JOURNAL OF ALGEBRA **87**, 202–212 (1984)

Modules projectifs sur les anneaux de fonctions

MICHEL CARRAL

Département de Mathématique, Université Paul Sabatier, 118, Route de Narbonne 31062 Toulouse Cédex, France

Communicated by Richard G. Swan

Received December 1, 1982

Dans [10] Lønsted a montré que les fibrés vectoriels sur un CW-complexe fini pouvaient être représentés par les modules projectifs de type fini d'un anneau noetherien. Swan, dans [15], donne une preuve plus élémentaire de ce résultat ainsi qu'une construction de ces anneaux, construction basée sur le fait qu'un nombre fini de fibrés vectoriels permet d'obtenir la totalité des fibrés vectoriels sur l'espace considéré. Dans cet article on remplace cette condition de type fini par une condition topologique, condition satisfaite par une plus grande classe d'espaces. En outre cette condition permet de construire effectivement les anneaux noethériens voulus sans avoir à expliciter les fibrés vectoriels servant de générateurs.

Des anneaux possédant ce genre de propriété ont été étudiés par B. Dayton et C. Weibel [6], S. Landsburg [8], A. Geramita et L. G. Roberts [11], etc.

De par l'équivalence de catégorie entre les fibrés vectoriels sur un espace compact X et les modules projectifs de type fini sur $C(X, k)$, où $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'anneau des fonctions continues de X à valeur dans k on montrera le résultat pour les modules projectifs de type fini de $B_k = C(X, k)$ où X est compact.

Soit A un anneau, on notera A^* l'ensemble des éléments inversibles de A et $\mathfrak{P}(A)$ la classe, à isomorphisme près, des A-modules projectifs de type fini.

THÉORÈME DE COMPARAISON 1.1 [7, 15]. *Soient A et B deux anneaux unitaires et φ: $A \to B$ un homomorphisme tel que $\varphi(1) = 1$. On suppose satisfaites les conditions suivantes:*

(i) *B est un anneau topologique, B^* est ouvert dans B, et $u \leadsto u^{-1}$ est continue sur B^*,*

(ii) *$\varphi(A)$ est dense dans B,*

(iii) *Si $\varphi(a)$ est suffisamment prés de 1 dans B, l'élément a appartient à A^*.*

0021-8693/84 $3.00

Alors l'application $P(\varphi)$: $\mathfrak{P}(A) \to \mathfrak{P}(B)$ définie par $(P) \rightsquigarrow (B \otimes_A P)$ est injective.

Dans la suite les anneaux considérés sont commutatifs unitaires, $V(\ )$ et $D(\ )$ représentent les fermés, respectivement les ouverts de $(\ )$ pour la topologie de Zariski et

$$V_M(\ ) = V_{\max A}(\ ) = V(\ ) \cap \operatorname{Max} A,$$
$$D_M(\ ) = \mathrm{D}_{\operatorname{Max} A}(\ ) = D(\ ) \cap \operatorname{Max} A$$

où $\operatorname{Max} A$ est le spectre maximal de A. Pour un idéal $(\ )$ de A on note $\bar{z}^{(\ )}$ la classe de l'élément z modulo $(\ )$.

PROPOSITION 1.2. *Soient $\mathfrak{b}$ un idéal de B_k, $M = (b_{ij})$ une matrice de $GL(m, B_k/\mathfrak{b})$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $E = (e_{ij})$ est une matrice de $M(m, B_k)$ avec norme $e_{ij} < \varepsilon$ pour tout i, j, il existe N de $GL(m, B_k)$ vérifiant $\bar{N}^{\mathfrak{b}} M = M + \bar{E}^{\mathfrak{b}}$.*

En effet M^{-1} se relève en une matrice M' de $M(m, B_k)$, et il suffit de prendre $N = 1 + EM'$. Pour ε suffisamment petit N sera une matrice inversible.

2. UN SOUS-ANNEAU DE $C(X, k)$

Dans ce paragraphe A désigne un sous-anneau dense de B_k tel que $i^{-1}(B_k^*) = A^*$, où i: $A \to B$ désigne l'injection canonique. On note rad$(\ )$ l'intersection des idéaux maximaux contenant l'idéal $(\ )$.

