JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 17, 274–291 (1974)

Formules de la Moyenne, Calcul de Perturbations et Théorèmes d'Annulation pour les Formes Harmoniques

PAUL MALLIAVIN

*Institut Henri Poincaré, 11 rue Pierre et Marie Curie, Paris V, France**

Received November 26, 1973

I. INTRODUCTION

Le théorème de Bochner [1] d'annulation de la cohomologie des formes différentielles (cohomologie de de Rham–Hodge [11]) d'une variété Riemannienne compacte est fondée sur la positivité d'intégrales de Dirichlet. Dans le cas des fonctions valeurs réelles, il est bien connu que l'on peut montrer qu'une fonction harmonique définie sur M est constante soit en utilisant l'intégrale de Dirichlet soit en utilisant le principe du maximum.

On se propose de développer ici une approche, fondée sur le principe du maximum, pour l'annulation de la cohomologie sur M. Le principe du maximum est lié aux formules de la moyenne. Pour obtenir de telles formules, il convient de moyenner les valeurs d'une forme différentielle en différents points de M. Ceci sera effectué en utilisant un transport parallèle stochastique déjà introduit par Ito [5] et utilisé par Eells–Elworthy [3]. Le transport parallèle stochastique apparaitra ici sous une approche différente à travers la diffusion associée au laplacien horizontal $\Delta_{O(M)}$ canonique défini sur le fibré $O(M)$ des repères orthonormés de M.

Le laplacien de de Rham–Hodge s'interprète dans ce cadre sous la forme $\Delta_{O(M)} + J$ (Formule de Weitzenböck; en dimension 1, J est l'opposé de la matrice de Ricci). On est ainsi amené à étudier le semi-groupe lié à un système elliptique, ayant mêmes termes d'ordre $\geqslant 1$ sur toutes ses composantes. Une formule intégrale, due à M. Kac [6] dans le cas scalaire, généralisée par Stroock [12] et utilisée par Pinsky [10] dans le cadre des systèmes, donne l'expression du noyau de ce semi-groupe. On obtient alors des formules explicites de la moyenne et par le principe du maximum un théorème d'annulation

* Laboratoire Associé au CNRS N°. 213.

de l'espace des formes harmoniques de degré p. Les mêmes formules peuvent également conduire à des résultats d'annulation de cohomologie sur des variétés non compactes.

L'explicitation de la condition d'annulation sera ensuite développer, utilisant les équations de perturbation de Darling–Siegert [2] qui seront d'abord explicitées dans le cadre matriciel. Un exemple de calcul de perturbation sera traité jusqu'au bout en se ramenant finalement à des équations scalaires.

Les hypothèses suffisantes pour mener à bien un calcul de perturbation sont variées, en particulier l'exemple traité peut être largement modifié pour s'adapter une situation géométrique concrète (cf. également [7]). La signification de ces calculs étant que la condition d'annulation de Bochner de *positivité* peut être remplacée par une condition de *positivité en "moyenne."*

L'auteur est heureux de remercier ici J. Eells et J. Simons de discussions à propos de ce travail.

Table des Matières

2. Fibrés des Repères Orthonormés

Soit M une variété riemannienne de dimension n, et soit $T_{x_0}(M)$ l'espace tangent à M en X_0. On appelle *repère* de $T_{x_0}(M)$ un isomorphisme r_0 d'espace vectoriel euclidien de R^n sur $T_{x_0}(M)$. On note par

$O_{x_0}(M)$ l'ensemble des repères de $T_{x_0}(M)$. Le groupe orthogonal $O(n)$ opère à droite sur $O_{x_0}(M)$ ainsi: $r_1 = r_0 \cdot g$ où $r_1 = r_0 \cdot g$, g opérant de façon canonique sur R^n. On note par $O(M)$ la réunion des $O_{x_0}(M)$ lorsque x_0 parcourt M; soit p la projection de $O(M)$ sur M, alors $O(M)$ est un fibré principal de groupe structural $O(n)$.

2.1. *Les champs de vecteurs horizontaux canoniques*

Soit $r_0 \in O(M)$, $x_0 = p(r_0)$ et $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de R^n. Soit $s \to \varphi(s)$ l'équation paramétrique de la géodésique de M tangente à $r_0(e_1)$.

En transportant le repère r_0 parallèlement le long de cette géodésique, on définit $s \to r(s)$ à valeurs dans $O(M)$ telle que $r(0) = r_0$. On pose $A^1_{r_0} = r'(0)1$, on a

$$p'(r_0)\, A^1_{r_0} = r_0(e_1).$$

Plus brièvement, on aurait pu définir $A^1_{r_0}$ comme le relevé de $r_0(e_1)$ pour la connection riemannienne de $O(M)$.

La correspondance $r_0 \to A_{r_0}$ définit ainsi un champ de vecteurs A^1 sur $O(M)$. On obtient sur $O(M)$, n champs de vecteurs canoniques: $A^1, \dots, A^n$.

