HISTORIA MATHEMATICA **16** (1989), 343–352

Ibn al-Haytham et les nombres parfaits

Roshdi Rashed

REHSEIS–CNRS, 49, Rue Mirabeau, F-75016 Paris, France

Der Aufsatz ist den Untersuchungen der arabischen Mathematiker zur Zahlentheorie gewidmet. Er zeigt, daß Ibn al-Haytham die Umkehrung des Satzes IX, 36 über vollkommene Zahlen der Elemente Euklids ausgesprochen und zu beweisen versucht hat. Der Aufsatz erörtert die Berechnung einiger dieser Zahlen durch späte Mathematiker und beschreibt einige Ergebnisse von al-Anṭākī († 987). Bestimmte Fragmente von dessen arithmetischen Arbeiten wurden vor kurzem identifiziert.

Cet article porte sur les recherches des mathématiciens arabes en théorie des nombres: on montre qu'Ibn al-Haytham a énoncé et tenté de démontrer la réciproque de IX-36 des *Eléments* sur les nombres parfaits; on discute du calcul de certains de ces nombres par les mathématiciens tardifs; et on expose quelques résultats obtenus par al-Anṭākī (mort en 987), dont certains fragments de l'oeuvre arithmétique viennent d'être identifiés.

يعرض هذا المقال لبحوث الرياضيين العرب في نظرية الأعداد ؛ ففيه نبيّن أن ابن الهيثم (٩٦٥-١٠٤٠) قد صاغ عكس الشكل ٣٦ من المقالة ٩ من الأصول حول الأعداد التامة كما حاول البرهان عليه، وفيه نناقش حساب بعض الرياضيين المتأخرين لتلك الأعداد ، وفيه نذكر بعض النتائج التي وصل إليها الأنطاكي (المتوفى سنة ٩٨٧) بعد أن عثرنا على فقرات من رسائله الحسابية .

AMS 1985 subject classifications: 01A30, 10-03.
Key Words: Ibn al-Haytham, al-Anṭākī, Euclid, perfect numbers, synthesis, Ibn Fallūs, Ibn al-Malik.

Dans deux précédentes études sur l'histoire de la théorie des nombres dans les mathématiques arabes [Rashed 1982, 1983, 1984], nous exposions comment, à partir du IXème siècle et avec Thābit ibn Qurra, s'est construit un vaste ensemble de recherches autour des nombres abondants, déficients, parfaits, amiables, équivalents, etc. Au sein de cet ensemble, les nombres parfaits—cf. *infra*—faisaient, à première vue, figure de parent pauvre: comparés aux écrits dont nous disposons aujourd'hui sur les nombres amiables, ceux qui traitent des nombres parfaits et qui nous sont parvenus sont moins nombreux et moins importants [Rashed 1982, 1983, 1984].

A l'encontre de cette impression, nous avons cependant conjecturé que la recherche sur les nombres parfaits avait dû être plus considérable que ne le suggéraient les documents disponibles, et, bien plus, qu'on avait, avant le XIIème siècle, tenté de démontrer la réciproque du théorème d'Euclide. Deux groupes de

0315-0860/89 $3.00

faits étayaient alors cette conjecture: les résultats obtenus par le mathématicien al-Baghdādī (mort en 1037) [Rashed 1984, 263, 267–268], et l'écho transmis par un mathématicien du XIIème siècle, al-Zanjānī, dont l'oeuvre arithmétique demeure peu frayée en dépit de l'importance qui est la sienne.

Les résultats obtenus par al-Baghdādī attestent que les mathématiciens de ce temps sont allés plus loin qu' Euclide et Nicomaque dans la connaissance des nombres parfaits. Quant au témoignage d'al-Zanjānī, il suggère que l'on avait tenté de *caractériser* ces nombres. Mais qui menait alors la recherche en ce domaine, pour être en mesure de concevoir une telle caractérisation? Plusieurs candidats des X–XIèmes siècles se présentent, sur lesquels nous sommes toujours très peu informés. Il suffit d'évoquer l'exemple d'al-Anṭākī, qui poursuivait ses recherches en arithmétique, et dont nous venons d'identifier certains fragments [1], indices du chemin qui nous reste à parcourir pour parfaire notre connaissance de l'histoire de la théorie des nombres à l'époque. Mais, malgré les lacunes de notre information sur cette histoire, c'est grâce à Ibn al-Haytham que nous allons prouver notre conjecture, en montrant que celui-ci n'a pas caractérisé les seuls nombres premiers en énonçant le théorème de Wilson [Rashed 1984, 227–243], mais aussi les nombres parfaits. Sept siècles avant Euler, il énonce et tente de démontrer la réciproque du théorème IX-39 des *Eléments* sur les nombres parfaits. Plus précisément encore, il énonce et tente de prouver un théorème que l'on peut ainsi réécrire:

THÉORÈME. *Soit n un nombre pair, $s(n)$ la somme des diviseurs propres de n; les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *si* $n = 2^p(2^{p+1} - 1)$, *avec* $(2^{p+1} - 1)$ *premier, alors* $s(n) = n$,
(b) *si* $s(n) = n$, *alors* $n = 2^p(2^{p+1} - 1)$, *avec* $(2^{p+1} - 1)$ *premier.*

On sait que (a) n'est autre que IX-39 des *Eléments*. Ibn al-Haytham a, à deux reprises, commenté cette proposition d'Euclide, et il a repris la démonstration de celui-ci. Dans ses *Commentaires des postulats d'Euclide* il évoque cette proposition dans ces termes: "Euclide a dit ensuite que le nombre parfait est égal à la somme des parties qui le divisent. Cette affirmation est une définition du nombre parfait. Qu'il existe un nombre qui vérifie cette propriété. Euclide a en effet montré à la fin du neuvième livre comment trouver des nombres qui vérifient cette propriété" [2]. Dans un second livre, *Sur la solution des doutes à propos d'Euclide* [3], Ibn al-Haytham s'attarde davantage sur cette proposition d'Euclide, dont il reprend la démonstration. Il s'interroge cette fois sur "la cause"—*al-ʿilla*— pour laquelle n a pour seuls diviseurs propres

$$\{1, 2, \ldots, 2^p, (2^{p+1} - 1), 2(2^{p+1} - 1), \ldots, 2^{p-1}(2^{p+1} - 1)\}.$$

Il retient comme "première cause" le fait "que la somme des parties qui sont pairement paires est un nombre impair" [4]. C'est en effet cette propriété qu'Ibn al-Haytham exploite pour montrer qu'il n'existe pas d'autre nombre qui divise n en dehors de ceux notés ci-dessus.

Mais la vraie contribution d'Ibn al-Haytham est exposée ailleurs. Nul avant lui, à ma connaissance, n'avait énoncé le théorème mentionné, ni tenté d'en offrir une démonstration. Dans un traité sur *L'analyse et la synthèse,* Ibn al-Haytham choisit entre autres exemples celui des nombres parfaits. Il commence par rappeler qu'Euclide a procédé seulement par synthèse, et propose d'entreprendre lui-même l'analyse. Avant tout commentaire, nous présentons ce paragraphe du traité d'Ibn al-Haytham, que nous avons établi et traduit ailleurs [5].

. . . *Trouver le nombre parfait:* le nombre parfait est celui qui est égal à la somme des parties qui le mesurent. Ce problème est celui exposé par Euclide à la fin des livres arithmétiques de son ouvrage. Il n'a pas cependant proposé son analyse, et rien dans ses propos ne montre comment il a trouvé le nombre parfait par l'analyse. Il l'a proposé par synthèse seulement, comme pour les autres problèmes qu'il a inclus dans son ouvrage. Nous montrons ici comment on trouve le nombre parfait par l'analyse, pour composer ensuite cette analyse.

