesmo utilizado nas proposições 1 e 19. Desse desenvolvimento podemos assegurar que:

$$\frac{0+1+8+27+64+125+216+\ldots+n^3}{\underbrace{n^3+n^3+n^3+n^3+n^3+\ldots+n^3}_{n+1\ vezes}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4n}.$$

Wallis investigou, em casos particulares, razões da forma

$$\frac{0^k+1^k+2^k+3^k+4^k+\ldots+n^k}{\underbrace{n^k+n^k+n^k+n^k+n^k+\ldots+n^k}_{n+1\ vezes}}.$$

Foram tomados $k=1$, $k=2$ e $k=3$, com suas conclusões apresentadas nas proposições 2, 21 e 39, respectivamente. Seguindo com a ideia do seu método de indução, Wallis coloca:

Proposição 40: Teorema

Proposta uma série de quantidades, que são como os cubos de proporções aritméticas (ou como uma sequência de números cubos) continuamente crescente, começando de um ponto ou de 0, sua razão para a série com o mesmo número de termos iguais ao maior (dos cubos) excederá $\frac{1}{4}$, e o excesso será na uma razão de 1, para 4 vezes o número de termos depois do 0, ou da raiz cúbica do primeiro termo depois de 0, para 4 vezes a raiz cúbica do maior termo.

Assim:

$$\frac{l+1}{4}l^3+\frac{l+1}{4l}l^3 \quad \textbf{ou} \quad \frac{m}{4}l^3+\frac{m}{4l}l^3=\frac{1}{4}ml^3+\frac{1}{4}ml^2$$

Claro, do que foi feito anteriormente.

Aqui, também, denotando o número de termos por m, e o último por l.

continua

Uma vez que, por outro lado, como o número de termos cresce, o que excede sobre $\frac{1}{4}$ é continuamente decrescente, de tal maneira que, finalmente, isso se tornará menor que qualquer quantidade notável (como é claro); se proceder ao infinito, ele (o excesso) irá desaparecer completamente. Portanto:

(STEDALL, 2004, p. 39-40, tradução nossa)

EXAME DA PROPOSIÇÃO 40:

Aqui, também, denotando o número de termos por m, e o último por l. Notamos que nesta proposição Wallis usa novamente a noção de passar ao limite. Isto mostra que ele dominava e fazia o uso natural desse procedimento que envolvia a noção de limites no infinito.

Proposição 41: Teorema

Dada uma série infinita de quantidades, que são como os cubos de proporções aritméticas (ou como uma sequência de números cubos) continuamente crescente, iniciando de um ponto ou de 0, ela estará para a série com o mesmo número de termos iguais ao maior (dos cubos) , assim como 1 está para 4.

Claro do que foi feito anteriormente.

(STEDALL, 2004, p. 40, tradução nossa)

EXAME DA PROPOSIÇÃO 41:

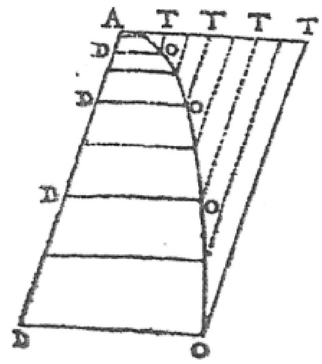
A proposição 41, assim como era a 40, é uma formalização para a investigação empírica realizada anteriormente.

Proposição 42: Corolário

Portanto, o complemento da metade da parábola cúbica[25] AOT está para o paralelogramo TD (de mesma, ou igual, base e de igual altura), assim como 1 está para 4. (E, consequentemente, a metade desta mesma parábola cúbica está para o mesmo paralelogramo, como 3 está para 4.)

continua

[25] A parábola cúbica é a curva $y = x^3$.



Considere a meia parábola cúbica AOD (na qual o diâmetro é AD, as ordenadas DO, DO, etc) e o complemento AOT (do qual o diâmetro é AT, as ordenadas TO, TO, etc). Portanto, visto que (pela proposição 45 do *On Conic Sections*) as linhas retas DO, DO, etc ou seus iguais AT, AT, etc, estão para as raízes cúbicas das linhas AD, AD, etc, ou seus iguais TO, TO, etc, estão para o cubo das linhas AT, AT, etc. Portanto a figura completa AOT (consistindo de um número infinito de linhas TO, TO, etc que são como o cubo de linhas aritmeticamente proporcionais AT, AT, etc) está para o paralelogramo TD (consistindo do mesmo número de linhas iguais ao maior TO dele próprio) pelo que foi feito anteriormente, como 1 está para 4. (O que era para ser mostrado). E, consequentemente, a metade da parábola cúbica AOD (o restante do paralelogramo) está para o mesmo paralelogramo como 3 está para 4.

(STEDALL, 2004, p. 40, tradução nossa)

EXAME DA PROPOSIÇÃO 42:

A proposição é um corolário e afirma que o complemento da meia cúbica está para o paralelogramo, de bases e alturas iguais, como 1 está para 4. E, consequentemente, a cúbica está para o mesmo paralelogramo, como 3 está para 4. Note que no trecho “consistindo de um número infinito de linhas TO, TO, etc”, Wallis computa infinito como se ele fosse, de fato, um número ou uma quantidade. Isto é interessante, pois nos faz pensar que ele tinha a noção de que não se pode simplesmente considerar a região plana como sendo a reunião de todas as retas (neste caso, não-indexável ou não-enumerável), pois desse modo ao computar a soma das áreas, obteria zero como resposta (mesmo ressalvando as questões de sigma-adividade). Ou seja, é bastante louvável, que tanto Wallis, quanto Cavaliere (numa visão geométrica), tenha tido a capacidade de perceber que a teoria funcionaria tomando uma sucessão de retângulos encaixantes, aproximantes da região, indexados, de bases infinitamente pequenas (ou infinitesimais).

Proposição 43: Lema

Pelo mesmo método pode ser encontrada a razão de uma série infinita de quantidades que são como a quarta potência, quinta potência, sexta potência, etc, de proporções aritméticas, começando de um ponto ou 0, para uma série do mesmo número de termos iguais a maior (daquelas potências). Isto é, para a quarta potência, será como 1 para 5, para a sexta potência, como 1 para 6, para a sexta potência como 1 para 7. E assim por diante.

Está claro, tendo experimentado que as razões descobertas pela abordagem da indução aproximam-se continuamente daqueles valores, que a diferença, finalmente, transforma-se menor que qualquer quantidade atribuível, e, portanto, continuando para o infinito ela (a diferença) desaparecerá.

Não estou anexando demonstrações geométricas trabalhosas, mas, no entanto, se alguém exigi-las, este deverá buscar tal entretenimento, pela inscrição e circunscrição de figuras, ou ainda apresentar outra demonstração (tal como Arquimedes fez nas proposições 10 e 11 de *On Spiral Lines)*, mostrando que a razão não é nem mais nem menos que qualquer quantidade atribuível. Para mim, o que eu produzi parece (para este fim) ser suficiente, seguindo o método de Cavaliere dos indivisíveis (porque eu acho que já está feita (a prova) a partir da geometria).

Note, no entanto, que essas demonstrações que fiz e que melhor adéquam-se às figuras inscritas, devem ter como suposição de que o primeiro termo seja 0. Por outro lado, se alguém preferir representar as figuras como circunscritas, isto pode ser alterado fazendo apenas o primeiro termo igual a 1.

Deve-se notar, também, que as razões que buscamos por indução, para essas séries de maiores potências (como a quarta) de proporções aritméticas, são mais complexas do que as anteriores.

Assim, para a quarta potência:

$$\frac{l+1}{5}l^4 + \frac{l+1}{10l}3l^4 + \frac{l+1}{30l^2}l^4 + \frac{-l-1}{30l^3}l^4 .$$

Ou $$\frac{m}{5}l^4 + \frac{3m}{10l^2}l^4 + \frac{m}{30l^3}l^4 - \frac{m}{30l^3}l^4 = \frac{1}{5}ml^4 + \frac{3}{10}ml^3 + \frac{1}{30}l^2 - \frac{1}{30}ml$$

(Isto é, colocando o primeiro termo 0, o segundo 1, o maior l e o número de termos $m = l+1$.

Para a quinta potência:

$$\frac{l+1}{6}l^5 + \frac{l+1}{3l}l^5 + \frac{l+1}{12l}l^5 + \frac{-l-1}{12l^3}l^5 .$$

Ou $$\frac{m}{6}l^5 + \frac{m}{3l}l^5 + \frac{m}{12l^2}l^5 - \frac{m}{12l^3}l^5 = \frac{1}{6}ml^5 + \frac{1}{3}ml^4 + \frac{1}{12}ml^3 - \frac{1}{12}ml^2$$

Para sexta potência (ou quadrados de cubos):

continua

$$\frac{l+1}{7}l^6+\frac{5l+5}{14}l^5+\frac{l+1}{7}l^4-\frac{l+1}{7}l^3-\frac{l+1}{42}l^2-\frac{l+1}{42}l\ .$$

Ou $\frac{1}{7}ml^6+\frac{5}{14}ml^5+\frac{1}{7}ml^4-\frac{1}{7}ml^3-\frac{1}{42}ml^2+\frac{1}{42}ml$

E da mesma forma naqueles que se seguem, como será demonstrado na proposição 182.
Mas, (o que é suficiente para nós aqui) eles continuamente aproximam-se mais estreitamente para a razão requerida, de tal forma que, finalmente, a diferença transforma-se menor que qualquer quantidade atribuível.

(STEDALL, 2004, p. 41-42, tradução nossa)

EXAME DA PROPOSIÇÃO 43:

Nesta Proposição, Wallis começa a generalizar as suas observações acerca da razão, concluindo os casos das curvas $y=x^4$, $y=x^5$ e $y=x^6$. Ele abandona a experimentação como feitas nas proposições 1, 19 e 39 e apresenta uma generalização. A resposta a pergunta incial de Wallis a respeito da razão vai tomando contorno definido pelo seu método de investigação. Vale ressaltar o comentário dele nesta proposição, ele diz não acrescentar uma demonstração geométrica por achar que o seu método é suficiente e segue o método dos indivisíveis de Cavalieri (Pela coincidência dos resultados obtidos).

Neste lema Wallis, pela primeira vez, apresenta de forma clara uma hipótese sobre as figuras planas que podem ser investigadas pelo seu método "Note, no entanto, que essas demonstrações que fiz e que melhor adéquam-se às figuras inscritas, devem ter como suposição de que o primeiro termo seja 0." (STEDALL, 2004, p. 41-42, tradução nossa)

Proposição 44: Teorema

Portanto, considerada uma série infinita de quantidades, começando de um ponto ou de 0, continuamente crescente de proporções aritméticas (a qual eu chamo uma série de laterais, ou primeira potência) ou de quadrados, cubos, biquadrados, etc (as quais eu chamo de série de segunda potência, terceira potência, quarta potência, etc); a razão das séries completas, para uma série de mesmo número de termos iguais a maior (daquelas potências), será como segue na tabela. Isto é:

continua

Æqualium	$\frac{1}{1}$	Velut 1 ad	1
Primanorum	$\frac{1}{2}$		2
Secundanorum	$\frac{1}{3}$		3
Tertianorum	$\frac{1}{4}$		4
Quartanorum	$\frac{1}{5}$		5
Quintanorum	$\frac{1}{6}$		6
Sextanorum	$\frac{1}{7}$		7
Septimanorum	$\frac{1}{8}$		8
Octavanorum	$\frac{1}{9}$		9
Nonanorum	$\frac{1}{10}$		10
Decimanorum	$\frac{1}{11}$		11

E assim por diante.

Assim o denominador das frações ou razões são proporções aritméticas de 1, e o numerador comum, ou a primeira parte da razão é 1.

(STEDALL, 2004, p. 42-43, tradução nossa)

EXAME DA PROPOSIÇÃO 44:

Novamente ele usa a representação em tabela para expressar os resultados obtidos anteriormente. Nesta proposição, assim como na anterior, Wallis continuou investigando para potências mais elevadas, as razões da forma

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + 4^k + \ldots + n^k}{\underbrace{n^k + n^k + n^k + n^k + n^k + \ldots + n^k}_{n+1 \text{ vezes}}}$$

Apoiando-se em seu método de indução, Wallis estabelece esta tabela que sintetiza e exprime suas ideias acerca da razão supracitada, além de introduzir uma terminologia para a potência da série relacionada ao valor de k. Abaixo, apresentamos uma adaptação para a tabela de Wallis da proposição 44:

Figura 38 - Razões em termos dos valores de *k*

k	Razão	Potência da Série
0	$\frac{1}{1}$	Iguais
1	$\frac{1}{2}$	Primeira potência
2	$\frac{1}{3}$	Segunda potência
3	$\frac{1}{4}$	Terceira potência
4	$\frac{1}{5}$	Quarta potência
5	$\frac{1}{6}$	Quinta potência
6	$\frac{1}{7}$	Sexta potência
7	$\frac{1}{8}$	Sétima potência
8	$\frac{1}{9}$	Oitava potência
9	$\frac{1}{10}$	Nona potência
10	$\frac{1}{11}$	Décima potência

Fonte: Adaptado pela autora a partir da tabela da proposição 44.

Em termos da notação moderna de limite, os resultados apontados nas linhas dessa tabela têm as seguintes formas:.

- Com $k=1$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0+1+2+3+4+\ldots+n}{n+n+n+n+n+\ldots+n}=\dfrac{1}{2}$

- Com $k=2$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2}{n^2+n^2+n^2+n^2+n^2+\ldots+n^2}=\dfrac{1}{3}$

- Com $k=3$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0^3+1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3}{n^3+n^3+n^3+n^3+n^3+\ldots+n^3}=\dfrac{1}{4}$.

E assim por diante.

Wallis, se apoia novamente em sua indução para concluir o indicado na tabela para as sétima, oitava, nona e décima potências. O que pode ser enunciado de forma geral como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + 4^k + \ldots + n^k}{n^k + n^k + n^k + n^k + n^k + \ldots + n^k} = \frac{1}{k+1}$$

Wallis utiliza de uma forma retórica, mas ao mesmo tempo simbólica, o que não era uma característica para a apresentação de textos matemáticos da época.

Nas proposições a seguir, Wallis apresenta uma sequência de Lemas, que visam a extensão, para potências fracionárias, dos resultados obtidos até aqui.

Proposição 46: Lema

Da mesma forma (da Proposição 44): dada a razão de uma série, de qualquer potência, para uma série de iguais (de mesmo número de termos iguais a maior daquelas potências), pode ser encontrada a razão de outra série de qualquer outra potência (para a mesma série de iguais), por conclusão; isto é, o termo correspondente de uma progressão aritmética.

Por exemplo, se [a soma de] uma série de quadrados, ou segunda potência é $\frac{1}{3}$ da série de iguais, [a soma de] uma série de laterais, ou primeira potência, será $\frac{1}{2}$ de uma série de iguais: porque, como uma série de primeira potência é a intermediária entre uma série de iguais e uma série de segunda potência, então o 2 (do denominador da citada razão) será o valor intermediário (que neste caso é a média aritmética) entre 1 e 3 (os denominadores das razões de iguais e a de segunda potência). Da mesma maneira, enquanto a razão da série de cubos ou terceira potência e uma de iguais é $\frac{1}{4}$, ou de 1 para 4, entre essa série e uma de iguais, duas séries de potências são interpostas; por isso serão considerados dois valores intermediários (aritméticos) entre 1 e 4, (o 2 e o 3), dos quais o primeiro pertence a primeira potência e o último à segunda potência. E assim, nos outros casos.

Semelhantemente, para encontrar a razão de uma série de uma potência mais elevada, basta seguir o procedimento até a potência desejada: assim, a razão de uma série de quarta potência, para uma de iguais

continua

será de 1 para 5, ou de $\frac{1}{5}$; a razão de uma série de sexta potência, para uma de iguais será de 1 para 7, ou de $\frac{1}{7}$, porque em uma progressão aritmética onde o quarto termo (após o 1) é 5, o sexto termo será 7, e o mesmo nos outros casos.

(STEDALL, 2004, p. 45, tradução nossa)

EXAME DA PROPOSIÇÃO 46:

Wallis com esta proposição pretende explicitar que o valor de k da tabela 1 e o denominador da razão $\frac{1}{k+1}$ de duas séries estão ambas relacionadas a uma mesma progressão aritmética. Isso torna possível a partir da razão de uma série encontrar a razão de outra série. Com isso, ele quer mostrar que é possível determinar a razão para qualquer série fazendo uma isnpeção na progressão aritmética. Ele começa a abrir uma discussão importante sobre um procedimento que ele utilizou em grande escala para conseguir outros resultados do *Arithmetica Infinitorum* que é a interpolação.

Proposição 47: Lema

Além disso, esta regra não seria menos eficaz se houvesse mostrado para uma série de qualquer quantidade (nem mesmo uma série de primeira potência, mas) como qualquer outra série na tabela, e de seus quadrados, cubos, etc, se forem procurados.

Por exemplo, se para uma série deste tipo, de qualquer quantidade, for tomada como uma série de quadrados (a qual na tabela, da Proposição 44, é atribuída a razão 1 para 3): Para estes quadrados tem-se a razão de 1 para 5 (porque 1,3, 5 estão em proporção aritmética) e para os cubos tem-se a razão de 1 para 7, e assim por diante, porque 1, 3, 5, 7 etc estão em proporção aritmética, apenas como unidade, raiz, quadrado, cubo, etc são potências sucessivas e geometricamente proporcionais.

E isso não é uma exceção ao que dito na tabela, pois as quantidades supostas são uma série de segunda potência, cuja razão é $\frac{1}{3}$, seus quadrados serão uma série de quarta potência, cuja razão é $\frac{1}{5}$, e seus cubos serão uma série de sexta potência da qual a razão é $\frac{1}{7}$, etc. como já foi dito.

(STEDALL, 2004, p. 45, tradução nossa)

EXAME DA PROPOSIÇÃO 47:

Seguindo o raciocínio da proposição 46, ele mostra que a partir da razão conhecida de uma série possível encontrar a razão de qualquer outra série composta da original, pela multiplicação do valor de k por um número inteiro positivo, inspecionando a progressão aritmética dos denominadores das razões. As proposições 46 e 47 alargam o alcançe dos resultados para as séries de Wallis e o procedimento utilizado para isso é a inspensão de uma progressão aritmética.

Proposição 51: Lema

De acordo com a mesma regra (Proposições 46 e 47) se é proposta uma série de qualquer quantidade, correspondendo a qualquer série na tabela, suas raízes quadradas, raízes cúbicas, etc, ou potência intermediária, poderão ser investigadas da mesma forma.

Por exemplo, se é proposto um número infinito de quadrados (ou quaisquer [planos] semelhantes) correspondendo a uma série de quarta potência, (da qual é atribuído na tabela a razão de 1 para 5), a série de lados (ou linhas semelhantes colocadas naqueles [planos]) terá a razão de 1 para 3 (para uma série de iguais), porque 1, 3, 5 são aritmeticamente proporcionais. Ou também, porque onde os planos estão em série de quarta potência, seus lados serão uma série de segunda potência, da qual é atribuído na tabela a razão de 1 para 3.

