Stefan HOCH, Frank REINHOLD, Kristina REISS, München

Repräsentationen von Bruchzahlen verstehen: Lernen mit dem Tablet in Jahrgangsstufe 6

Im Projekt *Lernen mit dem Tablet-PC: Eine Einführung in das Bruchrechnen für Klasse 6* untersuchen wir, inwiefern sich moderne Ansätze zum Erwerb von Bruchrechenkompetenz mit einem digitalen Lehrbuch für das iPad umsetzen lassen. Wir stellen dazu exemplarisch Teile des Kapitels *Darstellung von Brüchen* vor und erläutern Möglichkeiten, die das Tablet im Vergleich zum klassischen Buch bietet. Weiter präsentieren wir Ergebnisse aus unseren Praxistests zur graphischen Darstellung von Brüchen.

Projektvorstellung

In unserem Projekt ist es erklärtes Ziel, ein Unterrichtswerk zu schaffen, das die Möglichkeiten des Mediums Tablet nutzt und so die Bruchrechnung im wörtlichen Sinne „begreifbar“ macht. Die technische Umsetzung des Lehrbuchs geschieht in iBooks Author (Apple Inc., 2014), einer frei verfügbaren Gestaltungssoftware für digitale Bücher, sogenannte iBooks. iBooks Author bietet uns die Möglichkeit, sogenannte Widgets, gekapselte Webseiten, in den Text einzubinden. Dadurch ist es uns möglich, maßgeschneiderte Interaktionen für das Projekt zu fertigen. Insbesondere können wir Dank des CindyJS-Projekts (The CindyJS Project, 2016) interaktive Inhalte aus der Geometriesoftware Cinderella verwenden.

Das Projekt ist eine Kooperation von zwei Lehrstühlen der Technischen Universität München und wird von der Heinz-Nixdorf-Stiftung unterstützt.

Möglichkeiten des Mediums

Interaktive Diagramme und Aufgaben: Eines der Hauptanliegen des Projekts ist es, interaktive Inhalte im Buch anzubieten. Diese lassen sich in der Regel in zwei Gruppen aufteilen: interaktive *Diagramme* dienen dem explorativen Kennenlernen von neuen Themenbereichen und unterscheiden sich von den interaktiven *Aufgaben* darin, dass sie keine Eingabe einer Lösung erwarten, die anschließend ausgewertet wird.

Adaptive Aufgabenschwierigkeit: Wir gestalten unsere Aufgaben adaptiv (im Gegensatz zu adaptierbar, vgl. Leutner (2002)). Zu diesem Zweck sind für jede Aufgabe Schwierigkeitsstufen definiert. Beim ersten Aufrufen der Aufgabe im iBook wird aus der ersten Stufe ein Aufgabenset von 3–5 Aufgaben generiert, welche die Schülerin oder der Schüler nacheinander bearbeitet. Nach der Bearbeitung eines Aufgabensets entscheidet das iBook anhand der Lösungsrate, aus welcher

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

Stufe das nächste Aufgabenset generiert wird. Die erreichte Stufe wird für den nächsten Aufgabenaufruf im iBook gespeichert.

Feedback: In ihrer Meta-Analyse haben Hattie und Timperley (2007) zusammengefasst, wie effektives Feedback aussehen kann. Wir geben daher in unseren Aufgaben aufgabenbezogenes, sofortiges, sowie kurz und präzise formuliertes Feedback. Je nach Aufgabe handelt es sich um rein verbesserndes Feedback oder zusätzlich um Hinweise, wie man von der Eingabe zu einer richtigen Lösung gelangen kann.

Erfassung von Prozessdaten: Neben der Erhebung der eingegebenen Lösung erfassen wir, sofern es der Aufgabentyp ermöglicht, auch Prozessdaten, die den Lösungsprozess abbilden, um Einblicke in z. B. Lösungsstrategien zu erhalten.

