ANÁLISIS DE LA DEMANDA COGNITIVA DE PROBLEMAS DE PATRONES GEOMÉTRICOS

Analysis of the cognitive demand of geometric patterns problems

Benedicto, C., Jaime, A. y Gutiérrez, Á.

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universitat de València

Resumen

El modelo de la demanda cognitiva es un instrumento para valorar el esfuerzo cognitivo que deben realizar los estudiantes al resolver problemas de matemáticas. Analizamos dicho modelo, lo mejoramos y lo adaptamos a los problemas de patrones geométricos. Ejemplificamos la aplicación del modelo valorando las demandas cognitivas experimentadas por varios estudiantes con alto talento matemático al resolver un problema de patrones geométricos. Otros investigadores valoran la demanda cognitiva de los problemas a partir de sus enunciados, pero este texto muestra una aplicación novedosa del modelo analizando también las respuestas de estudiantes.

Palabras clave: *Demanda cognitiva, patrones geométricos, números triangulares, talento matemático*

Abstract

The model of cognitive demand is a tool to assess the cognitive effort students have to do to solve mathematical problems. We analyse this model, improve it, and adapt it to the geometric patterns problems. We exemplify the application of the model by assessing the cognitive demand several mathematically talented students experienced to solve a geometric pattern problem. Other researchers assess the cognitive demand of problems just analysing their statements, but this paper shows a novel application of the cognitive demand model by analysing also students' answers.

Keywords: *Cognitive demand, geometric patterns, triangular numbers, mathematical talent*

INTRODUCCIÓN

Plantear problemas a un grupo de estudiantes no es fácil, ya que sus diferentes conocimientos, capacidades, motivaciones, etc. hacen que un problema sea fácil para unos estudiantes, un poco difícil para otros y muy difícil para el resto del grupo. Esta situación es más problemática cuando en el aula hay estudiantes con un alto talento matemático. Numerosas publicaciones, algunas en simposios de la SEIEM, se han centrado en la identificación de estudiantes con talento matemático (Reyes-Santander y Karg, 2009) o en analizar determinados rasgos de su forma de razonamiento (Ramírez, Flores y Castro, 2010; Gutiérrez y Jaime, 2013; Gutiérrez, Jaime y Alba, 2014), pero muy pocas han analizado cómo valorar la dificultad de un problema para estos estudiantes.

Para valorar la idoneidad de los problemas que planteamos a nuestros alumnos, en particular aquellos con mucho talento matemático, resulta útil disponer de un modelo teórico que permita evaluar la dificultad que la resolución de un problema plantea a los estudiantes. El modelo de la *demanda cognitiva* de Smith y Stein (1998) surgió con ese fin y ha sido utilizado con éxito en numerosas investigaciones para valorar el esfuerzo intelectual que deben realizar los estudiantes para resolver una actividad matemática. Diversos investigadores han realizado análisis a priori de problemas examinando sus enunciados (Smith y Stein, 1998), o estudiando la influencia de factores como los conocimientos del alumnado, la actuación del profesor o el tiempo disponible (Stein,

Benedicto, C., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 153-162). Alicante: SEIEM.

Engle, Smith y Hughes, 2008). Las aplicaciones de este modelo presentan dos limitaciones: i) su formulación está validada en problemas de aritmética, los utilizados en la mayoría de esos estudios, pero hay otros tipos de problema a los que no se ajusta el modelo. ii) El modelo se ha utilizado para determinar la demanda cognitiva que supone para los estudiantes resolver un problema analizando el enunciado del problema, pero no analizando las resoluciones de los estudiantes.

Unas actividades pre-algebraicas eficaces para enseñar a generalizar y a usar el lenguaje algebraico son las actividades basadas en patrones geométricos (Rivera, 2010 y 2013). Estas actividades presentan los primeros términos de una secuencia y piden calcular, por este orden, el término *inmediato* (el que sigue a los dados), un término *próximo* a los conocidos (de manera que se puedan utilizar tanto la representación geométrica como la aritmética para el cálculo de valores), un término *lejano* tal que, aunque esté asociado a un valor numérico, su representación gráfica sea costosa de llevar a cabo y sea más conveniente poner en marcha un proceso de generalización y, finalmente, formular una expresión (que se espera sea algebraica) para el término *general* de la secuencia.