Assim, se houver proposto um número infinito de cubos (ou quaisquer sólidos semelhantes) correspondendo a uma série de sexta potência, (da qual, na tabela, corresponde a razão de 1 para 7), para os lados dos referidos cubos (ou para linhas semelhantes colocadas nesses cubos), terá a razão de 1 para 3, e para os quadrados desses lados (ou para planos semelhantes colocados naqueles cubos) a razão será de 1 para 5, porque os dois valores intermediários (aritméticos) de interesse entre 1 e 7 são 3 (o menor) e 5 (o maior) (por 1, 3, 5 e 7 serem aritmeticamente proporcionais). Além disso, eu considerei dois valores intermediários (em progressão aritmética) entre 1 e 7, porque assumi o mesmo número de formas geométricas entre a unidade e um cubo, isto é, o lado do quadrado, para a unidade, lado, cubo são proporções geométricas. E, de fato, se os cubos são uma série de sexta potência, os lados serão uma série de segunda potência, e os quadrados dos lados, uma série de quarta potência, das quais na tabela são atribuídas as razões de 1 para 3 e de 1 para 5.

Mas, se as quantidades propostas na mesma série de sexta potência são quadrados (ou [planos] semelhantes) os seus lados terão a razão de 1 para 4, porque entre 1 e 7 a média aritmética é 4, assim como entre a unidade e um quadrado a média geométrica e a raiz ou lado. E, de fato, se o quadrado é uma série de sexta potência, da qual na tabela é dada a razão de 1 para 4.

(STEDALL, 2004, p. 47-48, tradução nossa)

EXAME DA PROPOSIÇÃO 51:

Wallis expõe seu desejo de ampliar os resultados da tabela 1 obtidos na proposição 44. Seguindo a sua linha de raciocínio, percebemos que agora ele propõe a investigação por divisão do valor de k. A investigação deve ser feita da mesma forma proposta nas proposições 46 e 47, por inspeção da progressão aritmética.

Proposição 53: Lema

Isso conhecido, abre um leque de investigação das razões (para uma série de quantidades iguais ao maior) que a série deste tipo, de raízes quadradas, raízes cúbicas, raízes biquadradas etc de números em proporções aritméticas, começando de um ponto ou de 0, por assim dizer. (Assim $\sqrt{0}, \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3},$ etc, $\sqrt[3]{0}, \sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3},$ etc $\sqrt[4]{0}, \sqrt[4]{1}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{3},$ etc.) Às quais eu chamo série de segundas raízes, terceiras raízes, quartas raízes etc.

Por exemplo, se é proposto um número infinito de quadrados deste tipo, que são proporções aritméticas, ou como uma série de primeira potência, para a qual, na tabela, é atribuída a razão de 1 para 2: então seus lados (isto é, para uma série de segundas raízes) terão a razão de 1 para 1 ½ (ou 2 para 3), porque 1, 1 ½, 2 são proporções aritméticas.

Analogamente, se é suposto um número infinito de cubos deste tipo, que são proporções aritméticas, ou como uma série de primeira potência, para a qual, na tabela, é atribuída a razão de 1 para 2: então para as suas raízes cúbicas (isto é, para uma série de terceiras raízes) tem-se a razão de 1 para 1 1/3 (ou 3 para 4) e para suas raízes quartas, a razão será de 1 para 1 2/3 (ou 3 para 5), porque claramente 1, 1 1/3, 1 2/3, 2 são proporções aritméticas, apenas como a unidade, raiz, quadrado, cubo são geometricamente proporcional.

Da mesma forma, se é dado um número infinito de biquadrados, supersólidos etc, que são como uma série de primeira potência, para a qual, na tabela, é atribuída a razão de 1 para 2: então para as suas raízes quartas, quintas, etc, têm-se as razões de 4 para 5, 5 para 6, etc ou 1 para 1 1/4 , 1 para 1 1/5 etc, porque e 1, 1 1/4, 1 2/4, 1 3/4 , 2, e da mesma forma, 1, 1 1/5, 1 2/5, 1 3/5, 1 4/5, 2, são proporções aritméticas. Portanto:

(STEDALL, 2004, p. 48-49, tradução nossa)

EXAME DA PROPOSIÇÃO 53:

As proposições 46, 47 e 51 dão fundamento para o resultado que amplia substancialmente a tabela 1 da proposição 44. Usando o processo de interpolação Wallis nesta proposição oferece a possibilidade de introduzir valores racionais positivos para k. Sua investição se estenda para razões do tipo, por exemplo

$$\frac{\sqrt{0}+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{n}}{\underbrace{\sqrt{n}+\sqrt{n}+\sqrt{n}+\sqrt{n}+\sqrt{n}+\ldots+\sqrt{n}}_{n+1\ vezes}}$$

ou

$$\frac{\sqrt[3]{0}+\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}+\ldots+\sqrt[3]{n}}{\underbrace{\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}+\ldots+\sqrt[3]{n}}_{n+1\ vezes}}.$$

Assim Wallis estava pronto para enunciar:

Proposição 54: Teorema

Se é conhecida uma série infinita de quantidades começando de um ponto ou de 0, continuamente crescente, com as raízes quadradas, raízes cúbicas, raízes biquadradas etc, de números em proporções aritméticas (que eu chamo série de segundas raízes, terceiras raízes, quartas raízes etc), então a razão de todas elas, para uma série de mesmo número de termos iguais ao maior, será o que segue nesta tabela, isto é:

Subſecundanorum	$\frac{2}{3}$	Velut 1 ad	$1\frac{1}{2}$.
Subtertianorum	$\frac{3}{4}$		$1\frac{1}{3}$.
Subquartanorum	$\frac{4}{5}$		$1\frac{1}{4}$.
Subquintanorum	$\frac{5}{6}$		$1\frac{1}{5}$.
Subſextanorum	$\frac{6}{7}$		$1\frac{1}{6}$.
Subſeptimanorum	$\frac{7}{8}$		$1\frac{1}{7}$.
Suboctavanorum	$\frac{8}{9}$		$1\frac{1}{8}$.
Subnonanorum	$\frac{9}{10}$		$1\frac{1}{9}$.
Subdecimanorum	$\frac{10}{11}$		$1\frac{1}{10}$.

E assim por diante.

Claro, pelo que foi dito anteriormente.

(STEDALL, 2004, p. 49, tradução nossa)

EXAME DA PROPOSIÇÃO 54:

Nesta proposição, assim como nas anteriores, Wallis continuou investigando as razões

$$\frac{0^k+1^k+2^k+3^k+4^k+\ldots+n^k}{\underbrace{n^k+n^k+n^k+n^k+n^k+\ldots+n^k}_{n+1\ vezes}}$$

para potências fracionárias. Aqui ele, também introduz uma terminologia para esses tipos de séries, $\dfrac{\sqrt{0}+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\ldots+\sqrt{n}}{\underbrace{\sqrt{n}+\sqrt{n}+\sqrt{n}+\sqrt{n}+\sqrt{n}+\ldots+\sqrt{n}}_{n+1\ vezes}}$ é denominada séries de segundas raízes, $\dfrac{\sqrt[3]{0}+\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}+\ldots+\sqrt[3]{n}}{\underbrace{\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}+\ldots+\sqrt[3]{n}}_{n+1\ vezes}}$ é denominada série de terceiras raízes e assim por diante.

Com isso, apoiando-se em seu método de indução, ele estabelece esta tabela que sintetiza e exprime suas ideias acerca da razão supracitada:

Figura 39 - Razões em termos dos valores de *k*

Potência da Série	k	Razão	Ou como	A inversa da razão Razão
Segundas raízes	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$		$1\frac{1}{2}$
Terceiras raízes	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$		$1\frac{1}{3}$
Quartas raízes	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{5}$		$1\frac{1}{4}$
Quintas raízes	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{6}$		$1\frac{1}{5}$
Sextas raízes	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{7}$		$1\frac{1}{6}$

Sétimas raízes	$\frac{1}{7}$	$\frac{7}{8}$		$1\frac{1}{7}$
Oitavas raízes	$\frac{1}{8}$	$\frac{8}{9}$		$1\frac{1}{8}$
Nonas raízes	$\frac{1}{9}$	$\frac{9}{10}$		$1\frac{1}{9}$
Décimas raízes	$\frac{1}{10}$	$\frac{10}{11}$		$1\frac{1}{10}$

Fonte: Adaptado pela autora a partir da tabela da proposição 54.

Apresentamos, a partir daqui, algumas outras proposições que ilustram como Wallis dava um tratamento minucioso e aritmeticamente sustentável para seus resultados, que envolviam as potências fracionárias e outros problemas.

Proposição 58: Lema

Finalmente, com ajuda dessas regras (Proposição 46): se é proposta uma série infinita desse tipo, de quantidades começando de um ponto ou de 0, e continuamente crescente, na razão de qualquer potência (não apenas qualquer potência simples, mas também uma composição), então sua razão para uma série do mesmo número de termos iguais ao maior (daquelas potências) pode ser investigada. Assim os quadrados, cubos, biquadrados etc, de segundas raízes, terceiras raízes, quartas raízes etc, ou também segundas potências, terceiras potências etc. ou raízes quadradas, raízes cúbicas, raízes biquadradas etc, de segundas potências, terceiras potências, quartas potências etc, ou de segundas raízes, terceiras raízes, quartas raízes etc. Ou também qualquer outra série de qualquer forma composta.

Por exemplo, desde que uma série de terceiras raízes (nestas condições $\sqrt[3]{0}, \sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3},$ etc) têm uma razão (para uma série do mesmo número de termos iguais ao maior) que é 3 para 4, ou 1 para 1 1/3, seus quadrados (que também são os mesmos como raízes cúbicas de segundas potências, assim como $\sqrt[3]{0}, \sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{9},$ etc), terá uma razão, para o mesmo número de termos iguais ao maior, que é 1 2/3 , ou 3 para 5. Porque, 1, 1 1/3, 1 2/3 ou 3/3, 4/3, 5/3 são proporções aritméticas.

Igualmente, uma série de cubos de quartas raízes, ou (que equivalem à mesma coisa) raízes biquadradas de uma série de cubos ou terceiras potências, terá para uma série de iguais a razão 4 para 7. Pois, desde que uma série de quartas raízes, tem uma razão na tabela de 1 para 1 1/4, ou 4 para 5, seus cubos terão a razão (para uma série do mesmo número de termos iguais ao maior) como 1 para 1 3/4, ou 4

continua

para 7. Porque, 1, 1 1/4, 1 2/4, 1 3/4 ou 4/4, 5/4, 6/4, 7/4 são proporções aritméticas. E, semelhantemente, em potências mais ajustadas que estas: assim raízes quadradas de cubos são séries de quintas raízes. Pois, para uma série de quinta raiz é dada razão de 1 para 1 1/5, ou 5 para 6, portanto para seus cubos terão a razão de 1 para 1 3/5, ou 5 para 8 (porque 1, 1 1/5, 1 2/5, 1 3/5 ou 5/5, 6/5, 7/5, 8/5 estão em proporção aritmética), e para suas raízes quadradas de razão 1 para 1 3/10, ou 10 para 13 (porque 1 3/10 é a médias aritmética entre 1 e 1 3/5 , pois 1, 1 3/10, 1 6/10 (= 1 3/5) ou 10/10, 13/10, 16/10 (= 8/5) são proporções aritméticas. Ou, também, desde que a raiz quadrada de quintas raízes são uma série de décimas potências, para a qual tem-se a razão 10 para 11 ou 1 para 1 1/10, o cubo destas têm a razão que é 10 para 13, ou 1 para 1 3/10. Porque, 1, 1 1/10, 1 2/10, 1 3/10 ou 10/10, 11/10, 12/10, 13/10 são 4 termos em proporção aritmética.

E da mesma forma, nas séries de outras potências quaisquer compostas, suas razões para a série de iguais podem ser investigadas. E, portanto:

(STEDALL, 2004, p. 51-52, tradução nossa)

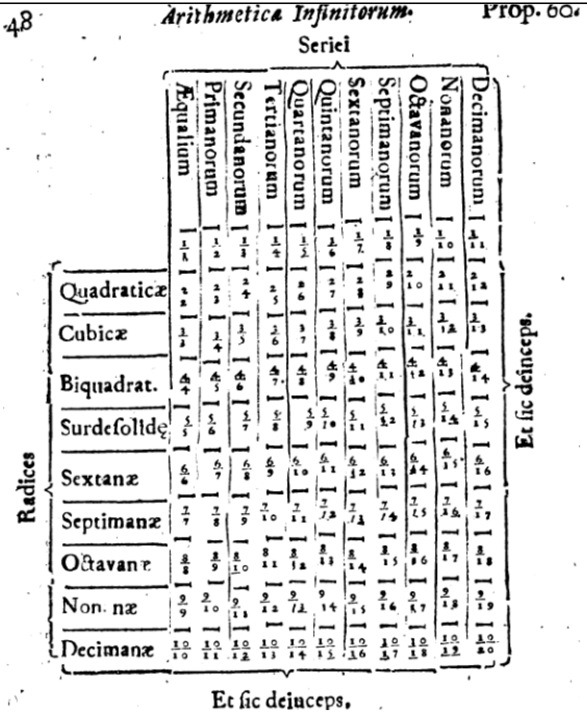
EXAME DA PROPOSIÇÃO 58:

Wallis enuncia que a partir de qualquer série da tabela da proposição 44 é possível encontrar a razão de uma série composta pela multiplicação ou divisão do valor de k por um número inteiro positivo. Para tanto é necessário a investigação da progressão aritmética. Ele busca o maior alcance para o seu método e podemos, novamente, constatar o quanto Wallis era bom de cálculo e na busca de padrões. Ele faz uso da retórica para apresentar o seu resultado.

Proposição 59: Teorema

Dada uma série infinita de quantidades, começando de um ponto ou de 0, e continuamente crescente, de acordo com qualquer potência composta de potências simples (como mencionado nas Proposições 44 e 45), a razão de cada uma delas, para uma série de mesmo número de termos iguais ao maior, será a que segue nesta tabela. Isto é:

continua



48 *Arithmetica Infinitorum.* Prop. 60.

	Serieì: Æqualium	Primanorum	Secundanorum	Tertianorum	Quartanorum	Quintanorum	Sextanorum	Septimanorum	Octavanorum	Nonanorum	Decimanorum
	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$
Radices: Quadraticæ	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{12}$
Cubicæ	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{13}$
Biquadrat.	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{4}{14}$
Surdesolidę	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{15}$
Sextanæ	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{6}{16}$
Septimanæ	$\frac{7}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{7}{14}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{17}$
Octavanæ	$\frac{8}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{8}{14}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{8}{17}$	$\frac{8}{18}$
Nonanæ	$\frac{9}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{17}$	$\frac{9}{18}$	$\frac{9}{19}$
Decimanæ	$\frac{10}{10}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{10}{14}$	$\frac{10}{15}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{10}{17}$	$\frac{10}{18}$	$\frac{10}{19}$	$\frac{10}{20}$

Et sic deinceps.

Et sic deinceps.

(STEDALL, 2004, p. 52-53, tradução nossa)

EXAME DA PROPOSIÇÃO 59:

Wallis apresenta uma tabela com resultados da sua investigação da razão

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + 4^k + \ldots + n^k}{\underbrace{n^k + n^k + n^k + n^k + n^k + \ldots + n^k}_{n+1 \text{ vezes}}}$$ considerando k um número racional:

Figura 40 – Razões em termos dos valores de k

	p=0	p=1	p=2	p=3	p=4	p=5	p=6	p=7
q=1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$
q=2	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{9}$
q=3	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$
q=4	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{11}$
q=5	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{12}$
q=6	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{6}{13}$
q=7	$\frac{7}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{7}{14}$

Fonte: Adaptado pela autora a partir da tabela da proposição 59.

A apresentação destes resultados em uma tabela como a anterior deixa visível aos olhos as relações entre as razões. O que temos nesta proposição é o seguinte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{0^{p/q}+1^{p/q}+2^{p/q}+3^{p/q}+4^{p/q}+\ldots+n^{p/q}}{\underbrace{n^{p/q}+n^{p/q}+n^{p/q}+n^{p/q}+n^{p/q}+\ldots+n^{p/q}}_{n+1\ vezes}} = \frac{q}{q+p}$$

Utilizamos no nosso exame a notação de frações para números racionais, mas Wallis não utilizou essa notação. A versão apresentada seguida do exame é importante para ressaltar situações como essas, a maior parte da apresentação dos resultados da história da matemática só são colocados em notação atual. Sob uma perspectiva epistemológica, isso pode atrapalhar a compreensão do desenvolvimento métodos e técnicas utilizadas pelos matemáticos na história.

Proposição 61: Corolário

Mas aqui, também, torna-se conhecido o método da quadratura não só para a parábola simples, mas, também, para todas as parábolas (e seus complementos), não apenas aquelas em que as ordenadas progridem de acordo com qualquer potência simples (de que eu tenho falado nas proposições 55, 56 e 57, além das proposições 23 e 45), mas, também, de acordo com qualquer potência composta de simples potências. Assim, se as ordenadas são quadrados de terceiras raízes, quintas raízes, sétimas raízes etc. dos diâmetros ou cubos de quartas raízes, quintas raízes etc, então teremos razões do paralelogramo circunscrito que são 3 para 5, 5 para 7, 7 para 9 etc., ou 4 para 7, 5 para 8 etc. E seus complementos (das quais as ordenadas são por conseguinte como raízes quadradas de terceiras potências, quintas potências, sétimas potências etc. dos diâmetros, ou terceira raiz de quarta potência, quinta potência etc.) teremos as razões do paralelogramo circunscrito que são 2 para 5, 2 para 7, 2 para 9 etc, ou 3 para 7, 3 para 8 etc. E semelhantemente (analogamente) para o resto, de acordo com a continuação da tabela precedente na Proposição 59.

Isto é, se as ordenadas são como os quadrados das raízes cúbicas dos diâmetros, o plano será uma série de linhas que são umas nas outras, como quadrados de raízes cúbicas (ou raízes cúbicas de quadrados) de números em proporção aritmética, ou como raízes de segunda potência, em que na tabela é dada a razão de 3 para 5.

E o complemento desta terá ordenadas que são como a raízes quadradas de cubos dos seus diâmetros (o que pode ser provado pelos argumentos usados na proposição 23), e portanto que o plano será uma série de raízes quadradas de cubos ou terceira potência, em que é atribuído na tabela a razão 2 para 5.

E isso pode ser igualmente considerado nos outros casos.

(STEDALL, 2004, p. 54, tradução nossa)

EXAME DA PROPOSIÇÃO 61:

Wallis volta a relacionar os seus resultados aritméticos com curvas do tipo $y = x^k$, onde k pode ser um número racional positivo.

Proposição 62: Corolário

E por esta razão é claro que o método de redução para cilindros ou prismas iguais, todos conóides parabólicos e piramidóides (não apenas aqueles mencionados na Proposição 60, onde as ordenadas das figuras planas progridem como qualquer simples potência, mas também) aquela gerada por qualquer parábola deste tipo (como mencionado na proposição 61) da qual ordenadas progridem como qualquer série de potências compostas.

