

Available online at www.sciencedirect.com ScienceDirectADVANCES IN
Mathematics

Advances in Mathematics 208 (2007) 877–904

www.elsevier.com/locate/aim

Étude de l'algèbre de Lie double des arbres enracinés décorés

L. Foissy

Laboratoire de Mathématiques, UMR 6056, Université de Reims, Moulin de la Housse, BP 1039,
51687 REIMS Cedex 2, France

Reçu le 2 mars 2005 ; accepté le 3 avril 2006

Disponible sur Internet le 12 mai 2006

Communiqué par Alain Lascoux

Résumé

L'algèbre de Lie L^D double des arbres enracinés décorés par un ensemble D est introduite, généralisant la construction de Connes et Kreimer. Nous montrons qu'il s'agit d'une algèbre de Lie simple. Nous décrivons ses dérivations, ses automorphismes et certaines extensions centrales. Enfin, la catégorie des modules de plus bas poids sur L^D est introduite et étudiée.

© 2006 Elsevier Inc. Tous droits réservés.

Abstract

The double Lie algebra L^D of rooted trees decorated by a set D is introduced, generalising the construction of Connes and Kreimer. It is shown that it is a simple Lie algebra. Its derivations and its automorphisms are described, as well as some central extensions. Finally, the category of lowest weight modules is introduced and studied.

© 2006 Elsevier Inc. Tous droits réservés.

Mots-clés : Algèbre de Lie ; Arbres enracinés ; Modules de plus bas poids

Keywords : Lie algebra ; Rooted trees ; Lowest weight modules

0. Introduction

Dans [3,4,11–13], A. Connes et D. Kreimer introduisent une algèbre de Hopf d'arbres enracinés \mathcal{H}_R dans le but d'étudier un problème de Renormalisation en Théorie Quantique des

Adresse e-mail : loic.foissy@univ-reims.fr.

Champs (voir également [6–8]). Cette algèbre de Hopf est graduée, connexe, commutative et non cocommutative. De plus, \mathcal{H}_R est un module sur l’algèbre de Lie double des arbres enracinés (non décorés) introduite dans [5]. Cette algèbre de Lie agit sur \mathcal{H}_R par dérivation ; son action est décrite à l’aide de greffes et de coupes.

Dans cet article, nous introduisons l’algèbre de Lie double des arbres enracinés décorés par un ensemble fini non vide \mathcal{D} . Nous la désignerons par $L^{\mathcal{D}}$. Cette construction généralise celle de D. Kreimer. Cette algèbre de Lie se décompose en $L^{\mathcal{D}} = L_+^{\mathcal{D}} \oplus L_0 \oplus L_-^{\mathcal{D}}$, où $L_+^{\mathcal{D}}$ et $L_-^{\mathcal{D}}$ sont deux sous-algèbres de Lie isomorphes, possédant chacune une base indexée par l’ensemble des arbres décorés par \mathcal{D} , alors que L_0 est une sous-algèbre de Lie de dimension 1 agissant diagonalement sur $L^{\mathcal{D}}$. De plus, l’algèbre de Hopf $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}$ (notée $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ dans [7,8]) des arbres enracinés décorés par \mathcal{D} est un $L^{\mathcal{D}}$ -module.

Nous montrons que $L^{\mathcal{D}}$ est une algèbre de Lie simple. Nous décrivons l’algèbre de Lie des dérivations extérieures de $L^{\mathcal{D}}$: elle est isomorphe à $\mathfrak{sl}(D)$, où D est le cardinal de \mathcal{D} . Nous décrivons également le groupe des isomorphismes de $L^{\mathcal{D}}$: il s’agit d’un produit semi-direct de $GL_D(K)$ (où K est le corps de base) par un groupe cyclique d’ordre 2. De plus, nous décrivons certaines extensions centrales de $L^{\mathcal{D}}$.

Nous introduisons ensuite la catégorie des modules de plus bas poids sur $L^{\mathcal{D}}$. Pour tout poids $\lambda \in K$, nous décrivons le module de Verma V_λ ainsi que les modules de plus bas poids simples. De plus, nous décomposons le $L^{\mathcal{D}}$ -module $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}$ en modules de plus bas poids simples ainsi que $V_\lambda \otimes V_\mu$ lorsque $\lambda + \mu$ n’est pas un entier négatif.

Ce texte est organisé de la manière suivante : la première partie est consacrée à des rappels et des compléments sur les algèbres de Hopf $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}$. Nous construisons l’algèbre de Lie $L^{\mathcal{D}}$ ainsi que son module $T^{\mathcal{D}}$ dans la deuxième partie ; nous montrons également que $L^{\mathcal{D}}$ est une algèbre de Lie simple. Nous étudions les dérivations et les automorphismes de $L^{\mathcal{D}}$ dans la troisième partie et ses extensions centrales dans la quatrième partie. Enfin, la dernière partie est consacrée à l’étude des modules de plus bas poids sur $L^{\mathcal{D}}$.

Notation. K désigne un corps de caractéristique nulle.

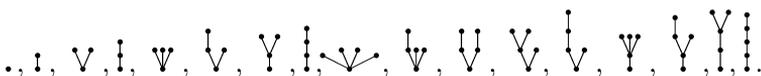
1. Rappels et notations

Définition 1. Un *arbre enraciné* t est un graphe fini, connexe et sans boucles muni d’un sommet particulier appelé *racine* de t . Les arbres enracinés seront dessinés avec la racine en bas. Le *poids* de t est le nombre de ses sommets. L’ensemble des arbres enracinés est noté \mathcal{T} .

Soit \mathcal{D} un ensemble non vide. Un *arbre enraciné décoré par \mathcal{D}* est un arbre enraciné t muni d’une application de l’ensemble de ses sommets vers \mathcal{D} . L’image d’un sommet s par cette application est appelée *décoration* de s . L’ensemble des arbres enracinés décorés par \mathcal{D} sera noté $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}$. Pour tout $d \in \mathcal{D}$, on notera \cdot_d l’élément de $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}$ formé d’un seul sommet décoré par d .

Exemples.

1. Arbres enracinés de poids inférieur ou égal à 5 :



2. Arbres enracinés décorés par $\mathcal{D} = \{1, 2\}$, de poids inférieur ou égal à 3 :

$$\bullet_1, \bullet_2, \uparrow_1^1, \uparrow_1^2, \uparrow_2^1, \uparrow_2^2, {}^1V_1^1, {}^1V_2^1, {}^1V_1^2, {}^1V_2^2, {}^2V_1^2, {}^2V_2^2, \uparrow_1^1, \uparrow_2^1, \uparrow_1^2, \uparrow_2^2, \uparrow_1^1, \uparrow_2^1, \uparrow_1^2, \uparrow_2^2.$$

Soit \mathcal{D} un ensemble non vide et soit $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}$ l’algèbre associative et commutative librement engendrée sur K par les éléments de $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}$. Les monômes en les arbres enracinés de cette algèbre sont appelés *forêts enracinées décorées*; il sera souvent utile de considérer 1 comme la forêt vide. L’ensemble des forêts enracinées décorées est noté $\mathcal{F}^{\mathcal{D}}$. Le poids d’une forêt $F = t_1 \dots t_n$ est par définition $\text{poids}(t_1) + \dots + \text{poids}(t_n)$.

Exemples.

1. Forêts enracinées de poids inférieur ou égal à 4 :

$$1, \bullet, \dots, \uparrow, \dots, \uparrow, \vee, \uparrow, \dots, \uparrow, \vee, \uparrow, \uparrow, \vee, \vee, \uparrow, \uparrow.$$

2. Forêts enracinées décorées par $\mathcal{D} = \{1, 2\}$, de poids inférieur ou égal à 2 :

$$1, \bullet_1, \bullet_2, \bullet_1 \bullet_1, \bullet_1 \bullet_2, \bullet_2 \bullet_2, \uparrow_1^1, \uparrow_1^2, \uparrow_2^1, \uparrow_2^2.$$

Soit $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$. Une *coupe élémentaire* de t est une coupe sur une seule arête de t . Une *coupe admissible* de t est une coupe non vide telle que tout trajet d’un sommet de t vers un autre ne rencontre au plus qu’une seule coupe élémentaire. L’ensemble des coupes admissibles de t est noté $\text{Adm}(t)$. Une coupe admissible c envoie t vers un couple $(P^c(t), R^c(t)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}} \times \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$, tel que $R^c(t)$ est la composante connexe de la racine de t après la coupe, et $P^c(t)$ est la forêt formée par les autres composantes connexes, placées dans le même ordre.

$\mathcal{H}^{\mathcal{D}}$ est munie d’une structure d’algèbre de Hopf donnée par le coproduit suivant : pour tout $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$,

$$\Delta(t) = 1 \otimes t + t \otimes 1 + \sum_{c \in \text{Adm}(t)} P^c(t) \otimes R^c(t).$$

Exemple. Avec $a, b, c, d \in \mathcal{D}$:

$$\Delta(\overset{c}{\underset{a}{\vee}} \overset{d}{\vee}) = \overset{c}{\underset{a}{\vee}} \otimes 1 + 1 \otimes \overset{c}{\underset{a}{\vee}} \overset{d}{\vee} + \bullet_c \otimes \uparrow_a^d + \bullet_d \otimes \uparrow_a^c + \bullet_c \bullet_d \otimes \uparrow_a^b + \overset{c}{\underset{a}{\vee}} \overset{d}{\vee} \otimes \bullet.$$

En particulier, la cointé de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}$ est donnée de la manière suivante :

$$\varepsilon : \begin{cases} \mathcal{H}^{\mathcal{D}} \longrightarrow K \\ F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } F = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

(Voir [3,6,7,11] pour plus de détails.)

Notations. Soient $t, t_1, t_2 \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$. Alors $n(t_1, t_2; t)$ désigne le nombre de coupes admissibles de t telles que $P^c(t) = t_1$ et $R^c(t) = t_2$. De plus, $n'(t_1, t_2; t)$ désigne le nombre de greffes de t_1 sur t_2 dont le résultat est t (voir [8,9]).

Résultat préliminaire 1. On note $T^{\mathcal{D}}$ l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}$. On considère l'application δ ci-dessous :

$$\delta : \begin{cases} T^{\mathcal{D}} \longrightarrow T^{\mathcal{D}} \otimes T^{\mathcal{D}} \\ t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \sum_c \text{coupe simple de } t \ P^c(t) \otimes R^c(t). \end{cases}$$

Alors $\text{Ker}(\delta) = \text{Vect}(\bullet_d, d \in \mathcal{D})$.

Preuve. L'espace $T^{\mathcal{D}}$ est gradué par le poids ; de plus, pour cette graduation, δ est homogène de degré 0. Notons $(T^{\mathcal{D}})^{*g}$ le dual gradué de $T^{\mathcal{D}}$. On appelle $(Z_t)_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}}$ la base duale de la base $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}$ de T . L'application δ^{*g} est donnée par :

$$\circ = \delta^{*g} : \begin{cases} (T^{\mathcal{D}})^{*g} \otimes (T^{\mathcal{D}})^{*g} \longrightarrow (T^{\mathcal{D}})^{*g} \\ Z_{t_1} \otimes Z_{t_2} \longrightarrow \sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n(t_1, t_2; t) Z_t. \end{cases}$$

Or \circ est un produit pré-Lie (voir [2,8]) ; de plus, $(T^{\mathcal{D}})^{*g}$ est trivialement isomorphe à l'algèbre pré-Lie librement engendrée par $(T^{\mathcal{D}})_1^{*g}$, donc $\text{Im}(\circ) = \bigoplus_{n \geq 2} (T^{\mathcal{D}})_n^{*g}$. En considérant l'orthogonal de ce sous-espace, on obtient le résultat annoncé. \square

Notation. On considère l'application suivante :

$$\bar{\Delta} : \begin{cases} \mathcal{H}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{H}^{\mathcal{D}} \otimes \mathcal{H}^{\mathcal{D}} \\ t_1 \dots t_k \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \sum_{\forall i, c_i \in \text{Adm}(t_i), \text{ ou } c_i \text{ est vide}} P^{c_1}(t_1) \dots P^{c_k}(t_k) \otimes R^{c_1}(t_1) \dots R^{c_k}(t_k). \end{cases}$$

L'application $\bar{\Delta}$ vérifie :

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(t) &= \Delta(t) - t \otimes 1, \quad \forall t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}, \\ \bar{\Delta}(xy) &= \bar{\Delta}(x)\bar{\Delta}(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}^{\mathcal{D}}, \\ (\varepsilon \otimes Id) \circ \bar{\Delta}(x) &= x, \quad \forall x \in \mathcal{H}^{\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

Cependant, $\bar{\Delta}$ n'est ni coassociatif, ni counitaire.