En este texto presentamos resultados de una investigación centrada en el análisis, desarrollo y uso del modelo de la demanda cognitiva, entre cuyos objetivos están:

-Reformular y estructurar el modelo de la demanda cognitiva de Smith y Stein (1998) para adecuarlo a problemas de patrones geométricos.

-Emplear las resoluciones de estudiantes, además de los enunciados de los problemas, para valorar la demanda cognitiva que exigen de los estudiantes los problemas de patrones geométricos.

MARCO TEÓRICO

El modelo de la demanda cognitiva

NCTM (2014) ha enfatizado la importancia, para mejorar la calidad de la enseñanza, de plantear actividades que requieran razonamiento avanzado y en la validez del modelo de la demanda cognitiva para el análisis de las actividades y la identificación del tipo de razonamiento que requieren de los estudiantes. Esto es particularmente relevante para los estudiantes con altas capacidades matemáticas, ya que resolviendo este tipo de actividades pueden desarrollar mejor sus capacidades.

Para Stein, Smith, Henningsen y Silver (2009, p. 1), la *demanda cognitiva* de una tarea es "el tipo y nivel de pensamiento requerido de los estudiantes para poder participar en la tarea y resolverla con éxito." Estos autores elaboraron unos criterios teóricos para identificar el nivel de demanda cognitiva necesario para resolver problemas o ejercicios planteados en los libros de texto, que se conocen como el modelo de la demanda cognitiva. Este modelo identifica cuatro niveles de demanda cognitiva de las tareas, evaluando la reflexión y el razonamiento requeridos para que el estudiante pueda resolverlas con éxito. Dichos niveles son: *memorización*, que corresponde a las tareas de menor demanda cognitiva, es decir que sólo requieren razonamientos simples; *algoritmos sin conexiones*; *algoritmos con conexiones*; y *hacer matemáticas*, en el que se ubican las tareas de mayor demanda cognitiva, es decir, que requieren razonamiento complejo. Smith y Stein (1998) caracterizaron cada nivel mediante unos criterios que permiten asociar cada tarea a uno de los niveles.

Modificación del modelo de la demanda cognitiva

Los investigadores que han utilizado el modelo de demanda cognitiva se han centrado en analizar tipos de problemas aritméticos o algebraicos específicos, bastante simples, por lo que los criterios teóricos de identificación de los niveles de demanda se encuentran completamente adaptados a las características de estos tipos. En nuestras investigaciones experimentales, hemos observado que su uso presenta dificultades para analizar actividades complejas, pues éstas tienen características ligadas a varios niveles, lo cual sugiere la posibilidad de que existan niveles intermedios o situaciones de transición entre niveles. Además, las definiciones de algunas características de los niveles son ambiguas y no se adaptan a actividades complejas diferentes de las utilizadas por los autores citados, por ejemplo a actividades geométricas. Estas dificultades nos han llevado a tratar de adaptar la caracterización del modelo existente (Smith y Stein, 1998) a actividades de patrones geométricos. Para ello, hemos analizado cada una de las características que definen los niveles de demanda cognitiva y hemos identificado seis categorías de forma que cada característica de un nivel se ajusta, por su objetivo, a alguna de estas categorías. Las seis categorías, que son una aportación original de este texto, son: El *procedimiento de resolución* que requiere la actividad; la *finalidad* con la que se propone la actividad; el *esfuerzo cognitivo* necesario para llevar a cabo su resolución; los *contenidos matemáticos implícitos* en su resolución; el tipo de *explicaciones* requeridas de los estudiantes; y las formas de *representación de la solución*.

Estructurar los niveles de demanda cognitiva mediante estas categorías, nos ha permitido organizar las características de cada nivel, localizar lagunas en algunos niveles, completar la caracterización de los niveles proponiendo descripciones más precisas, y hacer la clasificación de actividades más fiable y menos costosa, ya que facilita el trabajo de análisis y clasificación de actividades.