Por exemplo, se a ordenada da parábola é como a raiz cúbica quadrada (ou raiz cúbica de um quadrado) do diâmetro, seu plano será uma série infinita de linhas que são como raízes cúbicas de segundas potências e, portanto os conóides ou piramidóides serão séries do mesmo número de planos que são como quadrados de mesmas linhas, portanto como raízes cúbicas de quartas potências e, portanto (de acordo com a tabela na Proposição 59) para o cilindro circunscrito ou prisma como 3 para 7.

Do mesmo modo, se as ordenadas da parábola são como as raízes quartas dos cubos dos diâmetros, então os planos do conóide ou piramidóide será como a quarta raiz da sexta potência daqueles mesmos diâmetros (ou que equivale a mesma coisa, raízes quadradas de cubos), e, portanto, que conóide ou piramidóide (constituído de uma série desses planos) serão para o cilindro ou prisma circunscrito como 4 para 10 ou 2 para 5.

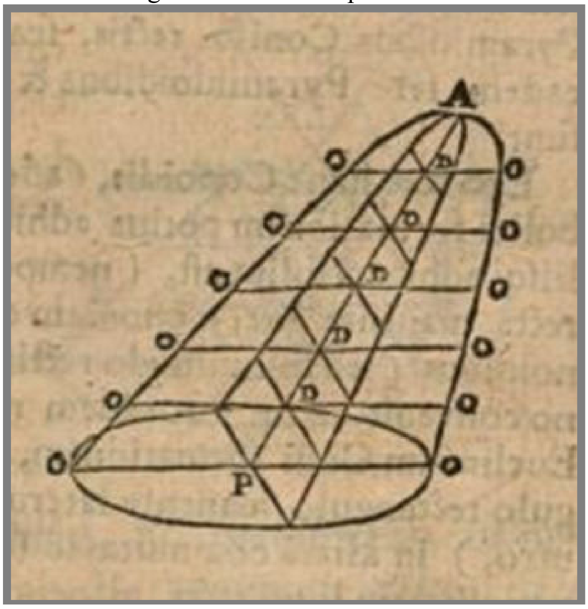
E da mesma forma para os outros, de acordo com a continuação da tabela.

(STEDALL, 2004, p. 54-55, tradução nossa)

EXAME DA PROPOSIÇÃO 62:

Esta proposição apresenta uma consequência geométrica imediata da proposição 59, ela amplia o alcance do método de Wallis para sólidos geométricos, antes ele só tinha mostrado o seu método em cones e pirâmides, agora ele acrescenta os sólidos que ele denomina conóides parabólicos. A figura a seguir foi retirada do livro de Wallis *De Sectiones Conicis* de 1655 e ilustra o que ele quer dizer com a afirmação de que a série infinita de linhas que compõe o plano de uma parábola é do mesmo número que os planos que compõe um parabolóide ou piramidóide.

Figura 41 - Conóide parabólico



Fonte: https://books.google.com.br/books/reader?id=03M_AAAAcAAJ&hl=pt-BR&printsec=frontcover&output=reader&pg=GBS.PA23, acesso em: 12 ago. 2016.

Proposição 64: Teorema

Se houver considerado uma série infinita, de quantidades começando de um ponto ou 0, continuamente crescente, de acordo com qualquer potência simples ou composta, então a razão de todas elas, para uma série de mesmo número de termos iguais ao maior, é a razão da unidade para o índice daquela potência aumentado em 1.

Coloco os índices de primeiras potências, segundas potências, terceiras potências, quartas potências etc. (ou laterais, quadrados, cubos, biquadrados etc), para serem 1, 2, 3, 4, etc. Eu coloco os índices de raízes segundas, raízes terceiras, raízes quartas etc (ou raízes quadradas, raízes cúbicas, raízes biquadradas etc) de primeiras potências, ou proporções aritméticas) serem $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. Eu crio o índice composto de qualquer potência composta a partir dos índices da composição de potências. Assim, cubos de segundas potências (ou quadrados de terceiras potências) têm índices iguais a $6 = 2\times 3$; raízes cúbicas de segundas raízes (ou raízes quadradas de terceiras raízes têm índices $\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$; cubos de raízes quadradas de quintas potências terão índice $\frac{15}{2}=3\times\frac{1}{2}\times 5$.

Além disso, as razões indicadas para essas potências (nas tabelas) são do mesmo tipo. Assim, para primeiras potências, segundas potências, terceiras potências, quartas potências etc. serão 1 para 2, 1 para 3,

continua

1 para 5 etc., isto é, 1 para 1+1, 1 para 2+1, 1 para 3+1, 1 para 4+1 etc. Para raízes segundas, raízes terceiras, raízes quartas etc. serão 2 para 3, 3 para 4, 4 para 5 etc, ou 1 para 1 1/2, 1 para 1 1/3, 1 para 1 1/4 etc, isto é, 1 para $\frac{1}{2}+1$, 1 para $\frac{1}{3}+1$, 1 para $\frac{1}{4}+1$, etc. Para quadrados de terceiras potências (ou sextas potências) será de 1 para 7, isto é, 1 para 6+1. Às raízes quadradas de terceiras potências será de 2 para 5, ou 1 para $\frac{5}{2}$, isto é, 1 para $\frac{3}{2}+1$. Para cubos de raízes quadradas de quintas potências (ou raízes quadradas de décimas quintas potências) será de 2 para 17 ou 1 para $\frac{17}{2}$, isto é, 1 para $\frac{15}{2}+1$. (E assim por diante para o resto). Que o teorema confirma. E se supormos o índice irracional como $\sqrt{3}$, a razão será como 1 para $1+\sqrt{3}$.

(STEDALL, 2004, p. 54-55, tradução nossa)

EXAME DA PROPOSIÇÃO 64:

Após o longo caminho trilhado pelas proposições anteriores que expõem a experimentação e a exploração aritmética; a observação e reflexão de Wallis, ele apresenta em termos aritméticos a síntese dos seus resultados.

O seu tópico de investigação foi a busca do limite da razão de uma série da forma $0^k+1^k+2^k+3^k+4^k+\ldots+n^k$ por uma série da forma $\underbrace{n^k+n^k+n^k+n^k+n^k+\ldots+n^k}_{n+1\ vezes}$ quando n tende a infinito e ao perceber que a relção encontrada persistiu para valores inteiros positivos e fracionários positivos, Wallis concluiu nesta proposição que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{0^k+1^k+2^k+3^k+4^k+\ldots+n^k}{\underbrace{n^k+n^k+n^k+n^k+n^k+\ldots+n^k}_{n+1\ vezes}}=\frac{1}{k+1}.$$

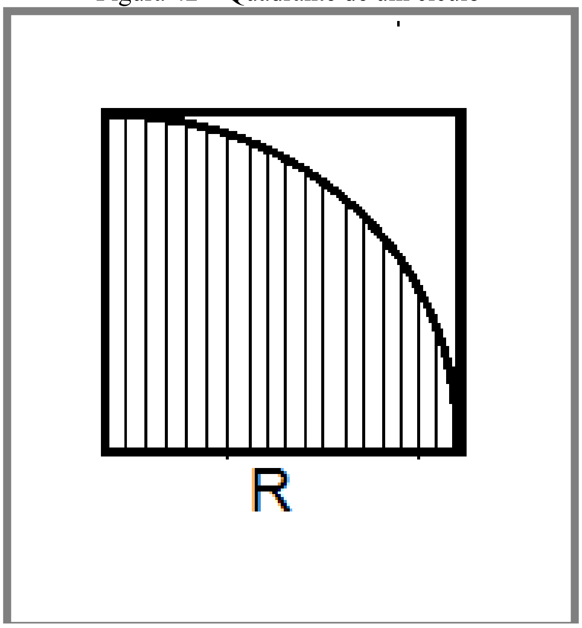
Com esse resultado, Wallis indicou um método de investigação em linguagem aritmética para diversos tipos de problemas. Até essa proposição ele mostrou a solidez do seu método encontrando a quadratura de curvas do tipo $y=x^k$ onde k é um número racional positivo e a cubatura de superfícies geradas por estas curvas. Mas ele queria ir adiante, seu foco principal era a quadratura do círculo.

FIM DO EXAME

Não apresentamos a versão e o exame das proposições de 65 a 194, da obra *Arithmetica Infinitorum* neste texto, pois o método de Wallis e os procedimentos utilizados por ele para alcançar seus objetivos ficam claro no exame do conjunto de proposições que escolhemos para exibir no nosso texto. Entretanto, seguindo a sua trilha fizemos um arranjo das principais proposições que levaram Wallis a encontrar uma razão de produtórios para expressar $\frac{4}{\pi}$.

Em busca da quadratura do círculo: Baseado em seu método, evidenciado no nosso exame, Wallis desejava averiguar em linguagem aritmética a razão da área de um círculo pela área do quadrado circunscrito. Na sua investigação ele utilizou um quadrante do círculo de raio R, como na figura 42 a seguir

Figura 42 – Quadrante de um cículo



Fonte: Elaborado pela autora

O quadrante do círculo, assim como as figuras que Wallis já havia considerado, foi analisado como sendo constituído por um número infinito de linhas que deveriam ser somadas e esse resultado dividido pela soma das linhas que contituiam o quadrado circunscrito, a mesma abordagem inicial dada para o triangulo e figuras planas obtidas pelas curvas $y = x^k$ com k=2, 3, 4.

A tarefa de Wallis não era simples, se a distância de uma destas linhas ao centro do círculo é r, então o comprimento dessa linha é $\sqrt{R^2 - r^2}$. E como o seu método se baseia em séries, ele teria que expandir esse radical em séries de potencias, isso ele não sabia fazer. Então ele tomou outro caminho, na trilha de Wallis vamos destacar as principais proposições que levaram ao seu feito.

Ele define multiplicação e divisão de séries termo a termo nas proposições 73 e 81, respectivamente.

Na proposição 87, Wallis estendeu seus resultados para séries de potências negativas específicas, ele diz

> Por exemplo, se uma série de segundas potências é dividida por uma série de terceiras potências, ou uma série de primeira potência é dividida por uma série de segundas, ou uma série de iguais é dividida por uma série de primeira potência (onde a série divisora é um grau maoir que a série a ser dividida, e assim, o índice da série divisora é um a mais que o indíce da série dividida, assim 3-2=2-1=1-0=1) (STEDALL, 2004, P.69, tradução nossa).

Vale destacar que Wallis não utilizou notação de índice negativo. Essas séries de índices negativos, Wallis denomina séries recíprocas.

Seguindo o plano arquitetônico do nosso autor, a proposição 108 é um teorema que diz que "Se uma série de iguais é reduzida termo a termo por uma série de primeira potência a série das diferenças será metade da série de iguais" (STEDALL, 2004, p. 82). E a proposição 111 "Se uma série de iguais é reduzida por uma série de segundas potências, terceiras potências, quarta potências etc." (STEDALL, 2004, p. 84). Com isso ele se prepara para avaliar $R^2 - r^2$.

Mas ele tinha que experimentar e especular até chegar em seu resultado, por uma prova por sua indução, por isso ele buscou as relações das diferenças de duas séries, não apenas para o caso que ele queria avaliar: série de iguais reduzida por uma série de segundas potências.

Ele segue com o mesmo procedimento observado no nosso exame do conjunto de proposições, dando corolários com resultados geométricos que confirmam a solidez do seu método. A proposição 132 é fundamental para o propósito de Wallis, nela ela anuncia em uma tabela a síntese dos seus resultados na direção da avaliação da razão

$$\frac{\sqrt[q]{R^{1/p} - r_0^{1/p}} + \sqrt[q]{R^{1/p} - r_1^{1/p}} + \sqrt[q]{R^{1/p} - r_2^{1/p}} + \ldots + \sqrt[q]{R^{1/p} - r_n^{1/p}}}{\underbrace{R^{q/p} + R^{q/p} + R^{q/p} + \ldots + R^{q/p}}_{n+1-vezes}}$$

Onde p e q são números inteiros positivos. A seguir ilustamos com a tabela de proposição 132 do *Arithmetica Infinitorum* seguida de uma elaboração nossa na notação simbólica acompanhando a razão imediatamente supracitada.

Figura 43 – Tabela da proposição 132

Prop. 132. *Arithmetica Infinitorum.* 105

Seriei Æqualium mulctatæ serie

Subdecimanorum	Subnonanorum	Suboctavanorum	Subseptimanorum	Subsextanorum	Subquintanorum	Subquartanorum	Subtertianorum	Subsecundanorum	Subprimanorum	Nulla	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	Æqualia
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	Residua.
66	55	45	36	28	21	15	10	6	3	1	Quadrata.
286	220	165	120	84	56	35	20	10	4	1	Cubi.
1001	715	495	330	210	126	70	35	15	5	1	Biquadrat.
3003	2002	1287	792	462	252	126	56	21	6	1	Surdesol.
8008	5005	3003	1716	924	462	210	84	28	7	1	Sextana.
19448	11440	6435	3432	1716	792	330	120	36	8	1	Septimana
43758	24310	12870	6435	3003	1287	495	165	45	9	1	Octavana.
92378	48620	24310	11440	5005	2002	715	220	55	10	1	Nonana.
184756	92378	43758	19448	8008	3003	1001	286	66	11	1	Decimana.

Et sic deinceps.

Et sic deinceps.

Fonte: <https://ia802709.us.archive.org/10/items/ArithmeticaInfinitorum/ArithmeticaInfinitorum.pdf>. Acesso em: 18 out. 2014.

Wallis notou a simetria diagonal que havia nesta tabela e se aproveitou desse fato para avançar mais ainda na direção do seu propósito.

Figura 44 – Tabela da Proposição 132

	p=0	p=1	p=2	p=3	p=4	p=5
q=0	1	1	1	1	1	1
q=1	1	2	3	4	5	6
q=2	1	3	6	10	15	21
q=3	1	4	10	20	35	56
q=4	1	5	15	35	70	126
q=5	1	6	21	56	126	252

Fonte: Adaptado pela autora a partir da tabela da proposição 132.

Para o círculo ele precisava de $p=\frac{1}{2}$ e $q=\frac{1}{2}$. Para conseguir esse valor ele precisava interpolar entre $p=0$ e $p=1$ e entre $q=0$ e $q=1$. Nas proposições 184 e 189 ele apresenta os seus resultados para a interpolação procurada. Na proposição 191 ele conclui que

$$\pi \ é \begin{cases} maior \ \ que \ \ \dfrac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times9\times11\times11\times13\times13}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times10\times10\times12\times12\times14}\times\sqrt{1\tfrac{1}{14}} \\ menor \ \ que \ \ \dfrac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times9\times11\times11\times13\times13}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times10\times10\times12\times12\times14}\times\sqrt{1\tfrac{1}{13}} \end{cases}$$

Desta proposição emerge uma aproximação de π tão boa quanto ele desejar, que apresenta no comentário após a proposição 191:

$$\frac{4}{\pi}=\frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times9\times11\times11\times13\times13\times\ldots}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times10\times10\times12\times12\times14\times\ldots}$$

Na notação atual o que Wallis fez foi estabeler o seguinte resultado:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx=\frac{\pi}{4}$$

Vemos aí a possibilidade de abordar o Teorema Binomial, raio de convergência e integração de séries de potências.

Atualmente sabemos que é impossível resolver o problema da quadratura utilizando régua e compasso, mas Wallis sem saber disso abordou o problema inventando métodos e desenvolvendo procedimentos que posteriormente contribuíram para o progresso da matemática. Os estudantes dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática não têm muitas oportunidades de discutir sobre essa face da Matemática, aquela que é experimentada por um matemático e pode não converter em um resultado esperado. Entretanto, o processo de investigação pode render solo fértil para as futuras gerações. Além disso, os estudantes podem perceber que a Matemática não sai pronta da mente de um Matemático para o papel e que o processo envolvido nessa tarefa é repleto de acertos e erros, dessa forma o estudante pode lidar mais facilmente com as suas frustações no processo de aprendizagem da Matemática.

Para alcançar esse resultado, Wallis usou fortemente o método de indução por ele inventado. De uma forma geral o que percebemos é que ele utilizou o método em pequenas etapas e depois no conjunto dessas etapas em seguida seus resultados eram apresentados na forma de tabelas, esse procedimento foi repetidamente utilizado por ele na apresentação de suas ideias na obra *Arithmetica Infinitorum.* Podemos observar, também, nesta obra o uso de uma representação simbólica em busca de uma padronização na lingugem matemática e isso é importante do ponto de vista do domínio da matemática na perspectiva da criatividade de Csikszentmihalyi, represerntação essa que favorece a transmissão desse domínio ao indivíduo.

Foram diversas as repercussões desta obra de Wallis, muito em função do poder da abordagem aritmetizada das proposições e exemplos, que, de certa forma, rompiam com a maneira geométrica de tratar todos esses temas. Na próxima seção, exploraremos parte do cenário que sucedeu a publicação do *Arithmetica Infinitorum* de 1656.

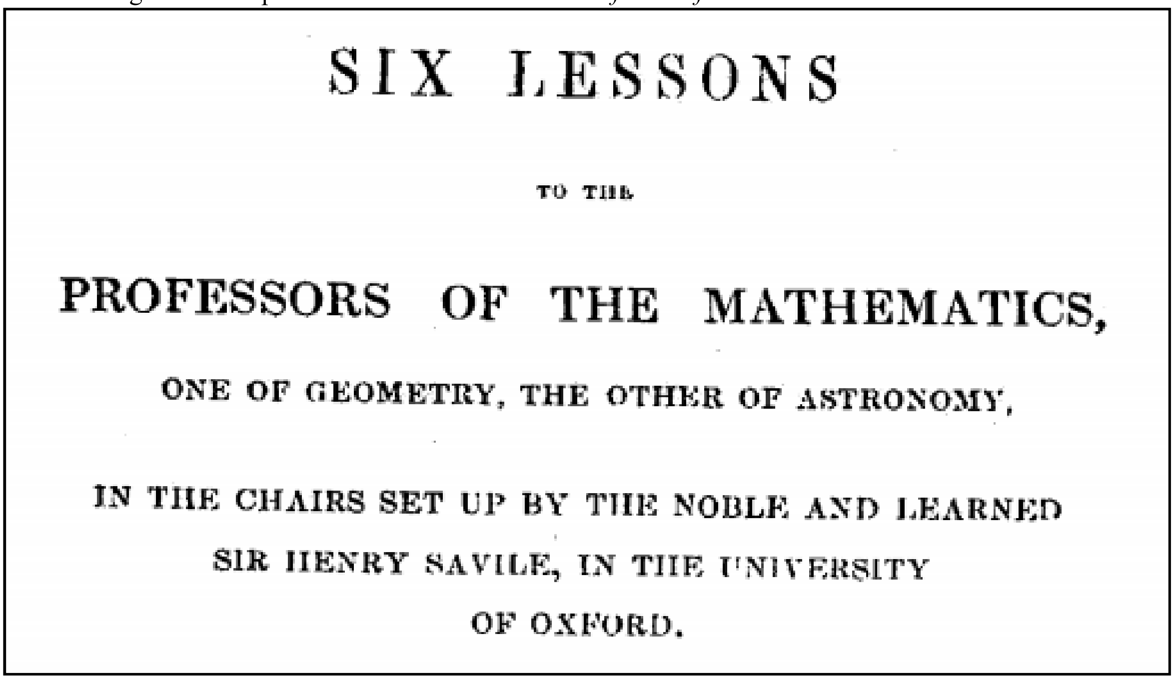
4.3. Repercussões da Obra

As ideias de Wallis, contidas nesta obra, rapidamente se propagaram na Inglaterra e no restante da Europa. Christian Huygens (1629-1695) foi o primeiro a se manifestar criticamente sobre o livro. Seus comentários foram encaminhados à Wallis, em uma correspondência datada de julho de 1656. A impressão dele sobre o método de indução utilizado por Wallis era de que o método não era muito claro e certo para levá-lo a compreender algumas proposições, por exemplo, a proposição 191; ele também argumentou que as curvas produzidas por Wallis não eram geométrica no sentido de Descartes, pois Wallis não havia disponibilizado uma fórmula conhecida para se encontrar um ponto geral dessas curvas (BEELEY; SCRIBA, 2003, p. 189-190)

A resposta para Huygens seguiu em uma correspondência de agosto de 1656. Quanto ao seu método, Wallis argumenta que William Brouncker (1620-1684) já havia calculado, utilizando suas frações, um valor para a relação da circunferência com o diâmetro de um círculo. E neste caso, os resultados obtidos estavam de acordo com os resultados encontrados por outros métodos. Sobre o fato levantado por Hyugens, de que as curvas não eram geométricas, no sentido de Descartes, Wallis sustenta o que era percebido em sua obra, de que boa parte das curvas, ali contidas, era, certamente, geométrica, mas que o restante delas estava bem definido, mesmo que não tenha explicitado uma fórmula já conhecida (BEELEY; SCRIBA, 2003, p. 193-197).