2.2. *Le Laplacien horizontal*

Notons par $L_A f$ la dérivée de la fonction f suivant le champ de vecteurs A. On pose

$$\Delta_{O(M)} = \sum_{k=1}^{n} L^2_{A_k}$$

Contrairement à l'opération de Laplace–Beltrami sur M, $\Delta_{O(M)}$ s'exprime de façon canonique comme somme des dérivées secondes. D'autre part, seules interviennent des dérivées dans les n directions horizontales, alors que la dimension de $O(M)$ est $n(n + 1)/2$.

2.3. *Scalarisation des Formes Différentielles*

Soit $\Lambda^1(M)$ l'espace vectoriel des formes différentielles de degré 1 sur M, à valeurs réelles. On note par E l'espace R^n et par λ la représentation de $O(n)$ sur E:

$$\lambda(g) \cdot \xi = g \cdot \xi \qquad g \in O(n) \quad \text{et} \quad \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Soit $C(O(M), E)$ l'espace des fonctions de classe C^2 définies sur $O(M)$ et à valeurs vectorielles dans E. On note par C^λ le sous-espace de

$C(O(M), E)$ des fonctions f qui sont λ-équivariantes, c'est-à-dire telles que

$$f(r \cdot g) = \lambda(g^{-1}) f(r).$$

Soit $\pi \in \Lambda^1(M)$; définissons $f_\pi \in C(O(M), E)$ par

$$f_\pi(r) = \{\pi_{p(r)}(r(e_k))\} \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

On dira que $f_\pi(r)$ est la forme π lue dans le repère r.

2.3.1 PROPOSITION. *L'application $\pi \to f_\pi$ réalisé un isomorphisme de $\Lambda^1(M)$ sur $C^\lambda(O(M); E)$.*

Preuve. f_π appartient à C^λ, en effet

$$f_\pi(r \cdot g) = (\pi_{p(r)}(r(g(e_k))) = \lambda(g^{-1})(\pi_{p(r)}(r(e_k))$$

Réciproquement, soit h appartenant à C^λ.

Posons si $x \in M$ et $z \in T_x(M)$

$$1_x(z) = \sum_{k=1}^{n} \xi^k h^k(r)$$

où $r \in p^{-1}(x)$ et $r(\Sigma \xi^k e_k) = z$; $h = (h^k)$; $1_x(z)$ ne dépend pas du choix de $r \in p^{-1}(x)$ et définit une forme linéaire sur $T_x(M)$. Ainsi, on obtient une forme différentielle sur M, notée θ, telle que $h = f_\theta$.

REMARQUE. La proposition 2.3.1 a un équivalent pour tous les types de champs de tenseurs sur M.

2.4. *Formules de Weitzenbock*

Soit $\square$ l'opérateur de de Rham–Hodge; $\square = d\delta + \delta d$. Notons $-J(r)$ le tenseur de Ricci lu dans le repère r.

2.4.1 PROPOSITION. *Pour tout $\pi \in \Lambda^1(M)$, on a*

$$-f_{\square\pi}(r) = (\Delta_{O(M)} f_\pi)(r) + J(r) f_\pi(r).$$

Preuve. [1], [11], [8].

2.4.2 *Remarque.* $J(r)$ est une matrice carrée d'ordre n, symmétrique d'après les propriétés du tenseur de Ricci.

2.4 3 *Remarque.* Pour les formes de degré q, la formule de Weitzenbock s'écrit sous la même forme que 2.4.1. Seulement apparaît $J_q(r) \in \mathrm{End}(\Lambda^q(R^n))$ et qui est calculé à l'aide du tenseur de courbure complet.

Munissons $\Lambda^q(R^n)$ de sa structure euclidienne naturelle; alors $J_q(r)$ est une *matrice symétrique.* En effet l'identité:

$$(\Box\pi \mid \sigma)_{L^2} = (\pi \mid \Box\sigma)_{L^2}$$

entraîne

$$(J_q(\cdot)\pi \mid \sigma)_{L^2} = (\pi \mid J_q(\cdot)\sigma)_{L^2}$$

d'où

$$(J_q(r)\,\pi_r \mid \sigma_r) = (\pi_r \mid J_q(r)\,\sigma_r).$$

3. Intégrales Multiplicatives [9]

Soit $A(t)$ une matrice carrée d'ordre n dépendant continument du paramètre t. Soit t_0 et t_0' appartenant à R, on note $[t_0, t_0']$ le segment défini par t_0 et t_0'. (On ne suppose pas $t_0 > t_0$). Soit n un entier, soit $l_n = (t_0' - t_0)/n$ et soit G_n le produit suivant:

$$G_n = (I + 1_n A(t_0))(I + 1_n A(t_0 + 1_n)) \cdots (I + 1_n A(t_0' - 1_n)).$$

Alors G_n tend vers une limite quand n tend vers ∞. On définit alors l'intégrale multiplicative

$$\exp\left(* \int_{[t_0, t_0']} A(t)\,dt\right) = \lim_{n\to+\infty} G_n\,.$$

Posons

$$V(t_0, t_0') = \exp\left(* \int_{[t_0, t_0']} A(t)\,dt\right)$$

alors, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t_0} &= -A(t_0)\,V(t_0, t_0'), \\ \frac{\partial V}{\partial t_0'} &= V(t_0, t_0')\,A(t_0'). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Comme $V(t_0, t_0) = I$, l'intégrale multiplicative n'est rien d'autre que la résolvante d'équations différentielles matricielles. Remarquons enfin que

$$\exp\left(* \int_{[t_0, t_0']} A\right) \exp\left(* \int_{[t_0', t_0'']} A\right) = \exp\left(* \int_{[t_0, t_0'']} A\right). \tag{3.2}$$

En particulier l'inverse de l'intégrale multiplicative sur $[t_1, t_2]$ est l'intégrale multiplicative sur $[t_2, t_1]$.