Respecto al primer objetivo, la Tabla 1 muestra las características de los niveles de demanda cognitiva, organizadas en las seis categorías y particularizadas para las actividades de patrones geométricos. Para elaborar la Tabla 1 hemos seguido un proceso cíclico de modificación de las características de los niveles y de análisis de actividades y respuestas de estudiantes, haciendo cambios adecuados según los resultados obtenidos, ya que las respuestas de los estudiantes han permitido identificar detalles no perceptibles en el análisis previo.

Tabla 1. Análisis teórico de la demanda cognitiva de actividades de patrones geométricos

Nivel de D. C.	**Tipo de cuestión**	**Categoría**	**Características**
BAJO Memorización	*Recuento directo*	Procedimiento de resolución	(1.2) No se resuelven usando algoritmos, sino recurriendo a datos recordados o tomados directamente del enunciado.
		Finalidad	(1.1) Reproducción de elementos (datos, reglas, fórmulas, etc.) previamente aprendidos, recordados o tomados directamente del enunciado.
		Esfuerzo requerido	(1.3) Su resolución con éxito apenas requiere esfuerzo. No son ambiguas. Indican claramente qué hacer.
		Contenidos implícitos	(1.4) No tienen conexión con los conceptos o significado subyacente a los datos, reglas, fórmulas o definiciones que se están aprendiendo o reproduciendo.
		Explicaciones	(1.5) No requieren explicaciones.
		Representación de la solución	(1.6) El enunciado utiliza la representación geométrica y su resolución, en caso de representarse, utilizará la aritmética.
BAJO-MEDIO Algoritmos Sin Conexiones	*Término inmediato* *Término próximo*	Procedimiento de resolución	(2.1) Son algorítmicas. Indican expresamente qué algoritmo usar o es evidente por el contexto.
		Finalidad	(2.4) Enfocadas a obtener respuestas correctas pero no a desarrollar la comprensión matemática.
		Esfuerzo requerido	(2.2) Su resolución con éxito requiere un esfuerzo limitado. Existe poca ambigüedad sobre qué hacer y cómo hacerlo.
		Contenidos implícitos	(2.3) Existe conexión implícita entre los conceptos o significados subyacentes y los algoritmos usados. A pesar de existir dicha conexión, el estudiante no tiene por qué percatarse de ella para resolver correctamente el problema.
		Explicaciones	(2.5) Explicaciones que se enfocan únicamente a describir el algoritmo usado.

Nivel de D. C.	Tipo de cuestión	Categoría	Características
		Representación de la solución	(2.6) En su resolución se pueden utilizar múltiples representaciones (aritmética, diagramas visuales, materiales manipulativos, etc.), pero sólo se usan aquellas que resultan de más ayuda para resolver el problema.
MEDIO-ALTO Algoritmos Con Conexiones	*Término próximo Término lejano*	Procedimiento de resolución	(3.2) Las cuestiones anteriores de la actividad sirven como sugerencia explícita o implícita de la vía a seguir, que es un algoritmo general con conexiones estrechas con las ideas conceptuales subyacentes.
		Finalidad	(3.1) Orientan al estudiante a usar algoritmos con el objetivo de que tenga una comprensión más profunda de los conceptos e ideas matemáticos.
		Esfuerzo requerido	(3.4) Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. Se pueden utilizar algoritmos generales, pero al aplicarlos, hay prestar atención a la estructura del patrón.
		Contenidos implícitos	(3.5) Los estudiantes necesitan considerar conscientemente ideas conceptuales que subyacen a los algoritmos para resolver con éxito la cuestión.
		Explicaciones	(3.6) Explicaciones que hacen referencia a las relaciones subyacentes utilizando casos concretos (posiciones particulares de la serie).
		Representación de la solución	(3.3) La resolución conecta diversas representaciones. Se representan de varias formas y los estudiantes utilizan aquellas que les llevan a un razonamiento más abstracto.
ALTO Hacer Matemáticas	*Término general*	Procedimiento de resolución	(4.1) Requieren pensamiento complejo y no algorítmico. El enunciado no sugiere ninguna forma de resolución. (4.5) Requieren que los estudiantes analicen la actividad y examinen restricciones que puedan limitar posibles estrategias de resolución y soluciones.
		Finalidad	(4.2) Los estudiantes necesitan explorar y comprender los conceptos, procesos o relaciones matemáticos.
		Esfuerzo requerido	(4.6) Requieren un considerable esfuerzo cognitivo. (4.3) Requieren de los estudiantes auto-control y auto-regulación de los propios procesos cognitivos.
		Contenidos implícitos	(4.4) Requieren que los estudiantes accedan a conocimiento y experiencias relevantes y los usen adecuadamente durante la resolución de la actividad.
		Explicaciones	(4.7) Explicaciones y demostraciones sobre el término general de la serie.
		Representación de la solución	(4.8) En la resolución se utiliza una representación algebraica, que algunas veces puede estar conectada con otras formas de representación.