2. Algèbres de Lie $L^{\mathcal{D}}$

2.1. Construction de $L^{\mathcal{D}}$

(Voir [5].) Soient $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}, F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}$. On pose :

$$N_t^+(F) = \sum_{s \in \text{som}(F)} t \circ_s F, \tag{1}$$

où $t \circ_s F$ est la forêt obtenue en greffant t sur le sommet s de F . On définit ainsi un opérateur $N_t^+ : \mathcal{H}^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{H}^{\mathcal{D}}$. Cet opérateur est une dérivation homogène de degré le poids de t .

Exemples. On se place dans le cas où \mathcal{D} est réduit à un seul élément. On peut donc oublier les décorations.

$$\begin{array}{l|l}
 N_{\bullet}^+(1) = 0, & N_{\bullet}^+(\cdot) = \mathfrak{!}, \\
 N_{\bullet}^+(\mathfrak{!}) = \mathfrak{V} + \mathfrak{!}, & N_{\bullet}^+(\cdot\cdot) = 2\mathfrak{!}\cdot, \\
 N_{\bullet}^+(\mathfrak{!}\mathfrak{!}) = \mathfrak{!}\mathfrak{V} + \mathfrak{!}\mathfrak{!} + \mathfrak{!}, & N_{\bullet}^+(\mathfrak{V}) = \mathfrak{V} + 2\mathfrak{!}\mathfrak{V}, \\
 N_{\bullet}^+(\cdot\mathfrak{!}) = \mathfrak{!}\mathfrak{!} + \cdot\mathfrak{V} + \cdot\mathfrak{!}, & N_{\bullet}^+(\dots) = 3\mathfrak{!}\dots
 \end{array}$$

On note $Der(\mathcal{H}^{\mathcal{D}})$ l’algèbre de Lie des dérivations de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}$. On appelle $L_+^{\mathcal{D}}$ le sous-espace de $Der(\mathcal{H}^{\mathcal{D}})$ engendré par les N_t^+ , $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$. Pour tous $t_1, t_2 \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$, on montre facilement que pour tout arbre $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$:

$$\begin{aligned}
 [N_{t_1}^+, N_{t_2}^+](t) &= \sum_{s \in \text{som}(t_2)} N_{t_1 \circ_s t_2}^+(t) - \sum_{s \in \text{som}(t_1)} N_{t_2 \circ_s t_1}^+(t) \\
 &= \sum_{s \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} [n'(t_1, t_2; s) - n'(t_2, t_1; s)] N_s^+(t),
 \end{aligned} \tag{2}$$

où $n'(t_i, t_j; t_k)$ désigne le nombre de greffes de t_i sur t_j donnant t_k . Donc $L_+^{\mathcal{D}}$ est une sous-algèbre de Lie de $Der(\mathcal{H}^{\mathcal{D}})$.

Pour toute $F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}$, on pose :

$$N_0(F) = \text{poids}(F)F. \tag{3}$$

Alors N_0 est une dérivation de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}$ homogène de degré 0. On appelle $L_0^{\mathcal{D}}$ le sous-espace de $Der(\mathcal{H}^{\mathcal{D}})$ engendré par N_0 . Pour tout $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$, on a :

$$[N_0, N_t^+] = \text{poids}(t)N_t^+. \tag{4}$$

Donc $L_0^{\mathcal{D}} \oplus L_+^{\mathcal{D}}$ est une sous-algèbre de Lie de $Der(\mathcal{H}^{\mathcal{D}})$.

Soient $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$, $F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}$. Une analyse des coupes admissibles montre que :

$$\bar{\Delta}(N_0(F)) = (N_0 \otimes Id + Id \otimes N_0) \circ \bar{\Delta}(F), \tag{5}$$

$$\bar{\Delta}(N_t^+(F)) = \left(N_t \otimes Id + Id \otimes N_t + t \otimes N_0 + \sum_{c \in \text{Adm}(t)} P^c(t) \otimes N_{R^c(t)}^+ \right) \circ \bar{\Delta}(F). \tag{6}$$

Soient $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$, $F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}$. On pose :

$$N_t^-(F) = \sum_{a \text{ arête de } F} \delta_{t, P^{c_a}(F)} R^{c_a}(F) = (f_t \otimes Id) \circ \bar{\Delta}(F), \tag{7}$$

où c_a désigne la coupe portant sur l’arête a et f_t désigne l’application suivante :

$$f_t : \begin{cases} \mathcal{H}^{\mathcal{D}} \longrightarrow K \\ F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \delta_{F,t}. \end{cases}$$

On définit ainsi un opérateur $N_t^- : \mathcal{H}^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{H}^{\mathcal{D}}$. Cet opérateur est une dérivation homogène de degré $-\text{poids}(t)$.

Exemples.

1. Si $s, t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$ sont tels que $poids(t) \geqslant poids(s)$, alors $N_t^-(s) = 0$.
2. On se place dans le cas où \mathcal{D} est réduit à un seul élément. On peut donc oublier les décorations.

(a) Pour $t = \bullet$:

$$\begin{array}{l}
 N_{\bullet}^-(\uparrow) = \bullet, \\
 N_{\bullet}^-(\uparrow\uparrow) = \uparrow, \\
 N_{\bullet}^-(\downarrow\uparrow) = \mathbb{V} + \uparrow, \\
 N_{\bullet}^-(\uparrow\uparrow\uparrow) = \uparrow\uparrow.
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 N_{\bullet}^-(\mathbb{V}) = 2\uparrow, \\
 N_{\bullet}^-(\mathbb{V}\mathbb{V}) = 3\mathbb{V}, \\
 N_{\bullet}^-(\mathbb{Y}) = 2\uparrow\uparrow.
 \end{array}
 \right.$$

(b) Pour $t = \uparrow$:

$$\begin{array}{l}
 N_{\uparrow}^-(\mathbb{V}) = 0, \\
 N_{\uparrow}^-(\downarrow\uparrow) = \uparrow, \\
 N_{\uparrow}^-(\mathbb{V}\mathbb{V}) = 0, \\
 N_{\uparrow}^-(\mathbb{Y}) = \uparrow\uparrow,
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 N_{\uparrow}^-(\uparrow\uparrow) = \bullet, \\
 N_{\uparrow}^-(\mathbb{Y}) = 0, \\
 N_{\uparrow}^-(\downarrow\uparrow) = \mathbb{V}, \\
 N_{\uparrow}^-(\uparrow\uparrow) = \mathbb{V}, \\
 N_{\uparrow}^-(\mathbb{Y}) = 0,
 \end{array}
 \right|
 \begin{array}{l}
 N_{\uparrow}^-(\mathbb{V}\mathbb{V}) = 0, \\
 N_{\uparrow}^-(\uparrow\uparrow\uparrow) = \uparrow, \\
 N_{\uparrow}^-(\downarrow\uparrow\uparrow) = 2\uparrow\uparrow, \\
 N_{\uparrow}^-(\mathbb{Y}) = 0, \\
 N_{\uparrow}^-(\uparrow\uparrow\uparrow) = \uparrow\uparrow.
 \end{array}$$

On appelle $L_{\uparrow}^{\mathcal{D}}$ le sous-espace de $Der(\mathcal{H}^{\mathcal{D}})$ engendré par les N_t^- , $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$. Pour $t_1, t_2 \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$, on montre facilement que :

$$[N_{t_1}^-, N_{t_2}^-] = - \sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} [n(t_1, t_2, t) - n(t_2, t_1, t)] N_t^-, \tag{8}$$

où $n(t_i, t_j; t_k)$ désigne le nombre de coupes de t_k telles que le tronc soit t_j et la branche t_i . Donc $L_{\uparrow}^{\mathcal{D}}$ est une sous-algèbre de Lie de $Der(\mathcal{H}^{\mathcal{D}})$. De plus, pour tout $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$:

$$[N_0, N_t^-] = -poids(t)N_t^-. \tag{9}$$

Donc $L_0^{\mathcal{D}} \oplus L_{\uparrow}^{\mathcal{D}}$ est une sous-algèbre de Lie de $Der(\mathcal{H}^{\mathcal{D}})$.

Lemme 2. Soient $t_1, t_2 \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$. Alors :

$$f_{t_1} \circ N_{t_2}^+ = \sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n'(t_2, t; t_1) f_t. \tag{10}$$

Preuve. Les deux membres de (10) sont nuls sur les forêts qui ne sont pas réduites à un seul arbre. Par suite, il suffit de vérifier qu'ils coïncident sur $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}$. Soit $t' \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$.

$$\begin{aligned} f_{t_1} \circ N_{t_2}^+(t') &= f_{t_1} \left(\sum_{t'' \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n'(t_2, t'; t'') t'' \right) = \sum_{t'' \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n'(t_2, t'; t'') \delta_{t_1, t''} = n'(t_2, t'; t_1) \\ &= \sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n'(t_2, t; t_1) f_t(t'). \quad \square \end{aligned}$$

Lemme 3. Soient $t_1, t_2 \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$. On a :

$$[N_{t_1}^-, N_{t_2}^+] = \begin{cases} \sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n'(t_2, t; t_1) N_t^-, & \text{si } \text{poids}(t_1) > \text{poids}(t_2), \\ \sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n(t_1, t; t_2) N_t^+, & \text{si } \text{poids}(t_1) < \text{poids}(t_2), \\ \delta_{t_1, t_2} N_0, & \text{si } \text{poids}(t_1) = \text{poids}(t_2). \end{cases} \tag{11}$$

Par suite, $L^{\mathcal{D}} = L_-^{\mathcal{D}} \oplus L_0^{\mathcal{D}} \oplus L_+^{\mathcal{D}}$ est une sous-algèbre de Lie de $\text{Der}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}})$.

Preuve. Soit $x \in \mathcal{H}^{\mathcal{D}}$. On pose $\bar{\Delta}(x) = x' \otimes x''$. Par exemple, si $x = \mathbb{V}$:

$$x' \otimes x'' = 1 \otimes \mathbb{V} + 2 \cdot \otimes \mathbb{!} + \dots \otimes \dots$$

D'après (6) et (10), on a :

$$\begin{aligned} N_{t_2}^+ \circ N_{t_1}^-(x) &= f_{t_1}(x') N_{t_2}^+(x''), \\ N_{t_1}^- \circ N_{t_2}^+(x) &= (f_{t_1} \otimes Id) \left(N_{t_2}^+(x') \otimes x'' + x' \otimes N_{t_2}^+(x'') + t_2 x' \otimes N_0(x'') \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t', t'' \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n(t', t'', t_2) t' x' \otimes N_{t''}^+(x'') \right) \\ &= \sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n'(t_2, t, t_1) f_t(x') x'' + f_{t_1}(x') N_{t_2}^+(x'') \\ &\quad + (f_{t_1}(t_2) \varepsilon(x') + \varepsilon(t_2) f_{t_1}(x')) N_0(x'') \\ &\quad + \sum_{t', t'' \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n(t', t'', t_2) (f_{t_1}(t') \varepsilon(x') + \varepsilon(t') f_{t_1}(x')) N_{t''}^+(x'') \\ &= \sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n'(t_2, t, t_1) f_t(x') x'' + f_{t_1}(x') N_{t_2}^+(x'') + \delta_{t_1, t_2} N_0(x) \\ &\quad + \sum_{t', t'' \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n(t', t'', t_2) f_{t_1}(t') N_{t''}^+(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n'(t_2, t, t_1) N_t^-(x) + N_{t_2}^+ \circ N_{t_1}^-(x) + \delta_{t_1, t_2} N_0(x) \\
 &\quad + \sum_{t'' \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n(t_1, t'', t_2) N_{t''}^+(x),
 \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé. \square

Les propriétés de l'algèbre de Lie $L^{\mathcal{D}}$ sont résumées dans le théorème suivant :

Théorème 4. $L^{\mathcal{D}}$ possède une base $(N_t^+)_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} \cup (N_t^-)_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} \cup (N_0)$. Le crochet de Lie est donné par (2), (4), (8), (9) et (11). Elle est graduée en posant $\text{deg}(N_t^+) = \text{poids}(t)$, $\text{deg}(N_t^-) = -\text{poids}(t)$ et $\text{deg}(N_0) = 0$. De plus, $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}$ est munie d'une structure de $L^{\mathcal{D}}$ -module par (1), (3) et (7).

