Anna Susanne STEINWEG, Bamberg

Grundideen algebraischen Denkens in der Grundschule

Algebraisches Denken

Seit vielen Jahren befasst sich mathematikdidaktische Forschung mit Zugängen zu algebraischem Denken schon ab der Grundschule (Bednarz, 1996). Die entwickelten Ansätze sind jedoch noch kaum in die Unterrichtspraxis vorgedrungen, obwohl der Mathematikunterricht vielfältige Anknüpfungspunkte bieten würde.

In der Arithmetik werden z. B. die verschiedenen Zahlaspekte betont, dabei umfasst der Rechenzahlaspekt nicht ausschließlich das Ziffernrechnen, sondern Zahlen und Operationen in ihren Strukturen, d. h. einen algebraischen Aspekt: „Die Menge der natürlichen Zahlen bildet bezüglich der Rechenoperationen eine algebraische Struktur, die gewisse Eigenschaften („Gesetze“) besitzt“ (Müller & Wittmann, 1984, S. 172). Dieser Aspekt hat sich zwar u. a. in der stärkeren Betonung der halbschriftlichen Strategien, die auf den Eigenschaften der Rechenoperationen basieren, niedergeschlagen, wurde in seiner ganzen Wirkkraft im deutschsprachigen Raum jedoch nicht in der Praxis herausgearbeitet.

Die Eigenschaften und strukturellen Zusammenhänge von Zahlen, Operationen und Gleichungen sind nicht nur Hintergrund des (geschickten) Rechnens, sondern als eigenständige, in diesem Sinne ‚neue‘ Objekte der Auseinandersetzung (Sfard, 1991; Tall & Gray et al., 2001) und wertvolle Unterrichtsinhalte bewusst wahrzunehmen.

Algebra in der Grundschule

Aus dreierlei Gründen ist die Förderung algebraischen Denkens ab der Grundschule relevant: Erfahrungen aus dem Kontext diskreter Zahlen sind erstens grundsätzlich transferierbar (z. B. Livneh & Linchevski, 2007). Neben diesem vorbereitenden Charakter auf spätere Anforderungen in der Sekundarstufe liegen die Gründe aber vor allem im Mehrwert für die Kompetenzentwicklungen direkt in der Grundschule. Arithmetische Kompetenzen werden durch algebraische Durchdringung gestärkt und unterstützt sowie Prozesskompetenzen, z. B. des Kommunizierens und Argumentierens, von algebraischen Denkweisen eingefordert und gefördert (Steinweg, 2013).

Grundideen

Mathematikdidaktik als konstruktive Wissenschaft orientiert sich an Mathematik ebenso wie an lernpsychologischen und –pädagogischen Erkenntnissen (Wittmann, 1976 und 2013). Durch die Entwicklung von Grund-

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

ideen wird ein Kompetenzbereich in seinen Themen ‚greifbar‘ und kann bewusst in die Unterrichtsgestaltung aufgenommen werden. Der Mathematikunterricht ist auf diese doppelte Bewusstheit angewiesen, die in der bewussten Auseinandersetzung mit mathematischen Fragestellungen auf Seiten der Lehrenden in der Unterrichtsorganisation und auf Seiten der Lernenden in der aktiven Tätigkeit liegt (Mason, 1987).

Algebraische Grundideen

Algebraisches Denken kann im Themenfeld der ‚Muster & Strukturen‘ verortet werden. Die besondere Bedeutung von Mustern und Strukturen ist unbestritten. Unterschiedlich wird jedoch deren Zuordnung als Inhaltsbereich oder allgemeine Kompetenz gesehen. Ebenso ist das Bemühen, die Begriffe Muster und Strukturen klar voneinander abzugrenzen, noch unbefriedigend. Grundlage des hier genutzten Gebrauchs ist die Kennzeichnung von Mustern als Regelmäßigkeiten, die individuell und kreativ erdacht werden, wohingegen Strukturen durch den mathematischen Raum (mit seinen Eigenschaften) festgelegt sind (Steinweg, 2014).
Dieser Beitrag schlägt vier Grundideen vor, die die Förderung algebraischen Denkens in der Grundschule orientieren können. Diese sind im Einzelnen:

- Muster (und Strukturen)
- Eigenschaftsstrukturen
- Äquivalenz-Strukturen
- Funktionale Strukturen

Keine der Grundideen ist völlig unabhängig von bereits etablierten Unterrichtsinhalten, sondern fokussiert hingegen neu auf die Potenziale, die in den vermeintlich arithmetischen Aufgabenstellungen und Lernumgebungen verborgen liegen.

Muster (und Strukturen)

Muster zeigen sich als regelmäßige Wiederholungen von Zahlen oder geometrischen Objekten. Exemplarische Beispiele sind Zahlenfolgen (Abb. 1) oder operative Muster in Aufgabenformaten, die entdeckt, genutzt (fortsetzen, reparieren) und auch beschrieben werden können.

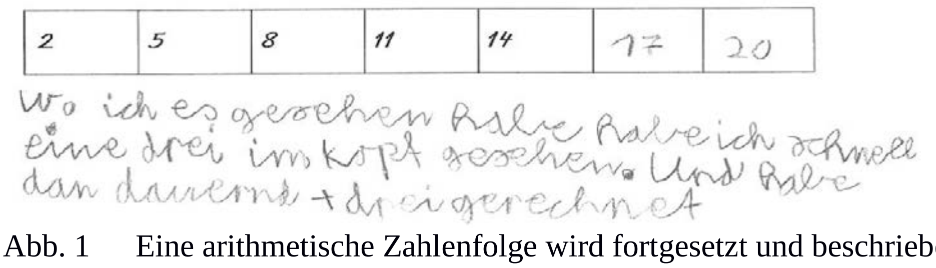

Abb. 1 Eine arithmetische Zahlenfolge wird fortgesetzt und beschrieben

Die Relationen der Objekte des Musters verweisen auf ‚Strukturen' (hier eine arithmetische Zahlenfolge), die in ihrer Erscheinung und ihrem Verhalten mathematisch definiert sein können.

