Discrete Mathematics 26 (1979) 227–234

SUR LES PARCOURS HAMILTONIENS DANS LES GRAPHES ORIENTES

Yahya Ould HAMIDOUNE
Université Pierre et Marie Curie, Paris, France

Received 14 April 1978
Revised 22 December 1978

We prove that in a strongly h-connected digraph of order $n \geq 8h^3+h$ there exists an Hamiltonian tour of length not exceeding

$$\mathrm{Max}\left(\left[\frac{n+h}{2h}\right]\left(n-h\left[\frac{n-h}{2h}\right]\right), \left[\frac{n+h}{2h}\right]^*\left(n-h\left[\frac{n-h}{2}\right]^*\right)\right).$$

This bound is best possible.

1. Introduction

Soit $G=(X, E)$ un graphe simple. On dit qu'un cycle passant par tous les sommets de G est un *parcours hamiltonien* de G. Cette notion qui généralise celle de cycle hamiltonien a été introduite par Jolivet [4]. Jolivet a démontré dans [4] le théorème suivant:

Soient G un graphe simple connexe de n sommets et c un entier, $c \leq \frac{1}{2}n$. Si $d_G(x) \geq c$ pour tout sommet x de G, alors G contient un parcours hamiltonien de longueur inférieure ou égale à $2n-2c$.

Ce résultat a été renforcé par Bermond dans [2]:

Soient G un graphe simple connexe d'ordre n et c un entier, $c \leq n$. Si $d_G(x)+d_G(y) \geq c$ pour tous sommets x, y non adjacents de G, alors G contient un parcours hamiltonien de longueur inférieure ou égale à $2n-c$.

Nous établissons dans cet article la borne supérieure de la longueur minimale d'un parcours hamiltonien dans un graphe orienté en fonction du nombre de sommets et de la connectivité du graphe. Nous utiliserons dans la démonstration le résultat suivant dû à Nash-Williams [5].

Si G est un graphe d'ordre n sans boucles ni arcs multiples tel que $d_G^+(x) \geq \frac{1}{2}n$ et $d_G^-(x) \geq \frac{1}{2}n$ pour tout sommet x, alors G contient un circuit hamiltonien.

2. Parcours dans les graphes orientés

Soit $G=(X, U)$ un graphe orienté. Nous dirons qu'un circuit passant par tous les sommets de G est un *parcours hamiltonien* de G.

Remarque. Le graphe G possède un parcours hamiltonien si et seulement si il est fortement connexe.

Soit $G=(X, U)$ un graphe fortement connexe. Nous désignerons par $f(G)$ la longueur du plus court parcours hamiltonien de G. On rappelle que la *distance* d'un sommet x à un sommet y est la longueur du plus court chemin de x à y. Elle sera notée $\operatorname{dist}(x, y)$. Le *diamètre* de G est par définition:

$$\delta(G)=\operatorname{Max}(\operatorname{dist}(x, y);\ x \text{ et } y \text{ étant 2 sommets de } G).$$

Proposition 2.1. *Soit $G=(X, U)$ un graphe fortement connexe d'ordre n. Alors $f(G)\leqslant[\frac{1}{4}(n+1)^2]$. De plus cette borne est la meilleure possible.*

Démonstration. Soit L un chemin élémentaire de G de longueur maximale. Posons $X-L=\{y_i : 1\leqslant i\leqslant k\}$. Désignons par y_{k+1} et y_0 les extrémités initiale et terminale de L. Soit L_i un chemin élémentaire reliant y_i à y_{i+1}, pour $0\leqslant i\leqslant k$. On voit facilement que la famille L; $(L_i)_{0\leqslant i\leqslant k}$ définit un parcours de G. On a donc

$$f(G)\leqslant l(L)+\sum_i l(L_i)\leqslant(k+2)l(L)=l(L)(n+1-l(L))\leqslant[\tfrac{1}{4}(n+1)^2].$$

Pour tout $n\geqslant 1$, nous allons construire un graphe G_n d'ordre n qui n'admet pas de parcours hamiltonien de longueur inférieure à $[\frac{1}{4}(n+1)^2]$.

Soient $M[a, a']$ un chemin élémentaire de longueur $[\frac{1}{2}n]^*-2$ et Y un ensemble de cardinal $[\frac{1}{2}n]+1$ disjoint du chemin de M.