Exemples. Par souci de lisibilité, on écrit ici t^+ à la place de N_t^+ et t^- à la place de N_t^- . On a alors :

$$\begin{aligned}
 [\mathfrak{t}^+, \mathfrak{t}^+] &= \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \mathfrak{t}^+ \end{array} + \begin{array}{c} \downarrow \\ \mathfrak{t}^+ \end{array} + \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \mathfrak{t}^+ \end{array} - \begin{array}{c} \downarrow \\ \mathfrak{t}^+ \end{array} - \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \mathfrak{t}^+ \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \mathfrak{t}^+ \end{array} + \begin{array}{c} \downarrow \\ \mathfrak{t}^+ \end{array} - \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \mathfrak{t}^+ \end{array}, \\
 [\mathfrak{t}^-, \mathfrak{t}^-] &= -2 \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \mathfrak{t}^- \end{array} - \begin{array}{c} \downarrow \\ \mathfrak{t}^- \end{array} - \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \mathfrak{t}^- \end{array} + \begin{array}{c} \downarrow \\ \mathfrak{t}^- \end{array} + \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \mathfrak{t}^- \end{array} = -2 \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \mathfrak{t}^- \end{array} - \begin{array}{c} \downarrow \\ \mathfrak{t}^- \end{array} + \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \mathfrak{t}^- \end{array}, \\
 [\mathfrak{t}^-, \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \mathfrak{t}^+ \end{array}] &= 2 \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \mathfrak{t}^+ \end{array}, \\
 [\mathfrak{t}^+, \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \mathfrak{t}^- \end{array}] &= - \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \mathfrak{t}^+ \end{array}.
 \end{aligned}$$

2.2. Simplicité de $L^{\mathcal{D}}$

Lemme 5. Soit I un idéal gradué de $L^{\mathcal{D}}$. Alors $I = (0)$ ou $I = L^{\mathcal{D}}$.

Preuve. Supposons $I \neq (0)$. Montrons d'abord que $N_0 \in I$. Soit x un élément homogène non nul de I . Soit n son degré. Trois cas se présentent :

1. $n = 0$: alors x est un multiple de N_0 , d'où $N_0 \in I$.
2. $n > 0$: on peut alors écrire $x = \sum_{\text{poids}(t)=n} \alpha_t N_t^+$. Soit t tel que α_t soit non nul. Alors

$$\frac{1}{\alpha_t} [N_t^-, x] = N_0 \in I.$$

3. $n < 0$: même raisonnement.

Soit $y \in L^{\mathcal{D}}$, homogène de degré k non nul. Alors $\frac{1}{k} [N_0, y] = y \in I$, donc $I = L^{\mathcal{D}}$. \square

Théorème 6. $L^{\mathcal{D}}$ est une algèbre de Lie simple : ses seuls idéaux sont ses idéaux triviaux.

Preuve. D’après le lemme précédent, il suffit de montrer que tout idéal de $L^{\mathcal{D}}$ est gradué. Soit I un idéal de $L^{\mathcal{D}}$ et soit $x \in I$. On pose $x = \sum_{k=a}^b x_k$, avec x_k homogène de degré k . On a $[N_0, x] = \sum_{k=a}^b kx_k \in I$. Par récurrence, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=a}^b k^i x_k \in I$. On déduit alors que les x_k sont dans I de la non-annulation du déterminant de Vandermond suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & a+1 & \dots & b \\ a^2 & (a+1)^2 & \dots & b^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{b-a} & (a+1)^{b-a} & \dots & b^{b-a} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \square$$

Corollaire 7. *Le dual de Hopf de $\mathcal{U}(L^{\mathcal{D}})$ (voir [10]) est de dimension 1, engendré par la counité ε .*

Preuve. Soit I un idéal bilatère de $\mathcal{U}(L^{\mathcal{D}})$ de codimension finie dans $\mathcal{U}(L^{\mathcal{D}})$. Supposons $I \cap L^{\mathcal{D}} = (0)$. Alors I et $L^{\mathcal{D}}$ sont en somme directe dans $\mathcal{U}(L^{\mathcal{D}})$ et donc la codimension de I dans $\mathcal{U}(L^{\mathcal{D}})$ n’est pas finie car $L^{\mathcal{D}}$ n’est pas de dimension finie : contradiction. Par suite, comme I est un idéal bilatère de $\mathcal{U}(L^{\mathcal{D}})$, $I \cap L^{\mathcal{D}}$ est un idéal de Lie non nul de $L^{\mathcal{D}}$; comme $L^{\mathcal{D}}$ est simple, $I = L^{\mathcal{D}}$. Par suite, l’idéal bilatère engendré par $L^{\mathcal{D}}$ est inclus dans I et donc I contient $\text{Ker}(\varepsilon)$, l’idéal d’augmentation de $\mathcal{U}(L^{\mathcal{D}})$: on en déduit que $I = \text{Ker}(\varepsilon)$ ou $I = \mathcal{U}(L^{\mathcal{D}})$.

Soit f dans le dual de $\mathcal{U}(L^{\mathcal{D}})$. On a alors :

$$\begin{aligned} f \text{ est dans le dual de Hopf de } \mathcal{U}(L^{\mathcal{D}}) &\iff f \text{ s’annule sur un idéal} \\ &\hspace{10em} \text{de codimension finie de } \mathcal{U}(L^{\mathcal{D}}) \\ &\iff f \text{ s’annule sur } \text{Ker}(\varepsilon) \text{ ou sur } \mathcal{U}(L^{\mathcal{D}}) \\ &\iff f \text{ s’annule sur } \text{Ker}(\varepsilon) \\ &\iff f \text{ est un multiple de la counité de } \mathcal{U}(L^{\mathcal{D}}). \end{aligned}$$

Donc le dual de Hopf de $\mathcal{U}(L^{\mathcal{D}})$ est de dimension 1, engendré par ε . \square

2.3. Le $L^{\mathcal{D}}$ -module $T^{\mathcal{D}}$

$T^{\mathcal{D}} = \text{Vect}(\mathcal{T}^{\mathcal{D}}) \subset \mathcal{H}^{\mathcal{D}}$ est un sous- $L^{\mathcal{D}}$ -module de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}$. Pour tout $d \in \mathcal{D}$, on pose :

$$T_d^{\mathcal{D}} = \text{Vect}(t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}} / \text{la racine de } t \text{ est décorée par } d).$$

$T_d^{\mathcal{D}}$ est un sous-module de $T^{\mathcal{D}}$ et $T^{\mathcal{D}} = \bigoplus_{d \in \mathcal{D}} T_d^{\mathcal{D}}$; de plus $\mathcal{H}^{\mathcal{D}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S^n(T^{\mathcal{D}})$ en tant que $L^{\mathcal{D}}$ -module, car les éléments de $L^{\mathcal{D}}$ agissent par dérivation sur $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}$. Enfin, les $L^{\mathcal{D}}$ -modules $T_d^{\mathcal{D}}$ sont tous isomorphes.

Théorème 8.

1. \bullet_d génère $T_d^{\mathcal{D}}$ comme $L_+^{\mathcal{D}}$ -module (et donc comme $L^{\mathcal{D}}$ -module).
2. $T_d^{\mathcal{D}}$ est un $L^{\mathcal{D}}$ -module simple.

Preuve. On considère l’application suivante :

$$B_d^+ : \begin{cases} \mathcal{F}^{\mathcal{D}} & \longrightarrow \mathcal{T}^{\mathcal{D}} \\ F & \longrightarrow \text{l'arbre obtenu en greffant les différents arbres de } F \\ & \text{sur une racine commune décorée par } d. \end{cases}$$

Par exemple, si $a, b, c, d \in \mathcal{D}$,

$$B_d^+(\bullet_a \downarrow \bullet_b) = \begin{matrix} & & c \\ & & \uparrow \\ a & & \downarrow \\ & & b \\ & & d \end{matrix}$$

1. On appelle V le sous- $L_+^{\mathcal{D}}$ -module de $T_d^{\mathcal{D}}$ engendré par \bullet_d . Soit $F = t_1 \dots t_n \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}$. Montrons que $B_d^+(F) \in V$ par récurrence sur n . C’est trivial si $n = 0$. Supposons que $n = 1$. Alors $N_{t_1}^+(\bullet_d) = B_d^+(t_1) \in V$. Supposons le résultat vrai au rang $n - 1$, alors :

$$N_n^+(B_d^+(t_1 \dots t_{n-1})) = B_d^+(F) + \text{combinaison linéaire de termes } B_d^+(s_1 \dots s_{n-1}) \in V,$$

donc $B_d^+(F) \in V$ d’après l’hypothèse de récurrence.

2. Montrons d’abord le résultat suivant :

Lemme 9. Soit $x \in T^{\mathcal{D}}$, non nul, homogène de degré $n \geq 2$. Alors il existe $y \in L^{\mathcal{D}}$, homogène de degré compris entre $-n + 1$ et -1 , tel que $y.x \neq 0$.

Preuve. On utilise les notations du Résultat préliminaire 1. Il découle immédiatement de (7) que pour tout $x \in T^{\mathcal{D}}$, homogène de degré $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\delta(x) = \sum_{\text{poids}(t) < n} t \otimes N_t^-(x). \tag{12}$$

Soit alors $x \in T^{\mathcal{D}}$, non nul, homogène de degré $n \geq 1$, tel que pour tout $y \in L^{\mathcal{D}}$, homogène de degré compris entre $-n + 1$ et -1 , on ait $y.x = 0$. D’après (12), $\delta(x) = 0$ et donc d’après le résultat préliminaire 1, $n = 1$. \square

Soit M un sous-module non nul de $T_d^{\mathcal{D}}$. D’après (3), pour tout $t \in T^{\mathcal{D}}$, $N_0.t = \text{poids}(t)t$. On en déduit de la même manière que dans la preuve du Théorème 6 que M est un sous-module gradué de $T_d^{\mathcal{D}}$. Soit $x \in M$, non nul, homogène de poids minimal n . Par minimalité de n , pour tout $y \in L^{\mathcal{D}}$ homogène de poids compris entre $-n + 1$ et -1 , $y.x = 0$. D’après le lemme précédent, $n = 1$, donc $x \in \text{Vect}(\bullet_d)$. Par suite, $\bullet_d \in M$. D’après le point 1, $M = T_d^{\mathcal{D}}$. \square

3. Dérivations et automorphismes de $L^{\mathcal{D}}$

3.1. Dérivations extérieures de $L^{\mathcal{D}}$

On note $Der(L^{\mathcal{D}})$ l’algèbre de Lie des dérivations de $L^{\mathcal{D}}$ et $Int(L^{\mathcal{D}})$ la sous-algèbre de Lie des dérivations intérieures.

Lemme 10. Soit $f \in Der(L^{\mathcal{D}})$, homogène de degré $n \in \mathbb{Z}^*$. Alors $f \in Int(L^{\mathcal{D}})$.

Preuve. Posons $a = -\frac{1}{n}f(N_0)$. Soit $x \in L^{\mathcal{D}}$, homogène de degré k . Alors $f(x)$ est homogène de degré $n + k$, par suite :

$$kf(x) = f([N_0, x]) = [f(N_0), x] + [N_0, f(x)] = -n[a, x] + (n + k)f(x).$$

Par suite, comme $n \neq 0$, pour tout $x \in L^{\mathcal{D}}$, $f(x) = [a, x]$. \square

Lemme 11. Soit $f \in \text{Der}(L^{\mathcal{D}})$, homogène de degré 0. Alors $f|_{L_0^{\mathcal{D}}}$ est nulle. Si de plus $f|_{L_1^{\mathcal{D}}}$ est nulle, alors f est nulle.

La preuve de ce lemme utilise la proposition suivante :

Proposition 12. Soit $x \in L^{\mathcal{D}}$, non nul, homogène de degré $n \geq 2$. Alors il existe $y \in L^{\mathcal{D}}$, homogène de degré compris entre $-n + 1$ et -1 , tel que $[x, y] \neq 0$.