Par contre, il n'existe pas en général de relations simples entre l'intégrale multiplicative de A et celle de $-A$.

4. La Diffusion Horizontale sur $O(M)$

On note $\Omega_{r_0}(O(M))$ l'espace de probabilité des trajectoires $r_\omega(t)$ de la diffusion sur $O(M)$, associée à $\Delta_{O(M)}$, partant du point r_0.

Notons également par $\Omega_{x_0}(M)$ l'espace de probabilité des trajectoires $x_\omega(t)$ de la diffusion sur M, associée à Δ_M, partant du point x_0. Soit enfin $P_t(r_0, dr)$ et $p_t(x_0, dx)$ les probabilités de transition de ces deux processus.

4.1 Théorème. *La projection $r_\omega(t) \to p(r_\omega(t))$ réalise une bijection préservant la mesure de probabilité entre $\Omega_{r_0}(O(M))$ et $\Omega_{x_0}(M)$.*

Preuve. [4].

4.2 Remarques. La connection sur $O(M)$ permet de relever toute courbe *différentiable* sur M en une courbe horizontale sur $O(M)$. Le théorème précédent énonce le même résultat pour la courbe brownienne $x_\omega(t)$.

D'autre part, ce relèvement permet de définir un repère mobile le long de la courbe brownienne. Ceci constitue le déplacement parallèle stochastique de Ito [5].

Dans le cas où M est sans courbure, alors localement $O(M) \simeq O(n) \times M$; le relèvement s'effectue trivialement: $x_\omega(t) \to (r_0, x_\omega(t))$; et $P_t(r_0, dr)$ est une mesure qui ne charge que $\{r_0\} \times M$,

4.3. On dira que le tenseur de courbure de M est *non dégénéré si* $\{[A_i, A_r], A_k\}$ $(1 \leqslant i, j, k \leqslant n)$ engendrent l'espace tangent à $O(M)$. Dans ce cas, $\Delta_{O(M)}$ est un opérateur semi-elliptique au sens de J. J. Kohn.

Proposition. *Si le tenseur de courbure est non dégénéré, $P_t(r_0, dr)$ s'écrit $P_t(r_0, r)\, dr$ où dr est la mesure de volume sur $O(M)$ et où $P_t(r_0, r)$ est une fonction C^∞ $(t > 0)$.*

Preuve. Estimées hypoelliptiques de Hörmander.

Remarque. Dans la suite nous ne supposons pas que la courbure est non dégénérée.

5. Semi-Groupe de la Chaleur sur les Formes

5.1. *Equation de la Chaleur*

On se donne une forme $\pi \in \Lambda^1(M)$ et on cherche $\theta_t \in \Lambda^1(M)$ dépendant du paramètre $t \in R^+$ et vérifiant l'équation de la chaleur

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_t}{\partial t} &= -\Box \theta_t, \\ \theta_0 &= \pi. \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

En posant $f_{\theta_t} = h_t$ et $f_\pi = u$ et en utilisant 2.3.1 et 2.4, l'équation (5.1.1) se traduit ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_t}{\partial t} &= \Delta_{O(M)} h_t + J h_t, \\ h_0 &= u. \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

5.2 *Noyau résolvant*

Soit A une partie borélienne de $O(M)$. On note

$$R_t^J(r_0, A) = E_{r_0}\left[\exp\left(* \int_{[0,t]} J(r_\omega(\xi))\, d\xi\right) \mathbf{1}_A(r_\omega(t))\right] \tag{5.2.1}$$

où E_{r_0} dénote l'espérance, c'est-à-dire l'intégration sur $\Omega_{r_0}(O(M))$ et où 1_A dénote la fonction indicatrice de A.

On peut considérer que $R^J(r_0, A)$ définit une mesure sur $O(M)$ à valeurs matricielles, mesure que l'on notera $R^J(r_0, dr)$, c'est-à-dire

$$R^J(r_0, A) = \int_A R^J(r_0, dr).$$

On munit l'espace des matrices d'ordre n, de la norme d'endomorphisme de l'espace euclidien R^n. On note:

$$\mathbf{R}_t^J(r_0, A) = E_{r_0}\left(\left\| \exp\left(* \int_{[0,t]} J(r_\omega(\xi))\, d\xi\right)\right\| \cdot \mathbf{1}_A(r_\omega(t))\right)$$

alors

$$\| R_t^J(r_0, A)\| \leqslant \mathbf{R}_t^J(r_0, A).$$

5.2.2 Lemme. *Soit* $\lambda(x) = \sup(\text{spectre } J(r_0))$ *où* $r_0 \in p^{-1}(x)$. *Alors*

$$\mathbf{R}_t^J(r_0, A) \leqslant E_x[e^{\int_0^t \lambda(x_\omega(\xi))\, d\xi} \cdot \mathbf{1}_A(x_\omega(t))].$$