LEMME 2.1. *Soient $\mathfrak{a}$ un idéal de A et $\bar{\imath}$: $A/\mathfrak{a} \to B_k/\mathfrak{a}B_k$ l'application canonique, alors $\bar{\imath}^{-1}|(B_k/\mathfrak{a}B_k)^*| = (A/\mathfrak{a})^*$.*

Soit x un élément de A tel que $\bar{\imath}(\bar{x}^{\mathfrak{a}})$ appartienne à $(B_k/\mathfrak{a}B_k)^*$. Il existe y, élément de B_k, tel que $\bar{\imath}(\bar{x}^{\mathfrak{a}})\, \bar{y}^{\mathfrak{a}B_k} = 1$, i.e., il existe α élément de $\mathfrak{a}B_k$ tel que $i(x)\, y = 1 + \alpha$. D'où $\alpha = \sum_{j=1}^m i(t_j)\, y_j$ avec t_j élément de $\mathfrak{a}$ et y_j élément de B_k. On sait que $y = i(z) + \varepsilon$ et $y_j = i(y'_j) + \varepsilon_j$, pour $j = 1, m$, ou ε et $(\varepsilon_j)_{j=1,m}$ sont des éléments de norme aussi petite que l'on veut. Par suite l'élément $i(xz - \sum_{j=1}^m t_j y'_j) = 1 + \sum_{j=1}^m i(t_j)\, \varepsilon_j - i(x)\varepsilon$ ne s'annule jamais sur X si les normes des éléments ε et $(\varepsilon_j)_{j=1,m}$ sont suffisamment petites, i.e., l'élément $xz - \sum_{j=1}^m t_j y'_j$ appartient à A^* et $\bar{x}^{\mathfrak{a}}$ est un élément inversible de $A/\mathfrak{a}$.

PROPOSITION 2.2. *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A, l'application canonique i: $A/\mathfrak{a} \to B_k/\mathfrak{a}B_K$ induit une application injective de $\mathfrak{P}(A/\mathfrak{a})$ dans $\mathfrak{P}(B_K/\mathfrak{a}B_K)$.*

Il suffit de vérifier que l'application $\tilde{\imath}$: $A/\mathfrak{a} \to B_k/\mathrm{rad}(\mathfrak{a}B_k)$ satisfait les conditions du Théorème 1.1. La condition (i) est immédiate car $B_k/\mathrm{rad}(\mathfrak{a}B_k)$ est une algèbre de Banach commutative, (ii) est triviale et (iii) est vérifiée par le Lemme 2.1.

Remarques. (1) Dans ce cas l'application $\mathfrak{m}_x \rightsquigarrow \mathfrak{m}_x \cap A$, ou $\mathfrak{m}_x$ est un idéal maximal de B_k, de Max B_k dans Max A est bijective et permet de voir que $i^{-1}(\mathrm{rad}(\mathfrak{a}B_k)) = \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$ pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A.

(2) Considérons le cas ou A est noethérien, $\mathrm{Max}\, A \supset X$ et $k = \mathbb{R}$. Par exemple X est un compact de $\mathbb{R}^n$, et A contient l'anneau des fonctions polynomiales de X à valeur dans $\mathbb{R}$. Alors en tant qu'ensemble on a $\mathrm{Max}\, A = X$.

En effet, supposons qu'il existe un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A qui ne soit pas dans X. L'idéal $\mathfrak{m}$ serait engendré par un nombre fini de fonctions $(t_i)_{i=1,r}$ n'ayant pas de zéro en commun. L'élément $\sum_{i=1}^r t_i^2$, de $\mathfrak{m}$, ne s'annulant en aucun point de X serait inversible, ce qui est impossible.

De plus par L.N. Vaserstein [16] et R. G. Swan [15] on sait que le rang stable de A, est égal au rang stable projectif de A, est égal à $\dim X + 1$. Par suite $\dim A \geqslant \dim X$.

On a aussi pour tout idéal $\mathfrak{b}$ de $B_{\mathbb{R}}$: $\mathrm{Max}(B_{\mathbb{R}}/\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{b}) \cap \mathrm{Max}\, B_{\mathbb{R}}$.

(2′) Dans le cas où $k = \mathbb{C}$ on a les même conclusions si lorsqu' un élément f appartient à A, sont conjugué aussi. Et alors on a rang stable $A =$ rang stable projectif $A = [(\dim X)/2] + 1$ où $[\ ]$ désigne la partie entière. Par suite $\dim A \geqslant [(\dim X)/2]$.