Preuve. On utilise les notations du Résultat préliminaire 1. On considère l’isomorphisme d’espaces vectoriels suivant :

$$\Theta : \begin{cases} L_+^{\mathcal{D}} \longrightarrow T^{\mathcal{D}} \\ N_t^+ \longrightarrow t. \end{cases}$$

Il découle immédiatement de (11) que pour tout $x \in L_+^{*g}$, homogène de degré $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\delta(\Theta(x)) = \sum_{1 \leq \text{poids}(t) < n} t \otimes \Theta([N_t^-, x]). \tag{13}$$

Soit alors $x \in L^{\mathcal{D}}$, non nul, homogène de degré $n \geq 1$, tel que pour tout $y \in L^{\mathcal{D}}$, homogène de degré compris entre $-n + 1$ et -1 , on ait $[y, x] = 0$. D’après (13), $\delta(\Theta(x)) = 0$ et donc d’après le résultat préliminaire 1, $n = 1$. \square

Preuve du Lemme 11. Montrons d’abord que $f(N_0) = 0$. Soit $x \in L^{\mathcal{D}}$, homogène de degré k . Comme f est homogène de degré 0 :

$$kf(x) = f([N_0, x]) = [f(N_0), x] + [N_0, f(x)] = [f(N_0), x] + kf(x).$$

Donc $f(N_0)$ est central. Comme $L^{\mathcal{D}}$ est simple, non abélienne, son centre est nul, donc $f(N_0) = 0$.

Montrons ensuite le résultat suivant : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(f|_{L_n^{\mathcal{D}}} = 0) \implies (f|_{L_{-n}^{\mathcal{D}}} = 0).$$

Soit $x \in L_{-n}^{\mathcal{D}}$. Posons $f(x) = \sum_{\text{poids}(t)=n} a_t N_t^-$ par homogénéité. Pour tout $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$, de poids n , on a alors $f([x, N_t^+]) \subseteq f(L_0^{\mathcal{D}}) = (0)$; par suite, en utilisant (11),

$$f([x, N_t^+]) = 0 = [f(x), N_t^+] + [x, f(N_t^+)] = a_t N_0 + 0.$$

Donc $f(x) = 0$.

Montrons enfin le résultat suivant : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(f|_{L_0^{\mathcal{D}} \oplus \dots \oplus L_n^{\mathcal{D}}} = 0) \implies (f|_{L_0^{\mathcal{D}} \oplus \dots \oplus L_{n+1}^{\mathcal{D}}} = 0).$$

Soit $x \in L_{n+1}^{\mathcal{D}}$, $n \geq 1$, tel que $f(x) \neq 0$. Par la Proposition 12, il existe $y \in L_{-1}^{\mathcal{D}} \oplus \dots \oplus L_{-n}^{\mathcal{D}}$ tel que $[f(x), y] \neq 0$. Par hypothèse, $f([x, y]) = 0$; d’après le résultat précédent, $f(y) = 0$. Par suite :

$$f([x, y]) = 0 = [f(x), y] + [x, f(y)] = [f(x), y].$$

On aboutit à une contradiction, ce qui prouve le résultat annoncé. Le lemme découle alors d’une récurrence sur n . \square

Corollaire 13. *Soit $Der(L^{\mathcal{D}})_0$ la sous-algèbre de Lie de $Der(L^{\mathcal{D}})$ des dérivations homogènes de degré 0 et $Int(L^{\mathcal{D}})$ la sous-algèbre de Lie des dérivations intérieures de $L^{\mathcal{D}}$.*

1. $Der(L^{\mathcal{D}}) = Int(L^{\mathcal{D}}) + Der(L^{\mathcal{D}})_0$.
2. $\frac{Der(L^{\mathcal{D}})}{Int(L^{\mathcal{D}})} = \frac{Der(L^{\mathcal{D}})_0}{ad(L_0^{\mathcal{D}})} = \frac{Der(L^{\mathcal{D}})_0}{(ad(N_0))}$.

Preuve. Soit $f \in Der(L^{\mathcal{D}})$. On pose alors $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n$, avec f_n homogène de degré n . Il est immédiat que $f_n \in Der(L^{\mathcal{D}})$ pour tout n . D’après le Lemme 10, si $n \neq 0$, alors $f_n = ad(a_n)$, avec $a_n = -\frac{1}{n} f_n(N_0)$. Par suite, seul un nombre fini de a_n sont non nuls. On appelle I l’ensemble des n tels que $a_n \neq 0$. On a alors :

$$f = \sum_{n \in I} ad(a_n) + f_0 \in Int(L^{\mathcal{D}}) + Der(L^{\mathcal{D}})_0,$$

ce qui prouve le premier point. Le deuxième point est un corollaire immédiat. \square

Soient i, j deux éléments de \mathcal{D} . On définit alors $f_{i,j} : L^{\mathcal{D}} \rightarrow L^{\mathcal{D}}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 f_{i,j}(N_0) &= 0, \\
 f_{i,j}(N_t^+) &= \sum_{t'} N_{t'}^+ \quad \text{où } t' \text{ parcourt l'ensemble des arbres obtenus en changeant} \\
 &\quad \text{un (unique) sommet de } t \text{ décoré par } j \text{ en un sommet décoré par } i, \\
 f_{i,j}(N_t^-) &= \sum_{t'} N_{t'}^- \quad \text{où } t' \text{ parcourt l'ensemble des arbres obtenus en changeant} \\
 &\quad \text{un unique sommet de } t \text{ décoré par } i \text{ en un sommet décoré par } j.
 \end{aligned}$$

De manière immédiate, $f_{i,j} \in Der(L^{\mathcal{D}})_0$ pour tous i, j .

Exemples. $f_{i,j}(N_{\bullet k}^+) = \delta_{j,k}N_{\bullet i}^+$, $f_{i,j}(N_{\bullet k}^-) = \delta_{i,k}N_{\bullet j}^-$. Si $\mathcal{D} = \{1, 2\}$:

$$\left. \begin{aligned} f_{1,2}((\uparrow_1^+)^+) &= 0, \\ f_{1,2}((\uparrow_1^2)^+) &= (\uparrow_1^+)^+, \\ f_{1,2}((\uparrow_2^+)^+) &= (\uparrow_1^+)^+, \\ f_{1,2}((\uparrow_2^2)^+) &= (\uparrow_1^2)^+ + (\uparrow_2^+)^+, \end{aligned} \right| \begin{aligned} f_{1,2}((\uparrow_1^-)^-) &= (\uparrow_1^2)^- + (\uparrow_2^-)^-, \\ f_{1,2}((\uparrow_1^2)^-) &= (\uparrow_2^2)^-, \\ f_{1,2}((\uparrow_2^-)^-) &= (\uparrow_2^2)^-, \\ f_{1,2}((\uparrow_2^2)^-) &= 0. \end{aligned}$$

Théorème 14.

1. $(f_{i,j})_{i,j \in \mathcal{D}}$ est une base de $Der(L^{\mathcal{D}})_0$.
2. Si $D = \text{card}(\mathcal{D})$, alors $Der(L^{\mathcal{D}})_0$ est isomorphe à $\mathfrak{gl}(D)$ comme algèbre de Lie.
3. $\frac{Der(L^{\mathcal{D}})}{Ini(L^{\mathcal{D}})}$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(D)$ comme algèbre de Lie.

Preuve. 1. Soit $f \in Der(L^{\mathcal{D}})_0$. Par homogénéité, on pose, pour tout $d \in \mathcal{D}$:

$$f(N_{\bullet j}^+) = \sum_{i \in \mathcal{D}} \lambda_{i,j} N_{\bullet i}^+.$$

Considérons $g = f - \sum_{i,j \in \mathcal{D}} \lambda_{i,j} f_{i,j}$. Alors cet élément de $Der(L^{\mathcal{D}})_0$ s’annule sur $L_1^{\mathcal{D}}$, donc est nul d’après le Lemme 11. Par suite, $(f_{i,j})_{i,j \in \mathcal{D}}$ est une base de $Der(L^{\mathcal{D}})_0$.

2. Soient $i, j, k, l, n \in \mathcal{D}$.

$$[f_{i,j}, f_{k,l}](N_{\bullet n}^+) = \delta_{l,n} f_{i,j}(N_{\bullet k}^+) - \delta_{j,n} f_{k,l}(N_{\bullet i}^+) = \delta_{l,n} \delta_{j,k} N_{\bullet i}^+ - \delta_{j,n} \delta_{l,i} N_{\bullet k}^+,$$

donc $[f_{i,j}, f_{k,l}] = \delta_{j,k} f_{i,l} - \delta_{l,i} f_{k,j}$. Par suite, l’application suivante est un isomorphisme d’algèbres de Lie :

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{gl}(D) &\longrightarrow Der(L^{\mathcal{D}})_0 \\ (a_{i,j})_{i,j \in \mathcal{D}} &\longrightarrow \sum_{i,j \in \mathcal{D}} a_{i,j} f_{i,j}. \end{aligned} \right.$$

3. On constate que $ad(N_0) = \sum_{d \in \mathcal{D}} f_{d,d}$. Le résultat découle alors immédiatement du point 2 et du Corollaire 13(2). □

3.2. Automorphismes de $L^{\mathcal{D}}$

Notations. On pose $\mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_D\}$. Soient $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$, $A = (a_{i,j}) \in M_D(K)$. Soit $A.t$ l’élément de $T^{\mathcal{D}}$ obtenu en remplaçant les sommets décorés par d_i de t par des sommets décorés par $\sum_j a_{i,j} d_j$ pour tout i et en développant par linéarité en chacun des sommets. On définit de même $N_{A,t}^+$ et $N_{A,t}^-$.

Exemple. $t = \uparrow_{d_i}^{d_j}$; alors $A.t = \sum_{k,l} a_{i,k} a_{j,l} \uparrow_{d_k}^{d_l}$.

Proposition 15.

1. L'application $\Psi : L^{\mathcal{D}} \rightarrow L^{\mathcal{D}}$ définie de la manière suivante est un automorphisme involutif d'algèbre de Lie :

$$\Psi : \begin{cases} N_t^+ \longrightarrow -s_t N_t^- \\ N_t^- \longrightarrow -\frac{1}{s_t} N_t^+ \\ N_0 \longrightarrow -N_0. \end{cases}$$

2. Soit $A \in GL_D(K)$. L'application $\Phi_A : L^{\mathcal{D}} \rightarrow L^{\mathcal{D}}$ définie de la manière suivante est un automorphisme d'algèbre de Lie :

$$\Phi_A : \begin{cases} N_t^+ = N_{A,t}^+ \\ N_t^- = N_{(A^{-1})^T,t}^- \\ N_0 = N_0. \end{cases}$$

3. L'application suivante est un morphisme injectif de groupes :

$$\Phi : \begin{cases} GL_D(K) \longrightarrow Aut(L^{\mathcal{D}}) \\ A \longrightarrow \Phi_A. \end{cases}$$

Preuve. 1. Découle immédiatement de (2), (4), (8), (9), (11) et de la formule suivante (voir [8,9]) :

$$n(t_1, t_2; t_3) = \frac{s_{t_3}}{s_{t_1} s_{t_2}} n'(t_1, t_2; t_3).$$

2. Immédiat.

3. L'injectivité provient du fait que pour tout i , $\Phi_A(N_{\cdot d_i}^+) = \sum_j a_{i,j} N_{\cdot d_j}^+$. Le fait que Φ soit un morphisme de groupes est trivial. \square

Lemme 16. Soit $\phi \in Aut(L^{\mathcal{D}})$; alors $\phi(N_0) = \pm N_0$. Si, de plus, $\phi(N_0) = N_0$, alors ϕ est homogène de degré 0.

Preuve. Soit $x \in L^{\mathcal{D}}$, homogène de degré n . On a alors $[\phi(N_0), \phi(x)] = \phi([N_0, x]) = n\phi(x)$. Comme ϕ est surjectif, on en déduit que $ad(\phi(N_0))$ agit diagonalement sur $L^{\mathcal{D}}$; par suite, $\phi(N_0) = \lambda N_0$, pour un certain λ non nul. On a alors $[\phi(N_0), \phi(x)] = \lambda [N_0, \phi(x)] = n\phi(x)$, donc $\frac{n}{\lambda}$ est une valeur propre de $ad(N_0)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Les valeurs propres de $ad(N_0)$ étant les entiers, on en déduit que $\lambda = \pm 1$.