En particulier

$$\mathbf{R}_t^J(r_0, A) \leqslant e^{dt} \qquad \textit{où} \qquad d = \sup \lambda(x).$$

Preuve. Soit r_0 et r_0' appartenant à $p^{-1}(x)$; alors $J(r_0)$ et $J(r_0')$ sont transmuées l'une de l'autre par une transformation orthogonale et par suite, elles ont mêmes valeurs propres.
Posons

$$V(t) = \exp\left(*\int_{[0,t]} J(r(\xi))\, d\xi\right) \qquad \text{et} \qquad v(t) = \| V(t) \|$$

alors

$$v(t+\epsilon) - v(t) \leqslant \| V(t+\epsilon) - V(t) \|$$

et en utilisant 3.1

$$v'(t) \leqslant \| V(t)\, J(r(t)) \| \leqslant v(t) \, \| J(r(t)) \| \leqslant \lambda(r(t))\, v(t)$$

d'où l'inégalité demandée.

5.2.3 Corollaire. *Si M est une variété compacte, alors*

$$\mathbf{R}_t(r_0, dr) = k_t\, dr$$

où $\| k_t \|_{L^\infty} = O(e^{dt})$ *quand t tend vers* $+\infty$.

Nous dirons que $R(r_0, A)$ est *définie* si l'intégrale sur $\Omega_{r_0}(O(M)$ figurant en (5.2.1), converge au sens de Lebesgue vectoriel, c'est-à-dire si tous les coefficients de la matrice $R(r_0, A)$ sont donnés par des intégrales absolument convergentes. Alors $R(r_0, A)$ est *définie* si et seulement si $\mathbf{R}(x_0, A) < +\infty$.

5.2.4 Lemme. *Supposons que*

$$\int_{O(M)} \mathbf{R}_t(r_0, dr)\, \mathbf{R}_{t'}(r, A) < +\infty$$

alors

$$R_{t+t'}(r_0, A) \textit{ est définie et on a} \tag{5.2.5}$$

$$R_{t+t'}(r_0, A) = \int_{O(M)} R_t(r_0, dr)\, R_{t'}(r, A) \tag{5.2.6}$$

(le produit des deux noyaux dans le second membre est pris au sens des matrices).

Preuve. Notons par $\Omega^{t''}$ l'espace de probabilité des trajectoires de la diffusion considérée, sur l'intervalle de temps $[0, t'']$. Considérons

$$(\Omega^t_{r_0}, \Omega^{t'}_{r_\omega(t)}) \to \Omega^{t+t'}_{r_0}$$

définie en décrivant d'abord r_ω sur $[0, t]$, puis en repartant du point $r_\omega(t)$, décrivant r_{ω_1} pendant le temps $[t, t+t']$, où $\omega_1 \in \Omega r_\omega(t)$.

La propriété de Markov signifie que cette application conserve la mesure. Utilisons ce fait et (3.2), on obtient si $\omega_1 \in \Omega_{r_\omega}(t)$

$$\exp\left(* \int_{[0,t]} J(r_\omega(\xi))\, d\xi\right) \exp\left(* \int_{[0,t']} J(r_{\omega_1}(\xi))\, d\xi\right)$$
$$= \exp\left(* \int_{[0,t+t']} J(r_\omega(\xi))\, d\xi\right).$$

Prenons les normes des deux membres et l'espérance E_{r_0}, on obtient:

$$\int_{O(M)} \mathbf{R}_t(r_0, dr)\, \mathbf{R}_{t'}(r, A) \geqslant \mathbf{R}_{t+t'}(r_0, A) \tag{5.2.7}$$

Alors (5.2.7) implique (5.2.6). On obtient (5.2.6) en évitant de prendre les normes et en calculant E_{r_0}.

5.3. Le Semi-Groupe $e^{t\Box}$

Pour tout $t > 0$, notons

$$W_t^1 = \left\{u \in C(O(M), \mathbf{R}) \text{ tel que } \int \mathbf{R}_t^J(r_0, dr)\, \| u(r)\| < +\infty \right.$$
$$\left. \text{pour tout} \quad r_0 \in O(M)\right\},$$
$$W_t = \{u \in C(O(M), R^n) \text{ tel que } \| u \| \in W_t^1\}.$$

Si $u \in W_t$, définissons $S_t u$ par

$$(S_t u)(r_0) = \int_{O(M)} R_t^J(r_0, dr)\, u(r) \quad \text{et} \quad (S_t^1 u)(r_0) = \int_{O(M)} \mathbf{R}_t^J(r_0, dr)\, \| u(r)\|.$$

5.3.1 Théorème. *Si $u \in W_t$ et si $S_t^1(u) \in W_{t'}^1$, alors $u \in W_{t+t'}$ et*

$$S_{t'}(S_t u) = S_{t+t'}(u). \tag{5.3.2}$$

Si u est de classe C^2 et si $u \in W_t$ $(0 < t < \epsilon)$ on a

$$\lim_{t\to 0} \frac{(S_t u - u)}{t}(r_0) = (\Delta_{O(M)} u)(r_0) + J(r_0)\, u(r_0). \tag{5.3.3}$$

Preuve. D'après (5.2.7),

$$\int \mathbf{R}^J_{t+t'}(r_0\,, dr) \, \| u(r) \| \leqslant \iint \mathbf{R}^J_{t'}(r_0\,, dr_1) \, \mathbf{R}^J_t(r_1\,, dr) \, \| u(r) \|$$

$$\leqslant \int \mathbf{R}_{t'}(r_0\,, dr_1)(S_t^1 u)(r_1) < +\infty$$

d'où $u \in W_{t+t'}$.