ANÁLISIS DE LA DEMANDA COGNITIVA DE ACTIVIDADES MEDIANTE LAS RESOLUCIONES DE LOS ESTUDIANTES

No conocemos trabajos que analicen la demanda cognitiva de un problema a partir de respuestas de estudiantes, a pesar de que éstas son un indicador clave del esfuerzo cognitivo realizado en la resolución. Como ejemplo de aplicación del modelo de la demanda cognitiva modificado, mostramos el doble análisis de una actividad de patrones geométricos que lleva a identificar la demanda cognitiva de la actividad basada en sus características teóricas y la demanda cognitiva de basada en respuestas reales de estudiantes. Finalmente, comparamos ambos análisis.

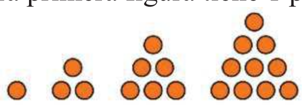
Metodología, participantes y contexto

La actividad se utilizó en tres talleres extraescolares con niños superdotados de los cursos 5º de Educación Primaria (14 niños), 6º de Educación Primaria (8 niños) y de 1º de ESO (7 niños) respectivamente. En este texto analizamos las respuestas de los niños de 1º de ESO. Emplearon aproximadamente 30 minutos para resolver la actividad. Los niños se organizaron en grupos, dos parejas y un trío. Para la recogida de datos utilizamos las resoluciones en papel de los alumnos, que nos proporcionaron las conclusiones y respuestas de cada grupo, y las grabaciones en audio de sus conversaciones, que nos permitieron comprender las estrategias y razonamientos usados por cada grupo durante la resolución de la actividad. Aquí analizamos una actividad, pero en la investigación que estamos realizando hemos analizado diversas actividades de patrones geométricos y respuestas de estudiantes para identificar las características propias de cada nivel de demanda cognitiva en las actividades y los niveles de demanda cognitiva de las resoluciones de los estudiantes.

La actividad

Las actividades típicas de patrones geométricos constan de varias cuestiones de generalización, de manera que cada cuestión supone un incremento del grado de abstracción y, en consecuencia, de la demanda cognitiva necesaria para su resolución correcta. Ello permite plantear estas actividades a alumnos con diferentes conocimientos o capacidades matemáticas, pudiendo atender al mismo tiempo las necesidades de todos ellos. La Figura 1 muestra una de las actividades usadas en nuestro estudio y en la que basamos el análisis presentado en este texto.

ACTIVIDAD: Números Triangulares
Aquí ves una secuencia de figuras. La primera figura tiene 1 punto, la segunda tiene 3 puntos...



1. ¿Sabes el número de puntos de la figura de la 5ª posición?
2. ¿Sabes el número de puntos de la figura de la 20ª posición? ¿En qué te fijas?
3. ¿Hay alguna fórmula que nos permita obtener la cantidad de puntos de la figura que está en una posición determinada? Por ejemplo, para la figura 100.
4. ¿Y para la *n*-ésima figura?

