Elke SÖBBEKE, Paderborn

Analyse sprachlicher Mittel bei der Interpretation mathematischer Anschauungsmittel in der Grundschule

Anschauungsmittel aus epistemologischer & sprachlicher Perspektive

Kinder müssen im Mathematikunterricht bereits vom ersten Schuljahr an ein neues Bewusstsein dafür entwickeln, dass ein mathematisches Anschauungsmaterial nicht wie ein Material in der Alltagswelt des Kindes zu verstehen ist. Im Mathematikunterricht stehen nicht die konkreten Eigenschaften des Materials im Vordergrund, vielmehr ist das Anschauungsmittel in einer "*systemischen Welt*" zu verstehen, mit all seinen *nicht direkt sichtbaren Beziehungen und Strukturen* (vgl. Steenpaß 2014). Mit dieser Anforderung an die Nutzungsweise von Anschauungsmitteln ändert sich auch maßgeblich die Anforderung an die Sprache der Kinder.

Am Beispiel von 10 Plättchen soll nachfolgend verdeutlicht werden, inwiefern sich dieses Verstehen von Anschauungsmitteln (vgl. auch Steinbring 2014; Söbbeke 2015) sowie auch die Sprache der Kinder bei der Nutzung dieser Materialien verändern, ja ausdifferenzieren muss: (1.) Im Anfangsunterricht stellt das Zählen von konkreten Dingen eine wesentliche und bedeutsame Grundlage für die Entwicklung des Zahlbegriffs dar. Die konkreten didaktischen Mittel stellen den erklärenden Hintergrund für die zu verstehenden neuen Zahlzeichen und Zahlworte dar. Diese zu Beginn beim Zählen von Dingen benutzte *dingliche* Deutung, »ein Plättchen entspricht 1«, erfährt eine erste Wandlung, wenn die Plättchen bspw. in die Form eines Rechteckmusters gelegt werden. (2.) Nun können neue *systemische* Aspekte des Anschauungsmaterials in den Blick genommen werden. Das Rechteck der Plättchen enthält *komplexe interne Beziehungen zwischen den Elementen*. Zum Beispiel die Hervorhebung der beiden Seiten des Rechtecks als zwei neue »Einheiten«, sodass die Multiplikationsaufgaben "2•5" und "5•2" in das Feld hineingesehen werden können. Wenn beide Struktureinheiten systemisch aufeinander bezogen werden, kann eine erste Idee der Kommutativität der Multiplikation mit den Kindern entwickelt werden. Ein noch differenzierterer systemischer Aspekt wäre eine Zerlegung des Feldes, z.B. in "1•5+1•5" Punkte (distributive Zerlegung). Auch die Anforderungen an die Sprache verändern sich: In der *ersten* Betrachtung ist eine sprachliche Darstellung der Plättchen notwendig, die diese als diskrete Objekte be-

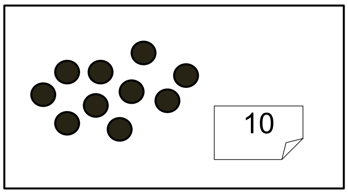

Abb. 1

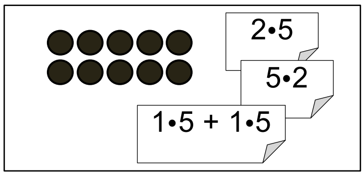

Abb. 2

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

schreibt, die gezählt werden. Für die *zweite* Betrachtung müssen kommunikative Mittel genutzt werden, um etwas *Potentielles* auszudrücken: "Was ist die Funktion der Plättchen?", "Welche Rolle nimmt das Plättchen im Gesamtsystem ein?" Langfristig ist dies eine grundlegende Voraussetzung für das mathematische Lernen, insbesondere dann, wenn Kinder im Kontext anschaulicher Beweise erste Verallgemeinerungen begründen sollen.

Konsequenzen für die Forschung

Der Aufbau von solch strukturellem Wissen kann nicht von einem Kind alleine geleistet werden, sondern er vollzieht sich immer in der sozialen Interaktion. Es bedarf eines gemeinsamen Sprechens über das Anschauungsmittel, um die abstrakten begrifflichen Aspekte in den Anschauungsmitteln überhaupt nutzbar für das Lernen zu machen. Aber gerade das Versprachlichen solcher Beziehungen stellt eine anspruchsvolle Anforderung für Kinder dar, die im Rahmen dieses Forschungsprojektes analysiert wird.