(1) Voie de l'analyse de ce problème: on pose qu'on a trouvé le nombre parfait; qu'il soit par exemple le nombre AB, et que les parties qui le mesurent soient les nombres $C, D, E, G, H, I, L, M, N$. Que l'on pose que AB est égal à la somme des nombres $C, D, E, G, H, I, L, M, N$. Nous examinons ensuite les propriétés des nombres ayant des parties. Si on examine les propriétés des nombres ayant des parties, on trouve qu'il a été montré, dans la proposition 36 [6] du Livre 9, que si des nombres en nombre quelconque se succèdent suivant le même rapport, et si on sépare du second et du dernier un nombre égal au premier, alors le rapport du reste du second au premier est égal au rapport du reste du dernier à la somme de tous les nombres qui le précèdent. Il s'ensuit que, étant donnés des nombres successifs proportionnels, qui sont dans le rapport du double, si on retranche de leur second et de leur dernier un nombre égal au premier, alors le reste du second sera égal au premier, et le reste du dernier sera égal à la somme de tous les nombres qui le précèdent. Mais pour les nombres successifs qui sont dans le rapport du double, chacun d'eux mesure le plus grand nombre, et chacun d'eux est une partie du plus grand nombre. De tout cela il s'ensuit que si les nombres $AB, C, D, E, G, H, I, L, M, N$ sont dans le rapport du double et sont successifs, alors chacun des nombres $C, D, E, G, H, I, L, M, N$ est une partie de AB, et si on retranche de AB un nombre égal à N, le reste de AB est égal à la somme des nombres qui sont des parties de AB. Mais AB est égal à la somme des parties, donc le nombre AB n'est pas dans le rapport du double avec tous les nombres restants successifs.

(2) De même parmi les propriétés des nombres successifs proportionnels qui sont dans le rapport du double et qui commencent par un, si on retranche de chacun d'eux un, chaque reste sera égal à la somme des nombres qui le précèdent, car si on retranche du second un nombre égal au premier, qui est un, (le reste sera un). Il s'ensuit que pour les nombres $C, D, E, G, H, I, L, M, N$, si quelques-uns sont successifs dans le rapport du double en commençant par AB, et si le dernier de (ceux-là) qui est le plus petit d'entre eux est inférieur de un au double de celui qui le précède, alors tous les nombres qui succèdent à AB sont des parties de AB, et AB sera leur somme.

Que les nombres AB, C, D, E, G soient successifs dans le rapport du double, et que le nombre G soit inférieur de un au double du nombre H; séparons (de AB) KB égal à G, alors AK sera égal à la somme des nombres C, D, E, G; mais G est inférieur de un au double de H; il est donc égal à la somme de H, I, L, M, N; or KB est égal à G, et KB est égal à la somme de H, I, L, M, N. Donc AB tout entier est égal à la somme des nombres $C, D, E, G, H, I, L, M, N$. Mais les nombres H, I, L, M, N sont des nombres successifs dans le rapport du double commençant par un, et N est un. Mais puisque C est la moitié de AB, alors C mesure AB par les unités de M, et D mesure AB par les unités de L, et E mesure AB par les unités de I, et de même pour les nombres restants. Si donc les nombres C, D, E, G sont en même nombre que les nombres H, I, L, M, alors chacun des nombres qui succèdent à AB mesure AB par les unités de l'un des nombres qui succèdent à N, et chacun des nombres qui succèdent à N

mesure AB par les unités de l'un des nombres qui succèdent à AB. Ainsi tous les nombres sont parties de AB, et aucun autre nombre ne mesure AB . Si les nombres qui succèdent à AB sont plus nombreux que les nombres qui succèdent à N, et si certains des nombres qui succèdent à AB mesurent AB par les unités des nombres qui succèdent à N, et si les nombres qui restent qui succèdent à AB mesurent AB par les unités d'autres nombres, alors ces autres nombres sont des parties de AB. Mais AB n'a d'autres parties que les nombres $C, D, E, G, H, I, L, M, N$. Donc les nombres qui succèdent à AB ne sont pas plus nombreux que les nombres qui succèdent à N. Si les nombres qui succèdent à AB sont moins nombreux que les nombres qui succèdent à N, alors certains nombres qui succèdent à N mesurent AB par les unités des nombres qui succèdent à AB, et les nombres restants qui succèdent à N mesurent AB par les unités d'autres nombres; ces autres nombres sont donc des parties de AB. Mais AB n'a pas d'autres parties que les nombres donnés. Les nombres qui succèdent à AB suivant le rapport du double sont en même nombre que ceux qui succèdent à N. Ainsi les nombres C, D, E, G sont en nombre égal aux nombres H, I, L, M.