D'autre part (5.2.6) donne (5.3.2). Calculons maintenant le générateur infinitesimal.

$$(S_t u - u)(r_0) = E_{r_0}\left[\exp\left(* \int_{[0,t]} J(r_\omega(\xi))\, d\xi\right) u(r_\omega(t)) - u(r_0)\right]$$

$$= E_{r_0}[u(r_\omega(t)) - u(r_0)] + t J(r_0)\, u(r_0) + t\epsilon_\omega(t).$$

où $E(\,|\epsilon_\omega(t)|) \to 0$ lorsque $t \to 0$. On obtient (5.3.3) compte tenu du fait que

$$t^{-1} E_{r_0}(u(r_\omega(t)) - u(r_0)) \to (\Delta_{O(M)} u)(r_0).$$

5.3.4 Corollaire. *Les notations étant celles de l'équation de la chaleur* (5.1.2), *supposons que* $u \in W_t$ $0 < t < t_0$, *alors*

$$h_t(r_0) = E_{r_0}\left[\exp\left(* \int_{[0,t]} J(r_\omega(\xi))\, d\xi\right) u(r_\omega(t))\right], \qquad 0 < t < t_0$$

est une solution de l'équation 5.1.2.

Preuve. $h_{t_0+\epsilon} - h_{t_0} = (S_\epsilon - I)\, h_{t_0}$ d'après (5.3.2) $\epsilon^{-1}(S_\epsilon - I) h_{t_0} = \Delta_{O(M)} h_{t_0} + J h_{t_0}$ d'après (5.3.3).

5.3.6 *Remarque.* Si M est compacte, alors $u \in W_t$ pour tout t d'après (5.2.3) et (5.3.4) donne, pour tout $t > 0$, une solution de (5.1.2).

6. Formules de la Moyenne

Théorème. *Soit M une variété riemannienne compacte, π une forme harmonique appartenant à $\Lambda^1(M)$, alors pour tout t et tout r_0*

$$f_\pi(r_0) = \int_{O(M)} R_t^J(r_0\,, dr) f_\pi(r). \tag{6.1}$$

Preuve. D'après (5.3.6), $f_\pi \in W_t$ et le second membre de (6.1) est toujours défini. D'autre part, le problème de Cauchy pour (5.1.2), l'équation de la chaleur définie sur une variété compacte admet une solution unique. Comme on a la solution évidente $h^1(r, t) = f_\pi(r)$, on a $h = h^1$, c'est-à-dire (6.1).

6.2. Théorème d'Annulation—(Cas Compact). *Soit M une variété riemannienne, orientable, compacte. Supposons que pour tout $r_0 \in O(M)$, il existe t_0 tel que*

$$\mathbf{R}_{t_0}(r_0, O(M)) < 1, \tag{6.2.1}$$

alors $H^1(M; \mathbf{R}) = 0$

Preuve. Soit π une forme harmonique de degré 1. Soit r_0 tel que $\|f_\pi(r_0)\| = \max \|f_\pi(r)\|$. Écrivons (6.1), on a

$$\|f_\pi(r_0)\| \leqslant \int \mathbf{R}^J_{t_0}(r_0, dr) \|f_\pi(r)\|$$

d'où

$$\|f_\pi(r_0)\| \leqslant \|f_\pi(r_0)\| \, \mathbf{R}^J_{t_0}(r_0, O(M))$$

d'où $\|f_\pi(r_0)\| = 0$.

7. Équations de Perturbation

Nous allons adapter à notre situation l'équation intégrale de Darling–Siegert [2]. Soient deux fonctions J_1 et J_2 sur $O(M)$ à valeurs matricielles. Posons, pour $s \in \mathbf{C}$

$$\hat{R}^{J_i}_s(r_0, dr) = \int_0^{+\infty} R^{J_i}_t(r_0, dr)\, e^{-st}\, dt, \qquad i = 1, 2.$$

7.1. Proposition. *Soient M une variété compacte, alors*

$$\hat{R}^{J_1}_s(r_0, A) - \hat{R}^{J_2}_s(r_0, A) = \int_{O(M)} \hat{R}^{J_1}_s(r_0, dr_1)(J_1(r_1) - J_2(r_1))\, \hat{R}^{J_2}_s(r_1, A)$$