Proposition 2.3. *Soient $\mathfrak{a}$ un idéal de A et M une matrice de $GL(m, B_k/\mathfrak{a}B_k)$. Il existe une matrice N de $GL(m, B_k)$ telle que $\bar{N}^{\mathfrak{a}B_k}M$ appartienne à $GL(m, \bar{\imath}(A/\mathfrak{a}))$, i.e., est image d'un élément de $GL(m, A/\mathfrak{a})$.*

On sait que l'on peut approcher tous les coefficients de M par un élément de $\bar{\imath}(A/\mathfrak{a})$ aussi près que l'on veut. On utilise la Proposition 1.2.

3. Construction d'un A-module projectif

On rappelle la construction de J. Milnor [12] pour les modules projectifs de type fini. Considérons un carré cartésien d'anneaux commutatifs avec j_2 surjectif:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_1} & A_1 \\ {\scriptstyle i_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_1} \\ A_2 & \xrightarrow{j_2} & A' \end{array}$$

Par "carré cartésien" on entend carré commutatif ($j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$), étant donné $\lambda_1 \in A_1$, $\lambda_2 \in A_2$ avec $j_1(\lambda_1) = j_2(\lambda_2)$ il existe λ unique de A tel que $i_1(\lambda) = \lambda_1$ et $i_2(\lambda) = \lambda_2$.

Construction. Considérons $(P_i)_{i=1,2}$ des A_i-modules projectifs de type fini et un A'-isomorphisme h: $j_{1\#}(P_1) \to j_{2\#}(P_2)$ $(j_{i\#}(P_i) = A' \otimes_{A_i} P_i)$. Soit $M = M(P_1, P_2, h)$ le sous-groupe de $P_1 \times P_2$ de toutes les paires (p_1, p_2) telles que $hj_{1*}(p_1) = j_{2*}(p_2)$ $(j_{1*}(p_i) = 1 \otimes p_i)$. Le sous-groupe M possède une structure de A-module en posant $\lambda(p_1, p_2) = (i_1(\lambda)p_1, i_2(\lambda)p_2)$ et on a:

(i) Let A-module M est projectif. De plus si P_1 et P_2 sont de type fini sur A_1 et A_2 respectivement, M est de type fini sur A.

(ii) Tout A-module projectif est isomorphe à un certain $M(P_1, P_2, h)$.

(iii) Les modules P_1 et P_2 sont naturellement isomorphes à $i_{1\#}(M)$ et $i_{2\#}(M)$ respectivement.

Soient A un sous-anneau de B_k, défini comme dans le paragraphe précédent et $(\mathfrak{a}_i)_{i=1,2}$ deux idéaux de A tels que $\mathfrak{a}_1 B_k + \mathfrak{a}_2 B_k = B_k$. Alors $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = A$. En effet, il existe $a_1 \in \mathfrak{a}_1$, $a_2 \in \mathfrak{a}_2$ et b_1, b_2 des éléments de B_k tels que $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 1$. Il suffit d'approximer b_1 et b_2 par des éléments de A suffisamment près.

En outre pour $(\mathfrak{a}_i)_{i=1,d}$ idéaux de A tels que $\bigcup_{i=1}^{d} V(\mathfrak{a}_i B_k) = \operatorname{Spec} B_k$ et $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{a}_i B_k$, on a:

PROPOSITION 3.1. *Considérons Q un B_k-module projectif de type fini tel que $Q/\mathfrak{b}_i Q$ soit $B_k/\mathfrak{b}_i$-libre de rang constant pour tout $i = 1, d$. Alors il existe P un A-module projectif de type fini, unique à isomorphisme près, tel que $B \otimes_A P \simeq Q$.*

On peut supposer Q de rang constant, et on construit le A-module projectif P, pas à pas, selon la construction de Milnor sur les fermés $V_i = V(\mathfrak{a}_i)$ de $\operatorname{Spec} A$. Sur chaque $V(\mathfrak{a}_i)$ de $\operatorname{Spec} A$, i.e., pour $A/\mathfrak{a}_i$, il est immédiat de le faire car $Q/\mathfrak{b}_i Q$ est $B_k/\mathfrak{b}_i$-libre, le problème est de recoller.

On raisonne par récurrence sur le nombre d de ces fermés. Soient $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{r-1} \mathfrak{a}_i$, i.e., $V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{i=1}^{r-1} V(\mathfrak{a}_i)$ dans $\operatorname{Spec} A$, et $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} B_k$. On suppose qu'il existe P_1 un $A/\mathfrak{a}$-module projectif de type fini tel que $B_k/\mathfrak{b} \otimes P_1 \simeq Q/\mathfrak{b}Q$ par un certain isomorphisme φ. On est dans la situation suivante:

$$
\begin{tikzcd}
B_k/\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}_r \arrow[r] \arrow[d] & B_k/\mathfrak{b} \arrow[d] \\
B_k/\mathfrak{b}_r \arrow[r] & B_k/\mathfrak{b} + \mathfrak{b}_k
\end{tikzcd}
$$

où $Q/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}_r)Q = M(Q', Q_r, h)$ avec $Q' = Q/\mathfrak{b}Q$ et $Q_r = Q/\mathfrak{b}_r Q$ et h un $B_k/(\mathfrak{b} + \mathfrak{b}_r)$-isomorphisme.