De même si le nombre G a une partie ou des parties, alors cette partie ou ces parties mesurent AB puisque G mesure AB. Cette partie ou ces parties sont une partie ou des parties de AB, et aucune n'est l'un des nombres C, D, E, G, H, I, L, M, car aucun des nombres C, D, E n'est une partie de G puisque chacun d'eux est plus grand que G, et aucun des nombres H, I, L, M ne mesure G, car si on ajoute un à G, alors les nombres H, I, L, M le mesurent, et aucun des nombres H, I, L, M ne mesure le nombre un ajouté, car chacun d'eux est plus grand que un, donc aucun des nombres H, I, L, M ne mesure le nombre, donc aucun d'eux n'est partie du nombre G; si donc le nombre G a une partie ou des parties différentes de l'unité, alors cette partie ou ces parties sont parties de AB, et chacune d'elles est autre que les nombres C, D, E, G, H, I, L, M. Mais AB n'a d'autres parties que ces nombres et l'unité, donc le nombre G est un nombre premier.

L'analyse a abouti à ce qu'il y a entre le nombre AB et le nombre G des nombres successifs dont le rapport est le double, que le nombre G parmi eux est premier, et que le nombre G est inférieur d'une unité au double de l'un des nombres successifs proportionnels commençant par un dont le rapport est double. Cette notion est possible, c'est-à-dire l'existence d'un nombre parmi les nombres successifs dont le rapport est le double et commençant par un, et tel que si on en retranche un on a un nombre premier.

(3) La synthèse de ce problème se fera comme nous allons le décrire. Nous considérons par induction les nombres pairement pairs, c'est-à-dire ceux qui sont dans le rapport du double en commençant par un. Nous retranchons un de chacun d'eux, celui qui sera premier, nous le doublons autant de fois jusqu'à ce que le nombre des nombres ainsi doublés soit égal au nombre des nombres successifs proportionnels qui précèdent ce nombre en comptant avec l'unité qui est leur premier nombre. Le plus grand nombre auquel aboutit le doublement est un nombre parfait.

Exemple. Les nombres A, B, C, D, E, G, H sont des nombres successifs dont le rapport est le double. Parmi eux A est égal à un, et si on retranche de GH un, le reste sera un nombre premier. Retranchons de GH le nombre un qui est SH, il reste GS, un nombre premier; nous doublons GS autant de fois, jusqu'à ce que le nombre des doublements soit égal au nombre des nombres A, B, C, D, E. Soit les nombres GS, I, K, L, NO, je dis que NO est un nombre parfait.

Démonstration. Séparons OP égal à GS; NP est donc égal à la somme des nombres L, K, I, GS; mais le nombre PO est égal à la somme des nombres E, D, C, B, A; le nombre NO sera donc égal à la somme des nombres $A, B, C, D, E, GS, I, K, L$. Mais les nombres L, K, I, GS mesurent NO par les unités de l'un des nombres E, D, C, B, et chacun des nombres B, C, D, E mesure NO par les unités de l'un des nombres GS, I, K, L. Tous les nombres B, C, D, E, GS, I, K, L sont des parties de NO, mais on a montré que NO est égal à la somme de ces nombres (plus A qui est égal à un). Il nous reste à démontrer que aucun nombre autre que ces nombres ne mesure *NO*. Que le nombre *M* mesure *NO*; je dis que *M* est l'un des nombres *B*, *C*, *D*, *E*, *GS*, *I*, *K*, *L*. Que le nombre *M* mesure *NO* par les unités du nombre *A*. Si on le multiplie ensuite par *Q*, on a *NO*; mais le nombre *GS* mesure *NO* par les unités du nombre *E*; si donc on multiplie *GS* par *E*, on a *NO*, le produit de *E* par *GS* est donc égal au produit de *M* par *Q*. Le rapport de *GS* à *Q* est donc égal au rapport de *M* à *E*. Ou bien *GS* mesure *Q*, ou bien il ne le mesure pas. Si *GS* mesure *Q*, alors *M* mesure *E*; mais les nombres *A*, *B*, *C*, *D*, *E* sont successifs à partir de l'unité et proportionnels; celui qui succède à l'unité est un nombre premier, puisqu'il est deux; donc aucun nombre ne mesure le plus grand que l'un d'entre eux comme il a été montré dans la proposition 13 du livre 9; le nombre *M* est donc l'un des nombres [A], B, C, D. Si le nombre *GS* ne mesure pas *Q*, alors ils sont premiers entre eux, comme il a été montré dans la proposition 31 du livre 7; s'ils sont premiers entre eux, alors ils sont les deux plus petits nombres suivant leur rapport, comme il a été montré dans la proposition 22 [7] du livre 7, et si les deux nombres *GS* et *Q* sont les deux plus petits nombres suivant leur rapport, alors ils mesurent les nombres qui sont suivant leur rapport comme il a été montré dans la proposition 20 du livre 7. Si donc le nombre *GS* ne mesure pas *Q*, ils sont les deux plus petits nombres suivant leur rapport, et ils mesurent les nombres qui sont suivant leur rapport. Mais le rapport de *GS* à *Q* est égal au rapport de *M* à *E*. Donc le nombre *Q* mesure *E*; donc le nombre *Q* est l'un des nombres [*A*], *B*, *C*, *D*. Donc le nombre *Q* mesure *NO* par le nombre des unités de l'un des nombres *GS*, *I*, *K*, *L*. Mais *Q* mesure *NO* par le nombre des unités de *M*; le nombre *M* est donc l'un des nombres *GS*, *I*, *K*, *L*.