Umsetzung auf dem iPad

Im Modell von Dienes (1967) werden Brüche als diskrete Mengen dargestellt. Gerade in der Anfangsphase des Bruchrechenunterrichts werden Modelle dieser Art gerne genutzt (vgl. Brunnermeier u. a., 2004). Ein Nachteil des Modells ist jedoch, dass die Anzahl der Elemente der dargestellten Menge stets ein Vielfaches des Nenners des darzustellenden Bruches sein muss.

Dies unterstreicht die Notwendigkeit, Schülerinnen und Schülern neben der Darstellung von Brüchen mit diskreten Mengen weitere Darstellungen zu präsentieren. Carraher (1993) stellt ein Hybridmodell vor, das zum einen auf dem Verständnis von Verhältnissen, zum anderen auf dem Zahlenstrahl basiert. Dabei werden zwei Balken übereinander dargestellt, deren Längenverhältnis als Bruch anzugeben ist. Der Referenzbalken entspricht hier dem Intervall $[0;1]$ und der zweite Balken einem Intervall $[0;\frac{n}{m}]$. Durch die Entfernung der Skalierung, wie wir sie von Aufgaben zum Zahlenstrahl üblicherweise her kennen, wird die Darstellung ent-arithmetisiert: Eine numerische Lösung des Problems ist nicht mehr möglich.

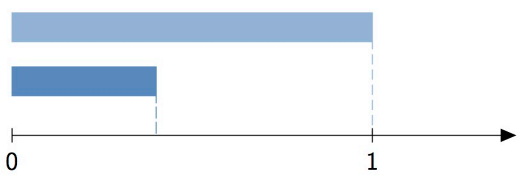

Abbildung 1 Darstellung eines Bruches im Hybridmodell (Carraher, 1993)

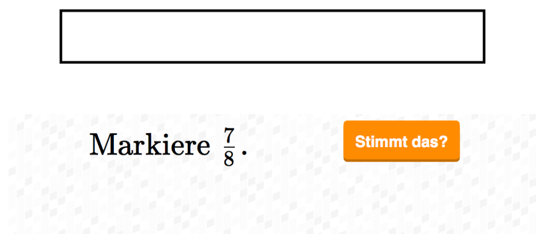

Abbildung 2 Umsetzung als Widget

Wir setzen Carrahers (1993) Hybridmodell sowohl für die Darstellung von Brüchen am Balken als auch am Kreis jeweils auf einem Intervall der Länge 1 um. Dabei entspricht der Rahmen unseres Balkens, bzw. der volle Kreis dem Referenzbalken der festen Länge 1. Die beiden Aufgaben erfolgen im Anfangsunterricht zur Bruchrechnung ent-arithmetisiert und als Ergänzung zu Darstellungen mit diskreten Mengen.

Praxistest

Im Folgenden präsentieren wir einige Ergebnisse aus zwei Praxistests an einem Münchner Gymnasium. Die Tests dienten der Suche nach Fehlern in den Implementationen und dazu, Bedienschwierigkeiten aufzudecken. Sie fanden zu Beginn des Schuljahres 2016/17 (in fünf sechsten Klassen) und nahe des Zwischenzeugnisses (in einer sechsten Klasse) statt. Die verwendeten Daten wurden nicht systematisch erhoben, zeigen aber interessante Fragestellungen auf.

Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung der bereits vorgestellten Aufgabentypen zur Visualisierung von Brüchen am Balken bzw. Kreis und legen der Analyse folgende Heuristik zu Grunde: Eine Eingabe gilt als korrekt, wenn die Abweichung von der Eingabe zum gefragten Bruch unter $\frac{3}{100}$ liegt.

Mit dieser Sichtweise erhielten wir im ersten Test am Balken eine Lösungsrate von 43 % bei 3160 bearbeiten Aufgaben. Im Vergleich dazu wurden am Kreis 52 % der 3493 Aufgaben richtig bearbeitet. Ein ähnliches Bild zeigte sich im zweiten Praxistest: Während am Balken 49 % von 350 Brüchen korrekt markiert wurden, waren es am Kreis 58 % von 397 Brüchen.