Donc $Q/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}_r)Q \simeq M(B_k/\mathfrak{b} \otimes P_1, B_k/\mathfrak{b}_r \otimes (A/\mathfrak{a}_r)^m, \bar{\psi}^{-1} \circ h \circ \bar{\varphi})$ si $\bar{\varphi}$ et $\bar{\psi}$ désignent les isomorphismes induit par φ et ψ dans $B_k/\mathfrak{b} + \mathfrak{b}_r$ $(Q_r \simeq (B_k/\mathfrak{b}_r)^m)$.

On peut choisir l'isomorphisme ψ de telle sorte que la matrice de ψ soit I_m.

Comme $Q/(\mathfrak{b} + \mathfrak{b}_r)Q$ est libre on a $P_1/(\mathfrak{a} + \mathfrak{a}_r)P_1$ module libre; cf. Proposition 2.2 Fixons une base de ce module, l'isomorphisme $h \circ \bar{\varphi}$ (si on veut $\bar{\psi}^{-1} \circ h \circ \bar{\varphi}$) se traduit par une matrice M de $GL(m, B_k/\mathfrak{b} + \mathfrak{b}_r)$, étant fixé aussi une base de Q_r. Il existe une matrice N de $GL(m, B_k/\mathfrak{b}_r)$ telle que $\bar{N}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{b}_r}M$ soit image d'une matrice M_1 de $GL(m, A/\mathfrak{a} + \mathfrak{a}_r)$. Comme la matrice N définit un $B_k/\mathfrak{b}_r$-isomorphisme ϕ de Q_r, on a:

$$Q/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}_r)Q \simeq M(B_k/\mathfrak{b} \otimes P_1, \phi(B_k/\mathfrak{b}_r \otimes (A/\mathfrak{a}_r)^m), \bar{\phi}^{-1} \circ \bar{\psi}^{-1} \circ h \circ \bar{\varphi}),$$

$$\text{ou } \bar{\phi}^{-1} \circ h \circ \bar{\varphi}$$

$$\simeq M(B_k/\mathfrak{b} \otimes P_1, B_k/\mathfrak{b}_r \otimes (A/\mathfrak{a}_r)^m, \bar{\phi}^{-1} \circ h \circ \bar{\varphi}).$$

Soit g le $A/\mathfrak{a} + \mathfrak{a}_r$-isomorphisme défini par la matrice M_1 dans ces bases, alors $P = M(P_1, (A/\mathfrak{a}_r)^m, g)$ est tel que $B/\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}_r \otimes P \simeq Q(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}_r)Q$.

Pour continuer la récurrence il suffit de remarquer que $P \otimes B \simeq Q/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}_r)B_k Q$ car $\operatorname{rad}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}_k)B_k = \operatorname{rad}(\mathfrak{a}B_k \cap \mathfrak{a}_r B_k)$ et, de ce fait, l'application $\mathfrak{P}(B_k/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}_r)B_k) \to \mathfrak{P}(B_k/\mathfrak{a}B_k \cap \mathfrak{a}_r B_k)$ est injective [2].

L'unicité étant affirmée par les conditions du théorème 1.1 pour terminer la démonstration il suffit de noter que $\bigcup_{i=1}^d V(\mathfrak{a}_i) = \operatorname{Spec} A$, i.e., $\bigcap_{i=1}^d \mathfrak{a}_i = 0$.

THÉORÈME 3.2. *L'anneau A étant défini comme précédemment, si pour tout B_k-module projectif Q, de type fini, il existe des idéaux $(\mathfrak{a}_i)_{i=1,d}$ de A tels que $\bigcup_{i=1}^d V(\mathfrak{a}_i B_k) = \operatorname{Spec} B_k$ et $Q/\mathfrak{a}_i B_k Q$ soit $B_k/\mathfrak{a}_i B_k$-libre de rang constant, pour tout $i = 1, d$ alors l'application canonique de $\mathfrak{P}(A) \to \mathfrak{P}(B_k)$ est bijective.*

Rappelons qu'un anneau B est dit de Gelfand [13], ou Mou [3], si Max B est compact (Hausdorff) pour la topologie de Zariski. L'anneau B_k, pour $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est de Gelfand. En utilisant la Proposition 4.4, on a:

COROLLAIRE 3.3. *Soient X un espace compact et A un sous-anneau de Gelfand dense de $C(X, k)$ tel que* $\operatorname{Max} A \simeq X$ *par l'homomorphisme canonique, alors A satisfait les conditions du Théorème* 3.2.