Posons

$$X=Y\cup M; \qquad U=U_M\cup(a'\times Y)\cup(Y\times a),$$

où U_M désigne l'ensemble des arcs du chemin M.

Soit $G_n=(X, U)$. On vérifie facilement que

$$f(G_n)=[\tfrac{1}{4}(n+1)^2].$$

3. Parcours dans les graphes fortement h-connexes

Soient h et n 2 entiers naturels. Nous désignerons par $f_h(n)$ le nombre suivant

$$\operatorname{Max}(f(G): G \text{ est fortement } h\text{-connexe d'ordre } n).$$

D'après la Proposition 2.1,

$$f_1(n)=[\tfrac{1}{4}(n+1)^2].$$

Soit G un graphe. On dit que 2 chemins de G sont *intérieurement disjoints* si leur intersection est contenue dans l'ensemble de leurs extrémités. On dit que des chemins sont *intérieurement disjoints* s'ils sont deux à deux intérieurement disjoints.

Nous utiliserons le théorème suivant dû à Dirac [3].

Soit G un graphe et h un entier. Alors G est fortement h-connexe si et seulement si pour tout couple de sommets x et y de G, il existe h chemins intérieurement disjoints de x vers y.

Nous utiliserons également les 2 corollaires du Théorème de Dirac suivants.

(1) *Soient $G=(X, U)$ un graphe fortement h-connexe, A et B 2 parties disjointes de X de cardinal h. Alors il existe h chemins disjoints dans G reliant A à B.*

(2) *Soient G un graphe fortement h-connexe, x un sommet de G et A une partie de G de cardinal h. Alors il existe h chemins intérieurement disjoints reliant x à A.*

Lemme 3.1. *Soient $G=(X, U)$ un graphe fortement h-connexe, Y et Y' 2 sous-ensembles de X de cardinal h, x un sommet n'appartenant pas à X. Alors le graphe*

$$G'=(X+x, U \cup \{x\} \times Y \cup Y' \times \{x\})$$

est fortement h-connexe.

La démonstration de ce lemme est immédiate.

Soient q, h et r trois entiers non nuls tels que $r \geqslant h$. Prenons une famille $(X_i)_{i \leqslant i \leqslant q+1}$ d'ensembles deux à deux disjoints tels que

$$|X_1| = |X_2| = \cdots = |X_q| = h \quad \text{et} \quad |X_{q+1}| = r.$$

Posons

$$X = \bigcup_i X_i \quad \text{et} \quad U = \bigcup_i X_i \times X_{i+1} \qquad (+ \text{ modulo } q+1)$$

Le graphe (X, U) sera désigné par $K_{q,h,r}$. Le graphe $K_{q,h,h}$ est $\vec{C}_{q+1} \otimes S_h$, où S_h désigne un ensemble stable de cardinal h. On vérifie facilement que $K_{q,h,r}$ est fortement h-connexe.

Lemme 3.2.

$$\operatorname*{Sup}_{q \in N} ((n-qh)(q+1)) =$$
$$= \operatorname{Max}\left(\left[\frac{n+h}{2h}\right]\left(n-h\left[\frac{n-h}{2h}\right]\right), \left[\frac{n+h}{2h}\right]^*\left(n-h\left[\frac{n-h}{2h}\right]^*\right)\right).$$

La démonstration de ce lemme est facile.

Lemme 3.3. *Soit n un entier supérieur ou égal à $2h$, alors*

$$f_h(n) \geqslant \operatorname{Max}\left(\left[\frac{n+h}{2h}\right]\left(n-h\left[\frac{n-h}{2h}\right]\right), \left[\frac{n+h}{2h}\right]^*\left(n-h\left[\frac{n-h}{2h}\right]^*\right)\right).$$

Démonstration. En effet, considérons la construction de $K_{q,h,r}$. On voit que 2 sommets distincts de X_{q+1} sont à distance $q+1$ l'un de l'autre. Par suite $f(K_{q,h,r}) \geqslant r(q+1)$.