Tout nombre qui mesure *NO* est donc l'un des nombres *B*, *C*, *D*, *E*, *GS*, *I*, *K*, *L*. Et aucun nombre, autre que les nombres *B*, *C*, *D*, *E*, *GS*, *I*, *K*, *L*, et *A* qui est l'unité, ne mesure *NO*. Mais le nombre *NO* est égal à la somme de ces nombres; donc le nombre *NO* est un nombre parfait.

L'examen du texte précédent ne laisse planer aucune ambiguïté sur le dessein d'Ibn al-Haytham: il veut démontrer que tout nombre parfait pair est de la forme euclidienne. Son exposé, on a pu le voir, n'est pas exempt d'obscurités, imputables aussi bien à l'auteur qu'aux avatars de la tradition manuscrite de son traité—il nous faut par exemple déplacer un paragraphe pour retrouver la cohérence de la démarche [8]. Abordons maintenant, selon ses étapes, la démonstration d'Ibn al-Haytham telle qu'elle est menée dans ce texte.

Ibn al-Haytham montre d'abord que

$$s(2^p) = 1 + 2 + \ldots + 2^{p-1} = 2^p - 1, \tag{1}$$

d'où, pour n un nombre parfait pair

$$n = s(n) \neq 2^p. \tag{2}$$

Il démontre (2) par l'absurde: si $n = 2^p$, alors $n - 1 = 1 + 2 + \ldots + 2^{p-1}$; et, d'après (1), on obtient $n = n - 1$. Il montre ensuite que si $n = 2^p g$ avec $g = 2^{q+1} - 1$, alors

$$n - g = g + 2g + \ldots + 2^{p-1}g \tag{3}$$

et

$$g = 1 + 2 + \ldots + 2^q;$$

pour n parfait, on obtient

$$s(n) = n = (2^{p-1}g + \ldots + 2g + g) + (2^q + \ldots + 2 + 1). \tag{4}$$

Notons par D_1 et D_2 respectivement les deux ensembles de diviseurs

$$\{2^{p-1}g, \ldots, 2g, g\} \qquad \text{et} \qquad \{2^q, \ldots, 2, 1\};$$

Ibn al-Haytham montre alors que

$$q = p. \tag{5}$$

Il raisonne également par l'absurde: à tout $d_1 \in D_1$ doit correspondre $d_2 \in D_2$, et inversement. Si donc on suppose $q < p$ ou $q > p$, on aboutit à une contradiction avec l'une des deux précédentes conditions; d'où les résultats. Il montre enfin

$$g \text{ est premier.} \tag{6}$$

En effet, supposons que g n'est pas premier, alors il existe $d|g$, $d \neq 1$. Mais $d|n$, donc $d \in D_1 \cup D_2$. Or $d < g$, donc $d \notin D_1$; et d'autre part $d \neq 2^k$, donc $d \notin D_2$, car les termes de D_2 sont les diviseurs de $2^{q+1} = g + 1$; il s'ensuit que $d = 1$. Il est donc clair qu'Ibn al-Haytham ne donne en fait qu'une réciproque partielle du théorème d'Euclide. Il ne montre pas que parmi *tous* les nombres pairs, seuls ceux d' Euclide sont parfaits; mais seulement que parmi les nombres pairs de la forme $2^p(2^{q+1} - 1)$ seuls ceux d'Euclide sont parfaits.