Par suite si X ext une variété différentiable compacte et $A = C_p(X, k)$, pour $p = 1, 2, \ldots, \infty$, est le sous-anneau des fonctions continues, à valeur dans k, p fois différentiables on a $\mathfrak{P}(A) \simeq \mathfrak{P}(C(X, k))$ par l'homomorphisme canonique.

Si X un espace compact de $\mathbb{R}^n$ et A le sous-anneau de $C(X, k)$ formé des fonctions polynomiales par morceaux, à valeur dans k, et leurs inverses quand ils existent, on a $\mathfrak{P}(A) \simeq \mathfrak{P}(C(X, k))$ par l'homomorphisme canonique.

Soient X un complexe simplicial fini de $\mathbb{R}^n$ et A le sous-anneau de $C(X, k)$ formé des fonctions qui sont polynomiales sur chaque cellule, et leurs inverses quand ils existent, alors $\mathfrak{P}(A) \simeq \mathfrak{P}(C(X, k))$ par l'homomorphisme canonique.

En effet un complexe simplicial fini est réunion finie de cellules contractiles définies par des polynômes.

On peut remarquer aussi, dans ce cas, que si X est suffisamment plongé dans un espace euclidien on peut utiliser les fonctions qui sont polynomiales globalement et inverser celles qui ne s'annulent en aucun point de X. Par exemple, il suffit d'avoir X contenu dans $\mathbb{R}^N$ avec $N \geqslant 1 + 2 \dim X$ et les sommets en position générale. Si les sommets sont linéairement indépendants l'anneau obtenu est le même.

4. Théorème de Lønsted

Comme un espace compact métrique de dimension finie peut toujours se plonger dans un $\mathbb{R}^n$, on obtient l'extension du théorème de Lønsted suivante:

Théorème 4.1. *Soit X un espace métrique compact de dimension finie. Si X est réunion finie de fermés $(F_i)_{i=1,n}$ tels que la restriction à chaque F_i de tout k-fibré sur X soit un fibré trivial de dimension constante, il existe un sous-anneau noethérien A_k de $B_k = C(X, k)$ tel que $\mathfrak{P}(A_k) \simeq \mathfrak{P}(B_k)$.*

Considérons les fonctions p_i de B_k définies par $p_i(x) = d(x, F_i)$, ou d est la distance du point x de X à F_i. On a $p_i^{-1}(0) = F_i$. Comme X peut-être considéré comme un sous-espace d'un certain $\mathbb{R}^n$ prenons A_k le sous-anneau de B_k engendré par les fonctions polynomiales de X à valeur dans k et les fonctions p_i pour $i = 1, n$, où on a rendu inversible les éléments ne s'annulant jamais sur X. Par le Théorème 3.2 on a $\mathfrak{P}(A_k) \simeq \mathfrak{P}(B_k)$ par l'homomorphisme canonique.

Théorème 4.2. *Soit X un espace métrique compact de dimension finie, réunion finie d'ouverts contractiles, respectivement de fermés contractiles. Il existe un sous-anneau noetherien A_k de $B_k = C(X, k)$ tel que $\mathfrak{P}(A_k) \simeq \mathfrak{P}(B_k)$ par l'homomorphisme canonique. De plus on peut choisir $A_\mathbb{C}$ tel que $A_\mathbb{C} \simeq A_\mathbb{R} \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$.*

Il suffit de remarquer que tout point possède un système fondamental de voisinages fermés, et on est ramené au Théorème 4.1.

Remarque. Une variété compacte de dimension n satisfait les conditions du Théorème 4.2.

Pour un anneau B on note $K_0(B)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des B-modules projectifs de type fini, on a de même:

THÉORÈME 4.3. *Soit X un compact de $\mathbb{R}^n$ tel que $K_0(B_k)$ soit de type fini. Il existe A_k un sous-anneau noethérien de B_k, tel que l'application canonique $\mathfrak{P}(A_k) \to \mathfrak{P}(B_k)$ soit bijective.*

En effet il existe un recouvrement fini d'ouverts de Spec B_k tel que les modules projectifs servant de générateurs, soient libres au-dessus de chacun d'eux, et on fait comme précédemment.