Soient q et r deux entiers naturels tels que

$$n = qh + r \quad \text{et} \quad r \geqslant h.$$

D'après ce qui précède, on a

$$f_h(n) \geqslant \sup_{1 \leqslant q \leqslant (n-h)/h} (n-qh)(q+1) = \sup_{q \in \mathbf{N}} (n-qh)(q+1).$$

Ceci démontre le lemme.

Proposition 3.4

$$f_h(n) \leqslant \frac{(n+3h-2)^2}{4h} - 2h + 2.$$

Démonstration. Soit $G=(X, U)$ un graphe fortement h-connexe d'ordre n tel que $f(G) = f_h(n)$. A tout couple de sommets $(x, y) \notin U$, soit $(L^i_{x,y})_{1 \leqslant i \leqslant h}$ une famille de h chemins intérieurement disjoints reliant x à y. Prenons un couple de sommets (a, b) tel que

$$\sum_i l(L^i_{a,b}) = \operatorname{Max}\left(\sum_i l(L^i_{x,y}); (x, y) \notin U\right) = s.$$

On vérifie facilement que pour tout couple de sommets (x, y),

$$\operatorname{dist}(x, y) \leqslant \left[\frac{s}{h}\right] = p.$$

Posons

$$L^i_{a,b} = [a, a_i] + M_i + [b_i, b]$$

et soit

$$Y = X - \bigcup_i L^i_{a,b}.$$

Soit J un ensemble de $h + |Y|$ chemins élémentaires reliant les morceaux $L^i_{a,b}$; $(M_i)_{i \geqslant 2}$, $\{y\}_{y \in Y}$ tels que tout morceau ait un successeur. On peut choisir ces chemins tels que leurs longueurs soient les distances entre les extrémités des morceaux. L'ensemble J et la famille $(L^i_{a,b})$ définissent un parcours P de G.

On a donc

$$f(G) \leqslant l(P) \leqslant s - 2h + 2 + (h + |Y|)\left[\frac{s}{h}\right].$$

Par suite

$$f(G) \leqslant s + (n - s + 2h - 2)\left[\frac{s}{h}\right] - 2h + 2.$$

D'où

$$f(G) \leqslant (n + 3h - 2 - hp)p - 2h + 2.$$

On a donc

$$f_h(n) \leqslant \frac{(n+3h-2)^2}{4h} - 2h + 2.$$

Remarque. Pour $h+1 \leqslant n \leqslant 2h$, $f_h(n) = n$. Ceci résulte du théorème de Nash-Williams cité dans l'introduction.

4. Evaluation de $f_h(n)$

Nous calculons dans ce paragraphe la valeur exacte de $f_h(n)$ pour $n \geqslant 8h^3 + h$

Théorème 4.1. *Si n est un entier supérieur ou égal à $8h^3 + h$ alors*

$$f_h(n) = \mathrm{Max}\left(\left[\frac{n+h}{2h}\right]\left(n - h\left[\frac{n+h}{2h}\right]\right), \left[\frac{n+h}{2h}\right]^*\left(n - h\left[\frac{n-h^*}{2h}\right]\right)\right).$$

Démonstration. Soit $G = (X, U)$ un graphe fortement h-connexe d'ordre n tel que $f(G) = f_h(n)$. A tout couple (Y, Z) de parties de X telles que $|Y| = |Z| = h$ et $Y \cap Z = \emptyset$, associons une famille $(L^i_{Y,Z})_{1 \leqslant i \leqslant h}$ de h chemins disjoints reliant Y à Z. Prenons un couple (A, B) tel que

$$\sum_{i=1}^{h} l(L^i_{A,B}) = \mathrm{Max}\left(\sum_{i=1}^{h} l(L^i_{Y,Z}): \quad |Y| = |Z| = h \quad \text{et} \quad Y \cap Z = \emptyset\right) = s.$$

Il résulte que pour tout couple (x, y) de sommets de G, $\mathrm{dist}(x, y) \leqslant [s/h] + 2$. On voit également qu'il existe au plus $h - 1$ sommets de G à distances supérieures à $[s/h]^*$ d'un sommet donné.

Posons $X_0 = X - \bigcup_{(i)} L^i_{A,B}$ et soient $X_1 = \{e_i \mid 1 \leqslant i \leqslant h\}$ un ensemble de h sommets n'appartenant pas à X et $X^* = X_0 \cup X_1$.