Ibn al-Haytham procède ensuite à la synthèse. Il se donne un nombre

$$n = 2^p g$$

avec g un nombre premier tel que

$$g = 2^{p+1} - 1 = \sum_{k=0}^{p} 2^k.$$

On a

$$n = g \sum_{k=0}^{p-1} 2^k + \sum_{k=0}^{p} 2^k.$$

Chaque nombre de D_1 ou de D_2 (pour $q = p$) est bien un diviseur de n. Supposons que d soit un diviseur de n, alors il existe e diviseur de n tel que

$$d \cdot e = n = 2^p g;$$

on a

$$e/g = 2^p/d.$$

Si g divise e, alors d divise 2^p et $d \in D_2$. Si g ne divise pas e, $(g,e) = 1$ car g est premier; alors e divise 2^p, et $e = 2^k$ $(1 \leq k \leq p)$; donc $d = g2^{p-k}$, $d \in D_1$. Tout diviseur de n figure dans D_1 ou dans D_2. On conclut que n est égal à la somme de ses diviseurs; donc n est parfait.

Mais ce semi-échec ne devrait pas occulter l'essentiel: la tentative délibérée de caractériser l'ensemble des nombres parfaits. Or non seulement cette démarche est datée, mais elle est "localisée": elle est fille de la tradition euclidienne arabe en théorie des nombres. Successeur de Thābit ibn Qurra, Ibn al-Haytham, tout comme lui, prend pour modèle en théorie des nombres les livres arithmétiques des *Eléments*. Aussi s'intéressent-ils bien davantage à établir et à démontrer certaines propriétés des entiers ou des classes d'entiers qu'à calculer sur des nombres particuliers; ni l'un ni l'autre, soulignons-le encore, n'a voulu prolonger sa recherche par le calcul des nombres ignorés des anciens, qu'il s'agisse des nombres parfaits ou des nombres amiables. Cette indifférence au calcul éclate du reste plus évidemment encore dans l'étude d'Ibn al-Haytham sur les nombres parfaits, dans la mesure où celle-ci est invoquée à titre d'exemple dans un traité sur l'analyse et la synthèse dans l'ensemble des disciplines mathématiques à vocation propédeutique et méthodologique.

On s'attend donc à rencontrer ce calcul dans les recherches des mathématiciens qui optaient, globalement ou en partie seulement, pour le style néo-pythagoricien, autrement dit dans la lignée de l'*Introduction Arithmétique* de Nicomaque de Gérase. Les documents manuscrits dont nous disposons viennent confirmer cette interprétation, et nous autorisent de surcroît à supposer que ce calcul a été mené assez tôt: nous ne serions pas surpris de voir apparaître le calcul des nouveaux nombres parfaits dans les travaux des Xème–XIème siècles, même si pour l'heure nous ne le trouvons qu'à partir du XIIIème siècle, dans les écrits de néo-pythagoriciens arabes.

Nous allons considérer ici très brièvement l'œuvre d'Ibn Fallūs (mort en 1240 environ), récemment examinée à ce même titre [Brentjes 1987], ainsi que celle d'un autre savant bien plus tardif, Ibn al-Malik al-Dīmashqī. Par ce choix, nous voulons encadrer la période, en attendant de la couvrir par un examen systématique.

L'écrit d'Ibn Fallūs n'est qu'un commentaire résumé du livre de Nicomaque, et de fait il déclare lui-même s'être "appuyé sur le livre de Nicomaque" [9]. Il commence par donner la règle euclidienne de formation des nombres parfaits, avant de consigner dans un tableau les nombres suivants [10]—à quelques erreurs près commises par le copiste: 6; 28; 496; 8 128; 130 816; 2 096 128; 33 550 336; 8 589 869 056; 137 438 691 328; 35 184 367 894 528.