Figura 1. Texto de la actividad analizada

Las cuestiones de esta actividad se basan en analizar los elementos del patrón dados y las respuestas a las cuestiones precedentes, para calcular los números triangulares de diversas posiciones y el término general. Al aumentar la distancia entre los datos y la posición pedida, aumenta la demanda cognitiva, pues los alumnos necesitan usar con más perfección y abstracción la estructura del patrón. Para resolver las primeras cuestiones, solo hace falta tener ciertos conocimientos aritméticos, que los alumnos de 1º de ESO dominan, pero la última cuestión supone un alto nivel de demanda cognitiva para los alumnos de este curso cuando todavía no han sido introducidos en el álgebra.

Análisis de la demanda cognitiva de la actividad

Presentamos el análisis teórico de las cuestiones que integran esta actividad (Tablas 2.1 a 2.4), basándonos en la interpretación del modelo de la demanda cognitiva ofrecida en la Tabla 1. Para cada cuestión de la actividad, identificamos sus características y asignamos el nivel o niveles de demanda cognitiva. Esta actividad no tiene ninguna cuestión que pregunte por los términos dados en el enunciado, por lo que no hay cuestiones de nivel bajo de demanda cognitiva.

Tabla 2.1. Análisis de la demanda cognitiva de la cuestión 1

Nivel de D. C.	Tipo de cuestión	Categoría	Características
BAJO-MEDIO Algoritmos Sin Conexiones	*Término inmediato (n = 5)*	Procedimiento de resolución	(2.1) Las figuras del enunciado sirven como instrucciones para construir el siguiente triángulo y contar su cantidad de puntos. La pregunta se contesta mediante un algoritmo consistente en continuar los triángulos del enunciado.
		Finalidad	(2.4) Se pretende que el alumno se familiarice con el patrón operando con un caso concreto pequeño, que puede calcular fácilmente. El objetivo de esta pregunta no es la comprensión del algoritmo, sino la obtención de un resultado correcto.
		Esfuerzo requerido	(2.2) Su resolución con éxito requiere una demanda cognitiva limitada. Existe poca ambigüedad sobre lo que se debe hacer, ya que el alumno debe encontrar el patrón para dibujar el caso pedido y dar con la solución.
		Contenidos implícitos	(2.3) Existe una conexión implícita entre los conceptos subyacentes y el algoritmo usado ya que, de manera implícita, se suman los primeros cinco números naturales. No obstante, para calcular este término geométricamente, el estudiante no necesita percatarse de dicha conexión. Si hace el cálculo aritméticamente, puede llegar, ahora o más tarde, a darse cuenta de que la respuesta es la suma de los números 1 a 5.
		Explicaciones	(2.5) Basta con describir cómo se ha dibujado el triángulo.
		Representación de la solución	(2.6) En su resolución se pueden utilizar las representaciones geométrica y aritmética, pero los estudiantes utilizan la representación geométrica por ser la más evidente y sencilla.

La cuestión 1 tiene nivel bajo-medio de demanda cognitiva ya que en ella se pide calcular la cantidad de puntos del triángulo en la quinta posición de la secuencia y los estudiantes pueden encontrarla fácilmente dibujando el triángulo correspondiente y contando. Este procedimiento de obtener la solución es algorítmico y no requiere que los estudiantes utilicen ningún conocimiento matemático, sino solo que observen el patrón visual de cambio de un término de la serie al siguiente y lo apliquen directamente. Por ello, esta cuestión es adecuada para todos los estudiantes del grupo de clase, independientemente de sus conocimientos matemáticos o su talento matemático.

En la cuestión 2, la actividad incrementa su dificultad al aumentar la posición del término en la serie, porque se espera que los estudiantes establezcan relaciones (Tabla 2.2). Quienes no son capaces de establecerlas usan la representación y el algoritmo geométricos para contestar, con una demanda cognitiva baja-media. Aquellos que sí establecen relaciones entre los términos de la serie usan la representación y el algoritmo aritméticos (sumar los números 1 a 20), con una demanda cognitiva media-alta. Por tanto, la demanda cognitiva de la cuestión varía con el camino seguido.