Supposons $\phi(N_0) = N_0$. Pour tout $x \in L^{\mathcal{D}}$, homogène de degré n , on a $[N_0, \phi(x)] = n\phi(x)$ et donc $\phi(x)$ est un vecteur propre de $ad(N_0)$ pour la valeur propre n . Par suite, $\phi(x)$ est homogène de degré n et donc ϕ est homogène de degré 0. \square

Lemme 17. Soit $\phi \in Aut(L^{\mathcal{D}})$, tel que $\phi|_{L_0^{\mathcal{D}} \oplus L_1^{\mathcal{D}}} = Id$. Alors $\phi = Id$.

Preuve. Alors $\phi(N_0) = N_0$, donc ϕ est homogène de degré 0 par le lemme précédent. Montrons le résultat suivant : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(\phi|_{L_n^{\mathcal{D}}} = Id) \implies (\phi|_{L_{-n}^{\mathcal{D}}} = Id).$$

Soit $x \in L_{-n}^{\mathcal{D}}$. Posons $x = \sum_{poids(t)=n} a_t N_t^-$ et $\phi(x) = \sum_{poids(t)=n} b_t N_t^-$ par homogénéité. Pour tout $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$ de poids n , on a alors :

$$\phi([x, N_t^+]) = \phi(a_t N_0) = a_t N_0 = [\phi(x), \phi(N_t^+)] = [\phi(x), N_t^+] = b_t N_0.$$

Donc $a_t = b_t$, d'où $\phi(x) = x$.

Montrons ensuite le résultat suivant : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(\phi|_{L_0^{\mathcal{D}} \oplus \dots \oplus L_n^{\mathcal{D}}} = Id) \implies (\phi|_{L_0^{\mathcal{D}} \oplus \dots \oplus L_{n+1}^{\mathcal{D}}} = Id).$$

Soit $x \in L_{n+1}^{\mathcal{D}}$, $n \geq 1$, tel que $\phi(x) \neq x$. Par la Proposition 12, il existe $y \in L_{-1}^{\mathcal{D}} \oplus \dots \oplus L_{-n}^{\mathcal{D}}$ tel que $[\phi(x), y] \neq [x, y]$. Par hypothèse, $\phi([x, y]) = [x, y]$; d'après le résultat précédent, $\phi(y) = y$. Par suite, $\phi([x, y]) = [x, y] = [\phi(x), \phi(y)] = [\phi(x), y]$: on aboutit à une contradiction, ce qui prouve le résultat annoncé. On termine par une récurrence sur n . \square

Proposition 18. Le groupe $Aut(L^{\mathcal{D}})$ est engendré par Ψ et par $Im(\Phi)$. De plus, $Im(\Phi)$ est un sous-groupe distingué de $Aut(L^{\mathcal{D}})$.

Preuve. Soit $\phi \in Aut(L^{\mathcal{D}})$. D'après le Lemme 16, $\phi(N_0) = \pm N_0$. Supposons d'abord que $\phi(N_0) = N_0$. Alors ϕ est homogène de degré 0. Par suite, on pose :

$$\phi(N_{\cdot d_i}^+) = \sum_j a_{i,j} N_{\cdot d_j}^+.$$

Comme ϕ est bijectif, nécessairement $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq D} \in GL_D(K)$. De plus, ϕ et Φ_A coïncident sur $L_0^{\mathcal{D}} \oplus L_1^{\mathcal{D}}$. En appliquant le Lemme 17 à $\phi \circ \Phi_A^{-1}$, on obtient $\phi = \Phi_A$.

Supposons ensuite que $\phi(N_0) = -N_0$. Alors $\phi \circ \Psi(N_0) = N_0$ et donc est dans $Im(\Phi)$ d'après le premier cas.

Pour montrer que $Im(\Phi)$ est un sous-groupe distingué de $Aut(L^{\mathcal{D}})$, il suffit donc de calculer $\Psi \circ \Phi_A \circ \Psi^{-1} = \Psi \circ \Phi_A \circ \Psi$ pour tout $A \in GL_D(K)$.

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi_A \circ \Psi(N_{\cdot d_i}^+) &= \Psi \circ \Phi_A(-N_{\cdot d_i}^-) \\ &= \Psi\left(-\sum_j b_{i,j} N_{\cdot d_j}^-\right) \quad \text{avec } B = (A^{-1})^T \\ &= \sum_j b_{i,j} N_{\cdot d_j}^+ \\ &= \Phi_B(N_{\cdot d_i}^+). \end{aligned}$$

D'après le Lemme 17, $\Psi \circ \Phi_A \circ \Psi^{-1} = \Phi_{(A^{-1})^T}$. \square

Soit $C_2 = \{-1, +1\}$ le groupe cyclique d'ordre 2. Le morphisme suivant est un morphisme de groupes :

$$\epsilon : \begin{cases} \text{Aut}(L^{\mathcal{D}}) & \longrightarrow C_2 \\ \phi & \longrightarrow \epsilon_\phi \end{cases} \text{ tel que } \phi(N_0) = \epsilon_\phi N_0.$$

Une section de ce morphisme est donnée par $-1 \xrightarrow{s} \Psi$. On a alors une suite exacte scindée :

$$(0) \longrightarrow GL_D(K) \xrightarrow{\Phi} \text{Aut}(L^{\mathcal{D}}) \xrightarrow{\epsilon} C_2 \longrightarrow (0).$$

Par suite :

Théorème 19. *Le groupe $\text{Aut}(L^{\mathcal{D}})$ est un produit semi-direct $GL_D(K) \rtimes C_2$, l'action du générateur de C_2 sur $GL_D(K)$ étant donnée par $A \rightarrow (A^{-1})^T$.*

4. Extensions centrales de $L^{\mathcal{D}}$

4.1. Rappels

K est muni de la structure de $L^{\mathcal{D}}$ -module trivial. L'espace des 2-cocycles $Z^2(L^{\mathcal{D}}, K)$ est l'espace des applications linéaires $f : L^{\mathcal{D}} \wedge L^{\mathcal{D}} \rightarrow K$ vérifiant, pour tous $x_1, x_2, x_3 \in L^{\mathcal{D}}$:

$$f([x_1, x_2], x_3) - f([x_1, x_3], x_2) + f([x_2, x_3], x_1) = 0. \tag{14}$$

L'ensemble des 2-cobords $B^2(L^{\mathcal{D}}, K)$ est l'ensemble des applications linéaires $f : L^{\mathcal{D}} \wedge L^{\mathcal{D}} \rightarrow K$ telles qu'il existe $g : L^{\mathcal{D}} \rightarrow K$, avec $f(x_1, x_2) = -g([x_1, x_2])$ pour tous $x_1, x_2 \in L^{\mathcal{D}}$. Enfin, le deuxième groupe de cohomologie à valeur dans K est $H^2(L^{\mathcal{D}}, K) = \frac{Z^2(L^{\mathcal{D}}, K)}{B^2(L^{\mathcal{D}}, K)}$.

On rappelle qu'une extension centrale de $L^{\mathcal{D}}$ est une algèbre de Lie L contenant un élément central v_0 non nul tel que le quotient de L par v_0 soit isomorphe à $L^{\mathcal{D}}$. Une telle algèbre de Lie peut être supposée de la forme $L_f = L^{\mathcal{D}} \oplus (v_0)$, où $f \in Z^2(L^{\mathcal{D}}, K)$, avec le crochet de Lie donné par :

$$[x + \alpha v_0, y + \beta v_0]_f = [x, y] + f(x, y)v_0.$$

De plus, si $f = g + B^2(L^{\mathcal{D}}, K)$, alors L_f et L_g sont isomorphes.

4.2. Groupe de cohomologie $H^2(L^{\mathcal{D}}, K)$

Le $L^{\mathcal{D}}$ -module K est gradué en le mettant en degré 0.

Lemme 20.

1. Soit $f \in Z^2(L^{\mathcal{D}}, K)$. Il existe $g \in B^2(L^{\mathcal{D}}, K)$, tel que $f = g$ sur $(L^{\mathcal{D}} \wedge L^{\mathcal{D}})_n$ pour tout $n \neq 0$.

2. Soit $Z^2(L^{\mathcal{D}}, K)_0$ l'ensemble des éléments de $Z^2(L^{\mathcal{D}}, K)$ homogènes de degré 0. Alors $Z^2(L^{\mathcal{D}}, K) = Z^2(L^{\mathcal{D}}, K)_0 + B^2(L^{\mathcal{D}}, K)$.

Preuve. Soient $x_1, x_2 \in L^{\mathcal{D}}$, homogènes de degrés respectifs n_1, n_2 . On a alors :

$$\begin{aligned} & f([x_1, x_2], N_0) - f([x_1, N_0], x_2) + f([x_2, N_0], x_1) \\ &= 0 = f([x_1, x_2], N_0) + n_1 f(x_1, x_2) - n_2 f(x_2, x_1) \\ &= f([x_1, x_2], N_0) + (n_1 + n_2) f(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Soit $g : L^{\mathcal{D}} \rightarrow L^{\mathcal{D}}$ définie par :

$$g = \begin{cases} 0 & \text{sur } L_0^{\mathcal{D}}, \\ \frac{1}{n} f(., N_0) & \text{sur } L_n^{\mathcal{D}}, n \neq 0. \end{cases}$$

Alors sur $(L^{\mathcal{D}} \wedge L^{\mathcal{D}})_n, n \neq 0, f(x_1, x_2) = -g([x_1, x_2])$, d'où le premier point. Le deuxième point est un corollaire immédiat. \square

On peut donc se contenter de chercher les éléments de $Z^2(L^{\mathcal{D}}, K)_0$. Ces éléments sont définis par des scalaires $\lambda_{t,t'}$, pour tout couple (t, t') d'arbres de même poids, avec $\lambda_{t,t'} = f(N_t^+, N_{t'}^-)$. Soient $t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$, avec $\text{poids}(t_1) + \text{poids}(t_2) = \text{poids}(t_3)$. En considérant $(x_1, x_2, x_3) = (N_{t_1}^+, N_{t_2}^+, N_{t_3}^-)$ puis $(x_1, x_2, x_3) = (N_{t_1}^-, N_{t_2}^-, N_{t_3}^+)$, l'Éq. (14) devient le système suivant : pour tous $t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$,

$$\begin{cases} \sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n'(t_1, t_2; t) \lambda_{t,t_3} - \sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n'(t_1, t; t_3) \lambda_{t_2,t} \\ \quad - \sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n'(t_2, t_1; t) \lambda_{t,t_3} + \sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n'(t_2, t; t_3) \lambda_{t_1,t} = 0, \\ \sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n(t_1, t_2; t) \lambda_{t_3,t} - \sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n(t_1, t; t_3) \lambda_{t,t_2} \\ \quad - \sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n(t_2, t_1; t) \lambda_{t_3,t} + \sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n(t_2, t; t_3) \lambda_{t,t_1} = 0. \end{cases}$$

Nous allons résoudre le système (plus fort) suivant : pour tous $t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$,

$$\begin{cases} \sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n'(t_1, t_2; t) \lambda_{t,t_3} = \sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n'(t_1, t; t_3) \lambda_{t_2,t}, \\ \sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n(t_1, t_2; t) \lambda_{t_3,t} = \sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n(t_1, t; t_3) \lambda_{t,t_2}. \end{cases} \tag{15}$$

Pour alléger les notations, on suppose que $\mathcal{D} = \{1, \dots, D\}$.

Proposition 21. Soient $\lambda_{i,j} \in K$ pour tous $i, j \in \mathcal{D}$. Alors le système (15) admet une unique solution telle que $\lambda_{\bullet,i,\bullet} = \lambda_{i,j}$ pour tous $i, j \in \mathcal{D}$. Cette solution est donnée par $\lambda_{B_i^+(F), B_j^+(G)} = \lambda_{i,j} \delta_{F,G}$.

Preuve. Fixons d'abord $i \in \mathcal{D}$ et montrons que si $\text{poids}(t) \geq 2$, alors $\lambda_{\bullet,i,t} = 0$. Posons $t = B_j^+(s_1 \dots s_m)$ et procédons par récurrence sur m ($m \geq 1$ car $\text{poids}(t) \geq 2$). Si $m = 1$, en prenant $t_1 = s_1, t_2 = \bullet_j, t_3 = \bullet_i$ dans la deuxième équation de (15), on obtient immédiatement $\lambda_{\bullet,i,t} = 0$. Si $m \geq 1$, en prenant $t_1 = s_1, t_2 = B_j^+(s_2 \dots s_m), t_3 = \bullet_i$ dans la deuxième équation de (15), on obtient avec l'hypothèse de récurrence $\lambda_{\bullet,i,t} + 0 = 0$.