Zur Zeit werden aus der aktuellen Forschung theoretische Modelle und Instrumente gesichtet, die sich mit der beschriebenen epistemologischen Theorie verbinden lassen. Verschiedene Forschungen auf dem Gebiet "Sprache und Mathematik" untersuchen die Rolle der Sprache in Prozessen des mathematischen Lernens, insbesondere beim Verallgemeinern oder in der Auseinandersetzung mit Mustersequenzen (vgl. Akinwunmi 2012; Frobisher & Threlfall 1999; Link 2012; Steinweg 2001). Die einzelnen Modelle können an dieser Stelle nur verkürzt und zusammenfassend wiedergegeben werden; sie zeigen insgesamt, dass das Versprachlichen der Muster verschiedene Ebenen umfasst: Auf der untersten Ebene werden Muster erkannt und fortgesetzt, auf der nächsten Ebene werden Muster beschrieben. Auf der höchsten Ebene begründen Kinder den Aufbau eines Musters. Die Beschreibungen und Begründungen können unter Nutzung von einem oder mehreren Beispielen, unter Nutzung von Quasivariablen oder auch durch Nutzung von Wörtern mit Variablencharakter erfolgen. In vielen Veröffentlichungen zu Sprache und Mathematiklernen werden auch technische Aspekte beschrieben, die die mathematische Kommunikation beeinflussen: Wortschatz, Fachsprachaspekte, linguistische Aspekte etc. Diese sprachlichen Ausdrücke sind eine wichtige linguistische Grundlage, die von den Kindern gelernt werden muss. Dennoch verdeutlichen die vorherigen Ausführungen, dass die Kinder Fachausdrücke überhaupt erst einmal mit der inhaltlichen mathematischen Idee verbinden müssen, ihnen einen begrifflichen Sinn verleihen müssen, so dass die Analyse sprachlicher Mittel in der eingenommenen epistemologischen Perspektive über die Beschreibung solch technischer Bedingungen hinaus gehen muss: »This 'speaking mathematically' (Pimm 1989) is more than just learning vocabulary and using these words in the right linguistic form.« (Vogel & Huth 2010, 1034). In der nebenstehenden Matrix sind diese Erkenntnisse aus der Literatur aufgespannt (Abb. 3). Die Matrix zeigt in der linken Spalte die sprachliche Spanne von Beschreibungen auf der einen und Begründungen auf der anderen Seite. Dieser Bereich wird durch die epistemologischen Aspekte aus Abschnitt 1 angereichert. Ziel des Forschungsprojektes ist es, detaillierte Kategorien für die Felder der Matrix zu entwickeln.

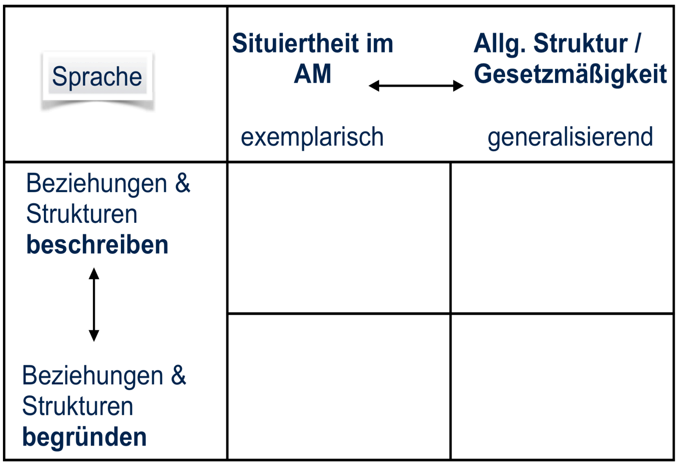

Abb. 3

Sprachliche Mittel bei der Erkundung von Anschauungsmitteln

Die folgenden Beispiele können an dieser Stelle des Forschungsprozesses noch nicht einer sorgsamen wissenschaftlichen Analyse unterzogen werden, vielmehr sind sie von illustrierendem Charakter, um die Frage nach den sprachlichen Mitteln anhand empirischen Datenmaterials zu konkretisieren. Paul und Alexander (3. Sj.) finden die Aufgaben "6•6" und "25+5+5+1" als passend zu dem Punktefeld (Abb. 4). Die Umdeutung des Feldes von "6•6" zu einer Zerlegung in "25+5+5+1" stellt auch eine produktive Voraussetzung für das Verstehen geeigneter Strategien zur Berechnung komplexerer Multiplikationsaufgaben dar.