Tabla 2.2. Análisis de la demanda cognitiva de la cuestión 2

Nivel de D. C.	Tipo de cuestión	Categoría	Características
BAJO-MEDIO / MEDIO-ALTO Algoritmos Sin / Con Conexiones	*Término próximo (n = 20)*	Procedimiento de resolución	(2.1) Las figuras del enunciado sirven como instrucciones para calcular los términos próximos. La resolución es algorítmica (dibujar los sucesivos triángulos hasta el 20º). (3.2) Al ser una posición más distante, el enunciado de esta cuestión sugiere de modo implícito considerar las relaciones entre algoritmo y conceptos subyacentes. La resolución aritmética (sumar los primeros 20 números) necesita esas relaciones.

Nivel de D. C.	Tipo de cuestión	Categoría	Características
		Finalidad	El objetivo de la cuestión es que los estudiantes, observando casos concretos, descubran las relaciones entre el patrón y el algoritmo aritmético de cálculo de los números triangulares, con el objetivo de profundizar en la comprensión del algoritmo general. No obstante: (2.4) Puede ser resuelta mediante el algoritmo geométrico sin identificar dichas relaciones y obtener el resultado correcto. (3.1) Puede ser resuelta mediante el algoritmo aritmético, si los estudiantes inician la comprensión de las relaciones subyacentes en el patrón.
		Esfuerzo requerido	(2.2) La resolución geométrica con éxito requiere un esfuerzo limitado. Existe poca ambigüedad sobre cómo dibujar los números triangulares y calcular el resultado. (3.4) La resolución aritmética con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo y atención para encontrar la relación subyacente entre el algoritmo y la estructura del patrón.
		Contenidos implícitos	(2.3) En la resolución geométrica, el estudiante no necesita percatarse de los contenidos implícitos (la relación entre los términos de la serie) para llegar a la respuesta correcta. (3.5) En la resolución aritmética, el estudiante necesita considerar conscientemente la relación entre los términos de la serie subyacente al algoritmo aritmético (sumar los 20 primeros números).
		Explicaciones	(2.5) Explicación enfocada solo a describir el algoritmo usado. (3.6) Explicación que hace referencia a las relaciones aritmética entre un número triangular y su posición en la serie y entre los sucesivos términos de la serie.
		Representación de la solución	(2.6) Se suele utilizar la representación geométrica por ser la que resulta de mayor ayuda para resolver la cuestión. (3.3) Se pueden usar la representación aritmética o una combinación de esta y la geométrica, dando lugar a una representación más general.

La Tabla 2.3 presenta el análisis de la demanda cognitiva asociada a la resolución de la cuestión 3. Esta cuestión pide calcular un término lejano, con el fin de que los estudiantes necesiten establecer relaciones para encontrar la respuesta.

Tabla 2.3. Análisis de la demanda cognitiva de la cuestión 3

Nivel de D. C.	Tipo de cuestión	Categoría	Características
MEDIO-ALTO Algoritmos Con Conexiones	*Término lejano* *(n = 100)*	Procedimiento de resolución	(3.2) Las respuestas a las cuestiones anteriores sirven como sugerencia implícita de la vía a seguir para identificar el algoritmo general para calcular este término concreto y las relaciones subyacentes entre el algoritmo y la serie.
		Finalidad	(4.2) Que el alumno explore y comprenda la naturaleza de los números triangulares y las relaciones entre estos números, la posición que ocupan y el paso de uno a otro.

Nivel de D. C.	Tipo de cuestión	Categoría	Características
		Esfuerzo requerido	Dependiendo de la resolución de la cuestión anterior: (3.4) Han logrado enunciar una relación para resolver el caso $n = 20$ y la aplican, mejorándola, al resolver el caso $n = 100$, lo que requerirá un esfuerzo cognitivo medio-alto. (4.6) Si no han logrado enunciar un relación para resolver el caso $n = 20$, deberán encontrar una estrategia de resolución no implícita, requiriendo un alto esfuerzo cognitivo.
		Contenidos implícitos	(3.5) Los estudiantes, apoyándose en el conocimiento ganado en las cuestiones anteriores, necesitan considerar consciente-mente relaciones de la serie subyacente al algoritmo.
		Explicaciones	(3.6) Explicaciones que, utilizando casos concretos, hacen referencia a las relaciones subyacentes en la serie de los números triangulares empleadas para calcular el término 100º.
		Representación de la solución	(3.3) La resolución conecta las representaciones geométrica, aritmética y, tal vez, algebraica para expresar la solución de una manera más abstracta.