Unicité : Fixons maintenant $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$. Posons $t = B_i^+(s_1 \dots s_m)$. Montrons que $\lambda_{t,t'}$ est entièrement déterminé par les $\lambda_{i,j}$ par récurrence sur m . Si $m = 0$, alors t est de la forme \bullet_i et le résultat découle de la remarque précédente. Supposons $m = 1$. On a alors, d’après la première équation de (15) avec $t_1 = s_1, t_2 = \bullet_i, t_3 = t'$, en utilisant la remarque précédente :

$$\lambda_{t,t'} = \sum_{k \in \mathcal{D}} n'(s_1, \bullet_k; t') \lambda_{i,k},$$

d’où le résultat. Supposons le résultat acquis au rang $m - 1$: d’après la première équation de (15) avec $t_1 = s_m, t_2 = B_i^+(s_1 \dots s_{m-1}), t_3 = t'$:

$$\lambda_{t,t'} + \text{combinaison linéaire de } \lambda_{B_i^+(s'_1 \dots s'_{m-1}), t'} = \sum_{s \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n'(s_1, s; t') \lambda_{B_i^+(s_1 \dots s_{m-1}), s},$$

ce qui permet de déduire $\lambda_{t,t'}$.

Existence : Montrons que la solution proposée dans l’énoncé de la proposition vérifie la première équation de (15) : posons $t_2 = B_i^+(F)$ et $t_3 = B_j^+(G)$.

$$\begin{aligned} \sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n'(t_1, t_2; t) \lambda_{t,t_3} &= \sum_{d \in \mathcal{D}} n'(t_1, B_i^+(F); B_d^+(G)) \lambda_{d,j} \\ &= n'(t_1, B_i^+(F); B_i^+(G)) \lambda_{i,j} + 0, \\ \sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}} n'(t_1, t; t_3) \lambda_{t_2,t} &= \sum_{d \in \mathcal{D}} n'(t_1, B_d^+(F); B_j^+(G)) \lambda_{i,d} \\ &= n'(t_1, B_j^+(F); B_j^+(G)) \lambda_{i,j} + 0. \end{aligned}$$

Le fait que la première équation de (15) est vérifiée est alors trivial. On vérifie de même la deuxième équation. \square

De manière évidente, $Z^2(L^{\mathcal{D}}, K)_0 \cap B^2(L^{\mathcal{D}}, K) = Vect(-g_0 \circ [,],)$ avec $g_0 : L^{\mathcal{D}} \rightarrow K$, homogène de degré 0, définie par $g_0(N_0) = -1$. Si $t, t' \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}$ de même poids, $-g_0([N_t^+, N_{t'}^-]) = \delta_{t,t'}$. Par suite, on a le résultat suivant :

Théorème 22. *Les applications suivantes sont des injections :*

$$\begin{aligned} \iota : \begin{cases} M_D(K) \longrightarrow Z^2(L^{\mathcal{D}}, K) \\ (\lambda_{i,j}) \longrightarrow \text{l'élément } f_\lambda \text{ de } Z^2(L^{\mathcal{D}}, K)_0 \text{ associé à} \\ \hspace{10em} \text{l'unique solution de (15) telle que } \lambda_{\bullet_i, \bullet_j} = \lambda_{i,j}, \end{cases} \\ \bar{\iota} : \begin{cases} \frac{M_D(K)}{(I_D)} \longrightarrow \overline{H^2(L^{\mathcal{D}}, K)} \\ \bar{\lambda} \longrightarrow \overline{\iota(\lambda)}, \end{cases} \end{aligned}$$

où I_D est la matrice identité de $M_D(K)$.

Par la suite, l'extension centrale associée à l'élément de $Z^2(L^{\mathcal{D}}, K)_0$ associé à l'unique solution de (15) telle que $\lambda_{\bullet, i, \bullet, j} = \lambda_{i, j}$ sera notée $L^{\mathcal{D}}_{\lambda}$. Son crochet de Lie $[\cdot, \cdot]_{\lambda}$ vérifie, pour $F, G \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}$, de même poids,

$$[N_{B_i^+(F)}^+, N_{B_j^+(G)}^-]_{\lambda} = \delta_{F,G}(-\delta_{i,j}N_0 + \lambda_{i,j}v_0).$$

Dans tous les autres cas, il coïncide avec le crochet de $L^{\mathcal{D}}$.

4.3. Classification des $L^{\mathcal{D}}_{\lambda}$ à isomorphisme près

Lemme 23. Soient $f, f' \in Z^2(L^{\mathcal{D}}, K)$ et $L^{\mathcal{D}}_f, L^{\mathcal{D}}_{f'}$ les extensions centrales de $L^{\mathcal{D}}$ associées. Alors $L^{\mathcal{D}}_f$ et $L^{\mathcal{D}}_{f'}$ sont isomorphes si, et seulement si, il existe $\phi \in \text{Aut}(L^{\mathcal{D}})$, $\alpha \in K - \{0\}$, $g : L^{\mathcal{D}} \rightarrow K$, tels que pour tous $x_1, x_2 \in L^{\mathcal{D}}$, $g([x_1, x_2]) + \alpha f(x_1, x_2) = f'(\phi(x_1), \phi(x_2))$.

Preuve. (\Leftarrow) On vérifie qu'alors l'application suivante est un isomorphisme d'algèbre de Lie :

$$\begin{cases} L^{\mathcal{D}}_f \longrightarrow L^{\mathcal{D}}_{f'} \\ v_0 \longrightarrow \alpha v_0 \\ x \in L^{\mathcal{D}} \longrightarrow \phi(x) + g(x)v_0. \end{cases}$$

(\Rightarrow) Soit $\Phi : L^{\mathcal{D}}_f \rightarrow L^{\mathcal{D}}_{f'}$ un isomorphisme d'algèbres de Lie. Comme le centre de $L^{\mathcal{D}}$ est nul (car $L^{\mathcal{D}}$ est simple), le centre de $L^{\mathcal{D}}_f$ et de $L^{\mathcal{D}}_{f'}$ est réduit à $\text{Vect}(v_0)$. Par suite, il existe $\alpha \in K$, non nul, tel que $\Phi(v_0) = \alpha v_0$. De plus, il existe alors un unique automorphisme d'algèbre de Lie $\phi : L^{\mathcal{D}} \rightarrow L^{\mathcal{D}}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} L^{\mathcal{D}}_f & \xrightarrow{\Phi} & L^{\mathcal{D}}_{f'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ L^{\mathcal{D}} & \xrightarrow{\phi} & L^{\mathcal{D}}. \end{array}$$

(Les flèches verticales étant les surjections canoniques.) Il existe alors $g : L^{\mathcal{D}} \rightarrow K$ tel que pour tout $x \in L^{\mathcal{D}}$, $\Phi(x) = \phi(x) + g(x)v_0$. Soient alors $x_1, x_2 \in L^{\mathcal{D}}$:

$$\begin{aligned} \Phi([x_1, x_2]_f) &= \Phi([x_1, x_2] + f(x_1, x_2)v_0) \\ &= \phi([x_1, x_2]) + g([x_1, x_2])v_0 + \alpha f(x_1, x_2)v_0 \\ &= [\phi(x_1), \phi(x_2)] + g([x_1, x_2])v_0 + \alpha f(x_1, x_2)v_0 \\ &= [\Phi(x_1), \Phi(x_2)]_{f'} \\ &= [\phi(x_1) + g(x_1)v_0, \phi(x_2) + g(x_2)v_0]_{f'} \\ &= [\phi(x_1), \phi(x_2)] + f'(\phi(x_1), \phi(x_2))v_0. \end{aligned}$$

En identifiant, on obtient immédiatement le résultat annoncé. \square

Théorème 24. *Pour tous $\lambda, \lambda' \in M_D(K)$, L_λ^D et $L_{\lambda'}^D$ sont isomorphes si, et seulement si, il existe $A \in GL_D(K)$, $\alpha \in K - \{0\}$ et $\beta \in K$, tels que $\lambda = \alpha A \lambda' A^{-1} + \beta I_D$.*

Preuve. On a vu dans la partie précédente que tout élément de $Aut(L^D)$ est de la forme Φ_A ou $\Phi_A \circ \Psi$. Un calcul direct élémentaire montre que $f_\lambda(\Phi_A(\cdot), \Phi_A(\cdot)) = f_{A\lambda A^{-1}}$ et $f_\lambda(\Psi(\cdot), \Psi(\cdot)) = f_{-\lambda}$. Par suite, d’après le lemme précédent :

$$\begin{aligned}
 L_\lambda^D \approx L_{\lambda'}^D &\iff \exists A \in GL_D(K), \epsilon \in \{-1, 1\}, \alpha \neq 0, g \in (L^D)^*, \text{ homogène de degré } 0, \\
 &\text{tels que pour tous } x_1, x_2 \in L^D, \\
 &g([x_1, x_2]) + \alpha f_\lambda(x_1, x_2) = f_{\epsilon A \lambda' A^{-1}}(x_1, x_2) \\
 &\iff \exists A \in GL_D(K), \alpha \neq 0, \gamma \in K, \text{ tels que } \gamma I_D + \alpha \lambda = \pm A \lambda' A^{-1},
 \end{aligned}$$

où $\gamma = g(N_0)$. On en déduit immédiatement le résultat annoncé. \square

Exemples.

1. Si $D = 1$, $L_\lambda^D \approx L_{[0]}^D$ pour tout λ et donc est une extension centrale triviale de L^D .
2. Si $D = 2$ et $K = \mathbb{C}$:

$$L_\lambda^D \approx L_{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^D \iff \lambda = \beta I_D \text{ pour un certain } \beta \in \mathbb{C};$$

$$L_\lambda^D \approx L_{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^D \iff \lambda \text{ a deux valeurs propres distinctes ;}$$

$$L_\lambda^D \approx L_{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^D \iff \lambda \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

On a donc construit trois extensions centrales deux à deux non isomorphes de L^D , les deux dernières étant non triviales.

3. Si $D = 3$ et $K = \mathbb{C}$: on note $P_\lambda(X)$ le polynôme minimal de $\lambda \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

$$L_\lambda^D \approx L_{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^D \iff P_\lambda(X) \text{ est de la forme } X - a;$$

$$L_\lambda^D \approx L_{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^D \iff P_\lambda(X) \text{ est de la forme } (X - a)^2;$$

$$L_\lambda^D \approx L_{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^D \iff P_\lambda(X) \text{ est de la forme } (X - a)^3;$$

$$L_\lambda^D \approx L_{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^D \iff P_\lambda(X) \text{ est de la forme } (X - a)(X - b), a \neq b;$$

$$L_\lambda^{\mathcal{D}} \approx L^{\mathcal{D}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \mu \neq 0 \iff P_\lambda(X) \text{ est de la forme } (X - a)(X - b)^2, a \neq b;$$

$$L_\lambda^{\mathcal{D}} \approx L^{\mathcal{D}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \mu \neq 0, 1 \iff P_\lambda(X) \text{ a trois racines distinctes.}$$

On a donc construit 4 extensions centrales (dont l’extension triviale) et deux familles infinies d’extensions centrales de $L^{\mathcal{D}}$.

5. Modules de plus bas poids sur $L^{\mathcal{D}}$

5.1. Définition

Définition 25. Soit V un $L^{\mathcal{D}}$ -module. On dira que V est un module de plus bas poids s’il existe un sous-espace W de V tel que :

1. W engendre V comme $L^{\mathcal{D}}$ -module ;
2. N_0 agit diagonalement sur W ;
3. $L_-^{\mathcal{D}}$ agit trivialement sur W .

Si de plus W est de dimension 1, il existe un unique λ tel que $N_0 = \lambda Id$ sur W ; λ est appelé poids de V .

Proposition 26. Soit V un $L^{\mathcal{D}}$ -module de plus bas poids. Pour tout $\lambda \in K$, on pose :

$$\begin{aligned} \tilde{V} &= \{x \in V / L_-^{\mathcal{D}}.x = (0)\}, \\ V^\lambda &= \{x \in V / N_0.x = \lambda x\}, \\ \tilde{V}^\lambda &= \tilde{V} \cap V^\lambda. \end{aligned}$$

On a alors :

1. \tilde{V} génère V comme $L_+^{\mathcal{D}}$ -module (et donc comme $L^{\mathcal{D}}$ -module).
2. $V = \bigoplus_{\lambda \in K} V^\lambda, \tilde{V} = \bigoplus_{\lambda \in K} \tilde{V}^\lambda$.