On peut améliorer cette construction, i.e., vouloir une indication sur la dimension de l'anneau A_k. La Proposition 4.4 permet d'affirmer que l'on peut exiger, dans le cas du Théorème 4.3 ou dans le cas où X est un compact de $\mathbb{R}^n$ réunion finie d'ouverts contractiles, pour A_k:

$$\dim X \leqslant \dim A_{\mathbb{R}} \leqslant \dim A_0 + \dim X + 1$$

et

$$\left[\frac{\dim X}{2}\right] \leqslant \dim A_{\mathbb{C}} \leqslant \dim A_0 + \left[\frac{\dim X}{2}\right] + 1$$

ou A_0 est le sous-anneau dense que l'on prend pour base de la construction de A_k.

Rappelons que pour une famille $(U_i)_{i \in I}$, de sous-ensembles d'un expace X, on dit que son ordre est $\leqslant n$ si l'intersection de $(n+2)$ éléments distincts est vide.

Considérons $\alpha = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement d'ouverts d'un espace topologique X. On dit qu'un recouvrement d'ouverts (resp. de fermés) $\beta = (V_j)_{j \in J}$ de X est un raffinement de α si chaque V_j est contenu dans un U_i (resp. si de plus la réunion des ensembles ouverts $\operatorname{Int}(V_j)$, pour $j \in J$, recouvre X). On écrit $\beta \leqslant \alpha$.

PROPOSITION 4.4. *Soient B un anneau de Gelfand, sans radical de Jacobson, et $(E_l)_{l \in L}$ un recouvrement d'ouverts de* Spec B *d'ordre d. Alors il existe $(d+1)$ fermés $V(\mathfrak{a}_j)$ recouvrant* Spec B *tels que $V(\mathfrak{a}_j)$ soit réunion finie disjointe de sous-ensembles fermés $V(\mathfrak{b}_j^\alpha)$ chacun contenu dans quelque E_l. De plus les idéaux $\mathfrak{b}_j^\alpha$ peuvent être choisis de type fini, donc aussi chaque $\mathfrak{a}_j$.*

On peut supposer L fini (Spec B est quasi-compact).

La famille $(E_l \cap \operatorname{Max} B)_{l \in L}$ est un recouvrement d'ouverts de Max B d'ordre $\leqslant d$, par suite on obtient les raffinements successifs suivant [4]:

$$(E_l \cap \operatorname{Max} B)_{l \in L} \geqslant ({}^{d+1}V^l)_{l \in L} \geqslant ({}^{d+1}D^l)_{l \in L} \geqslant \cdots \geqslant ({}^1V^l)_{l \in L}$$

où les ${}^rV^l$ sont des fermés de la forme $V_{\max B}(f)$ et les ${}^rD^l$ des ouverts de la forme $D_{\operatorname{Max} B}(g)$.

L'ordre des $(d+1)$ intersections des fermés $({}^{d+1}V^l)_{l \in L}$ est 0, chacune de ces intersections est contenue dans quelque E^l et est engendrée par un idéal de type fini $\mathfrak{b}^{\alpha}_{d+1}$. Notons $V_{\operatorname{Max} B}(\mathfrak{a}_{d+1})$ la réunion de celles-ci, $\mathfrak{a}_{d+1}$ peut être ainsi choisi de type fini.

Soit F le complémentaire dans $\operatorname{Max} B$ de la réunion des $(d+1)$ intersections distinctes des ouverts $({}^{d+1}D^l)_{l\in L}$. Alors $F = V_{\operatorname{Max} B}(\mathfrak{a})$ ou $\mathfrak{a}$ est un idéal de type fini et les ordres sur F des restrictions des familles $({}^{n}V^l)_{l\in L}$, $({}^{n}D^l)_{l\in L}$, avec $n \leqslant d$ sont d'ordre $\leqslant d-1$.

En continuant le même procédé sur F, avec les restrictions de ces familles et les d-intersections on obtient un recouvrement de $\operatorname{Max} B$ par des fermés $V_{\operatorname{Max} B}(\mathfrak{a}_j)$, réunion finie disjointe de sous-ensembles fermés $V_M(\mathfrak{b}^{\alpha}_j)$ chacun contenu dans quelque E_l, et tels que chaque $\mathfrak{b}^{\alpha}_j$ soit de type fini, donc aussi chaque $\mathfrak{a}_j$.