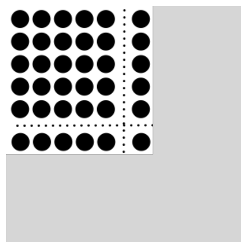
Abb. 4

Durch ihre spontane Umdeutung des Punktefeldes entwickeln die beiden Kinder hier erste Ansätze einer langfristig tragfähigen Idee, die jedoch vage und implizit beleibt, wenn nicht darüber gesprochen wird. Die verbalen Äußerungen der Kinder zeigen, wie unterschiedlich die Passung der Aufgaben zu dem Punktefeld *begründet* wird: Paul bezieht sich in seinen Äußerungen auf die konkreten Eigenschaften der vier Segmente, indem er Beispielanzahlen beschreibt und zeigt und exemplarisch auf die konkret vorgenommene Zerlegung des Feldes verweist.

Paul: »weil das passt auch, weil ich die hier sehe, die 25 is hier (zeigt *auf das 5x5-Quadrat*), die 5 is hier und hier (*zeigt auf die fünf Punkte neben und dann unterhalb der gestrichelten Linie*), und das ist die Eins.«

Alexander bezieht sich nicht auf die konkreten Anzahlen, sondern beschreibt die Beziehung zwischen den Elementen in der Anordnung und der Aufgabe. In Alexanders Äußerung wird ein erster Aspekt des Verallgemeinerns deutlich, indem er einen *wiederkehrenden Strukturierungsaspekt* *kommuniziert* (durch Sprache und Gesten). Auch wenn man den Winkel in dem Feld verschieben würde (und sich hierdurch die konkreten Punkteanzahlen in den Segmenten ändern würden), könnte doch Alexanders Idee des »Trennens und Zusammennehmens« immer wieder aufgegriffen werden, um die Passung der Aufgaben zu begründen:

Alexander: »Und die Aufgabe passt gut, weil dann kann man die alle doch genauso zusammennehmen, wie das (zeigt auf die vier Felder), wie hier die Striche (fährt mit dem linken Zeigefinger über die beiden gestrichelten Linien des Punktefeldes), wie die die getrennt haben.«

Ausblick

Vor dem Hintergrund obiger Ausführungen wird deutlich, dass die Bedingungen des Lehrens und Lernens von Mathematik äußerst komplexen *epistemologischen Voraussetzungen* und infolgedessen anspruchsvollen *sprachlichen Bedingungen* unterliegen. Diese Bedingungen sind sorgsam und grundlegend zu erforschen. Zur Zeit werden hierzu Interviewaufgaben entwickelt, die gezielt für das Kind zu beobachtende Kontraste zwischen verschiedenen Anschauungsmitteln provozieren, indem bestimmte strukturelle Beziehungen beibehalten werden und Eigenschaften auf der direkt zu beobachtenden Ebene (z.B. Punkteanzahlen) verändert werden.

Literatur

Akinwunmi, K. (2012). *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Frobisher, L. & Threlfall, J. (1999): Teaching and assessing patterns in number in the primary years. In: Orton, A. (Hrsg.): *Pattern in the teaching and learning of mathematics.* London: Cassell, S. 84-103.

Link, M. (2012). *Grundschulkinder beschreiben operative Zahlenmuster*. Entwurf, Erprobung und Überarbeitung von Unterrichtsaktivtäten als ein Beispiel für Entwicklungsforschung. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Söbbeke, E. (2015). Language use, mathematical visualizations, and children with language impairments. In: *Proceedings CERME 9*, Prague, Czech Republic, S. 1497-1502.

Steenpaß, A. (2014). *Grundschulkinder deuten Anschauungsmittel. Eine epistemologische Kontext- und Rahmenanalyse zu den Bedingungen der visuellen Strukturierungskompetenz*. Dissertation, Universität Duisburg-Essen: http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DocumentServlet?id=35866.

Steinbring, H. (2014). *Die Rolle von Materialien, Anschauungsmitteln und Zeichen für das Lernen von Mathematik. Eine epistemologische Perspektive*. Vortrag auf der Tagung "Mathematik und Lehr-Lern-Prozesse - Theorie und Erfahrung". Ohrbeck, (24.-26.09.2014), Unveröffentlichtes Manuskript.

Steinweg, A. S. (2001). *Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern: Epistemologisch-pädagogische Grundlegung*. Münster: LIT

Vogel, R. & Huth, M. (2010). Mathematical cognitive processes between the poles of mathematical technical terminology and the verbal expressions of pupils. In: *Proceedings CERME 6*. Lyon, France: http://www.inrp.fr/editions/editions-electroniques/cerme6, S. 1013-1022.