A maior crítica a obra de Wallis veio de "dentro de sua casa", o inglês Thomas Hobbes (1588-1679) se manifestou através de livro intitulado *Six lessons to the Professor of Mathematics* (Seis lições para professores de Matemática) de 1656. Esse livro foi direcionado aos professores savilianos de geometria e astronomia de Oxford, Wallis e Seth Ward.

Figura 45 - Capa do livro *Six lessons to the Professor of Mathematics* de Thomas Hobbes.


SIX LESSONS

TO THE

PROFESSORS OF THE MATHEMATICS,

ONE OF GEOMETRY, THE OTHER OF ASTRONOMY,

IN THE CHAIRS SET UP BY THE NOBLE AND LEARNED SIR HENRY SAVILE, IN THE UNIVERSITY OF OXFORD.

Fonte: http://mofopo.com/reading/Hobbes_Lessons%20for%20the%20Professors%20of%20Mathematics.pdf

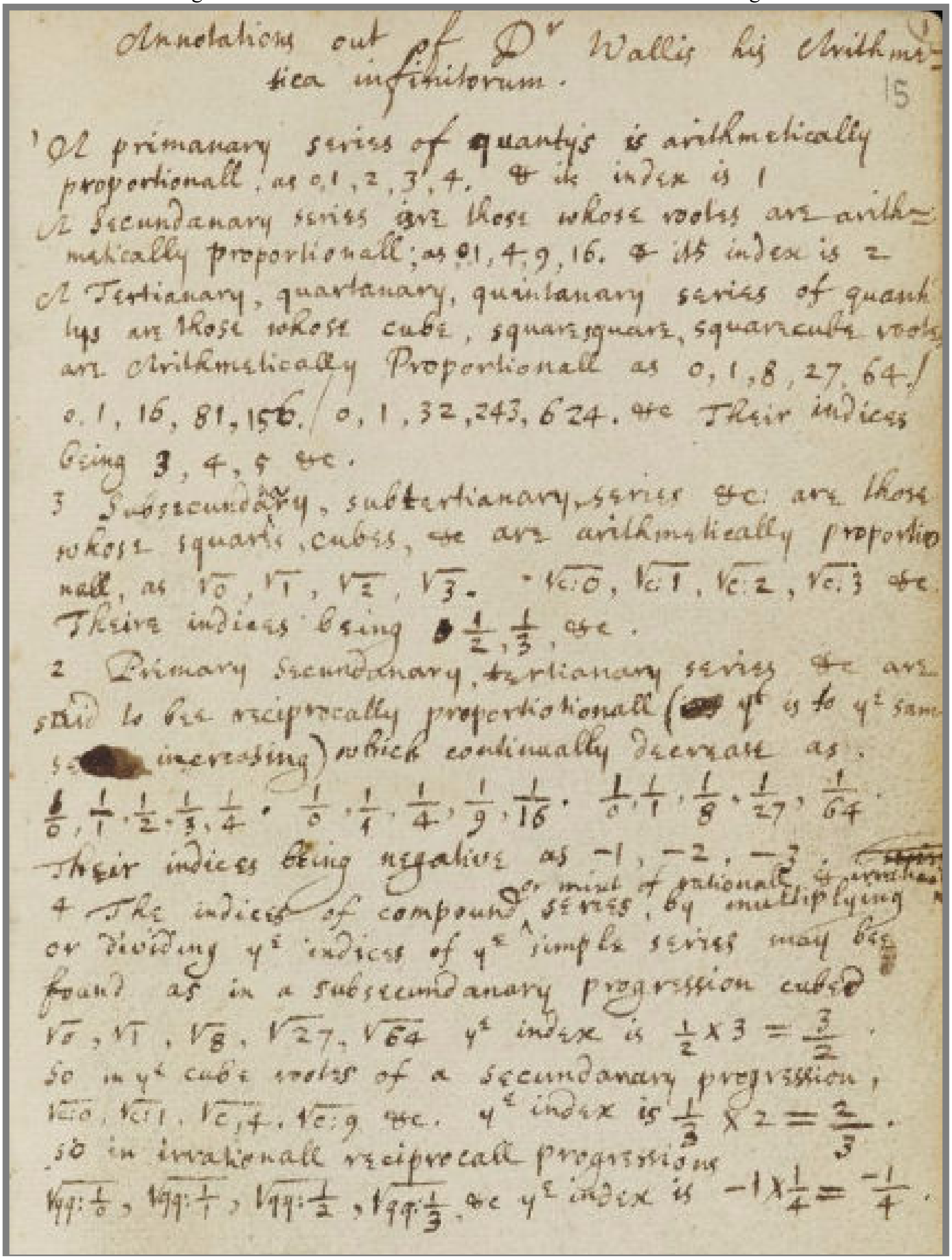
Observamos, já na própria capa, Hobbes indica a quem se destina seu recado: aos professores das cadeiras savilianas em Oxford de geometria e de astronomia. Neste período, Wallis ocupava a cadeira de geometria. Em sua opinião, Wallis confunde o estudo de símbolos com o estudo de geometria e declara que nunca tinha visto o método de indução ser utilizado e que este nada acrescentava ao estudo das ciências da geometria. Para Hobbes geometria era o verdadeiro fundamento da Matemática e que a introdução de símbolos só serviu para confundir o leitor e obscurecer a verdade. Tal dureza do ataque de Hobbes contra Wallis pode ter justificativa em um episódio anterior, em que Wallis expõe todos os erros de Hobbes na tentativa de quadrar o círculo em sua obra *De Corpore,* em abril de 1655. Os argumentos de Wallis sobre o trabalho de Hobbes foram expostos em *Elenchus geometriae Hobbianae* (1655) e, segundo Alexander (2016), a reputação de Hobbes como grande matemático jamais se recuperou.

Um ano depois, em 1657, Pierre de Fermat (1607-1665) também coloca suas objeções a respeito da obra. As correspondências entre Wallis e Fermat eram intermediadas por Kenelm Digby (1603-1665). O debate entre os dois durou até a morte de Fermat em 1665. As mais severas críticas vieram de franceses como Fermat, Huygens e Roberval, mas de casa Hobbes que havia passado duas temporadas na França, também desenpenhou esse papel. Os franceses seguiam a tradição cartesiana, as ideias de Descartes estavam borbulhando em toda Europa, mas não contemplava a experimentação.

Outros métodos baseados no trabalho de Wallis foram sendo incorporados por seus contemporâneos em outros problemas diferentes da quadratura do círculo. William Neile (1637-1670) encontrou a retificação da parábola e Hendrick van Heuraet (1633-1660) chegou a um método geral de retificação em 1657. Nicolaus Mercator (1620- 1687) publicou em 1668 o seu *Logarithmthechnia*, em que ele encontra a quadratura da hipérbole. (STEDALL, 2001, p. 18-19)

O jovem Isaac Newton (1642-1727) estudou o *Arithmetica Infinitorum* em 1664/65 e fez muitas anotações sobre as séries que ele notou. Muito tempo se passou. Entretanto, as ideias de Wallis permaneceram nos pensamentos de Newton, mesmo após o término da leitura de sua obra. A figura 46 é uma imagem do caderno de estudo de Newton, observamos logo na parte superior da imagem a indicação dele sobre o tema de seu estudo, a obra de Wallis, *Arithmetica Infinitorum*.

Figura 46 - Folha do caderno de estudo de Newton em Cambridge.



Annotations out of Dr Wallis his Arithmetica infinitorum.

15

1 A primanary series of quantys is arithmetically proportionall, as 0, 1, 2, 3, 4. & its index is 1
A Secundanary series are those whose roots are arithmetically proportionall; as 0, 1, 4, 9, 16. & its index is 2
A Tertianary, quartanary, quintanary series of quantitys are those whose cube, squaresquare, squarecube roots are Arithmetically Proportionall as 0, 1, 8, 27, 64 / 0, 1, 16, 81, 256 / 0, 1, 32, 243, 1024. &c Their indices being 3, 4, 5 &c.
3 Subsecundary, subtertianary series &c: are those whose squares, cubes, &c are arithmetically proportionall, as $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. $\sqrt{c:0}$, $\sqrt{c:1}$, $\sqrt{c:2}$, $\sqrt{c:3}$ &c. Theire indices being $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c.
2 Primary Secundanary, tertianary series &c are said to bee reciprocally proportionall (yt is to ye same increasing) which continually decrease as
$\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$. $\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}$. $\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}$.
Their indices being negative as $-1, -2, -3$.
4 The indices of compound or mixt of rationall & irrationall series, by multiplying or dividing ye indices of ye simple series may bee found as in a subsecundanary progression cubed $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{64}$ ye index is $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$.
So in ye cube roots of a secundanary progression, $\sqrt{c:0}$, $\sqrt{c:1}$, $\sqrt{c:4}$, $\sqrt{c:9}$ &c. ye index is $\frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$.
So in irrationall reciprocall progressions $\sqrt{qq:\frac{1}{0}}$, $\sqrt{qq:\frac{1}{1}}$, $\sqrt{qq:\frac{1}{2}}$, $\sqrt{qq:\frac{1}{3}}$ &c ye index is $-1 \times \frac{1}{4} = \frac{-1}{4}$.

Fonte: http://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-04000/33, acesso em 20 ago. 2016.

Ele generalizou e simplificou a integral de Wallis, em notação moderna, $\int_0^1 \left(1 - t^{1/p}\right)^q dt$ olhando para o caso $\int_0^x \left(1 - t^2\right)^{m/2} dt$. Com isso, ele conseguiu expressar *arcsenx* em termos de séries infinitas:

$$arcsenx = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} + \frac{x^7}{112} + \ldots$$

De onde desencadeou a série Binomial de Newton:

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{1.2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

Esses e outros resultados foram relatados por Newton a Leibniz em duas grandes correspondências as *Epistola Prior* (Epístola primeira) e *Epistola Posterior* (Epístola posterior) em que ele, também, reconhece a dívida para com Wallis (STEDALL, 2004, p. xxxii).

Wallis fazia parte de um círculo em que estavam a maior parte dos membros do seu campo, a *Royal Society*, ele reconheceu e seguiu os padrões de seleção instituídos por essa sociedade e, também sobre o seu método e o impacto na sociedade inglesa, citamos Alexander (2016):

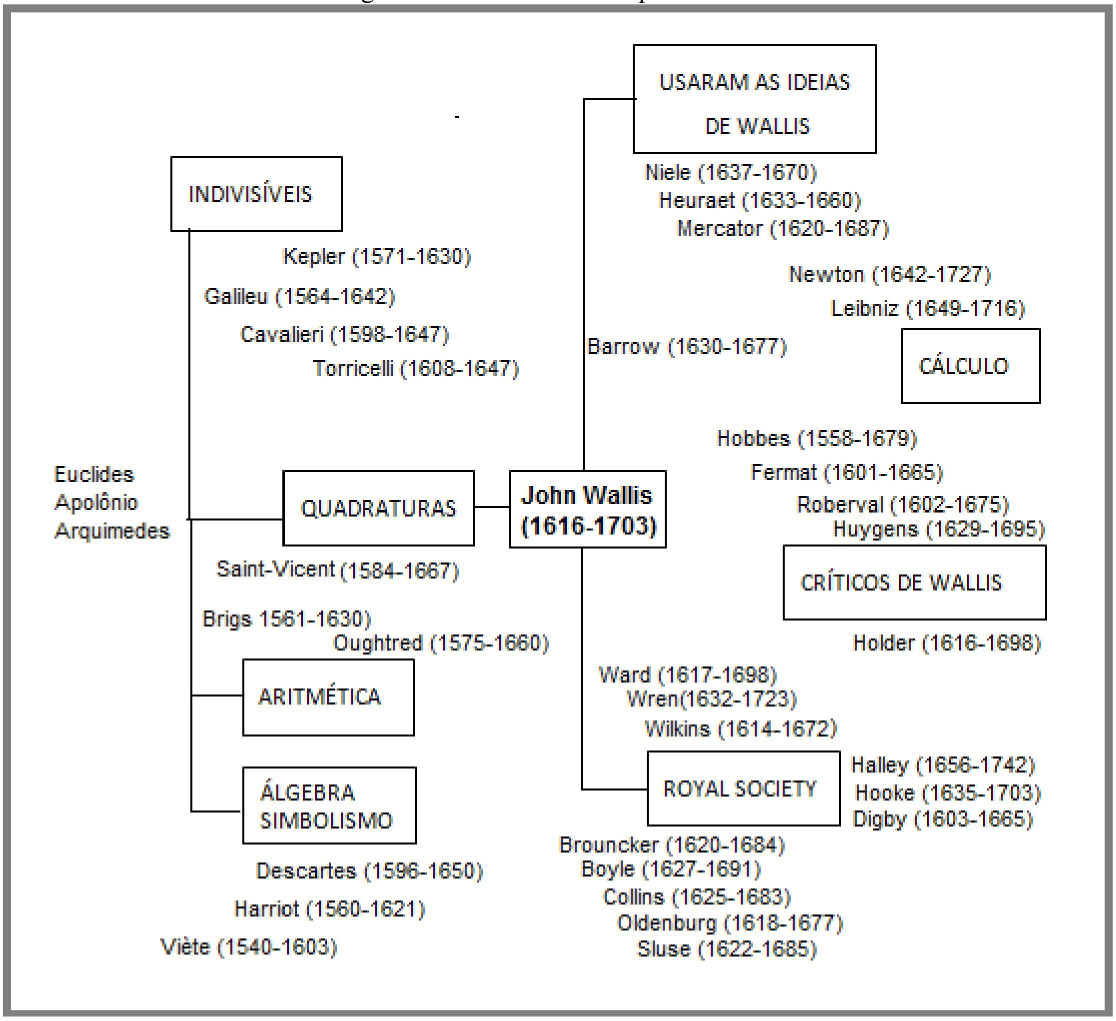
> Em quase todos os aspectos, a matemática de Wallis replicava as práticas experimentais de seus associados na *Royal Society*. Ele investigava objetos externos, não objetos contruídos, sua matemátic, baseava-se na indução, não na dedução; [...] Esse era precisamente o tipo de matemática que se esperaria do único matemático entre os fundadores da *Royal Society*, e era o que os figurões da Sociedade procuravam. Em vez de ser uma rival perigosa das práticas experimentais, a matemática podia agora unir-se a elas para promover uma ciência apropriada (ALEXANDER, 2016, P. 308)

Além disso, Stedall (2001) explana sobre o conhecimento de Wallis a respeito do domínio matemático da época:

> Nos primeiros anos enérgicos de sua cátedra [professor saviliano em Oxford], Wallis reconheceu e aproveitou as melhores idéias da década de 1630: os indivisíveis e as novas possibilidades da geometria algébrica abertas por Descartes. Nem todos os resultados de Wallis foram novos, mas o *Arithmetica infinitorum* trouxe, pela primeira vez, muito material para o domínio público. No entanto, Wallis foi mais inovador nos seus métodos, especialmente em sua ousada tentativa de lidar com processos infinitos e quantidades infinitesimais. Sua falta de rigor foi criticada na época como tem sido desde então, mas para Wallis o fim justificou os meios, e o fluxo de novos resultados que se seguiram nas mãos de Brouncker, Mercator e acima de tudo Newton deixou, sem dúvida, o impacto e o valor do trabalho de Wallis.(STEDALL, 2001, p. 25)

Elaboramos uma nova versão do esquema da seção 3.4, incluindo os intelectuais que criticaram ou mantiveram um debate com John Wallis sobre o *Arithmetica Infinitorum.* Dessa forma contribuímos para elucidar cada vez mais o campo de John Wallis.

Figura 47 – Domínio e Campo de Wallis



Fonte: Elaborado pela autora.

Cinco anos após morte de Wallis, o professor saviliano de astronomia David Gregory escreveu um sumario sobre a vida e trabalho de Wallis e afirmou que o *Arithmetica Infinitorum* era recenhecido como o fundamento de todas as melhorias que foram feitas na geometria até aquele momento (STEDALL, 2001, p.14-15). A obra de Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, é de grande importância para o crescimento da Matemática na segunda metade do século XVII.

4.4. Implicações para o Ensino: Indicações de Abordagens para o Ensino de Integral

Nesta seção, apresentamos algumas das ideias e métodos emergentes da obra *Arithmetica Infinitorum*, com a finalidade de apontar seu potencial pedagógico, que possa subsidiar o ensino de conceitos matemáticos numa perspectiva de melhorar o entendimento sobre as ideias matemáticas nos estudantes de Cursos de Formação de Professores de Matemática. Apoiados no modelo proposto na seção 2.4, exibimos nossas susgestões e encaminhamentos didáticos para o ensino de Integrais a partir do nosso exame, também destacamos de que modo esse encaminhamento desenvolverá a criatividade matemática dos alunos. Nossa experiência lecionando componentes curricularess nesses cursos nos fez acreditar que os estudantes necessitam ampliar o número de trajetórias que levam ao desenvolvimento de uma ideia Matemática e, nesta dinâmica, os futuros educadores matemáticos, possivelmente, desenvolverão um espírito investigador em conteúdos relacionados ao ensino e aprendizagem de Matemática.