Il suffit de remarquer que si $V_{\operatorname{Max} B}(\mathfrak{b}^{\alpha}_j) \subset E_l$ alors $V(\mathfrak{b}^{\alpha}_j) \subset E_l$ et si V est un fermé tel que $V \cap \operatorname{Max} B = \operatorname{Max} B$ on a $V = \operatorname{Spec} B$ car B est sans radical de Jacobson.

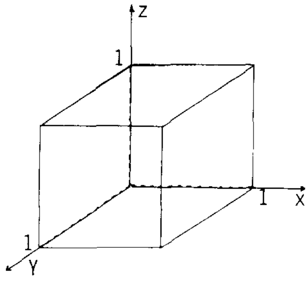
5. Un compact de $\mathbb{R}^3$

On montre qu'il existe un compact connexe X de $\mathbb{R}^3$ satisfaisant les conditions du Théorème 4.2 tel que $K_{\mathbb{R}}(X)$, $K_{\mathbb{C}}(X)$, $\operatorname{Pic}_{\mathbb{C}}(X)$ ne soient pas de type fini ($K_k(X)$ étant le groupe de Grothendieck correspondant au monoïde des classes d'isomorphismes des fibrés vectoriels sur X à valeur dans k).

On rappelle que si $(V_i)_{i=1,2}$ sont des fermés et si $(\xi_i)_{i=1,2}$ sont des k-fibrés vectoriels sur V_i tels que $\xi_1/V_1 \cap V_2 \simeq \xi_2/V_1 \cap V_2$ par un certain isomorphisme h il existe un k-fibré vectoriel ξ, unique à isomorphisme près, sur $V_1 \cup V_2$ tel que $\xi/V_i \simeq \xi_i$ et tout fibré ξ sur $V_1 \cup V_2$ s'obtient de cette manière. On note ξ par $\xi_1 \|/h\, \xi_2$ [1].

Les faces d'un cube C de $\mathbb{R}^3$ forment un espace topologique homéomorphe à S_2. Il suffit de faire la projection radiale de S_2 sur le cube exinscrit. Par suite les faces d'un parallélépipède rectangle forment un espace topologique P homotope à S_2 et on a $K_k(P) \simeq K_k(S_2)$ pour $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On en déduit que sur P il existe un k-fibré non stablement trivial $(\widetilde{K_k(S_2)} \neq 0)$.

On a:

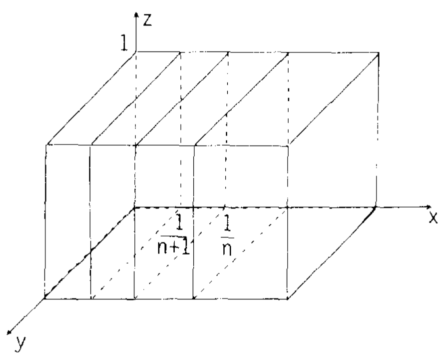


(C)

$$C = \{0\} \times [0, 1] \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{0\} \times [0, 1]$$
$$\cup [0, 1] \times [0, 1] \times \{0\} \cup \{1\} \times [0, 1] \times [0, 1]$$
$$\cup [0, 1] \times \{1\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times [0, 1] \times \{1\}$$

et $C_1 = \{(x, y, z) \in C / x \leqslant \frac{1}{2}\}$ et $C_2 = \{(x, y, z) \in C / x \geqslant \frac{1}{2}\}$. Les fermés $(C_i)_{i=1,2}$ sont contractiles et si ξ est un fibré sur C on a $\xi = \xi_1 \| / h\, \xi_2$ ou ξ_i est le fibré trivial sur C_i, de dimension celle de ξ, et h l'isomorphisme de recolement.

Soient $X_0 = \{1/n\}_{n \in N^*}$ et $X = C \cup X_0 \times [0, 1] \times [0, 1]$. Notons $X_{1,n} = X \cap \{(x, y, z)$ tels que $x \leqslant (2n+1)/2n(n+1)\}$ et $X_{2,n} = X \cap \{(x, y, z)$ tels que $x \geqslant (2n+1)/2n(n+1)\}$. Posons $P_n = X \cap \{(x, y, z)$ tels que $1/(n+1) \leqslant x \leqslant 1/n\}$ et $P_{i,n} = P_n \cap X_{i,n}$.