Preuve. Soit $(w_i)_{i \in I}$ une base de W (Définition 25) sur laquelle N_0 agit diagonalement : $N_0.w_i = \lambda_i w_i$ pour tout i . D’après le théorème de Poincaré–Birkhof–Witt, V est linéairement engendré par les éléments de la forme :

$$N_{t_1}^+ \dots N_{t_k}^+ N_{t_1}^- \dots N_{t_l}^- N_0^m .w_i = \lambda_i^m N_{t_1}^+ \dots N_{t_k}^+ N_{t_1}^- \dots N_{t_l}^- .w_i = \lambda_i^m \delta_{l,0} N_{t_1}^+ \dots N_{t_k}^+ .w_i,$$

et donc V est linéairement engendré par les éléments de la forme $N_{t_1}^+ \dots N_{t_k}^+ .w_i$. Comme $W \subseteq \tilde{V}$, on a le premier point. De plus,

$$\begin{aligned}
 N_0 \cdot N_{t_1}^+ \dots N_{t_k}^+ \cdot w_i &= N_{t_1}^+ N_0 N_{t_2}^+ \dots N_{t_k}^- \cdot w_i + \text{poids}(t_1) N_{t_1}^+ \dots N_{t_k}^+ \cdot w_i \\
 &\vdots \\
 &= N_{t_1}^+ \dots N_{t_k}^+ N_0 \cdot w_i + (\text{poids}(t_1) + \dots + \text{poids}(t_k)) N_{t_1}^+ \dots N_{t_k}^+ \cdot w_i \\
 &= (\lambda_i + \text{poids}(t_1) + \dots + \text{poids}(t_k)) N_{t_1}^+ \dots N_{t_k}^+ \cdot w_i,
 \end{aligned}$$

donc N_0 agit diagonalement sur V , ce qui implique le point 2. \square

5.2. Modules de Verma et modules de poids simples

Notations.

1. On note $\mathcal{T}_\star^\mathcal{D}$ l'ensemble des arbres enracinés dont les sommets différents de la racine sont décorés par des éléments de \mathcal{D} (la racine n'étant pas décorée).
2. On considère les applications suivantes :

$$\begin{aligned}
 B^+ : \begin{cases} \mathcal{F}^\mathcal{D} & \longrightarrow \mathcal{T}_\star^\mathcal{D} \\ F & \longrightarrow \text{l'arbre obtenu en greffant les différents arbres de } F \\ & \text{sur une racine commune (non décorée),} \end{cases} \\
 B^- : \begin{cases} \mathcal{T}_\star^\mathcal{D} & \longrightarrow \mathcal{F}^\mathcal{D} \\ t & \longrightarrow \text{la forêt obtenue en ôtant la racine de } t. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Par exemple, si $a, b, c \in \mathcal{D}$,

$$B^+(\bullet_a \uparrow_b^c) = \mathbf{a} \mathbf{V} \uparrow_b^c \quad \text{et} \quad B^-\left(\mathbf{a} \mathbf{V} \uparrow_b^c\right) = \bullet_a \uparrow_b^c.$$

3. Pour toute forêt $t_1 \dots t_n \in \mathcal{F}^\mathcal{D}$, on note $lg[t_1 \dots t_n] = n$ (les t_i étant dans $\mathcal{T}^\mathcal{D}$).

Définition 27. Soit $\lambda \in K$; V_λ est l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{T}_\star^\mathcal{D}$, muni de la structure de $L^\mathcal{D}$ -module suivante : pour tous $t_1 \in \mathcal{T}^\mathcal{D}$, $t_2 \in \mathcal{T}_\star^\mathcal{D}$,

$$\begin{aligned}
 N_{t_1}^+ \cdot t_2 &= \sum_{s \in \text{som}(t_2)} t_1 \circ_s t_2 = \sum_{t \in \mathcal{T}_\star^\mathcal{D}} n'(t_1, t_2; t) t, \\
 N_0 \cdot t_2 &= (\lambda - 1 + \text{poids}(t)) t, \\
 N_{t_1}^- \cdot t_2 &= \sum_{c \text{ coupe élémentaire de } t_2} \delta_{t_1, P^c(t_2)} \lambda^{lg[B^-(t_2)] - lg[B^-(R^c(t_2))]} R^c(t_2) \\
 &= \sum_{t \in \mathcal{T}_\star^\mathcal{D}} n(t_1, t; t_2) \lambda^{lg[B^-(t_2)] - lg[B^-(t)]} t.
 \end{aligned}$$

Remarquons que pour tout $t_2 \in \mathcal{T}_*^{\mathcal{D}}$ et toute coupe élémentaire c de t_2 , on a :

$$\lg[B^-(t_2)] - \lg[B^-(R^c(t_2))] = \begin{cases} 1 & \text{si } c \text{ coupe une arête issue de la racine de } t_2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc V_λ est bien défini pour $\lambda = 0$ (avec la convention $0^0 = 1$). De plus, V_λ est gradué par le poids ; on a immédiatement, avec les notations de la Proposition 26 :

$$(V_\lambda)_n = \{x \in V_\lambda / N_{0..}x = (\lambda - 1 + n)x\} = (V_\lambda)^{\lambda-1+n}.$$

La proposition suivante est immédiate :

Proposition 28. Soit $d \in \mathcal{D}$. On considère les applications suivantes :

$$\Psi_d : \begin{cases} V_\lambda \longrightarrow T_d^{\mathcal{D}} \\ B^+(F) \longrightarrow B_d^+(F), \end{cases} \quad \Bigg| \quad \Phi_d : \begin{cases} V_\lambda \longrightarrow T_d^{\mathcal{D}} \\ B^+(F) \longrightarrow \lambda^{\lg(F)} B_d^+(F). \end{cases}$$

Alors Ψ_d est un morphisme de $L_+^{\mathcal{D}}$ -modules et Φ_d est un morphisme de $L_-^{\mathcal{D}}$ -modules.

Corollaire 29.

1. \bullet génère V_λ comme $L_+^{\mathcal{D}}$ -module (et donc comme $L^{\mathcal{D}}$ -module).
2. Si $\lambda \neq 0$, V_λ est un $L^{\mathcal{D}}$ -module simple.

Preuve. 1. Découle immédiatement de l'existence de l'isomorphisme Ψ_d .

2. Si $\lambda \neq 0$, Φ_d est un isomorphisme ; on déduit alors du Lemme 9 le résultat suivant :

Lemme 30. Supposons $\lambda \neq 0$ et soit $x \in V_\lambda$, non nul, homogène de degré $n \geq 2$. Alors il existe $y \in L_-^{\mathcal{D}}$, homogène de degré compris entre $-n + 1$ et -1 , tel que $y.x \neq 0$.

La preuve du second point du Corollaire 29 est alors analogue à la preuve du second point du Théorème 8. \square

Le théorème suivant montre que les V_λ jouent le rôle des modules de Verma pour $L^{\mathcal{D}}$:

Théorème 31.

1. V_λ est un module de plus bas poids λ .
2. Soit V un module de plus bas poids et soit $x \in \tilde{V}^\lambda$. Alors il existe un unique morphisme de $L^{\mathcal{D}}$ -modules $V_\lambda \rightarrow V$, envoyant \bullet sur x .

Preuve. 1. Découle immédiatement de la définition d'un module de plus bas poids, avec $W = \text{Vect}(\bullet)$.

2. Soit W le $L^{\mathcal{D}}$ -module engendré par \bullet et les relations $L^{\mathcal{D}}\bullet = (0)$, $N_0\bullet = \lambda\bullet$. On gradue W en mettant \bullet en degré 1. Par le théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt, l’application suivante est une bijection homogène de degré 0 :

$$\begin{cases} \mathcal{U}(L^{\mathcal{D}}) & \longrightarrow W \\ x & \longrightarrow x\bullet. \end{cases}$$

De plus, d’après le point 1 du corollaire précédent, il existe un morphisme surjectif de $L^{\mathcal{D}}$ -modules $W \rightarrow V_\lambda$, envoyant \bullet sur \bullet . Ce morphisme est homogène de degré 0. En comparant les dimensions des composantes homogènes de W et V_λ , c’est un isomorphisme, ce qui implique le point 2. \square

Considérons maintenant le cas $\lambda = 0$:

Proposition 32.

1. V_0 n’est pas simple.
2. Tout quotient de V_0 est indécomposable.
3. V_0 admet un unique quotient simple : le $L^{\mathcal{D}}$ -module trivial de dimension 1.

Preuve. 1. Soit $i \in \mathcal{D}$. Alors pour tout $x \in L^{\mathcal{D}}_-, x \cdot \mathbf{1}^i = 0$ dans V_0 . Par suite, le sous-module de V_0 engendré par $\mathbf{1}^i$ est inclus dans le sous-espace de V_0 engendré par les éléments homogènes de degré supérieur ou égal à 2, donc est un sous-module propre.

2. Soit V un sous-module de V_0 distinct de V_0 et supposons que $\frac{V_0}{V} = V' \oplus V''$. Comme les différents espaces propres de l’action de N_0 sur V_0 sont les composantes homogènes de V_0 , tout sous-module de V_0 est gradué. Par suite, V, V' et V'' sont des sous-modules gradués. Comme $\dim(V_0)_1 = 1$, V'_1 ou V''_1 contient $\bullet + V$. Par suite, comme \bullet engendre V_0 , $V' = \frac{V_0}{V}$ ou $V'' = \frac{V_0}{V}$.

3. D’après le Théorème 31(2), il existe un morphisme surjectif de $L^{\mathcal{D}}$ -modules $V_0 \rightarrow K$, donc K est un quotient simple de V_0 . De plus, le noyau de cet isomorphisme est $(V_0)_{\geq 2} = (V_0)_2 \oplus (V_0)_3 \oplus \dots$. Soit V un sous-module propre de V_0 . Il est alors gradué. Par suite, comme il est propre, $\bullet \notin V$, donc $V \subseteq (V_0)_{\geq 2}$. Donc $(V_0)_{\geq 2}$ est l’unique idéal maximal de V_0 et par suite K est l’unique quotient simple de V_0 . \square

Corollaire 33. Les modules de poids simples sont les V_λ , $\lambda \neq 0$ et le module trivial de dimension 1. Ces modules sont deux-à-deux non isomorphes.

Preuve. Soit V un module de poids simple. Soit λ une valeur propre de N_0 restreint à \tilde{V} . D’après le Théorème 31(2), il existe un morphisme de $L^{\mathcal{D}}$ -modules non nul de V_λ dans V . Comme ce morphisme est non nul et que V est simple, il est surjectif. Si $\lambda \neq 0$, comme V_λ est simple il est injectif. Si $\lambda = 0$, d’après la Proposition 32, $V = K$.

Supposons $V_\lambda \approx V_\mu$. Alors on a un isomorphisme de $L^{\mathcal{D}}_0$ -modules de \tilde{V}_λ dans \tilde{V}_μ , donc N_0 agit avec la même valeur propre sur \tilde{V}_λ et sur \tilde{V}_μ . Par suite, $\lambda = \mu$. \square

5.3. *Caractérisation des modules de plus bas poids*

Proposition 34. Soit V un $L^{\mathcal{D}}$ -module. Alors V est un module de plus bas poids si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. N_0 agit diagonalement sur V .
2. Pour tout $x \in V$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $\mathcal{U}(L_{-}^{\mathcal{D}})_n \cdot x = (0)$ si $n \geq N$.

Preuve. (\Rightarrow) On a déjà vu que N_0 agissait diagonalement sur V . La condition 2 est trivialement vérifiée si $V = V_{\lambda}$. De plus, si $(\lambda_i)_{i \in I}$ sont les valeurs propres de N_0 restreint à \tilde{V} , d’après le Théorème 31(2), on a alors un morphisme surjectif $\bigoplus_{i \in I} V_{\lambda_i} \rightarrow V$. Par suite, V vérifie 2.