Besonders deutlich zeigt sich dieser Unterschied an den Brüchen $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$: Im ersten Praxistest zeigten sich für die Brüche Lösungsraten von 53 % bzw. 40 % (115 bzw. 150 bearbeitete Aufgaben, Balken) und 98 % bzw. 92 % (158 bzw. 148 bearbeitete Aufgaben, Kreis).

In beiden Aufgabentypen wurde der Bruch $\frac{2}{3}$ öfter korrekt markiert als der Bruch $\frac{1}{3}$ (56 % vs. 47 %, Balken, ca. 50 bearbeitete Aufgaben; 53 % vs. 40 %, Kreis, ca. 165 bearbeitete Aufgaben).

Ausblick und Diskussion

In unseren ersten Praxistests erhalten wir über alle Datensets eine höhere Lösungsrate am Kreis als am Balken. Allerdings ergibt sich im Vergleich einzelner Brüche bisher kein eindeutiges Bild. Eine gezielte Untersuchung ausgewählter Brüche sowie das Einbeziehen von diskreten Bruchdarstellungen könnte hier die gewünschten Erkenntnisse liefern. Wegen der beobachteten Diskrepanz in den Lösungsraten sind hier insbesondere die beiden Brüche $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ für uns interessant. Es stellt sich die Frage, ob dieses Phänomen auch in einer gezielten Untersuchung zu beobachten ist. Weiter lässt die Auswertung des Praxistests vermuten, dass es Schülerinnen und Schülern im Anfangsunterricht der Bruchrechnung leichter fällt die Brüche $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ am Kreis zu markieren als am Balken. Ein Erklärungsansatz ist, dass diese „Alltagsbrüche“ den Kindern in Kreisdarstellungen bereits aus der Grundschule bekannt sind. Äußerungen der Schülerinnen und Schüler wie etwa: „Der Kreis erscheint mir schwieriger, also strenge ich mich mehr an!“ lassen auch motivationale und affektive Gründe als Erklärungsmöglichkeiten zu, die wir bisher nicht betrachtet haben.

Wir planen daher eine Studie für das Schuljahr 2016/17, in der wir einige der eben dargelegten Phänomene untersuchen werden. Darüber hinaus werden wir der Frage nachgehen, ob sich im Bereich der Bruchrechenkompetenz, der Motivation bzgl. Bruchrechnung bzw. Mathematik und der klassischen Schülerfehler (vgl. Padberg, 2009) Unterschiede zwischen Sechstklässlerinnen und Sechstklässlern, die mit dem iPad oder mit analogen Lehrmitteln unterrichtet worden sind, finden lassen.

Literatur

Apple Inc. (2014). *iBooks Author. Tolle Multi-Touch Bücher für das iPad erstellen und veröffentlichen*. Zugriff unter https://www.apple. com/de/ibooks-author/

Brunnermeier, A., Herz, A., Kammermeyer, F., Kilian, H., Kurz, K., Sauer, J., ... Zechel, J. (2004). *Fokus Mathematik. Gymnasium Bayern. 6. Jahrgangsstufe. Schülerbuch*. Berlin: Cornelsen.

Carraher, D. W. (1993). Lines of thought: A ratio and operator model of rational number. *Educational Studies in Mathematics*, *25*(4), 281–305. doi:10.1007/ BF01273903

Dienes, Z. P. (1967). *Fractions: An operational approach*. Harlow, Essex: Educational Supply Association.

Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of educational research*, 77(1), 81–112.

Leutner, Detlev. (2002). Adaptivität und Adaptierbarkeit multimedialer Lehr- und Informationssysteme. In Issing, Ludwig J. (Hrsg.), *Information und Lernen mit Multimedia und Internet. Lehrbuch für Studium und Praxis.* (S. 114–125). München.

Padberg, F. (2009). *Didaktik der Bruchrechnung* (4. Aufl.). Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

The CindyJS Project. (2016). *CindyJS: A JavaScript framework for interactive (mathematical) content*. Zugriff unter http://cindyjs.org