Mais le texte d'Ibn Fallūs appelle plusieurs remarques. De même que dans la tradition néo-pythagoricienne, il ne démontre pas, mais procède par induction incomplète et énonce des règles. On observe d'autre part que, dans la liste ci-dessus des termes donnés comme nombres parfaits, se mêlent en fait des nombres qui ne le sont pas. On note enfin la présence de trois nouveaux nombres parfaits: le cinquième, le sixième et le septième, dont on a coutume de dater la découverte au milieu du XVème siècle pour le premier et à la fin du XVIème siècle pour les deux derniers. L'introduction dans la liste des nombres parfaits de nombres qui ne le sont pas ne peut d'autant moins être négligée qu'Ibn Fallūs n'a jamais explicitement exposé son calcul, et notamment celui par lequel il vérifie que $(2^p - 1)$ est premier. Les nombres apparaissent sur deux lignes d'un tableau dénué de tout commentaire. Mais, avant d'élucider ce point, faisons un rapprochement avec la présentation explicite d'Ibn al-Malik, lui-même héritier dans ce chapitre de la théorie des nombres de ses prédécesseurs. Dans le septième livre de son traité [11], après avoir donné la règle de formation des nombres parfaits, Ibn al-Malik propose un tableau que nous reproduisons en partie:

Divisibles en deux moitiés [2^p]	Impairs non successifs [$2^{p+1} - 1$]	Parfaits successifs [$2^p(2^{p+1} - 1)$]
2	3	6
4	7	28
8	15	0
16	31	496
32	63	0
64	127	8,128
128	255	0
256	511	130,816
512	1023	0
1024	2047	2,096,128
2048	4095	0
4096	8191	33,550,336

Or, bien qu'Ibn al-Malik s'arrête au cinquième nombre parfait, lui aussi mêle à la liste des nombres qui ne le sont pas: cette erreur, qui n'est donc pas propre à Ibn Fallūs, n'est pas non plus l'effet d'une simple faute de calcul. D'ailleurs, aux yeux de celui qui est un tant soit peu coutumier des écrits des mathématiciens de l'époque, fussent-ils de second ordre, il est inconcevable que ceux-ci fussent incapables de reconnaître si 511 ou 2047, par exemple, sont, ou non, des nombres premiers. L'erreur relève, selon nous, d'une tout autre explication, et renvoie à l'affirmation de Nicomaque selon laquelle il y a un nombre parfait dans chaque rang décimal. Déjà réfutée par al-Baghdādī au début du XIème siècle [Rashed 1984, 267], cette opinion a néanmoins survécu à la critique, comme on peut le lire sous la plume d'Ibn Fallus: "Tous ces nombres (à savoir les nombres parfaits) ont deux propriétés nécessaires, *lāzimān;* l'une est qu'il en existe un dans chacun des rangs du calcul: un pour les unités, à savoir six, un pour les dizaines, à savoir vingt-huit, et ainsi de suite pour les autres rangs; la seconde est que leur extrémité la plus petite est deux nombres successifs qui sont six et huit" [12]. C'est, semble-t-il, dans de telles affirmations que les mathématiciens ont un peu vite puisé leur conviction que $(2^{p+1} - 1)$ est premier ou non pour $p = 8, 10, 22$, sans procéder aux vérifications nécessaires, et sans s'apercevoir qu'elles sont d'ailleurs contradictoires avec leurs propres calculs: il n'y a aucun nombre parfait entre 10,000 et 100,000.

Ainsi l'histoire de la théorie des nombres dans les mathématiques arabes, que nous nous efforçons de constituer, s'enrichit d'un chapitre sur les nombres parfaits. La recherche théorique entreprise par Ibn al-Haytham, par son contemporain al-Baghdādī, de même que le calcul des nouveaux nombres parfaits, témoignent par-delà des erreurs que ces nombres furent alors l'objet d'une recherche active. Les travaux historiques à venir ne manqueront pas d'enrichir ce chapitre, dont nous établissons aujourd'hui l'existence. Mais d'ores et déjà Ibn al-Haytham s'impose, grâce à sa découverte du théorème de Wilson et à son énoncé du théorème d'Euler, comme une importante figure dans l'histoire de la théorie des nombres.

NOTES

1. D'après les anciens bio-bibliographes, Ibn al-Nadīm notamment, nous savons qu'al-Anṭākī (mort en 376 H, c'est-à-dire en 987) est un mathématicien dont les travaux portent principalement sur l'arithmétique et sur la théorie des nombres. Ibn al-Nadīm lui attribue un commentaire de l'*Introduction arithmétique* de Nicomaque de Gérase, ainsi qu'un commentaire des *Eléments* d'Euclide. Ne serait-ce que par ses dates, on conçoit l'importance des travaux d'al-Anṭākī pour l'histoire de la théorie des nombres. Mais ses travaux sont demeurés introuvables. Notre bonne fortune a mis sur notre chemin un livre tardif qui reproduisait de longues citations de son commentaire des *Eléments*. L'analyse de ces fragments cités, qui pour l'heure sont les seuls textes de l'auteur dont nous disposions, montre que c'est là un travail important, comparable à ceux d'al-Nairīzī ou de son successeur Ibn al-Haytham. Nous reprendrons dans une étude ultérieure l'examen de ces textes, ainsi que de l'ensemble du manuscrit qui les renferme [Mss. 992 de la Bibliothèque d'Osmania University, Hayderabad]. Retenons pour le moment l'intérêt d'al-Anṭākī pour l'étude des nombres amiables. Il résout le problème suivant: trouver deux entiers a et b tels que