No Seminário Nacional de História da Matemática, ocorrido em Natal no ano de 2015, tivemos uma sessão voltada para a discussão sobre a história da Matemática na Educação. Coordenaram a sessão as professoras Bernadete Morey, Lígia Arantes Sad, Rosa Baroni e Circe Mary Silva da Silva. Nos encaminhamentos dados pelo grupo, um dos pontos de discussão foi a respeito da efetiva utilização da história da Matemática no ensino de Matemática. Levantou-se a questão de que já havia um número expressivo de pesquisa neste âmbito, mas pouco se sabia sobre a concretização dos resultados em sala de aula. Para que uma proposta com abordagem de conteúdos de Matemática, que utilizem a história da Matemática como ferramenta metodológica se materialize, deve-se admitir que o professor tenha bom conhecimento da Matemática que será ensinada. Dessa maneira, o professor poderá enxergar não apenas a proposta enunciada em uma pesquisa, mas ele próprio poderá arquitetar novas abordagens. Nesse sentido, os cursos de formação de professores de Matemática devem oferecer aos seus estudantes abordagens que levem a uma aprendizagem consistente da Matemática. Alargando essa discussão, concordamos que

> A matemática, como qualquer área do conhecimento humano, tem seu desenrolar evolutivo capaz de caracterizá-la como uma ciência que também se desenvolve a partir da sua própria história. Desse modo podemos buscar nessa história fatos, descobertas e revoluções que nos mostrem o caráter criativo do homem quando se dispõe a elaborar e disseminar a ciência matemática no seu meio sócio-cultural. Cabe-nos, entretanto, o cuidado de saber buscar na história da matemática a medida certa para nos tornarmos capazes de adquirir o espírito presente nesse conhecimento. (MENDES, 2001 p.18):

Ao examinarmos a obra *Arithmetica Infinitorum,* identificamos a oportunidade de uma abordagem de tópicos do Cálculo desencadeados pelas ideias de Wallis. Podemos colocar como exercícios desafiadores para o estudante as lacunas deixadas em seu livro, por exemplo. Deste modo, estamos contribuindo para uma melhor aprendizagem dos conteúdos e para o estabelecimento de um posicionamento investigativopor parte dos estudantes. Tendo isso em vista, nossa proposta inclui apresentar algumas ideias de John Wallis, expressas em sua obra *Arithmetica Infinitorum,* que fazem emergir relações entre áreas e integral de Riemann. Nesse ponto, nosso estudo se concentra no desenvolvimento do pensamento matemático diferente das perspectivas proporcionadas por estudos históricos.

Para uma abordagem didático-pedagógica em sala de aula do exame de um exercício de criatividade histórico materializado em um texto, o professor anuncia para os estudantes o tema que será alvo da investigação matemática, no nosso caso, integrais.

Dados editoriais do texto devem ser informados:

Título do Texto	*Arithmetica Infinitorum*
Autor	John Wallis
Ano de publicação	1656
Local de publicação	Oxford Inglaterra

Em seguida, para o exame do exercício criativo histórico na perspectiva apresentada no cápitulo 2, deve ser feito um estudo biográfico do autor, sobre o contexto social e cultural do período em que o autor viveu e sobre o tema central abordado em seu texto. Para isso, o professor deve instruir os estudantes fazerem suas próprias pesquisas indicando palavras centralizadoras da pesquisa, que possam ser utilizadas em plataformas eletrônicas de busca em uma biblioteca ou em um site de busca como o *Google*. No nosso caso algumas palavras centralizadoras já foram exibidas na figura 29 deste texto. A seguir, apresentamos o nosso exemplo:

John Wallis	Arithmetica Infinitorum	Matemáticos século XVII
Quadratura	Inglaterra século XVII	História Matemática século XVII
Indivisíveis	Infinitesimal	Integrais século XVII

Decorrente dessa pesquisa, os estudantes podem trazer temas que eles julgam relacionados com o tema proposto para a investigação. O professor deve dar a oportunidade desses estudantes se manifestarem, uma consequência importante dessa atitude são que os estudantes se sentem valorizados e os conhecimentos do professor podem ser ampliados.

Os estudantes podem fazer essa pesquisa em ambiente fora de sala de aula e trazer seus resultados para uma discussão em conjunto com os colegas e professor. Nessa dinâmica, questões podem ser levantadas e dúvidas podem ser esclarecidas. Essa atividade visa a contrução de um panorama do domínio, campo e indivíduo, além de ressaltar suas relações, isso deve ser feito usando como referência o Modelo de Sistemas de Criatividade de Csikszentmihalyi. É indicado o uso de um laboratório de informática com computadores conectados *internet,* essa atividade de pesquisa pode ser feita em conjunto, professor e estudantes. A organização das informações obtidas deve ser feita de modo, que posteriormente, uma discussão possa acontecer. Como sugestão, nós indicamos a elaboração de uma lista de termos emergentes das pesquisas, pois assim o estudante pode desenvolver o seu discursso oral durante as discussões. Como atividade de sistematização e registro escrito, cada estudante é responsável por elaborar um texto escrito, de forma que haja, também, um desenvolvimento da escrita.

Alguns estudantes podem apresentar ao grupo sua sistematização, mas em uma primeira abordagem com os alunos, o professor pode desempenhar essa tarefa e as demais fica a cargo de um estudante. Esse momento é útil para o apontamento das relações emergentes nas discussões entre domínio, campo e individuo. Esse é um momento riquíssimo, pode-se constatar se as questões levantadas inicialmente foram não respondidas, e novas questões podem emergir. Qualquer um dos casos configura mais uma oportunidade do exercício investigativo por parte dos estudantes. No nosso exemplo, os resultados dessa etapa podem ser verificados no capítulo 3 deste texto.

É chegado o momento dos estudantes conhecerem o texto original. O professor leva para a sala de aula o texto original para observação dos alunos e posterior levantamento de questões. No caso do nosso exemplo, a observação do *Arithmetica Infinitorum* pode gerar os seguintes comentários e questões semelhantes às seguintes:

Figura 48 – Questões levantadas após a observação da obra.

Observação ou comentário	**Questões**
A tipografia parece ser antiga	O texto se apresenta legível ou não?
O texto está em latim. Eu não sei ler latim.	Por que o texto está escrito em latim?

O texto não é subdividido em capítulos, como ocorre na maioria dos textos atuais.	Isso dificulta a localização de um resultado em particular?
Nas demonstrações o autor não usa uma linguagem fortemente simbólica.	Essa é uma característica do autor ou da época?
Existem muitas tabelas.	Qual a função dessas tabelas no texto?
Existem muitas expressões aritméticas, progressões aritméticas.	A soma de uma progressão aritmética era conhecida naquela época?
Tem muitas figuras.	Qual a funcionalidade dessas figuras no texto?
Há figuras de curvas como parábolas e círculos.	Por que não aparecem figuras das outras cônicas? Hipérbole e elipse.
Para o autor tudo é proposição.	Existem diferenças entre o significado de lema, teorema, corolário e conjectura em um texto matemático? Qual a função dos exemplos?
Algumas figuras aparecem fatiadas por linhas.	Por que ele fez isso em várias figuras planas?

Fonte: Elaborado pela autora.

Devemos ressaltar que prática dessa atividade pode ajudar a clarificar, ainda mais, as relações entre domínio, campo e indivíduo, além de poder apontar a epistemologia da matemática e os métodos de investigação do autor. Algumas dessas questões já podem ter sido comtempladas com uma resposta satisfatória na etapa anterior.

O professor pode anunciar a parte do texto que será examinada. No nosso caso, a tabela da prosição 44 é o alvo central da nossa atividade investigatória, perifericamente aparecem as proposições que deram origem a essa tabela. Registramos que os cálculos, que apresentamos a seguir, não aparecem na obra de John Wallis, são fruto do trabalho da autora, enquanto buscava a compreensão dos resultados que eram traduzidos para o protuguês.

Apoiando-se em seu método de indução, Wallis estabelece na proposição 44 de sua obra, a tabela a seguir que sintetiza e exprime suas ideias acerca da razão

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + 4^k + \ldots + n^k}{\underbrace{n^k + n^k + n^k + n^k + n^k + \ldots + n^k}_{n+1 \ vezes}}, \tag{R}$$

onde k é um número inteiro positivo.

Figura 49 - Razões em termos dos valores de *k*

k	Razão	Potência da Série
0	$\frac{1}{1}$	Iguais
1	$\frac{1}{2}$	Primeira potência
2	$\frac{1}{3}$	Segunda potência
3	$\frac{1}{4}$	Terceira potência
4	$\frac{1}{5}$	Quarta potência
5	$\frac{1}{6}$	Quinta potência
6	$\frac{1}{7}$	Sexta potência
7	$\frac{1}{8}$	Sétima potência
8	$\frac{1}{9}$	Oitava potência
9	$\frac{1}{10}$	Nona potência
10	$\frac{1}{11}$	Décima potência

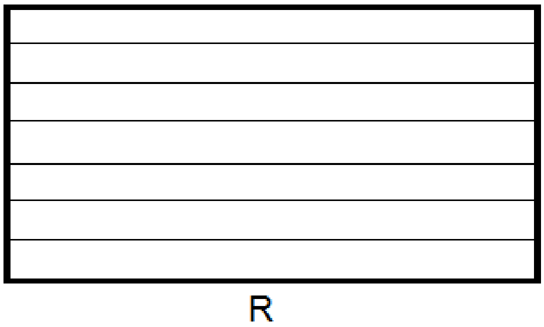
Nossa intenção, primeira, é indicar uma abordagem utilizando as ideias criativas de John Wallis presentes na tabela anterior. Para tal, correlacionamos os resultados obtidos por ele com aqueles equivalentes na Matemática atual, usando tanto recursos geométricos quanto aritméticos, explicitando o potencial pedagógico deste tratamento. A ideia é examinar a razão da soma dos comprimentos das linhas de uma figura plana pela soma dos comprimentos das linhas equivalentes do paralegramo circunscrito a essa figura.

Para melhor apresentação e discussão dos resultados da tabela anterior, vamos trabalhar com cada linha e fazer uma subdivisão em etapas, cada etapa corresponde ao tratamento da figura plana determinada por uma curva específica. Essa atividade é um momento de observação, experimentação e exploração.

Linha 1 da Tabela: Primeira Potência

k	Razão	Potência da Série
0	$\frac{1}{1}$	Iguais

A primeira linha da tabela pode ser discutida em um paralelogramo como a seguir.



Observamos:

$\frac{R}{R}=1$, $\frac{R+R}{R+R}=1$, $\frac{R+R+R}{R+R+R}=1$, $\frac{R+R+R+R}{R+R+R+R}=1$, ...

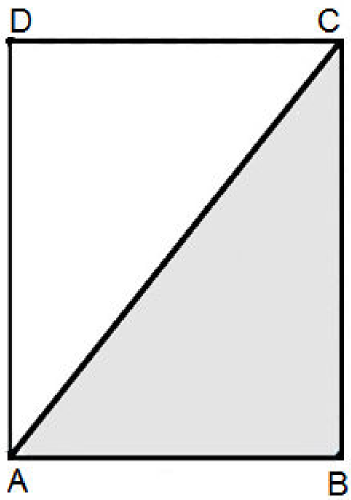
Ao fazer isso n vezes, obtemos: $\frac{n\,R}{n\,R}=1$,

E a conlusão que tiramos é que: podemos fatiar o retângulo em quantas partes quisermos a razão sempre será igual a 1.

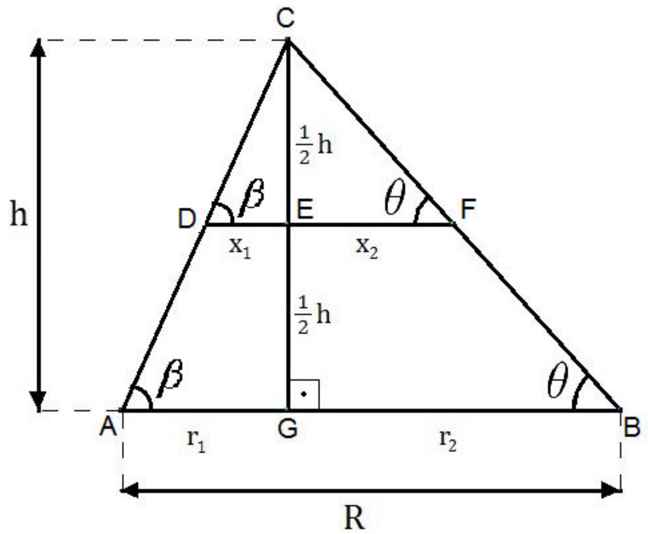
Linha 2 da Tabela: Primeira Potência

k	Razão	Potência da Série
1	$\frac{1}{2}$	Primeira potência

Para k=1, a razão entre as áreas do retângulo ABCD e do triângulo ABC é $\frac{1}{2}$, como na figura a seguir. Esse resultado é observado na segunda linha da tabela e é proveniente das proposições 1, 2 e 3 da obra *Arithmetica Infinitorum* e foi apresentado na seção 4.2.



Mostraremos a seguir que esse resultado é independente do tipo de triângulo tomado e nas nossas discussões sucessoras tomaremos, a título de simplificação dos cálculos, triângulos retângulos. Tome um triângulo ABC como a seguir, cuja altura mede h e a base tem medida R. Seja E o ponto médio do segmento CG.



Nos triângulos AGC e DEC, temos:

$$tg\beta = \frac{h}{r_1} \quad \text{e} \quad tg\beta = \frac{\frac{1}{2}h}{x_1}.$$

E disso, $\dfrac{h}{r_1} = \dfrac{\frac{1}{2}h}{x_1}$.

Assim, podemos escrever $x_1 = \frac{r_1}{2}$.

Nos triângulos BGC e FEC, temos:

$$tg\theta = \frac{h}{r_2} \quad \text{e} \quad tg\theta = \frac{\frac{1}{2}h}{x_2}.$$

Disso,

$$\frac{h}{r_2} = \frac{\frac{1}{2}h}{x_2}.$$

Assim, podemos escrever $x_2 = \frac{r_2}{2}$. A simplificação de h nesta etapa nos permite tomar um valor particular para h sem perder a generalidade.

Concluímos que,

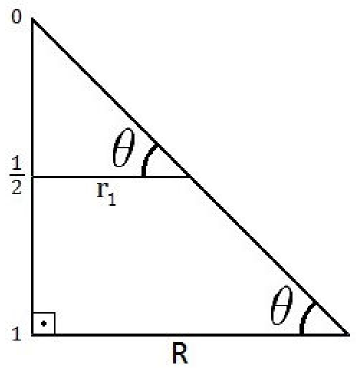
$$x_1 + x_2 = \frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{2}. \text{ Donde, } x_1 + x_2 = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{R}{2}.$$

Isso indica que ao tomarmos o ponto médio E da altura CG o comprimento do segmento DF é a metade da medida do comprimento da base do triângulo.

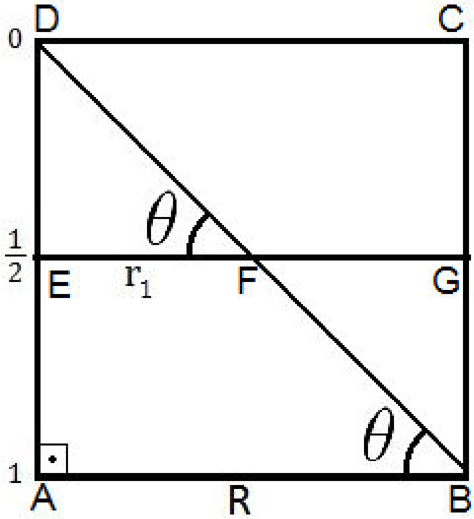
A proposta de Wallis inclui a subdivisão de um segmento em partes iguais, de tal forma que os comprimentos dessas partes estejam em proporções aritméticas. Cada etapa deve ser construída e discutida.

- Primeira etapa:

Consideremos um triângulo retângulo com altura igual a 1, como na figura a seguir:



Vamos, assim como Wallis, investigar a razão entre a área do triângulo e do retângulo como na figura a seguir. Seja E o ponto médio da altura AD, como na figura:



Assim, temos que:

$$tg\theta = \frac{1}{R} = \frac{\frac{1}{2}}{r_1}.$$

Logo, $r_1 = \frac{1}{2}R$.

Agora, vamos investigar a soma das medidas dos segmentos da base AB, do segmento EF, e considerar D o segmento degenerado de medida zero:

$$0 + r_1 + R = 0 + \frac{1}{2}R + R.$$

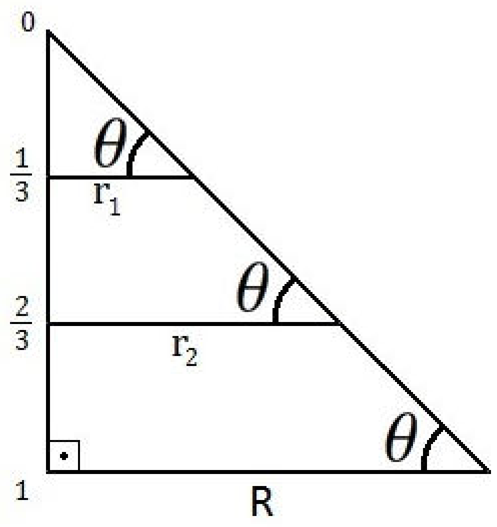
Fazendo a razão da soma anterior pela soma da medida da base, três vezes, temos

$$\frac{0+\frac{1}{2}R+R}{R+R+R} = \frac{0+\frac{1}{2}+1}{1+1+1} = \frac{0+1+2}{2+2+2} = \frac{1}{2}.$$

Que parte do que Wallis indicou na sua proposição 1.

- Segunda etapa:

Consideremos agora a altura dividida em três partes iguais, como na figura a seguir:



Podemos observar que

$$tg\theta = \frac{1}{R} = \frac{\frac{1}{3}}{r_1} = \frac{\frac{2}{3}}{r_2}.$$

Daí, temos que

$$r_1 = \frac{1}{3}R \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{2}{3}R.$$

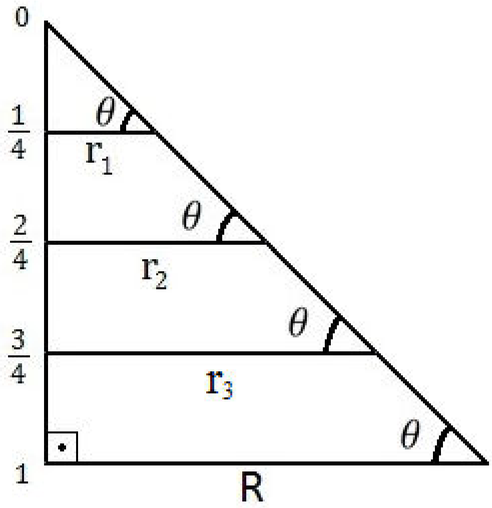
E, consequentemente, $0 + r_1 + r_2 + R = 0 + \frac{1}{3}R + \frac{2}{3}R + R$.

Fazendo a razão da soma anterior pela soma $R + R + R + R$, temos:

$$\frac{0 + \frac{1}{3}R + \frac{2}{3}R + R}{R + R + R + R} = \frac{0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1}{1 + 1 + 1 + 1} = \frac{0 + 1 + 2 + 3}{3 + 3 + 3 + 3} = \frac{1}{2}.$$

- Terceira etapa:

Seguindo com esse raciocínio, vamos dividir a altura em quatro partes iguais, como na figura a seguir:



De modo que, $tg\theta = \frac{1}{R} = \frac{\frac{1}{4}}{r_1} = \frac{\frac{2}{4}}{r_2} = \frac{\frac{3}{4}}{r_3}$.