La necesidad de establecer relaciones situa la actividad cognitiva de los estudiantes en los niveles de demanda medio-alto y alto. Para resolver correctamente esta cuestión, los estudiantes deben descubrir un algoritmo general de cálculo, aunque todavía no necesitan usar su expresión algebraica. La dificultad de esta cuestión dependerá de las resoluciones realizadas en las cuestiones anteriores.

Tabla 2.4. Análisis de la demanda cognitiva de la cuestión 4

Nivel de D. C.	Tipo de cuestión	Categoría	Características
ALTO Haciendo matemáticas	*Término general (n-ésima posición)*	Procedimiento de resolución	(4.1) La generalización para el término *n*-ésimo requiere un pensamiento complejo y no algorítmico. El enunciado no sugiere ninguna forma de resolución. (4.5) Los estudiantes analizan la estructura de la serie y el proceso de obtención de los números triangulares (posición y número de puntos), para poder obtener una fórmula general.
		Finalidad	(4.2) Analizar, comprender y enunciar la relación general entre la cantidad de puntos de un número triangular y su posición, de manera que lleguen a calcular el término general.
		Esfuerzo requerido	(4.6) Requiere un considerable esfuerzo cognitivo ya que los estudiantes no solo deben ser capaces de comprender la relación existente sino que deben saber verbalizarla.
		Contenidos implícitos	(4.4) Se pretende que los estudiantes recurran a su experiencia en la cuestión anterior para expresar en lenguaje algebraico las ideas que antes deben haber expresado de forma verbal.
		Explicaciones	(4.7) Explicación y demostración de la expresión de cálculo del término general.
		Representación de la solución	(4.8) La resolución se basa en la representación algebraica del algoritmo de cálculo del término general de la serie. Puede estar acompañada de representaciones geométricas o aritméticas de casos concretos o genéricos.

Esta cuestión pide expresar de forma algebraica (para *n*) el algoritmo de cálculo de los números triangulares, obteniéndose así un caso general que requerirá explorar las relaciones matemáticas implícitas en la serie, para lo cual se exige del estudiante una demanda cognitiva de nivel alto.

Análisis de respuestas de estudiantes

Analizando las resoluciones de los diferentes grupos de alumnos, hemos encontrado respuestas a la misma cuestión que han usado diferentes niveles de demanda cognitiva. Esto confirma que el nivel de demanda cognitiva necesario para resolver correctamente un problema no es único y que un factor clave para analizar la dificultad de un problema son las resoluciones. El análisis de las respuestas de los alumnos de nuestra muestra nos permite diferenciar tres tipos de respuestas.

GRUPO 1. No identificaron una relación correcta. Su conversación en la cuestión 2 pone de relieve sus dificultades para hallar el término inmediato, ya que formularon diversas relaciones numéricas sin dibujar el triángulo ni comprobar si sus relaciones se verificaban en los datos conocidos:

Grupo 1: [n=20] *La quinta posición eran 15, ya que 3·5=15 y la 20 será 60, 20·3=60.*

No detectaron que la cantidad de puntos de los triángulos es la suma de los primeros números naturales. Se limitaron a responder las cuestiones 1 y 2 con nivel bajo de demanda cognitiva, lo cual les impidió responder las cuestiones 3 y 4. El nivel de demanda cognitiva de este grupo es inferior al esperado pues, a pesar de que la cuestión 2 es una oportunidad para relacionar ideas, los alumnos se limitaron a aplicar una relación errónea obtenida en el apartado anterior para el caso de $n = 20$.