Eigenschaftsstrukturen

Im Gegensatz zu Mustern sind Eigenschaften ‚vorgegeben' (Wittmann & Müller, 2007). Sie ergeben sich zwingend aus der algebraischen Struktur und den damit strukturell bedingten Eigenschaften. So können z. B. ‚Tauschaufgaben' zu Additionen von den Kindern gefunden und entdeckt werden, *da* die Operation + auf ℕ kommutativ ist. Die Aktivitäten im Unterricht entsprechen denen zu Mustern (entdecken, nutzen und beschreiben), betreffen nun aber die mathematischen Eigenschaften der Zahlen (Parität, Teilbarkeit etc.) und Operationen.

Äquivalenz-Strukturen

Gleichungen stellen Terme in strukturelle Beziehung. Die Äquivalenz von Termen führt zu wahren Aussagen. Etliche Strategien der Lösung linearer Gleichungen (Vollrath & Weigand, 2007), wie z. B. das gedankliche Lösen, der Termvergleich oder Gegenoperationen, können an reinen Zahlentermen in der Grundschule erprobt werden, d. h. Kinder beurteilen, erhalten oder stellen (einsetzen, korrigieren) Äquivalenz her.

Funktionale Strukturen

Lineare Funktionen sind in ihrem Zuordnungscharakter (Ko-Variationsaspekt) und Änderungsverhalten für Kinder zugänglich. Zuordnungen treten alltäglich z. B. als Proportionen im Grundschulunterricht auf. Auch Zuordnungsvorschriften können rekursiv oder explizit entdeckt, genutzt und beschrieben werden (Steinweg, 2000).

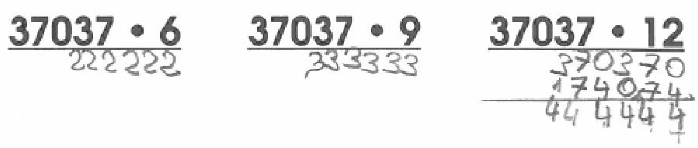

Abb. 2 Änderungsverhalten der Beziehung des 2. Faktors zum Produkt

Änderungsverhalten kann insbesondere an operativen Variationen (Wittmann, 1985) als mathematische Idee kennengelernt werden. Obwohl hier i.d.R. keine linkstotale Abbildung $x \rightarrow mx$ bei diskreten Datenreihen in ℕ gegeben ist, sind die Beobachtung und Beschreibung der Abhängigkeiten und Änderungswirkungen wesentlich analog. Im Beispiel in Abbildung 2 kann der zweite Faktor als Variable im Aspekt der Veränderlichen erkannt und die Wirkung auf das Produkt erforscht werden. Auf diese Erfahrungen kann später bei der Auseinandersetzung mit linearen Funktionen zurückgegriffen werden.

Schlussbemerkung

Die hier vorgeschlagene Gliederung in Grundideen zur Förderung algebraischen Denkens erhebt keinen Anspruch auf Trennschärfe. Vielmehr werden die möglichen Foki der Auseinandersetzungen im Bereich ‚Muster & Strukturen‘ ausdifferenziert. Somit können die wesentlich verschiedenen Strukturen und Muster der bewussten und gezielten Thematisierung im Unterricht grundsätzlich zugänglich gemacht werden. Die doppelte Hoffnung ist, dass zum einen der Bereich ‚Muster & Strukturen’ in seiner umfassenden Bedeutung klarer erkannt wird und zum anderen algebraische Lernchancen von Anfang an ermöglicht werden.

Literatur

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publisher.

Livneh, D. & Linchevski, L. (2007). Algebrification of Arithmetic: Developing Algebraic Structure Sense in the Context of Arithmetic. *PME 31*. Korea vol 3, 217-224.

Mason, J. (1987). Erziehung kann nur auf die Bewußtheit Einfluß nehmen. *mathematik lehren*, (21), 4-5.

Müller, G. & Wittmann, E. (^{3}1984). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe*. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22* (1), 1-36.

Steinweg, A. S. (2000). Wie heißt die Partnerzahl? *Die Grundschulzeitschrift*, (133), 18-20.

Steinweg, A. S. (2013). *Algebra in der Grundschule.* Heidelberg: Springer – Spektrum.

Steinweg, A. S. (2014). Muster und Strukturen zwischen überall und nirgends: Eine Spurensuche. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Mathematikdidaktik Grundschule – 10 Jahre Bildungsstandards* (S. 51-66). Bamberg: University of Bamberg Press.

Tall, D., Gray, E. et al. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics & Technology Education, 1*(1), 81-104.

Vollrath, H.-J. & Weigand, H.-G. (2007). *Algebra in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Wittmann E. (1976). *Grundfragen des Mathematikunterrichts.* Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, E. & Müller, G. (2007). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther et al. (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 42-65). Berlin: Cornelsen.

Wittmann, E. (1985). Objekte - Operationen - Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. *mathematik lehren*, (11), 7-11.

Wittmann, E. (2013). Strukturgenetische didaktische Analysen – die empirische Forschung erster Art. In Greefrath, G., Käpnick, F & Stein, M. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*, (S. 1094-1097). Münster: WTM.