Assim,

$$r_1 = \frac{1}{4}R,\ r_2 = \frac{2}{4}R \quad \text{e} \quad r_3 = \frac{3}{4}R.$$

Consequentemente escrevemos a soma:

$$0 + r_1 + r_2 + r_3 + R = 0 + \frac{1}{4}R + \frac{2}{4}R + \frac{3}{4}R + R.$$

Agora, fazendo a razão da soma anterior pela soma $R+R+R+R+R$, temos

$$\frac{0+\frac{1}{4}R+\frac{2}{4}R+\frac{3}{4}R+R}{R+R+R+R+R} = \frac{0+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+1}{1+1+1+1+1} = \frac{0+1+2+3+4}{4+4+4+4+4} = \frac{1}{2}.$$

Que é, novamente, o resultado colocado por Wallis na sua proposição 1.

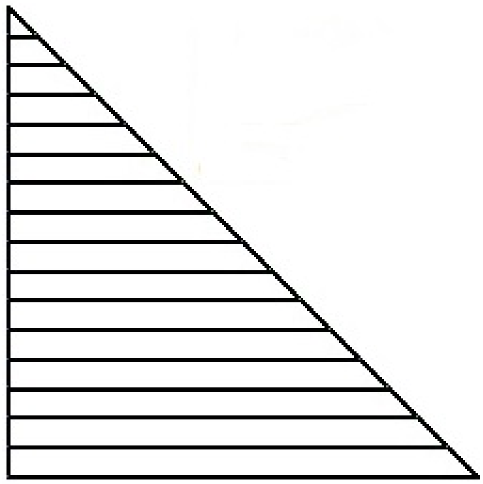
Quando os estudantes perceberem a relação entre as etapas relaizadas, pode-se começar uma discussão que vai para a direção de uma generalização. E assim,

- N-ésima etapa:

Seguindo esse raciocínio, dividindo a altura em n partes iguais, como ilustra a figura a seguir, chegamos a

$$\frac{0+\frac{1}{n}R+\frac{2}{n}R+\frac{3}{n}R+\ldots+\frac{n-1}{n}R+\frac{n}{n}R}{R+R+R+R+R}=\frac{0+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\ldots+\frac{n-1}{n}+1}{1+1+1+1+1}$$

$$=\frac{0+1+2+3+4+\ldots+(n-1)+n}{\underbrace{n+n+n+n+n+\ldots+n}_{n+1\ vezes}}=\frac{1}{2}$$



A ideia que emerge da noção, estabelecida por Wallis, de subdividir a altura do triângulo em segmentos de mesmo comprimento, nos remete a ideia de **partição** de um segmento e está correlacionada a um **processo infinito**. Neste caso, temos uma situação muito particular de partição, além das extremidades dos subintervalos serem números racionais o comprimento de todos os subintervalos é igual a $\frac{1}{n}$. Podemos levantar algumas questões desafiadoras, tais como: O intervalo tomado originalmente para ser particionado só pode ser $[0,1]$? As extremidades do intervalo a ser particionado devem, origatoriamente, ser racionais? O comprimento dos subintervalos deve ser igual a um número racional?

Também podemos explorar neste contexto noções de sequências, séries infinitas e somas parciais.

O resultado da proposição 1 pode ser abordado com o uso da fórmula para a soma dos n primeiros números naturais,

$$0+1+2+3+4+\ldots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Isso nos permite calcular o limite:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{0+1+2+3+4+\ldots+(n-1)+n}{\underbrace{n+n+n+n+n+\ldots+n}_{n+1 \text{ vezes}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{(n+1)n} = \frac{1}{2}.$$

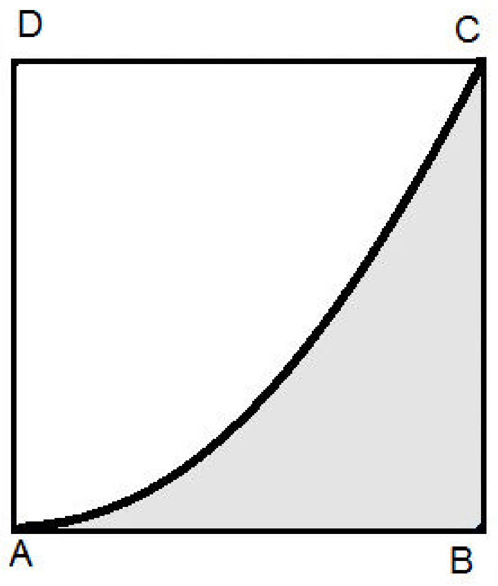
Encontrando o resultado proposto por Wallis.

Agora, vamos explorar a:

Linha 3 da Tabela: Segunda Potência

k	Razão	Potência da Série
2	$\frac{1}{3}$	Segunda potência

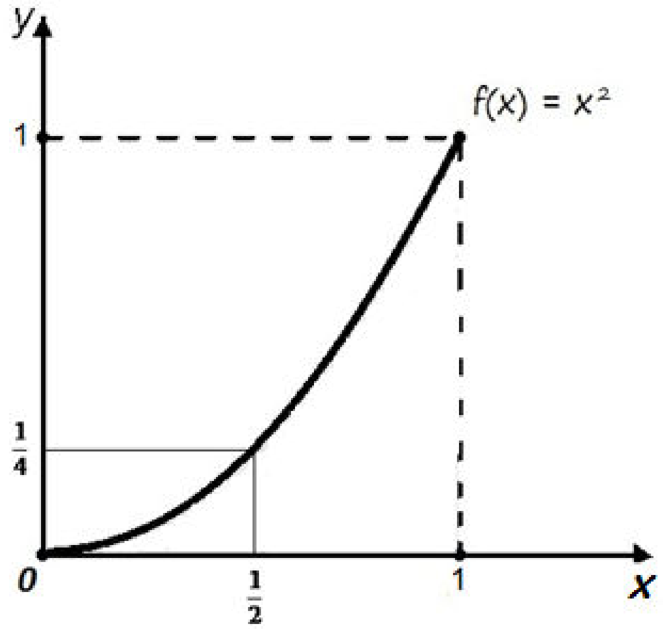
Notemos que para k=2, a razão entre a área abaixo da parábola inscrita no retângulo ABCD e a área do retângulo ABCD, como na figura a seguir, é $\frac{1}{3}$.



Para essa parte da discussão, tomaremos a parábola $f(x) = x^2$ no sistema de coordenadas cartesianas. Tomemos $x = \frac{1}{2}$.

- Primeira etapa:

Para as abscissas $0, \frac{1}{2}$ *e* 1, temos as imagens $0, \frac{1}{2^2}$ *e* $\frac{2^2}{2^2}$, respectivamente.



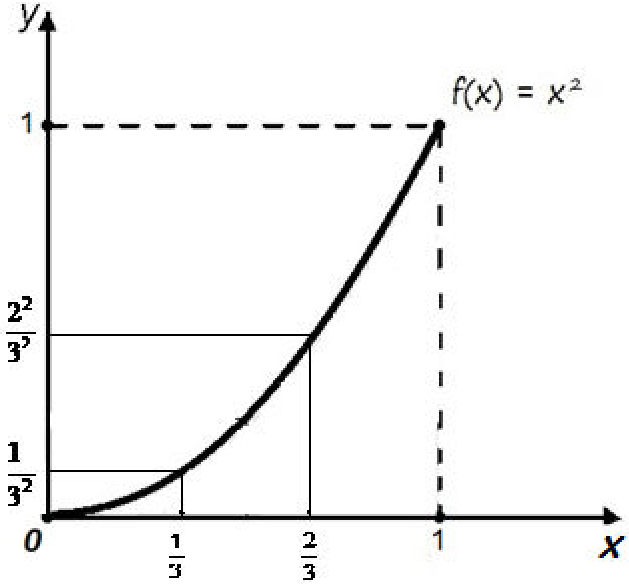
Assim a razão entre a soma das imagens pela soma da base dos retângulos (em mesma quantidade das imagens) é

$$\frac{0+\frac{1}{2^2}+\frac{2^2}{2^2}}{1+1+1}=\frac{0+1^2+2^2}{2^2+2^2+2^2}=\frac{5}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}.$$

Essa é a razão que configura na proposição 19 de Wallis.

- Segunda etapa:

Avançando nosso raciocínio na direção dos resultados indicados por Wallis, vamos considerar as abscissas $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ e 1 e suas imagens 0, $\frac{1}{3^2}$, $\frac{2^2}{3^2}$ e $\frac{3^2}{3^2}$, respectivamente, como na figura a seguir:

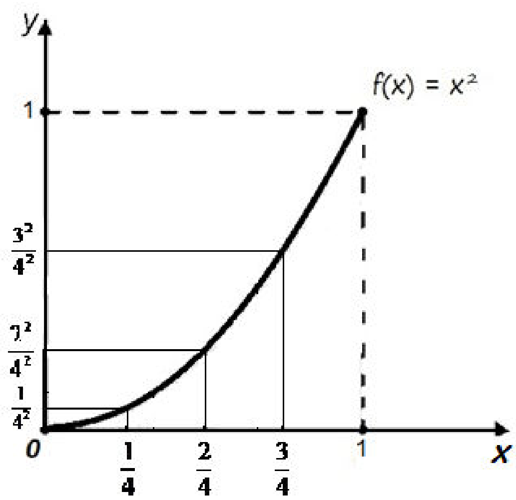


Assim a razão da soma das imagens pela soma da base dos retângulos (em mesma quantidade das imagens) é

$$\frac{0+\frac{1}{3^2}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{3^2}{3^2}}{1+1+1+1}=\frac{0+1^2+2^2+3^2}{3^2+3^2+3^2+3^2}=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18}.$$

-Terceira etapa:

Seguindo a diante, considerando as abscissas 0 , $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ e 1, temos a soma das imagens igual a $0+\frac{1}{4^2}+\frac{2^2}{4^2}+\frac{3^2}{4^2}+\frac{4^2}{4^2}$.



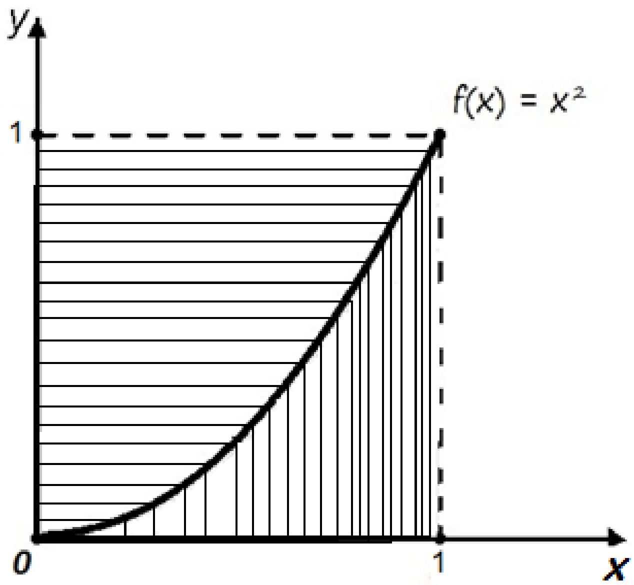
Assim a razão da soma das imagens pela soma da base do retângulo é

$$\frac{0+\frac{1}{4^2}+\frac{2^2}{4^2}+\frac{3^2}{4^2}+\frac{4^2}{4^2}}{1+1+1+1+1}=\frac{0+1^2+2^2+3^2+4^2}{4^2+4^2+4^2+4^2+4^2}=\frac{30}{80}=\frac{3}{8}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$$

Os denominadores da segunda fração da soma obtida como resultado tem relação com a etapa estudada, isso deve emergir ou ser provocado na discussão. A descoberta dessa relação faz parte do processo de representação mental, em que o estudante faz experimentos e manipulações mentais para chegar a um resultado. A relação obtida nesse processo leva a uma representação simbólica que pode ser observada na etapa seguinte. O procedimento de busca de uma fórmula para relações como essa é de extrema importância no estudo de sequências e séries infinitas. Os resutados das etapas anteriores são observados e pode-se partir para uma generalização.

- n-ésima etapa:

Continuando, subdividindo o intervalo, temos



$$\frac{0+\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\frac{3^2}{n^2}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^2}+\frac{n^2}{n^2}}{1+1+1+1+1}=\frac{0+1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+(n-1)^2+n^2}{\underbrace{n^2+n^2+n^2+n^2+n^2+\ldots+n^2}_{n+1\ vezes}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6(n+1)}$$

Donde, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{0+1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+(n-1)^2+n^2}{\underbrace{n^2+n^2+n^2+n^2+n^2+\ldots+n^2}_{n+1\ vezes}}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{6(n+1)}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{(n+1)n^2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

.

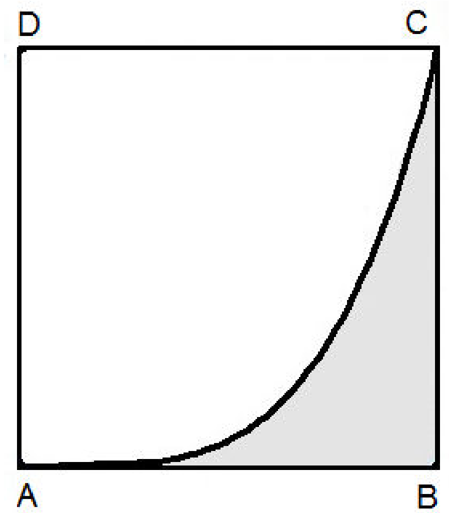
O que foi, também, sugerido por Wallis na proposição 20 do *Arithmetica Infinitorum*, já examinada nesta tese.

Seguimos adiante no nosso processo de descoberta.

Linha 3 da Tabela: Vamos explorar a Terceira Potência

k	Razão	Potência da Série
3	$\frac{1}{4}$	Terceira potência

Para k=3, a razão das áreas do retângulo ABCD e da região abaixo da cúbica inscrita no retângulo ABCD é $\frac{1}{4}$, veja a figura a seguir:



- Primeira etapa:

Para a cúbica $0, \frac{1}{2}\ e\ 1$ temos as imagens $0, \frac{1}{2^3}\ e\ 1$.

Assim a razão da soma das imagens pela soma da base do retângulo é

$$\frac{0+\frac{1}{2^3}+\frac{2^3}{2^3}}{1+1+1}=\frac{0+1^3+2^3}{2^3+2^3+2^3}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}.$$

- Segunda etapa:

Para a cúbica $0+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+1$ temos as imagens $0+\frac{1}{3^3}+\frac{2^3}{3^3}+\frac{3^3}{3^3}$

Assim a razão da soma das imagens pela soma da base dos retângulos é

$$\frac{0+\frac{1}{3^3}+\frac{2^3}{3^3}+\frac{3^3}{3^3}}{1+1+1+1}=\frac{0+1^3+2^3+3^3}{3^3+3^3+3^3+3^3}=\frac{36}{108}=\frac{4}{12}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$

- Terceira etapa:

Para a cúbica $0+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+1$ temos as imagens $0+\frac{1}{4^3}+\frac{2^3}{4^3}+\frac{3^3}{4^3}+\frac{4^3}{4^3}$.

Assim a razão da soma das imagens pela soma da base do retângulo é

$$\frac{0+\frac{1}{4^3}+\frac{2^3}{4^3}+\frac{3^3}{4^3}+\frac{4^3}{4^3}}{1+1+1+1+1}=\frac{0+1^3+2^3+3^3+4^3}{4^3+4^3+4^3+4^3+4^3}=\frac{100}{320}=\frac{5}{16}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$$

- n-ésima etapa:

Seguindo o processo temos que

$$\frac{0+\frac{1^3}{n^3}+\frac{2^3}{n^3}+\frac{3^3}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^3}{n^3}+\frac{n^3}{n^3}}{1+1+1+1+1}=\frac{0+1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+(n-1)^3+n^3}{\underbrace{n^3+n^3+n^3+n^3+n^3+\ldots+n^3}_{n+1\ vezes}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4(n+1)}$$

Donde podemos concluir que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{0+1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+(n-1)^3+n^3}{\underbrace{n^3+n^3+n^3+n^3+n^3+\ldots+n^3}_{n+1\ vezes}}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4(n+1)}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}{(n+1)n}=\frac{1}{4}$$

O que foi, também, sugerido por Wallis na proposição 40 do *Arithmetica Infinitorum*, já examinada nesta tese.

E assim por diante.

O exercício de experimentação das etapas anteriores se mostra relevante para uma primeira discussão sobre partição de um intervalo, assunto importante no trato da integral de Riemann. O estudante ao buscar inter-relacionar os resultados obtidos, nas etapas anteriores, está promovendo o processo de síntese e ele pode conjecturar que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{0^k+1^k+2^k+3^k+4^k+\ldots+n^k}{\underbrace{n^k+n^k+n^k+n^k+n^k+\ldots+n^k}_{n+1\ vezes}}=\frac{1}{k+1}$$

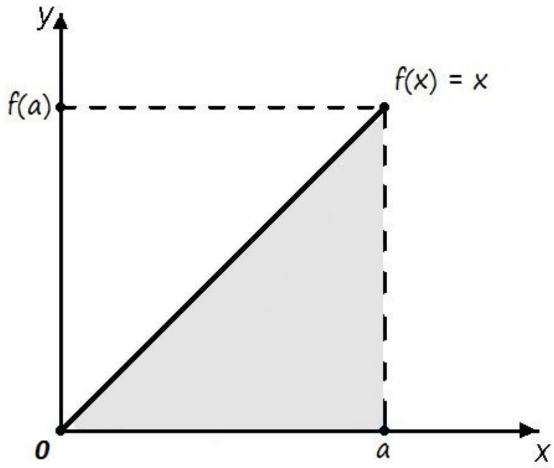
Nessa atividade há, também, uma mudança de uma representação geométrica para uma represerntação simbólica, isso se dá quando ao partir de uma figura geométrica plana determinada por uma curva se obtém o resultado anterior. Outro fato a ser notado é que o estudante percebe que o procedimento de subdivisão do segmento aplicado em cada etapa é o mesmo, isso pode ser importante no estudo da integral de Riemann, de modo que ele possa compreender que esse procedimento pode ocorrer para diferentes funções.

O processo infinito de subdivisão do segmento é um processo geométrico que se associa a um processo aritmético infinito que é as séries. Essa associação é uma janela para o estudo dos núremos reais, relacionando a sua representação geométrica na reta com sua representação decimal. A represerntação decimal pode ser associada a uma série geométrica, no caso dos racionais. Boas discussões a encaminhamentos didáticos podem ser proveniente dos resultados obtidos por Wallis pelo seu método de investigação.

Agora, vamos relacionar os resultados obtidos por Wallis, através do seu método, com o que Wallis estabeleceu, com o seu método de indução, que foi a razão entre a área fa figura delimitada pela a curva $y=x^k$ e o eixo x intervalo $[\,0, a\,]$. Na notação atual, com o uso das integrais, temos fórmulas equivalentes que exibiremos agora.