Preuve. La variété M étant supposés compacte, toutes les intégrales convergent si Re s est assez grand d'après (5.2.3); soit $\omega \in \Omega_{r_0}$, posons

$$U(\omega, \eta) = \exp\left(* \int_{[0,\eta]} J_1(r_\omega(\xi))\, d\xi\right) \exp\left(* \int_{[\eta,t]} J_2(r_\omega(\xi))\, d\xi\right) \mathbf{1}_A(r_\omega(t))$$

On dérive par rapport à η, en utilisant 3.1:

$$U'(\omega, \eta) = \exp\left(* \int_{[0,\eta]} J_1\right) [J_1(r_\omega(\eta)) - J_2(r_\omega(\eta))] \exp\left(* \int_{[\eta,t]} J_2\right) \mathbf{1}_A(r_\omega(t))$$

On prend l'espérance E_{r_0} en conditionnant sur $r_\omega(\eta)$, on obtient

$$E_{r_0}(U'(\eta)) = \int_{O(M)} R_\eta^{J_1}(r_0, dr_1)(J_1(r_1) - J_2(r_1))\, R_{t-\eta}^{J_2}(r_1, A)$$

d'où en intégrant en η

$$E_{r_0}[U(t) - U(0)] = \int_{O(M)} \int_0^t R_\eta^{J_1}(r_0, dr_1)(J_1(r_1) - J_2(r_1))\, R_{t-\eta}^{J_2}(r_1, A)\, d\eta.$$

La transformée de Laplace en t transforme le produit de convolution en η en un produit usuel, d'autre part

$$U(t) = \exp\left(* \int_{[0,t]} J_1\right) 1_A(r_\omega(t)) \qquad \text{et} \qquad U(0) = \exp\left(* \int_{[0,t]} J_2\right) 1_A(r_\omega(t))$$

d'où l'équation intégrale proposée.

7.2. *Application de l'Équation de Perturbation*

Introduisons $|J| = (J^2)^{1/2}$. C'est-à-dire $|J|$ est la matrice symétrique positive vérifiant $(|J|)^2 = J^2$. On pose

$$J^+ = \tfrac{1}{2}(J + |J|),$$
$$J^- = \tfrac{1}{2}(J - |J|).$$

J^- est alors une matrice négative.

On obtient, en remplacant dans la proposition 7.1, J^1 par J^- et J_2 par J,

$$\hat{R}_s^J(r_0, A) + \int_{O(M)} \hat{R}_s^{J-}(r_0, dr)\, J^+(r)\, \hat{R}_s^J(r_1, A) = \hat{R}_s^{J-}(r_0, A). \qquad (7.2.1)$$

On peut considérer (7.2.1) comme une équation intégrale permettant de calculer $\hat{R}_s^J$ à partir de $\hat{R}_s^{J-}$. Or J^- étant négative, sous des hypothèses convenables, on aura que R_t^{J-} décroit exponentiellement en t. Il faudra traduire ceci sur $\hat{R}_s^{J-}$, ce qui est immédiat, et ensuite, utiliser l'information sur $\hat{R}_s^{J-}$ pour passer à R_t^J.

Il sera commode de pouvoir travailler sur des fonctions positives; ceci sera possible par la méthode des équations majorantes de Cauchy.

7.3. *Méthode des Équations majorantes de Cauchy*

Posons $\mathbf{J}^+(r) = \| J^+(r)\|$ et

$$\hat{\mathbf{R}}_s^J = \int_0^{+\infty} \mathbf{R}_t^J e^{-st}\, dt.$$

7.3.1 PROPOSITION. *Pour s réel positif, on a*

$$\mathbf{R}_t^J(r_0, A) \leqslant \mathbf{R}_t^{J^-}(r_0, A) + \int_0^t \int_{O(M)} \mathbf{R}_\eta^{J^-}(r_0, dr)\, \mathbf{J}^+(r)\, \mathbf{R}_{t-\eta}^J(r, A)\, d\eta.$$

Preuve. On garde les notations de (7.1) en posant $J_2 = J$ et $J_1 = J^-$ et soit

$$\mathbf{U}_{(\eta)} = \| U(\eta) \|$$

alors

$$\left| \frac{d\mathbf{U}}{d\eta} \right| \leqslant \left| \frac{dU}{d\eta} \right| \qquad \text{d'où} \qquad \mathbf{U}(0) \leqslant \mathbf{U}(t) + \int_0^t \left| \frac{dU}{d\eta} \right| d\eta$$

d'où

$$\mathbf{U}(0) \leqslant \mathbf{U}(t) + \int_0^t \left\| \frac{dU}{d\eta} \right\| d\eta$$

d'autre part

$$\left| \frac{dU}{d\eta} \right| \leqslant \left| \exp\left(* \int_{[0,\eta]} J^- \right) \right| \mathbf{J}^+(r_\omega(\eta)) \left| \exp\left(* \int_{[\eta, t]} J \right) \right|.$$

On prend l'espérance E_{r_0}, et on obtient (7.3.1).