Définissons le graphe $G^* = (X^*, U^*)$ par les relations suivantes:

$(x, y) \in U^*$ si et seulement si $\mathrm{dist}(x, y) \leqslant [s/h]$ et $x \neq y$, pour $x, y \in X_0$;

$(x, e_i) \in U^*$ si et seulement si $\mathrm{dist}(x, a_i) \leqslant |s/h|$, pour $x \in X_0$ et $1 \leqslant i \leqslant h$, où $L^i_{A,B} = L[a_i, b_i]$.

$(e_i, x) \in U^*$ si et seulement si dist$(b_i, x) \leq [s/h]$, pour $x \in X_0$ et $1 \leq i \leq h$.
$(e_i, e_j) \in U^*$ si et seulement si dist$(b_i, a_j) \leq [s/h]$, $1 \leq i, j \leq h$ et $i \neq j$.
Si $|X^*| < 2h$, on ordonne X^* en une suite $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$.
Soit $(M_i)_{1 \leq i \leq k}$ une suite de chemins élémentaires telle que

M_1 relie x_i à x_{i+1}, si x_i, $x_{i+1} \in X_0$ (+ modulo k);

M_i relie x_i à a_j, si $x_i \in X_0$ et $x_{i+1} = e_j$;

M_i relie b_j à x_{i+1}, si $x_i = e_j$ et $x_{i+1} \in X_0$;

M_1 relie b_j à a_m, si $x_i = e_j$ et $x_{i+1} = e_m$.

Supposons que chacun de ces chemins ait pour longueur la distance entre ses extrémités.

Les deux familles (L^i) et (M_i) définissent un parcours P de G. On a donc

$$f(G) \leq l(P) \leq s + k([s/h] + 2),$$

compte tenu de ce qui précède. Par suite

$$f(G) \leq s + 2h([s/h] + 2).$$

On a donc

$$f(G) \leq n - h + 2h\left(\frac{n-h}{h} + 2\right) = 3n + h.$$

Posons $n - h = 2hu + r$, $0 \leq r \leq 2h$. On a

$$\begin{aligned} v &= \left[\frac{n+h}{2h}\right]\left(n - h\left[\frac{n-h}{2h}\right]\right) - 3n - h \\ &= (u+1)(2hu + h + r - hu) - 3(2hu + h + r) - h. \end{aligned}$$

D'où

$$v \geq h((u+1)^2 - 3(2u+1) - 1, \quad \text{car} \quad n \geq 8h^3 + h.$$

Par suite

$$v \geq h(u^2 - 4u - 3) \geq 0, \quad \text{car} \quad n \geq 8h^3 + h.$$

Ceci nous permet de supposer $|X^*| \geq 2n$.

Cas 1. $s = hp$, $p \in N$.
D'après ce qui précède, il existe au plus $h - 1$ sommets de G à distances supérieures à p d'un sommet quelconque de G. Ceci entraine que $d^+_{G^*}(x) \geq |X^*| - h$, pour tout sommet x de G. De même $d^-_{G^*}(x) \geq |X^*| - h$. D'aprés le théorème de Nash-Williams, G^* contient un circuit hamiltonien $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$, compte

tenu de l'hypothèse $|X^*|\geqslant 2h$. Soit $(M_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ une suite de chemins tels que pour tout i, $1\leqslant i\leqslant k$.

M_i relie x_i à x_{i+1}, si x_i, $x_{i+1}\in X_0$ (+modulo k);

M_i relie x_i à a_j, si $x_1\in X_0$ et $x_{i+1}=e_j$;

M_i relie b_j à x_{i+1}, si $x_i=e_j$ et $x_{i+1}\in X_0$;

M_i relie b_j à a_q, si $x_i=e_j$ et $x_{i+1}=e_q$.

Supposons que la longueur de chacun de ces chemins soit égale à la distance entre ses extrémités.