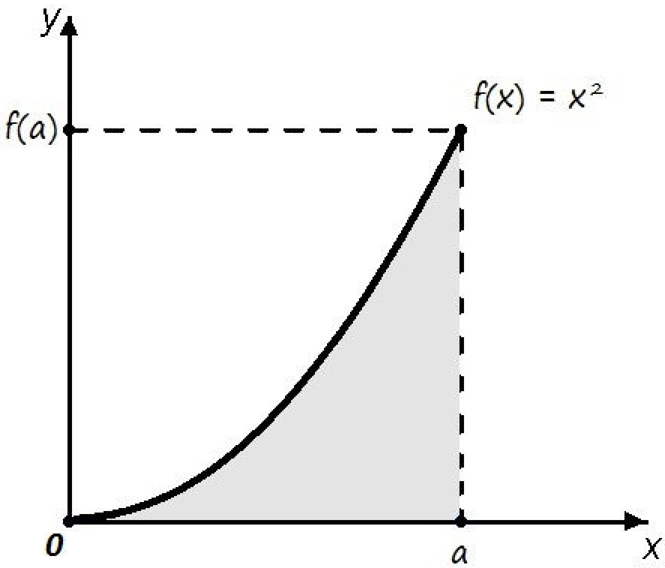
- Para k=1, a área do retângulo da figura a seguir é a^2 e podemos escrever

$$\int_0^a x\;dx=\frac{a^2}{2}.\quad \text{Donde, } \frac{\int_0^a x\;dx}{a^2}=\frac{1}{2}.$$



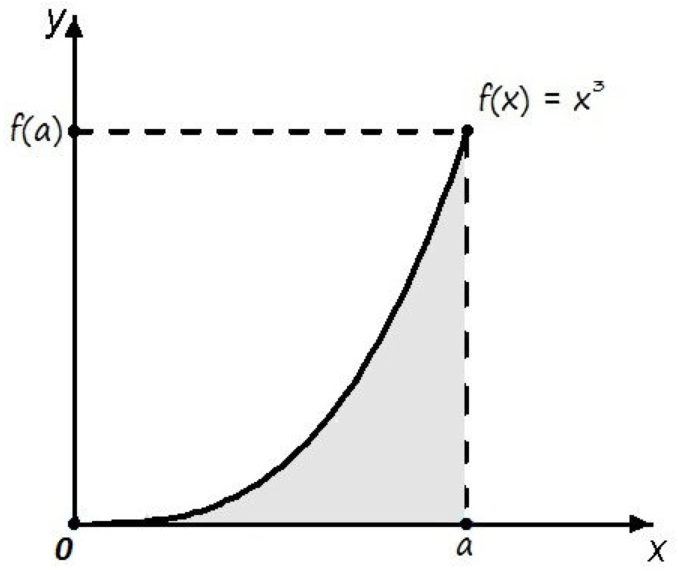
- Para k=2, a área do retângulo da figura abaixo é a^3 e podemos escrever

$$\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}. \quad \text{Donde,} \quad \frac{\int_0^a x^2\,dx}{a^3} = \frac{1}{3}.$$



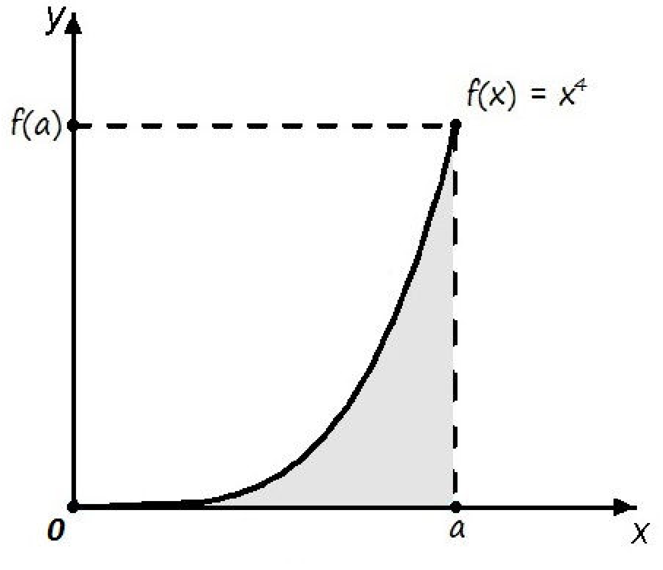
- Para k=3, a área do retângulo da figura abaixo é a^4 e podemos escrever

$$\int_0^a x^3\,dx = \frac{a^4}{4}. \quad \text{Donde,} \quad \frac{\int_0^a x^3\,dx}{a^4} = \frac{1}{4}.$$



- Para k=4, a área do retângulo da figura abaixo é a^5 e podemos escrever

$$\frac{\int_0^a x^4\,dx}{a^5} = \frac{1}{5}\ .\ \text{Donde, } \int_0^a x^4\,dx = \frac{a^5}{5}\ .$$



Podemos fazer uma nova versão para a tabela de Wallis em termos de integrais que calculam as áreas expostas nos procedimentos executados por ele e as razões $\dfrac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + 4^k + \ldots + n^k}{\underbrace{n^k + n^k + n^k + n^k + n^k + \ldots + n^k}_{n+1 \text{ vezes}}}$ encontradas em seu trabalho:

Podemos adaptar a tabela 44 de Wallis como na figura 49:

Figura 50 - Associação dos resultados de Wallis com integrais.

k	Razão	Integral
0	$\frac{1}{1}$	$\int_0^a dx = a$
1	$\frac{1}{2}$	$\int_0^a x\, dx = \frac{a^2}{2}$
2	$\frac{1}{3}$	$\int_0^a x^2\, dx = \frac{a^3}{3}$
3	$\frac{1}{4}$	$\int_0^a x^3\, dx = \frac{a^4}{4}$
4	$\frac{1}{5}$	$\int_0^a x^4\, dx = \frac{a^5}{5}$
5	$\frac{1}{6}$	$\int_0^a x^5\, dx = \frac{a^6}{6}$
6	$\frac{1}{7}$	$\int_0^a x^6\, dx = \frac{a^7}{7}$
7	$\frac{1}{8}$	$\int_0^a x^7\, dx = \frac{a^8}{8}$
8	$\frac{1}{9}$	$\int_0^a x^8\, dx = \frac{a^9}{9}$

Fonte: Elaborado pela autora.

Podemos propor uma discussão acerca dos valores encontrados para a razão $\dfrac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + 4^k + \ldots + n^k}{\underbrace{n^k + n^k + n^k + n^k + n^k + \ldots + n^k}_{n+1 \text{ vezes}}}$ para curvas do tipo $y = mx^k$, onde m é um inteiro positivo. Qual seria uma razão para curvas desse tipo? Por exemplo, tomando $y = 2x^2$, podemos trabalhar com os estudantes e estabelecer a integral $\int_0^a m\,x^k\, dx$ de forma a observar a propriedade da integral $\int_0^a m\,x^k\, dx = m\int_0^a x^k\, dx$.

Estas atividades podem preceder a definição da integral de Riemann, e defendemos que os estudantes que passa por essa etapa podem compreender melhor os processos envolvidos nessa tarefa. Além de desenvolverem o espírito investigador que contribui no desenvolvimento da criatividade.

Até a proposição 44, Wallis trabalhou com curvas do tipo $y = x^m$ com m um inteiro positivo, mas na seção 4.2 vimos que ele estendeu seus resultados para valores racionais. Uma questão que pode surgir é a seguinte: o método de investigação de Wallis usados em outras curvas podem nos levar a conclusões semelhantes às obtidas nesta seção? De outra forma, perguntamos: o Método de Wallis é universal? A resposta a esta questão nos dias atuais pode ser dada, pois somos amparados por uma teoria que foi bastante desenvolvida no século XVIII: séries infinitas e o estudo de sua convergência. As pessoas que já foram introduzidas no estudo de séries sabem o quão pode ser complexa a determinação da convergência ou não convergência de uma série, existem séries cuja convergência ou não ainda não foi determinada. Então a resposta é: não.

Para uma abordagem de conteúdos de Análise, podemos indicar o estudo da relação da tabela obtida por Wallis com binômio de Newton e série binomial.

O exercício criativo de John Wallis, na sua obra *Arithmetica Infinitorum*, nos subsidiou no preparo e desenvolvimento das atividades que proposemos nesta seção. A proposta pedagógica para o ensino de Integral, da componente curricular de Cálculo na Licenciatura de Matemática, que apresentamos possui a característica de que nas primeiras fases do desenvolvimento da teoria os estudantes são levados pelo professor, a se desafiarem abrindo espaço para possíveis conjecturas, que evidenciam um processo de criatividade Matemática como parte da aprendizagem como sugerido por Mendes (2015). Além disso, essa abordagem propicia ao aluno uma familiariadade com o assunto antes de um tratamento dentro de uma estrutura dedutiva, tratamento esse que é característico no modo tradicional de lidar com a definição de integral de Riemann. Viabilizando, assim, a possibilidade de superação das dificuldades encontradas para a compreensão desse conceito.

Nossa proposta de abordagem contribui para a formação de uma visão de que a Matemática é fruto de um processo construtivo e, que um conceito matemático, como por exemplo, de integral é resultado de uma criação humana, que mobilizou muitos matemáticos e demandou muito tempo para adquirir a forma atual que conhecemos e lidamos.

Dessa forma, destacamos que as práticas adotadas nessa abordagem levam o estudante a adquirir uma consciência investigatória, que pode estrapolar o conteúdo aqui tratado e atingir outros conteúdos de Cálculo, ou mesmo de outra componente curricular. Essa consiência é fator relevante no desenvolvimento da autonomia nos estudantes.

Amparados pela visão de D'Ambrosio (2014, p. 83) de que quando um professor inicia a sua carreira, ele vai agir na sala de aula, essencialmente, como ele viu alguém fazendo, supomos que a abordagem pedagógica apresentada é uma oportunidade do estudante em formação vivenciar uma situação concreta do uso da história da Matemática em uma componente curricular do curso de Licenciatura em Matemática. Dessa forma, o uso da história da Matemática, na mesma perspectiva aqui exibida, poderá fazer parte da prática profissional deste futuro professor de Matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao iniciarmos esta pesquisa nos propusemos a buscar respostas a questionamentos que surgiram no percorrer da nossa atividade como professores de Matemática de Cursos de Licenciatura, mais especificamente no que se refere ao ensino e aprendizagem de Cálculo. Enquanto lidamos em sala de aula com os conteúdos desta componente curricular, percebemos que os alunos têm pouco conhecimento sobre os números reais. Esse quadro é, em parte, fruto de que na Educação Básica é dado um tratamento com enfoque principal voltado para as operações: os números reais são objetos que podem ser somados e multiplicados, segundo regras pré-estabelecidas. Já no Ensino Superior o que é mais valorizado é a estrutura algébrica que caracteriza os conjuntos, entendemos que apenas essa abordagem não é suficiente para que o licenciando compreenda os números reais. Confiamos que trabalhando a sedimentação do conceito fundamental de números reais os estudantes podem ter mais êxito em componentes curriculares como Cálculo e Análise.

Percebemos que no Cálculo há ênfase nos algoritmos para se efetuar cálculos, privilegiando a memorização e utilização de fórmulas e que a compreensão da essência dos números reais é um tanto quanto ocultada. Entretanto, acreditamos que podemos melhorar esse quadro através de um estudo da representação decimal infinita para os números reais. Por traz desse estudo estão presentes processos infinitos que podem, em minha opinião, ser mais bem compreendidos utilizando o conceito de séries.

Nesse sentido, admitimos que investigar o exercício criativo dos matemáticos na história pode trazer informações que contribuam para o encaminhamento conceitual e didático de noções da componente curricular de Cálculo. Examinar situações específicas, com um real aprofundamento, pode nos levar a respostas muito mais satisfatórias, por isso, tratamos particularmente da obra *Arithmetica Infinitorum* de John Wallis. Buscamos compreender de que modo as ideias emergentes dessa obra podem contribuir na constituição de uma abordagem pedagógica para o ensino de conteúdos de Cálculo no curso de Licenciatura em Matemática.

O contorno de nossa investigação sobre o exercício criativo de um matemático partiu de uma compreensão da natureza da Matemática como objeto de conhecimento humano e da visão idealista de que os objetos matemáticos são inventados, discutidos no capítulo 1. Tomando como base para nossos estudos, que esses objetos são oriundos de uma atividade humana que ocorre no âmbito do pensamento e o que o ser humano ao inventá-los está dando respostas às demandas da sociedade e da ciência, partimos em busca de fundamentação teórica para a investigação do exercício criativo de um matemático na história.

Em resposta a nossa procura, no capítulo 2, destacamos a visão de Poincaré e Hadamard sobre a invenção matemática. Uma visão mais ampla sobre criatividade foi adquirida ao estudarmos o Modelo de Sistemas de Criatividade de Csiszentmihalyi (1998). Descrevemos e discutimos os subsistemas que compõe esse modelo que utilizamos para nos guiar no estudo e compreensão do exercício criativo de John Wallis. Para o aspecto do ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos no curso de Licenciatura em Matemática, destacamos os processos centrais do Pensamento Matemático Avançado propostos por Dreyfus (1991), e os relacionamos à Criatividade de Hadamard e Csiszentmihalyi. Levantamos algumas categorias criativas que nos guiaram no exame da obra *Arithmetica Infinitorum*.

O desenvolvimento do pensamento matemático pode não ser alcançado se utilizarmos apenas uma metodologia de ensino baseada na apresentação de resultados já consolidados da Matemática sem que o aluno conheça um pouco das ideias que desencadearam esses conceitos. Indicamos na seção 2.4 que os estudantes devem ter conhecimento dessas ideias através de adaptações de textos históricos elaboradas pelo professor, além disso, textos atuais devem compor esse conjunto de materiais levados ao estudante pelo professor, para que seja percebido um panorama caracterizado pela evolução de conceitos anteriores para uma apresentação mais contextualizada de um conceito atual, como, por exemplo, de integral.

Na minha vivência como professora de Matemática, percebi que muitos estudantes não aprendem os conceitos fundamentais do cálculo, isso se deve em grande parte em como eles são ensinados. Há uma supervalorização de uma metodologia de ensino que dá mais ênfase aos conjuntos de regras e procedimentos sobre limites, derivadas e integrais. Outro ingrediente que podemos considerar, é que frequentemente, nós professores despercebemos a complexidade existente em alguns conceitos matemáticos, que já se encontram acomodados em nossa prática de ensino cotidiana, como é o caso dos limites. Do ponto de vista do estudante, essa complexidade aliada à metodologia citada aqui neste parágrafo pode gerar frustrações e promover o seu insucesso.

Na tentativa de minimizar as repercusões negativas desse quadro supomos que o desenvolvimento do pensamento matemático pode não ser alcançado se utilizarmos apenas uma metodologia de ensino baseada na apresentação de resultados clássicos da Matemática sem que o aluno conheça um pouco das ideias que desencadearam esses conceitos. E nos fundamentamos nas ideias de Mendes (2015) que indica o uso da história da Matemática na construção de situações que oportunize o estudante a se desafiarem e a tomarem parte em um processo de criatividade Matemática como parte de sua aprendizagem.

Afirmamos, com base no nosso estudo, que o professor deve conhecer, pelo menos de forma geral, o processo de desenvolvimento do conceito, além do exercício de criatividade do matemático, na história, que participou do desenvolvimento desse conceito. Dessa forma, o estudante perceberá que o labor de um matemático é repleto de erros e acertos desmistificando, assim a visão de que uma Matemática exata é oriunda de gênios que tem ideias criativas ao seu bel prazer. Dessa forma o estudante pode conviver melhor com seus erros, acreditando que eles fazem parte do processo de aprendizagem da Matemática.

Tomando como referência os conceitos elaborados por Csikszentmihalyi (1998), no capítulo 3, examinamos os aspectos sócio-culturais e filosóficos da Inglaterra seiscentista, o que nos levou ao conhecimento de pontos que contribuíram para o desenho do campo e do domínio em que John Wallis estava imerso. Esse conhecimento nos levou a concluir que as ideias discutidas por intelectuais, que fundaram a *Royal Society*, tiveram um grande impacto na forma de pensar e de conduzir suas investigações em matemática por John Wallis. Seus métodos de investigação do domínio da Matemática foram originais para a época. Ainda neste capítulo, posicionamos Wallis em seu tempo e espaço.

Nosso estudo feito sobre a Inglaterra seiscentista mostrou um panorama de como a Matemática influenciou e foi influenciada pelos acontecimentos sociais e culturais, e consideramos que esses fatos se repetem em cada época do desenvolvimento da matemática. A matemática inglesa do início do século XVII partiu de um domínio que atendia as necessidades de mercadores, comerciante e artesão para no final deste século ser reconhecida como um domínio mais abrangente. Um retrato desse quadro foi apresentado na seção 3.1, que pode ser complementado lembrando que os trabalhos de Newton do final do século XVII apontaram para a relação inversa entre integração e derivação, materializando o Teorema Fundamental do Cálculo e abrindo portas para que o cálculo se consolidasse como uma importante ferramenta de uso em diversos ramos do conhecimento.

Abordamos uma experiência realizada por Wallis na tentativa de ensinar uma criança surda a falar. Essa experiência mostrou o quanto a *nova filosofia*, fundamentada nas ideias de Francis Bacon, influenciaram e delinaram as atividades de Wallis.

Fizemos uma descrição histórica da constituição do domínio da Matemática até meados do século XVII, especificamente de temas relacionados aos infinitesimais.

Seguindo a linha que leva ao estudo da quadratura por Wallis em sua obra. Neste contexto, os trabalhos de Arquimedes foram abundantemente explorados e exerceram um papel fundamental de inspiração para os resultados científicos nos séculos XVI e XVII. Várias pesquisas desta época apresentam diversos métodos utilizados para resolver problemas geométricos, dentre eles métodos empíricos que faziam uso de argumentações envolvendo infinitésimos. Destacamos os astrônomos Joahnnes Kepler e Galileu Galilei, que já apontavam para o uso dos indivisíveis, mesmo que, ainda, na sua forma ingênua e puramente geométrica. Destacamos o aprimoramento intuitivo dado aos indivisíveis por Bonaventura Cavalieri e a abordagem dos problemas por infinitésimos dada por Evangelista Torricelli. Dessa forma, alcançamos o objetivo de estabelecer relações entre o contexto cultural da época e o exercício criativo de John Wallis em sua obra.

Um aspecto relevante que ressaltamos na nossa investigação foi destacar que além de se debruçar sobre um tema desafiador da Matemática, a quadratura; Wallis teve que estrategicamente se enquadrar no meio intelectual em que viveu, o círculo da nova filosofia. No capítulo 4, apresentamos e discutimos as ideias de John Wallis e mostramos como o seu método de condução de investigação se alinha aos fundamentos da *nova filosofia*. Apresentamos nossa versão para o protuguês de um bom número de proposições da obra de Wallis, salientamos que é a primeira vez que essas proposições, em português, aparecem de forma impressa no Brasil. Esse trabalho é importante por disponibilizar as ideias de um grande matemático para um ainda público brasileiro maior.