GRUPO 2. Identificaron el patrón numérica y algebraicamente y supieron calcular los términos inmediato y próximo sumando los números consecutivos. Observaron que había que sumar desde el 1 hasta el número de la posición del término buscado, pero no fueron capaces de encontrar una expresión general que les permitiese calcular el término general. Una vez calculado el término $n = 20$, pasaron directamente a generalizar su resultando olvidado responder al caso de $n = 100$:

Grupo 2: [n=20] *1 +2+3+4…+19+20=210, se suma desde el 1 hasta el número de la posición.*

Grupo 2: [caso general] *Sumamos los números entre 1 y n.*

Aunque no respondió adecuadamente la cuestión 4, el grupo 2 llegó al nivel medio-alto de demanda cognitiva, ya que entendió la relación entre cada número triangular y su posición. Comenzó en el nivel bajo-medio, continuó entre los niveles medios y terminó en el nivel medio-alto.

GRUPO 3. Después de hallar el término inmediato mediante un procedimiento algorítmico, los alumnos encontraron una relación numérica que les permitía calcular el término 20º sin recurrir a la suma de los 20 primeros términos: observaron que siempre se multiplica la posición por un número y dicho número se incrementa 0.5 cada vez. Para el término lejano, formalizaron dicha relación convirtiendo el incremento de 0.5 en una división entre 2, y obtuvieron una fórmula que les permitió calcular sin dificultades el caso $n = 100$ y el término general:

Grupo 3: [n=20] *El número 6 por 3.5. Cada número subiendo del 6 añade 0.5 al 3.5. Será 20·10.5=210.*

Grupo 3: [n=100] *100·[(100+1)/2].*

Grupo 3: [caso general] *x·[(x+1)/2].*

El grupo 3 empleó más demanda cognitiva de lo esperado, usando el nivel medio-alto al resolver el caso $n = 20$, y el nivel alto al calcular una fórmula tanto para $n = 100$ como para el caso general.

Conclusiones

Como aportaciones de esta investigación, hemos modificado la caracterización de Smith y Stein (1998) del modelo de demanda cognitiva, para mejorar su organización y la discriminación entre los niveles; hemos adaptado el modelo general modificado a los problemas de patrones geométricos; lo hemos aplicado al análisis de una actividad específica basada en los números triangulares.

La Figura 2 sintetiza los resultados del estudio presentado. La resolución correcta de cada cuestión requiere de los estudiantes, teóricamente, cierto nivel de demanda cognitiva, cada vez mayor a lo largo de la actividad. Pero, en la práctica, encontramos resoluciones en las que los estudiantes han empleado niveles diferentes de los previstos, unas veces inferiores y otras superiores.

Análisis Teórico			n = 5	n = 20	n = 100		Caso general
Grupo 1	n = 5	n = 20					
Grupo 2			n = 5	n = 20	Caso general		
Grupo 3			n = 5		n = 20	n = 100 Caso general	

Figura 2. Comparación de los análisis de la actividad y de las respuestas de los estudiantes

Agradecimientos

Esta investigación es parte del proyecto *Análisis de procesos de aprendizaje de estudiantes de altas capacidades matemáticas de Primaria y ESO en contextos de actividades matemáticas ricas* (EDU2012-37259).

Referencias

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2013). Exploración de los estilos de razonamiento de estudiantes con altas capacidades matemáticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 319-326). Bilbao: SEIEM.

Gutiérrrez, A., Jaime, A. y Alba, F. J. (2014). Génesis instrumental en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. El caso de un estudiante de alta capacidad matemática. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 405-414). Salamanca: SEIEM.

NCTM (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: NCTM.

Ramírez, R., Flores, P. y Castro, E. (2010). Visualización y talento matemático: Una experiencia docente. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 499-510). Lleida: SEIEM.

Reyes-Santander, P. y Karg, A. (2009). Una aproximación al trabajo con niños especialmente dotados en matemáticas. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 403-414). Santander: SEIEM.

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics, 73*(3), 297-328.

Rivera, F. D. (2013). *Teaching and learning patterns in school. Psychological and pedagogical considerations.* Nueva York: Springer.

Smith, M. S. y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344-350.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. y Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A. y Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development.* Nueva York: Teachers College Press.