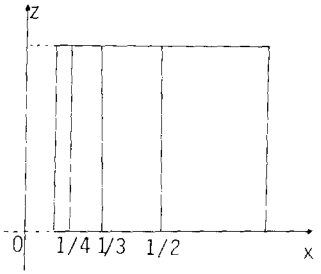


L'espace P_n est homotope à C et si ξ est un fibré sur C on peut construire, par homotopie, sur P_n un fibré ξ_n tel que $P_{i,n}$ corresponde à C_i et h_n à h, i.e., $\xi_n = \xi_{1,n} \| / h_n\, \xi_{2,n}$ ou $\xi_{i,n}$ est le fibré trivial sur $P_{i,n}$ de dimension celle de ξ. On en déduit que si ξ est non stablement trivial, il en est de même de ξ_n.

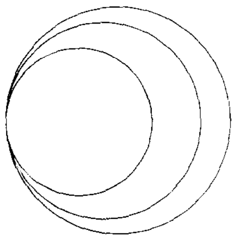
Construction de fibrés sur X. Le fibré $\xi_n = \xi_{1,n} \| / h_n\, \xi_{2,n}$ sur P_n étant donné on définit le fibré η_n sur X par $\eta_n = \eta_{1,n} \| / h_n\, \eta_{2,n}$ ou $\eta_{i,n}$ est le fibré trivial sur $X_{i,n}$ de dimension celle de ξ_n. Par suite η_n restreint à P_n est isomorphe à ξ_n, et il est clair que si pour tout n, ξ_n est non stablement trivial, on a η_n non stablement isomorphe à η_m pour tout $n \neq m$.

Il est alors facile de vérifier que $K_k(X)$ n'est pas de type fini et aussi qu'il existe un nombre infini de $\mathbb{R}$-fibrés sur X de dimension 2 stablement triviaux, non triviaux, et non isomorphes 2 à 2. De plus on a $K_{\mathbb{C}}(X) \simeq Z \oplus \mathrm{Pic}_{\mathbb{C}}(X)$.

Un autre exemple. Prenons comme espace Y l'espace X coupé à mi-hauteur par un plan parallèle au plan $(x \circ z)$ (cf. figure). On peut voir de même que $\mathrm{Pic}_{\mathbb{R}}(X)$ n'est pas de type fini bien que tout $\mathbb{C}$-fibré vectoriel soit trivial.



Note. Il est possible aussi de prendre, si l'on veut, une union de 2-sphères tangentes. (cf. dessin). Cet espace a le même type d'homotopie que $S^2 V \cdots V S^2$.



REFERENCES

1. M. ATIYAH, "*K*-Theory," Benjamin, New York.
2. H. BASS, "Algebraic *K*-Theory," Benjamin, New York.
3. R. BKOUCHE, Thèse, *Bull. Soc. Math. France* **98** (1970), 253–295.
4. M. CARRAL, *K*-Theory of Gelfand rings, *J. Pure Appl. Algebra* **17** (1980), 513.
5. B. DAYTON, "SK_1 of commutative Normed Algebras," Lecture Notes in Mathematics No. 551, Springer-Verlag, New York/Berlin.
6. B. DAYTON AND C. WEIBEL, "Spectral Sequence for the *K*-Theory of Affine Glued Schemes," Lecture Notes in Mathematics No. 854, Springer-Verlag, New York/Berlin.
7. E. G. EVANS, Projective modules as fiber bundles, *Proc. Amer. Math. Soc.* **27** (1971), 623–626.
8. S. LANDBURG, Algebraic fiber bundle, *Trans. Amer. Math. Soc.* No. 266 (1981).
9. K. LØNSTED, An algebrization of vector bundles on compact manifolds, *J. Pure Appl. Algebra* **2** (1972), 193–207.
10. K. LØNSTED, Vector bundles over finite *CW*-complexes are algebraic, *Proc. Amer. Math. Soc.* **38** (1973), 27–31, *MR* 47 = 2733.
11. A. GERAMITA AND L. G. ROBERTS, Algebraic vector bundles on projective space, *Invent. Math.* **10** (1970).
12. J. MILNOR, "Notes on Algebraic Theory," Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.
13. C. J. MULVEY, A generalisation of Swan's theorem, *Math. Z.* **151** (1976), 57–70.

14. R. G. SWAN, Vector bundles and projective modules, *Trans. Amer. Math. Soc.* **105** (1962), 264–277.
15. R. G. SWAN, Topological examples of projective modules, *Trans. Amer. Math. Soc.* **230** (1977).
16. L. N. VASERSTEIN, Stable range of rings and dimensionality of topological spaces, *Funkcional Anal. i Priložen* **5** (2) (1971), 17–27 (*Functional Anal. Appl.* **5** (1971), 102–110).