7.3.2 *Remarque.* Notons $\mathbf{R}_t^J(r_0, r)\, dr$ la dérivée de Radon–Nikodym de $\mathbf{R}_t^J(r_0, A)$ par rapport à dr et posons

$$R_t^J(O(M), r_0) = \int_{O(M)} \mathbf{R}_t^J(r, r_0)\, dr.$$

En retournant le temps, le processus, $r_\omega(t)$ étant défini avec dr comme mesure initiale, on obtient

$$R_t^J(O(M), r_0) = E_{r_0}\left(\left\| \exp\left(* \int_{[t,0]} {}^{t}J(r_\omega(\xi))\, d\xi \right) \right\| \right).$$

7.3.3 THÉORÈME. *Supposons que*

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{R}_t^{J^-}(O(M), O(M))\, dt < +\infty$$

et que, en posant

$$\gamma(t) = \sup_r J^+(r)\, \mathbf{R}_t^{J^-}(O(M), r)$$

on ait

$$\int_0^{+\infty} \gamma(t)\, dt < 1$$

alors $H^1(M) = 0$.

Preuve. Soit $\mathbf{S}_t$ l'opérateur sur $L^1(O(M))$ défini par:

$$(\mathbf{S}_t f)(r_0) = \int \mathbf{R}_t^{J-}(r_0, r)\, J^+(r) f(r)\, dr$$

alors

$$\| \mathbf{S}_t \|_{\mathrm{End}(L^1(O(M)))} = \gamma(t).$$

D'autre part, posons

$$k_t^J(r_0) = \mathbf{R}_t^J(r_0, O(M)) \text{ [resp } k_t^{J-}(r_0)]$$

alors

$$k_t^J \leqslant k_t^{J-} + \int_0^t \mathbf{S}_{t-\eta} k_\eta^J\, d\eta$$

d'où

$$\| k_t^J \|_{L^1} \leqslant \| k_t^{J-} \|_{L^1} + \int_0^t \gamma(t-\eta) \| k_\eta^J \|_{L^1}\, d\eta$$

les normes L^1 étant des normes dans $L^1(O(M))$. Intégrons en t sur $[0, R]$ et posons

$$a^J(R) = \int_0^R \| k_t \|_{L^1}\, dt$$

on obtient

$$a^J(R) \leqslant a^{J-}(R) + \left(\int_0^R \gamma(\xi)\, d\xi\right) a^J(R)$$

d'où

$$a^J(R) \leqslant a^{J-}(R) \left[1 - \int_0^{+\infty} \gamma(\xi)\, d\xi\right]^{-1}.$$

Cette majoration montre que $a^J(R)$ est borné lorsque R tend vers l'infini. Par suite il existe une suite $t_k \to +\infty$ telle que $\| k_{t_k}^J \|_{L^1} \to 0$. Utilisons

$$\mathbf{R}_{t_k+1}^J(r_0, r_1) \leqslant \int \mathbf{R}_{t_k}^J(r_0, r)\, \mathbf{R}_1^J(r, r_1)\, dr \tag{5.2.2}$$

on obtient

$$\max_{r_0, r_1} \mathbf{R}_{t_k+1}(r_0, r_1) \to 0$$

d'où le résultat en utilisant (6.2).

8. Un Exemple de Calcul de Pertubation Scalaire

8.1. *Notion de bonne Connexion*

La variété M peut être une variété connexe, mais néanmoins composée de deux "parties très différentes" reliées par "un tube très mince." Il est clair qu'avec de tels exemples, il est difficile d'obtenir des résultats d'annulation à partir des seules hypothèses d'estimées en moyenne de la courbure. Soit M une variété compacte et soit $p_t(x, y)$ la solution élémentaire de l'équation de la chaleur sur M. On pose

$$k_M(t) = [\sup_{x,y} p_t(x, y)][\inf_{x,y} p_t(x, y)]^{-1}.$$

Alors $k_M(t) \to 1$ lorsque $t \to +\infty$. La rapidité avec laquelle $k_M(t) \to 1$ mesure "la bonne connexion" de M pour la chaleur.

8.2 Théorème. *Soit M une variété compacte. Notons par $\delta(x)$ la plus petite valeur propre du tenseur de Ricci en $x \in M$. Posons*

$$\delta(x) = \delta^+(x) + \delta^-(x) \qquad \text{ou} \qquad \delta^+(x) = \frac{\delta(x) + |\delta(x)|}{2}.$$

Supposons $\delta^+ \not\equiv 0$. Posons

$$R = \inf_t \left(t + \frac{k_M(t)}{\| \delta^+ \|_{L^1}} e^{t\|\delta^+\|_{L^\infty}}\right).$$

Alors

$$\| \delta^- \|_{L^\infty} R < 1$$

entraîne $H^1(M) = 0$.

Remarque. Il suffit de connaître k_M en une seule valeur de t, soit t_0 pour majorer R et ainsi obtenir un résultat d'annulation.

8.3 Lemme. *Soit $-J$ le tenseur de Ricci, alors*

$$\left\| \exp\left(*\int_{[0,t]} J^-(r_\omega(\xi))\, d\xi\right)\right\| \leqslant \exp\left(-\int_0^t \delta^+(r_\omega(\xi))\, d\xi\right)$$

où $\delta^+(r) = \delta^+(p(r))$.

Preuve. (5.2.2).