$$a - s(a) = k,$$

$$s(b) - b = k',$$

et résoud le cas où

$$k = k'.$$

Quant au calcul des nombres amiables, al-Anṭākī, si l'on en croit l'auteur qui a consulté son livre, n'a donné que le couple 220, 284; ce qui indique que, tout comme Thābit ibn Qurra, il s'attachait bien davantage à la recherche théorique qu'au calcul de nouveaux couples.

Outre ces passages d'al-Anṭākī, on rencontre dans le même manuscrit des fragments d'al-Nairīzī, d'al-Dīmashqī, d'Ibn al-Haytham, et aussi du livre *Al-Istikmāl* d'Ibn Hūd. Enfin, il nous livre le calcul du couple des nombres amiables 17,296, 18,416, dit de Fermat, que nous avons déjà trouvé dans quatre écrits différents; ce qui prouve bien que ce couple faisait partie de la connaissance commune des mathématiciens arabes dès la fin du XIIIème siècle.

2. Ibn al-Haytham: *Sharḥ Muṣādrāt Uqlīdis*, Mss. Feyzullah 1359, Istanbul: f. 223^r.

3. Ibn al-Haytham: *Kitāb fī Ḥall Shukūk Kitāb Uqlīdīs fī al-Uṣūl*, Université d'Istanbul n° 800: ff. 140^v–142^r.

4. *Op. cit.*: f. 142^r.

5. Le texte arabe traduit ici a été établi à partir de tous les manuscrits disponibles, et sera publié dans les *Œuvres mathématiques d'Ibn al-Haytham* (à paraître aux Belles Lettres, Paris). Nous avons ajouté entre (. . .) la numérotation des paragraphes.

6. 35, dans l'édition de Heiberg.

7. 21, dans l'édition de Heiberg.

8. Cette histoire est retracée dans les *Œuvres mathématiques d'Ibn al-Haytham*. Remarquons seulement ici que le paragraphe indiqué entre *. . .* aurait dû se placer quelques lignes avant, c'est-à-dire avant la phrase qui commence par "il s'ensuit que". Cet endroit correspond du reste à une rupture du texte.

9. Ibn Fallūs: *Kitāb Iʿdād al-Isrār fī Asrār al-Aʿdād*, Mss. Dār al-Kutub, n° 23317/B: ff. 62^r–72^r; cf. f. 62^v.

10. *Op. cit.:* 70^v.

11. Ibn al-Malik al-Dīmashqī: *Al-Isʿāf al-ʾAtamm bi Ḥisāb al-Qalam,* Mss. Dār al-Kutub, Ryāḍyyāt, 182: 279.

12. Ibn Fallūs: *op. cit.:* f. 65^v.

RÉFÉRENCES

Brentjes, S. 1987. Die ersten sieben volkommenen Zahlen und drei Arten befreundeter Zahlen in einem Werk zur elementaren Zahlentheorie von Ismāʿīl b. Ibrāhīm b. Fallūs. *NTM-Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin* **24**(1), 21–30.

Euclidis Elementa. 1970. Vol. II. Post I. L. Heiberg edidit E. S. Stamatis. Berlin: Teubner.

Rashed, R. 1982. Matériaux pour l'histoire des nombres amiables et de l'analyse combinatoire. *Journal for the History of Arabic Science* **6,** 209–278.

——— 1983. Nombres amiables, parties aliquotes et nombres figurés aux XIIIème et XIVème siècles. *Archive for History of Exact Sciences* **28,** 107–147; repris dans [Rashed 1984, 259–299].

——— 1984. *Entre arithmétique et algèbre: Recherches sur l'histoire des mathématiques Arabes.* Paris: Les Belles Lettres.