(\Leftarrow) $L_{-}^{\mathcal{D}}$ est trivialement anti-isomorphe à l’algèbre de Lie L^1 de [3]. Par suite, en utilisant la base $(f_F)_{F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}}$ de $\mathcal{U}(L^1)$ introduite dans [7,8], pour toute $F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}$, il existe un élément $N_F^{-} \in \mathcal{U}(L_{-}^{\mathcal{D}}) \subset \mathcal{U}(L^{\mathcal{D}})$ agissant sur $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}$ par coupe des copies de F . De même, il existe $N_F^{+} \in \mathcal{U}(L_{+}^{\mathcal{D}}) \subset \mathcal{U}(L^{\mathcal{D}})$ agissant sur $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}$ par greffe de F . Un calcul direct montre que pour toutes forêts $F, G, H \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}$, si $F = t_1 \dots t_m$, alors :

$$\begin{aligned}
 [N_F^{-}, N_G^{+}] \cdot H &= 0 \quad \text{si } \text{poids}(F) = \text{poids}(G) \text{ et } F \neq G, \\
 [N_F^{-}, N_F^{+}] \cdot H &= \binom{m + \text{poids}(H) - 1}{m - 1} H.
 \end{aligned}$$

Par suite, il existe $P_F(X) \in K[X]$, tel que, dans $\mathcal{U}(L^{\mathcal{D}})$:

$$\begin{aligned}
 [N_F^{-}, N_G^{+}] &= 0 \quad \text{si } \text{poids}(F) = \text{poids}(G) \text{ et } F \neq G, \\
 [N_F^{-}, N_F^{+}] &= P_F(N_0).
 \end{aligned}$$

Plus précisément, $P_F(X) = \frac{1}{(m-1)!} (X + 1) \dots (X + m - 1)$ si $F = t_1 \dots t_m$.

Soit W le sous- $L^{\mathcal{D}}$ -module de V engendré par \tilde{V} . Soit $x \in V$, montrons que $x \in W$. Comme N_0 agit diagonalement sur V , on peut supposer que $N_0 \cdot x = \lambda x$. Par suite, pour toute forêt $F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}$, $[N_F^{-}, N_F^{+}] \cdot x = P_F(\lambda) x$.

On indexe l’ensemble des forêts $\mathcal{F}^{\mathcal{D}}$ par les éléments de \mathbb{N} , de sorte que :

1. si $i \geq j$, alors $\text{poids}(F_i) \geq \text{poids}(F_j)$,
2. si $\text{poids}(F_i) > \text{poids}(F_j)$, alors $i > j$.

En particulier, $F_0 = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$ le plus grand entier tel que $N_{F_n}^{-} \cdot x = (0)$; par la condition 2 du théorème, n existe. Procédons par récurrence sur n . Si $n = 0$, alors $L_{-}^{\mathcal{D}}$ agit trivialement sur x , donc $x \in \tilde{V} \subseteq W$. Supposons le résultat acquis pour tout $k < n$. Posons $y = N_{F_n}^{-} \cdot x$. Par maximalité de n et la condition 2 sur l’indexation de $\mathcal{F}^{\mathcal{D}}$, $y \in \tilde{V}$. De plus :

$$\begin{aligned}
 N_0 \cdot y &= N_0 N_{F_n}^{-} \cdot x = [N_0, N_{F_n}^{-}] \cdot x + N_{F_n}^{-} N_0 \cdot x \\
 &= -\text{poids}(F_n) N_{F_n}^{-} \cdot x + \lambda N_{F_n}^{-} \cdot x = (\lambda - \text{poids}(F_n)) y.
 \end{aligned}$$

On a donc un morphisme de $L^{\mathcal{D}}$ -module $\phi : V_{\lambda - \text{poids}(F_n)} \rightarrow V$, envoyant \bullet sur y . Posons $x' = N_{F_n}^{-} N_{F_n}^{+} \cdot x$. On a alors :

$$N_{F_n}^{+} \cdot y = N_{F_n}^{+} N_{F_n}^{-} \cdot x = [N_{F_n}^{+}, N_{F_n}^{-}] \cdot x + x' = -P_{F_n}(\lambda) x + x'.$$

Soit $m > n$. Par maximalité de n , on a $N_{F_m}^- N_{F_n}^+ \cdot y = N_{F_m}^- \cdot x'$. Deux cas se présentent :

1. $\text{poids}(F_m) > \text{poids}(F_n)$: par l'application ϕ , $N_{F_m}^- N_{F_n}^+ \cdot y = 0$ et donc $N_{F_m}^- \cdot x' = 0$.
2. $\text{poids}(F_m) = \text{poids}(F_n)$, $F_m \neq F_n$: par l'application ϕ , $N_{F_m}^- N_{F_n}^+ \cdot y = 0$ et donc $N_{F_m}^- \cdot x' = 0$.

Toujours par l'application ϕ , on a :

$$N_{F_n}^- N_{F_n}^+ \cdot y = -P_{F_n}(\lambda) N_{F_n}^- x + N_{F_n}^- x' = y = -P_{F_n}(\lambda) y + N_{F_n}^- x'.$$

Il en ressort que si $m \geq n$, alors $N_{F_m}^- \cdot (x' - (1 + P_{F_n}(\lambda))x) = 0$. Par l'hypothèse de récurrence, $x' - (1 + P_{F_n}(\lambda))x \in W$. De plus,

$$x' - (1 + P_{F_n}(\lambda))x = N_{F_n}^+ \cdot y + P_{F_n}(\lambda)x - (1 + P_{F_n}(\lambda))x = N_{F_n}^+ \cdot y - x.$$

Comme $y \in W$, on en déduit que $x \in W$.

Par suite, \tilde{V} engendre V . Comme N_0 agit diagonalement sur V , il agit diagonalement sur \tilde{V} et donc V est un module de plus bas poids. \square

Corollaire 35. *Soit V un module de plus bas poids. Alors tout sous-module et tout quotient de V est un module de plus bas poids. Si V_1 et V_2 sont des modules de plus bas poids, alors $V_1 \otimes V_2$ sont des modules de plus bas poids. Enfin, \mathcal{H}^D est un module de plus bas poids.*

Preuve. On vérifie facilement les conditions 1 et 2 du théorème précédent dans tous les cas cités. \square

5.4. Caractère d'un module de plus bas poids

On considère l'algèbre $\mathbb{Z}[K]$ sur \mathbb{Z} du groupe (additif) K ; un élément $\lambda \in K$ est noté x^λ dans $\mathbb{Z}[K]$.

Soit V un module de plus bas poids. On suppose que $\dim(V^\lambda)$ est fini pour tout λ . On pose alors :

$$\chi_V(x) = \sum_{\lambda \in K} \dim(V^\lambda) x^\lambda \in \mathbb{Z}[[K]].$$

La proposition suivante est immédiate :

Proposition 36.

1. Soient V_1, V_2 des modules de plus bas poids, alors :
 - (a) $\chi_{V_1 \oplus V_2} = \chi_{V_1} + \chi_{V_2}$;
 - (b) $\chi_{V_1 \otimes V_2} = \chi_{V_1} \chi_{V_2}$.
2. On note r_n le nombre de forêts enracinées décorées par \mathcal{D} de poids n et $R(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} r_n x^n$. On a alors :
 - (a) $\chi_{V_\lambda}(x) = x^\lambda R(x)$;
 - (b) $\chi_{\mathcal{H}^D}(x) = R(x)$.

Soit V un module de plus bas poids, tel que $\tilde{V}^0 = (0)$. Soient $(\lambda_i)_{i \in I}$ les valeurs propres de N_0 restreint à \tilde{V} : les λ_i sont tous nuls. Par suite, d’après le Théorème 31(2), il existe un morphisme surjectif de $L^{\mathcal{D}}$ -modules :

$$\bigoplus_{i \in I} V_{\lambda_i} \longrightarrow V.$$

Par la simplicité des V_{λ_i} , c’est un isomorphisme. En regroupant les V_{λ_i} et en comparant les caractères des deux membres, on obtient la proposition suivante :

Proposition 37. *Soit V un module de plus bas poids tel que $\tilde{V}^0 = (0)$. Alors il existe des entiers n_η tels que $V = \bigoplus_{\eta \in K^*} V_\eta^{\oplus n_\eta}$. De plus, $X_V = (\sum_{\eta \in K^*} n_\eta x^\eta) R(x)$.*

Corollaire 38.

1. Soient $\lambda, \mu \in K$, tels que $\lambda + \mu$ n’est pas un entier négatif ou nul. Alors :

$$V_\lambda \otimes V_\mu \approx \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V_{\lambda + \mu + n}^{\oplus r_n}.$$

2. On pose $1 - \frac{1}{R(x)} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} p_n x^n$. On a alors $\mathcal{H}^{\mathcal{D}} \approx K \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^*} V_n^{\oplus p_n}$.

Preuve. 1. Les valeurs propres de N_0 sur $V_\lambda \otimes V_\mu$ sont les $\lambda + \mu + n, n \in \mathbb{N}$. Par suite, $(V_\lambda \otimes V_\mu)^0 = (0)$ et donc $(\widetilde{V_\lambda \otimes V_\mu})^0 = (0)$: on peut donc appliquer la proposition précédente. On a :

$$\chi_{V_\lambda \otimes V_\mu}(x) = \chi_{V_\lambda}(x) \chi_{V_\mu}(x) = x^{\lambda + \mu} R(x)^2.$$

Donc $\sum n_\eta x^\eta = x^{\lambda + \mu} R(x)$.

2. On a $\mathcal{H}^{\mathcal{D}} = (1) \oplus M$, où M est l’idéal d’augmentation de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}$. De plus, $\tilde{M}^0 \subseteq M^0 = (0)$: on peut appliquer la proposition précédente à M . On a $X_M = R(x) - 1$, donc :

$$\sum_{\eta \in K^*} n_\eta x^\eta = \frac{R(x) - 1}{R(x)} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} p_n x^n,$$

d’où le résultat annoncé. \square

Remarque. Lorsque \mathcal{D} est réduit à un seul élément, les nombres p_n apparaissent également dans [1,6] : p_n est la dimension de l’espace des éléments primitifs de \mathcal{H}_R homogènes de degré n .

n	p_n	n	p_n	n	p_n
1	1	11	631	21	12 055 393
2	1	12	1 646	22	33 206 321
3	1	13	4 285	23	91 752 211
4	2	14	11 338	24	254 261 363
5	3	15	30 135	25	706 465 999
6	8	16	80 791	26	1 967 743 066
7	16	17	217 673	27	5 493 195 530
8	41	18	590 010	28	15 367 129 299
9	98	19	1 606 188	29	43 073 007 846
10	250	20	4 392 219		

Références

- [1] D.J. Broadhurst, D. Kreimer, Towards cohomology of renormalization: Bigrading the combinatorial Hopf algebra of rooted trees, *Comm. Math. Phys.* 216 (1) (2000) 217–236, hep-th/0001202.
- [2] F. Chapoton, M. Livernet, Pre-Lie algebras and the rooted trees operad, *Int. Math. Res. Not.* 8 (2001) 395–408.
- [3] A. Connes, D. Kreimer, Hopf algebras, Renormalization and noncommutative geometry, *Comm. Math. Phys.* 199 (1) (1998) 203–242, hep-th/9808042.
- [4] A. Connes, D. Kreimer, Renormalization in quantum field theory and the Riemann–Hilbert problem I. The Hopf algebra of graphs and the main theorem, *Comm. Math. Phys.* 210 (1) (2000) 249–273, hep-th/9912092.
- [5] A. Connes, D. Kreimer, Insertion and elimination: The doubly infinite Lie algebra of Feynman graphs, *Ann. H. Poincaré* 3 (3) (2002) 411–433, hep-th/0201157.
- [6] L. Foissy, Finite-dimensional comodules over the Hopf algebra of rooted trees, *J. Algebra* 255 (1) (2002) 85–120.
- [7] L. Foissy, Les algèbres de Hopf des arbres enracinés, I, *Bull. Sci. Math.* 126 (2002) 193–239.
- [8] L. Foissy, Les algèbres de Hopf des arbres enracinés, II, *Bull. Sci. Math.* 126 (2002) 249–288.
- [9] M.E. Hoffman, Combinatorics of rooted trees and Hopf algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 355 (9) (2003) 3795–3811, math.CO/0201253.
- [10] A. Joseph, *Quantum Groups and Their Primitive Ideals*, Springer, 1995.
- [11] D. Kreimer, On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories, *Adv. Theor. Math. Phys.* 2 (2) (1998) 303–334, q-alg/9707029.
- [12] D. Kreimer, On overlapping divergences, *Comm. Math. Phys.* 204 (3) (1999) 669–689, hep-th/9810022.
- [13] D. Kreimer, Combinatorics of (perturbative) Quantum Field Theory, *Phys. Rep.* 4–6 (2002) 387–424, hep-th/0010059.