Descrevemos e examinamos a obra *Arithmetica Infinitorum* apontando algumas categorias criativas, indicadas no capítulo 2, presentes nessa obra. Delineamos as ideias sobre limite nesta obra, destacamos os processos infinitos articulados a séries, o que foi um objetivo da nossa pesquisa. Também, iniciamos o nosso exercício de exploração das ideias de Wallis, indicando em algumas proposições a forma que essa exploração pode ocorrer. Nosso estudo sobre a obra, nos fez concluir que ele foi um importante colaborador para que as tentativas de calcular quadraturas e cubaturas se transformassem em uma técnica eficaz para calcular área e volume sob qualquer região determinada por uma curva.

Ao evidenciamos alguns reflexos marcantes da obra e as repercussões, contribuímos para um melhor conhecimento do campo, na perspectiva de Csikszentmihalyi, ao qual Wallis pertencia. Com efeito, mostramos a influência que as ideias presentes na obra colaboraram no desenvolver da Matemática na segunda metade do século XVII e no século XVIII, não só para os ingleses como para comunidade Matemática em geral.

Para finalizar o capítulo 4, indicamos um modo de abordagem para o ensino de integral, a partir das ideias emergentes da obra *Arithmetica Infinitorum*, que busca uma melhor compreensão sobre processos infinitos e de conceitos como a partição de um intervalo.

Nossa abordagem supôs que o professor tenha conhecimento das ideias do matemático em seu exercício criativo e que ele faça um tratamento dessas ideias para promover em sala de aula situações que levem o aluno ao exercício de criatividade. Mostramos que a obra de Wallis é uma fonte de atividades que contemplam os processos do pensamento matemático avançado proposto por Dreyfus (1991): atividades de exploração, especulação ou investigação, atividades generalizantes, atividades sintéticas com a apresentação de fórmulas, atividades representacionais como as tabelas. Ao discutir os potencias pedagógicos da obra para o ensino de conteúdos de Cálculo do curso inicial de formação de professores, nós alcançamos mais um objetivo da nossa pesquisa.

A ênfase utilizada na nossa abordagem é fundamentada nos significados dos conceitos, de forma que fortaleça a investigação de questões relevantes do ponto de vista do ensino e aprendizagem em sala de aula, que ajam como uma situação que busca o entendimento antes do rigor e que não privilegie a memorização de fatos matemáticos ou a reprodução de determinados procedimentos e uso mecânico de fórmulas.

Outra reflexão importante estabelecida é que uma de nossas preocupações ao propor esta abordagem de resultados matemáticos marcantes na história, através da análise da criatividade e do pensamento matemático avançado, foi transmitir aos leitores deste trabalho, em boa medida os alunos dos Cursos de Formação de Professores de Matemática uma ideia simples: os objetos matemáticos como um teorema, uma proposição, ou até mesmo uma teoria, são frutos de uma atividade investigativa fortemente influenciada por todo um contexto histórico-científico. Tudo isto gerado em um processo de levantamento e testagem de hipóteses, por meio de ações criativas que demandam experimentações do pensamento, um exercício cognitivo no qual se conectam as reflexões e ações operacionais sobre conceitos matemáticos já estabelecidos pelo aprendente. Com base neste caráter investigativo estabelecido na produção de conhecimento matemático, presente nas ideias matemáticas, que podemos extrair encaminhamentos potenciais, que devem nortear a ação do acadêmico formador de professores de Matemática, bem como desenvolver competências e habilidades para uma futura atuação do professor em formação.

Para mim este trabalho foi muito importante, pois no decorrer da minha investigação me surpreendi, por exemplo, no percorrer da investigação histórica fui percebendo mais claramente a influência de aspectos sociais nas ciências, particularmente na matemática inglesa do século XVII. Cada vez mais que avançava na elaboração da versão da obra *Arithmetica Infinitorum,* me surpreendia com o fato de que uma pessoa determinada, como foi John Wallis, conseguiu pelas suas ideias e atitudes, alcançar uma posição importante na sociedade inglesa e que por ela contribuiu de maneira eficiente para o reconhecimento e desenvolvimento da ciência, em particular da Matemática.

Também aprendi que os conceitos matemáticos atuais que fazem parte da nossa prática cotidiana são frutos de uma investigação que exige tempo e determinação. Também aprendi que o Cálculo que conhecemos hoje, assim como outras componentes curriculares, é fruto de uma atividade humana, que com a participação de muitos por várias gerações, vai ganhando novos contornos até se consolidar.

Ao longo desse processo de doutoramento nunca me senti desanimada, foi com muito entusiasmo que realizei cada etapa para conclusão desse processo, não apenas a investigação, mas também a etapa periférica e importante que é cursar as disciplinas e seminários. Minhas deficiências, além da vontade de aprender e aprofundar nos tópicos abordados em seminários com o professor Iran, faziam com que eu sentisse que os temas trabalhados eram, especificamente, direcionados a mim.

Para finalizar, apresentamos este trabalho como um convite para que outros exercícios criativos na história sejam investigados na perspectiva discutida no capítulo 2 e que outros temas da matemática possam, também, ser abordados em sala de aula nos cursos de formação de professores de Matemática. Desta forma, acreditamos ser possível atender satisfatoriemente a um grupo de jovens cheios de boas expectativas, que iniciam a jornada como Licenciandos de Matemática. Que esses jovens brilhem!

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. 6ª ed.Tradução da 1ª edição: Alfredo Bosi. São Paulo: Editora WMF Martins Fontes, 2012.

ANDERSEN, K. **Cavalieri´s Method of Indivisibles.** Archive for History of Exact Sciences 31. 1985, p.291-367. Disponível em: <https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~jroquet/Andersen.pdf>. Acesso em: 10 set. 2014.

ALENCAR, E. S., FLEITH, D. S. **Criatividade**: múltiplas perspectivas.Brasília: Editora de Universidade de Brasília, 2009.

ALEXANDER, *A.* **Exploration Mathematics:** The Rhetoric of Discovery and the Rise of Infinitesimal Methods. Configurations, v. 9, n° 1, p. 1-36, 2001. Disponível em: <https://muse.jhu.edu/article/8208>. Acesso em: 18 abr. 2016.

ALEXANDER, *A.* **Infinitesimal:** a teoria Matemática que revolucionou o mundo. Tradução George Shlesinger, 1. ed, Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2016.

ALMEIDA, M. V., IGLIORI, S.B.C. Indicações de abordagem de ensino para conceitos do Cálculo Difernccial e Integral: Na perspectiva de David Tall. VII Congresso Iberoamericano de Educação Matemática. **Anais** ... Montevideo, 2013. Disponível em: <http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/390.pdf>. Acesso em: 20 mar. 2016.

AMABILE, T.M. The Social Psychology of Creativity: A Componential Conceptualization. In.: **Journal of Personality and Social Psychology**, v.45, n° 2, p. 357-377, agosto de 1983.

AMABILE, T.M. Creativity in Context: Update to the Social Psychology of Creativity. Colorado: Westview Press, 1996.

BARON, M. E. **Curso de História da Matemática:** Origens e desenvolvimento do Cálculo. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985. Volume 2.

BARROS, R. J. A. R. **Pesquisas sobre História e Epistemologia da Matemática:** Contribuições para Abordagem da Matemática no Ensino Médio. Tese (Doutorado em Educação) Centro de Educação-Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2016.

BEELEY, P. ; SCRIBA, C. J. **Correspondence of John Wallis (1616-1703).** Londres: Oxford University Press, Vol. I, 2003.

BEELEY, P. ; SCRIBA, C. J. **Correspondence of John Wallis (1616-1703).** Londres: Oxford University Press, Vol. II, 2005.

BEELEY, P. ; SCRIBA, C. J. **Correspondence of John Wallis (1616-1703).** Londres: Oxford University Press, Vol. III, 2012.

BEELEY, P. ; SCRIBA, C. J. **Correspondence of John Wallis (1616-1703).** Londres: Oxford University Press, Vol. IV, 2014.

BERLINGOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. **A Matemática através dos Tempos.** São Paulo: Edgard Blücher LTDA, 2008.

BERTHIER, F. **Les Sourdes-muets avant et depuis l'abbé de l'Epée**. Paris: Ledoyen Librasire, 1840. Disponível em: <http://194.254.96.52/main.php?key=ZnVsbHw2NzY1OHx8 >. Acesso em: 10 ago. 2015.

BLACKSTONE, W. **Commentaries on the Laws of England.** 4 vols. London: 1765-1769. Disponível em: <http://lonang.com/library/reference/blackstone-commentaries-law-england/>. Acesso em: 10 ago. 2015.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher LTDA, 1996.

BRUTER, C-P. **Compreender as Matemáticas:** As dez noções fundamentais. Lisboa:Coleção Ciência e Técnica, Editions Odile Jacob, 1998.

CAVALIERI, B. **Geometria Indivisilibus Continuorum Nova Quadam Ratione Promota**, Bolonha, reprinted 1653. Disponível em: <http://math.mit.edu/classes/18.01/F2011/cavalieri-integration.pdf>. Acesso em: 20 mar. 2016.

CSIKSZENTMIHALYI, M. Society, Culture, and Person: A Systems View of Creativity, In: STERNBERG, R. J. (Editor) **The Nature of Creativity**. New York: Cambridge University Press, p. 325-339, 1988.

CSIKSZENTMIHALYI, M. **Creativity.** New York: HaperCollins, 1996.

CSIKSZENTMIHALYI, M. **Creatividad, El fluir y la psicologia de descubrimiento y la invención**. Tradução: José Pedro Tosaus Adadía. Barcelona: Paidós Transiciones, 1998.

CSIKSZENTMIHALYI, M. Implications of a systems perspective for the study of creativity. In: STERNBERG, R. J. (Editor) **Handbook of creativity**. New York: Cambridge University Press, p. 313-335, 1999.

DENNIS, D.; CONFREY, J. La creación de exponentes contínuos: um estúdio sobre los métodos y la epistemologia de John Wallis, **Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa**, v. 3, n. 1, p. 5-31, março 2000; Comité Latinoamericano de Martemática Educativa, Organismo Internacional. Disponível em: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33503101>. Acesso em: 20 mar. 2016.

DIEUDONNÉ, J. **A formação da Matemática comtemporânea.** Tradução: J.H.von Hafe Perez. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1990.

DUARTE, S. B. R.; CHAVEIRO, N.; FREITAS, A. R. de.; BARBOSA, M. A. et al. *Aspectos históricos e socioculturais da população surda*. In História, Ciências, Saúde – Manguinhos, Rio de Janeiro. v.20, n.2, abr.-jun. (pp 653-673) v.20, n.4, out.-dez. (pp 1713-1734), 2013. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/hcsm/v20n4/0104-5970-hcsm-20-04-01713.pdf> Acesso em: 20 mar. 2016.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: Da Teoria à Prática**. 23ª. ed.Campinas: Editora Papirus, 2012.

DREYFUS, T. *Advanced Mathematical Thinking Process*. In: TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**. Edited by David Tall. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

ERVYNCK, G. The characteristics of mathematical creativity. In: TALL, D. (Editor) **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 42-52.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Higyno H. Domingues. Campinas: Editora UNICAMP, 2004.

FOSSA, J. A. **Ensaios sobre a educação Matemática**. Belém: EDUEPA, 2001. 181 p.

GALLICA: *Notas em educação de surdos pela Royal Society*. Disponível em: <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k56274j/f185.image> Acesso em: 20 mar. 2016.

GASPAR, M. T. J. . O Uso da Dimensão Histórica no Estudo do Volume da Esfera em um Curso de Formação de Professores. In: V Seminário Nacional de História da Matemática, 2003, Rio Claro. ANAIS, 2003.

GUARINELLO, A. C**. O papel do outro na escrita de sujeitos surdos**. Campinas, São Paulo: Summus Editorial, 2007.

HADAMARD, J. **Psicologia da invenção na matemática.** Tradução: Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto Editora, 2009.

HERSH, R. Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematic. In: Tymoczko T. (Org) **New Directions in the Philosophy of Mathematics**. Nova Jersey: Princeton University Press, 1998. p. 9-28. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0001870879900185>. Acesso em: 20 mar. 2016.

HILL, C. **As origens intelectuais da revolução inglesa**. Tradução: Jefferson Luiz Camargo. São Paulo: Livraria Martins Fontes Editora, 1992.

_____, C. **O século das revoluções, 1603-1714**. Tradução Alzira Vieira Allegro. São Paulo: Editora UNESP, 2011.

HOLDER, W. **Elements of Speech: an Essay of inquiry into the natural production of letter's with an appendix concerning persons**. London Deaf & Dumb. London, 1669.

KATZ, V. J. **A History of Mathematic.** 3ª Edição. Boston: Pearson Education, 2009.

KUO, H. Toward a Synthesis Framework for the Study of Creativity in Education: An initial Attempt. In.: **Eucate~,** v. 11, n° 1, p. 65-75, 2011. Disponível em :

<http://www.educatejournal.org/index.php/educate/article/view/287/250>. Acesso em: 10 mar. 2015.

MALET, A**. From Indivisibles to Infinitesimals: Studies on Seventeenth-Century Mathematizations of Infinitely Small Quantities**.(Enrahonar. Monografies:6). Universitad Autonoma de Barcelona, Bellaterra, 1996.

MALET, A**. The Origins of the Calculus in Seventeenth-Century England.** Disponível em: < http://www.academia.edu/2494082/The_Origins_of_the_Calculus_in_Seventeenth-Century_England> Acesso em: 20 mar. 2016.

MENDES, I. A. **O Uso da História no Ensino da Matemática: reflexões teóricas e experiências.** Belém: EDUEPA, 2001. 90 p.

MENDES, I. A., FOSSA, J. A., VALDÉS, J. E. N. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática.** Porto Alegre: Sulina, 2006. 182p.

MENDES, I. A. **Cognição e criatividade na investigação em história da Matemática:** contribuições para a Educação Matemática. Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 6, n. 1, p. 185-284, abril 2015a.

MENDES, I. A. **História da Matemática no Ensino**: entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015b.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. S. **A formação Matemática do professor:** licenciatura e prática docente escolar. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **John Wallis**. Disponível em <http://www.history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Wallis.html>. Acesso em: 20 mar. 2016.

POINCARÉ, H. Mathematical Creation. **De Monist**. Tradução do francês para o inglês: George Bruce Halsted. v. 20, n. 3, p. 321-335. Oxford: Oxford University Press, 1910. Disponível em: <https://ia801609.us.archive.org/3/items/jstor-27900262/27900262.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2016.

PONTE, J. P., A Natureza da Matemática. In: Ponte, J. P; Boavida, A; Graça, M; Abrantes, P. **Didáctica da matemática**. Lisboa: DES do ME,1997. Disponível em: http://www.mat.uc.pt/~mat0840/Textos/ponte- etc(2NaturezaMat)%2097.htm Acesso em: 18 mar. 2015.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma Visão Crítica, desfazendo Mitos e Lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

RUNCO, M. A., PRITZKER, S. R. **Encyclopedia of Creativity.** California: Academic Press, 1999.

SCOTT, J. F. **The Mathematical Work of John Wallis**, 2ª Ed. New York, NY: Chelsea Publishing Company, 1981.

SCRIBA, C. J. **The Autobiography of John Wallis**, F.R.S. (1970) Notes and Records of The Royal Society of London, Vol 25, n°1, 1970.

SEVERINO, A. J. **Filosofia.** 2ª. ed. São Paulo: Editora Cortez, 2007.

STEDALL, J. A**. The Discory of Wonders: Reading Between the Lines of John Wallis´s Arithmetica infinitorum.Archive for History of Exact Sciences**, New York, v. 56, Issue 1, p. 1-28, 2001. Disponível em: <http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs004070100040>. Acesso em: 20 mar. 2016.

STEDALL, J. A. **The Arithmetic of Infinitesimals: John Wallis 1656. (Arithmetica Infinitorum: John Wallis 1656** - Transleted from Latim to English with an introduction). New York, Springer-Verlag, 2004.

STERNBERG, R. J. The nature of creativity, In.: **Creativity Research Journal**, v. 18, n° 1, p. 87-98, 2006. Disponível em: <http://www.cc.gatech.edu/classes/AY2013/cs7601_spring/papers/Sternberg_Nature-of-creativity.pdf>. Acesso em: 20 mar. 2016.

STERNBERG, R. J., LUBART, T.I. An investment theory of creativity and its development. **Human Development**, New Haven (EUA), v. 34, n° 1, p. 1-31, 1991.

STERNBERG, R. J., LUBART, T.I. **Defying the crowd:** cultivating creativity in a culture conformity. New York: Free Press, 1995.

TALL, D. The Psychology of advanced mathematical thinking. In.: TALL, D. (Org.) **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

TALL D.; VINNER, S. **Concept image and concept defition with particular reference to limits and continuity.** Educational Studies in Mathematics, New York, n. 12, p. 151 - 169, 1981. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/3127/8167b253201b77bb89269b2ef79f42a42047.pdf> Acesso em: 25 mar. 2014.

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: TALL, D. (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordretch: Kluwer publications, , p. 65 -81, 1991.

WALLIS, J. *A* letter of Dr. John Wallis to Robert Boyle Esq, concerning the said Doctor's Essay of Teaching a person Dumb and Deaf to speak, and to Understand a language. [letter dated 1662] **Philosophical Transactions**, vol. 5, 1087-97, 1670. Disponível em: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/5/57-68/1087.full.pdf+html?sid=9cc56bc2-ab6b-4e0d-ae7e-bdda9ea91ff3>. Acesso em: 20 mar. 2016.

WALLIS, J. **Grammatica Linguae Anglicanae. Cui praefigitur, De Loquela, sive Sonorum Formatione, Tractatus Grammatico-physicus**. Oxford, 1653. Disponível em: <https://books.google.com.br/books/about/Grammatica_linguae_Anglicanae_Cui_praefi.html?id=JxFNAAAAcAAJ&redir_esc=y>. Acesso em: 20 mar. 2016.

WALLIS, J. A Defence of the Royal Society, and the Philosophical Transactions, particularly those of July, 1670: In answer to the cavils of Dr. William Holder. London, 1678.

WALLIS, J. A Lether of dr. John Wallis to Mr. Thomas Beverley. **Philosophical Transactions**, October, vol.20, 353-360, 1698. Disponível em: <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/20/236-47/353.full.pdf+html?sid=ccb8b009-38d3-4bd9-be57-0bb732940d5f>. Acesso em: 20 mar. 2016.

WALLIS, J. **Arithmetica Infinitorum**. Oxford, 1656. Disponível em: <https://ia802709.us.archive.org/10/items/ArithmeticaInfinitorum/ArithmeticaInfinitorum.pdf>. Acesso em: 18 out. 2014.

WALLIS, J. **De sectionibus conicis nova methodo expositis tractatus**. Oxford, 1655. Disponível em: <https://ia802306.us.archive.org/31/items/bub_gb_03M_AAAAcAAJ/bub_gb_03M_AAAAcAAJ.pdf>. Acesso em: 20 mar. 2016.

ZATERKA, L. **A filosofia experimental na Inglaterra do séc. XVII: Francis Bacon e Robert Boyle.** São Paulo: Associação Editorial Humanistas: Fapesp, 2004.