On vérifie facilement que les 2 suites (M_i) et (L_i) définissent un parcours hamiltonien de G.
D'où

$$\begin{aligned} f(G)&\leqslant s+kp=(n+h-ph)p\\ &\leqslant \mathrm{Max}\left(\left[\frac{n+h}{2h}\right]\left(n-h\left[\frac{n-h}{2h}\right]\right),\left[\frac{n+h}{2h}\right]^*\left(n-h\left[\frac{n-h}{2h}\right]^*\right)\right).\end{aligned}$$

Cas 2. $s=hp+r$; $0<r<h$ et $p\in N$.
Soient Y et Z deux sous-ensembles de X^* tels que $Y\cap Z=\emptyset$ et $|Y|=|Z|=h$. D'après la définition de G^*, il existe un arc reliant Y à Z. Soit $(L_i^*)_{1\leqslant i\leqslant h}$ un système maximal de chemins élémentaires dans G^*. D'après la remarque ci-dessus, on a $|X^*-\bigcup_{(i)}L_i^*|\leqslant h-1$. En particulier G^* contient un chemin élémentaire de longueur supèrieure ou égale à

$$\left[\frac{n-h+1}{h}\right]^*>h.$$

Prenons dans G^* un chemin élémentaire $L^*[z_1,\dots,z_q]$ de longueur maximale et soit $(P_i[z_i,c_i])_{q-h+1\leqslant i\leqslant h}$ un système maximal de chemins élémentaires contenus dans X^*-L^*. On voit facilement que

$$\left|\left(X^*-\left(L^*\cup\left(\bigcup_{(i)}P_i\right)\right)\right|\leqslant h-1 \quad \text{et} \quad l(P_i)\leqslant q-i.$$

D'où

$$|X^*-L^*|\leqslant \sum_{i=q-h}^{q} l(P_i)+h-1<h^2$$

Ordonnons les sommets de X^*-L^* en suite $(x_i)_{q+1\leqslant i\leqslant k}$. Construisons une suite de chemins $(M_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ analogue à celle construite dans le cas 1:
Soit P le parcours hamiltonien défini par (L^i) et (M_i). On a

$$\begin{aligned} f(G)&\leqslant l(P)\leqslant s+(q-1)p+(k-q+1)(p+2)\\ &\leqslant s+k(p+2)+2(k-q+1)\leqslant s+kp+2h^2.\end{aligned}$$

D'où

$$f(G) \leqslant ph + r + (n - ph - r)p + 2h^2.$$

Par suite

$$\begin{aligned} f(G) &\leqslant p(n + h - ph) - p + 2h^2 + 1 \\ &\leqslant \operatorname{Max}\left((2h^2 + 1)(n - 2h^2), \sup_{p \in N} (n + h - ph)p\right). \end{aligned}$$

Il suffit donc de voir que

$$(2h^2 + 1)(n - 2h^2) \leqslant \left[\frac{n+h}{2h}\right]\left(n - h\left[\frac{n-h}{2h}\right]\right).$$

Définissons u comme ci-dessus. On a

$$\begin{aligned} v &= \left[\frac{n+h}{2h}\right]\left(n - h\left[\frac{n-h}{2h}\right]\right) - (2h^2 + 1)(n - 2h^2) \\ &= (u + 1)(hu + h + r) - (2h^2 + 1)(2hu + h + r - 2h^2) \\ &\geqslant (u + 1)(hu + h) - (2h^2 + 1)(2hu + h - 2h^2). \end{aligned}$$

Ceci entraîne

$$v \geqslant h(u^2 - 4h^2u + 1 + (2h^2 + 1)(2h - 1)) \geqslant h(u^2 - 4h^2u) \geqslant 0$$

car

$$u = \left[\frac{n-h}{2h}\right] \geqslant 4h^2.$$

Le théorème est démontré.

Références

[1] C. Berge, Graphes et hypergraphes, 2ème éd. (Dunod, Paris, 1973).

[2] J-C. Bermond, Cycles dans les graphes et G-configurations, Thèse, Paris, 1975.

[3] G.A. Dirac, Extensions of Menger's Theorem, J. Lond. Math. Soc. 38 (1963) 148–161.

[4] J-L. Jo[illegible]t, Problèmes de connexité et problèmes hamiltoniens en Théorie des Graphes. Joint d'une famille de graphes et généralisation de la notion de graphe parfait, Thèse, Paris, 1975.

[5] C.St.J.A. Nash-Williams, Hamilton circuits in graphs and digraphs, The many facets of Graph Theory (1969) 237–243.