8.4 LEMME. *Soit $x_\omega(\xi)$ le brownien sur M, posons*

$$Q_t^{\delta^+}(x_0) = E_{x_0}\left[e^{-\int_0^t \delta^+(x_\omega(\xi))\,d\xi}\right]$$

alors

$$\mathbf{R}_t^{J^-}(O(M), r_0) \leqslant Q_t^{\delta^+}(p(r_0)).$$

Preuve. (8.3); (4.1); et (7.3.2).

8.5 LEMME. *Soit $\hat{Q}_s^{\delta^+}$ la transformée de Laplace en t de $Q_t^{\delta^+}$. Alors on a*

$$\int_M \delta^+(x)\,\hat{Q}_0^{\delta^+}(x)\,dx = 1.$$

Preuve. Comme $\delta^+ \not\equiv 0$, on a

$$\limsup_{t\to+\infty} t^{-1}\log \| Q_t^{\delta^+} \|_{L^\infty} < 0$$

par suite $\hat{Q}_s^{\delta^+}$ est continue en $s = 0$.

Écrivons l'équation 7.1 de Kac–Darling–Siegert; avec $J_1 = 0$, $J_2 = -\delta^+$, on obtient:

$$\hat{Q}_s^{\delta^+}(x_0) = s^{-1} - \int_M \hat{P}_s(x_0, x)\,\delta^+(x)\,\hat{Q}_s^{\delta^+}(x)\,dx.$$

Multiplions par s les deux membres et faisons tendre s vers zéro. Alors

$$s\hat{Q}_s^{\delta^+} \to 0 \qquad \text{et} \qquad s\hat{p}_s(x_0, x) \to 1;$$

d'où le lemme.

8.6. LEMME.

$$\| Q_t^{\delta^+} \|_{L^\infty} \leqslant k(t)\, e^{t_0 \|\delta^+\|_{L^\infty}} \min_x Q_t(x)$$

pour tout $t_0 < t$.

Preuve. Si $R_t^{\delta^+}$ est le noyau résolvant, on a

$$\int R_{t_0}^{\delta^+}(x, dy)\, Q_{t-t_0}^{\delta^+}(y) = Q_t^{\delta^+}(x)$$

d'où

$$\|Q_t^{\delta^+}\|_{L^\infty} \leqslant \|Q_{t-t_0}^{\delta^+}\|_{L^1} \max_{x,y} R_{t_0}^{\delta^+}$$

$$\min_x Q_t^{\delta^+}(x) \geqslant \|Q_{t-t_0}^{\delta^+}\|_{L^1} \min_{x,y} R_{t_0}^{\delta^+}(x, y),$$

Enfin

$$e^{-t_0\|\delta^+\|_{L^\infty}} \leqslant \frac{R_{t_0}^{\delta^+}(x, y)}{p_t^0(x, y)} \leqslant 1.$$

8.7 LEMME. *On a si, $t > t_0$,*

$$\|Q_t^{\delta^+}\|_{L^\infty(M)} \leqslant \|\delta^+\|_{L^1(M)}^{-1} k(t_0)\, e^{t_0\|\delta^+\|_{L^\infty}} \int_M Q_t^{\delta^+}(x)\, \delta^+(x)\, dx.$$

Preuve.

$$\int_M Q_t^{\delta^+}(x)\, \delta^+(x)\, dx \geqslant \|\delta^+\|_{L^1(M)} \min_x Q_t^{\delta^+}(x).$$

On applique alors (8.6).

8.8 *Preuve du théorème* 8.2. On a

$$\int_0^{+\infty} \|Q_t^{\delta^+}(x)\|_{L^\infty} dt \leqslant \int_0^{t_0} \|Q_t^{\delta^+}(x)\|_{L^\infty} dt + \int_{t_0}^{+\infty} \|Q_t^{\delta^+}(x)\|_{L^\infty} dt.$$

On majore la première intégrale par t_0, la seconde en tenant compte de (8.4) par

$$\|\delta^+\|_{L^1}^{-1} e^{t_0\|\delta^+\|_{L^\infty}}.$$

On applique alors (8.3) et (7.3).

BIBLIOGRAPHIE

1. BOCHNER AND YANO, "Curvature and Betti Numbers," Princeton University Press, Princeton, NJ, 1953.
2. DARLING AND SIEGERT, *Proc. Nat. Acad. (Washington)* (1956), 525.
3. EELLS AND ELWORTHY, "Stochastic Developpement," Warwick Seminar, 1970–1971.
4. J. EELLS AND P. MALLIAVIN, Diffusion on Riemannian bundles, à paraître.
5. ITO, Stochastic parallel transport, Internat. Congr. Math. Stockholm, 1962.
6. M. KAC, "Second Symposium of Probability," Univ. California, Berkeley, CA, 1952.
7. P. MALLIAVIN, Géométrie Riemannienne stochastique, Séminaire Jean Leray, Collège de France 1974.

8. MORROW AND KODAIRA, "Complex Manifolds," New York, 1971.
9. NIJENHUIS, *Kon. Nederlandse Aka.* (1963), 235.
10. PINSKY, *Trans. Amer. Math. Soc.* **167** (1972), 89–113.
11. DE RHAM, "Variétés Différentiables," Paris, 1956.
12. STROOCK, *Comm. Pure Appl. Math.* **23** (1970), 447–457.