INFORMATION AND CONTROL **10**, 434–444 (1967)

Une Propriété de Certaines Parties d'un Monoïde Libre

FRANÇOISE DEJEAN

Centre de Calcul de la Maison des Sciences de l'Homme, Paris, France

Une propriété de certaines parties d'un monoïde libre permet de répondre à une question posée par Eggan.

INTRODUCTION

Soit X^* le monoïde libre d'élément neutre e engendré par un ensemble fixe X. Pour toute famille $\mathbf{Q}$ de parties de X^*, on note $\bar{\mathbf{Q}}$ le gerbier engendré par $\mathbf{Q}$, c'est-à-dire (Dubreil-Jacotin, Lesieur, Croisot, 1953) la plus petite famille $\mathbf{Q}'$ de parties de X^* qui contienne $\mathbf{Q}$, et qui soit telle que $A, A' \in \mathbf{Q}'$ entraîne

$$A \cup A' \in \mathbf{Q}'$$

$$\text{et} \quad AA' \; (= \{f \mid f \in X^*, \exists f_1 \in A, \exists f_2 \in A', f = f_1 f_2\}) \in \mathbf{Q}'$$

En particulier, on note $\bar{\mathbf{Q}}_0$ (resp. $\bar{\mathbf{Q}}_n$) le gerbier engendré par toutes les parties de X (resp. par $\bar{\mathbf{Q}}_{n-1}$ et tous les sous-monoïdes F^* de X^*, où $F \in \bar{\mathbf{Q}}_{n-1}$).

Selon Eggan (Eggan, 1963), $\bar{\mathbf{Q}}_0$ (resp. $\bar{\mathbf{Q}}_n$) est l'ensemble des parties de "star-height" 0 (resp. n). x et y étant deux éléments distincts de X, Eggan demande de prouver: $(x^*yx^*y)^* \notin \bar{\mathbf{Q}}_1$; cette question a été résolue par McNaughton (McNaughton, 1964) en application de méthodes très générales. Nous répondrons également à la question de Eggan au moyen de la propriété suivante, dont la vérification est le but de cette note.

Propriété: Soit $\mathbf{G}$ l'ensemble des parties F de X^* telles qu'il existe un groupe G, un épimorphisme γ de X^* sur le groupe G, et une partie G_1 de G satisfaisant

$$F = \gamma^{-1}G_1(= \{f \in X^* \mid \gamma f \in G_1\} = \gamma^{-1}\gamma F$$

Alors une partie F de X^* appartient à $\bar{\mathbf{Q}}_1 \cap \mathbf{G}$ si et seulement s'il existe un entier naturel q tel que F soit union finie de parties de la forme $(X^q)^* X^{s_i})$.

On verra que le groupe G est alors nécessairement extension d'un groupe H par le groupe cyclique C_q d'ordre q, et qu'il existe un homomorphisme, soit ρ, de X^* sur C_q, pour lequel F est fermée, c'est-à-dire $F = \rho^{-1}\rho F$. On peut remarquer en comparant ce résultat avec (Dejean et Schützenberger, 1966), que si $q = 2^h$ le même groupe C_q (groupe additif des entiers modulo q) fournit, suivant l'homomorphisme de $(x, y)^*$ sur C_q choisi, un noyau appartenant à $\bar{\mathrm{Q}}_1$ (si l'on pose $\gamma x = \gamma y = 1$), ou un noyau appartenant à $\bar{\mathrm{Q}}_h$ (si $\gamma x = -\gamma y = 1$); ainsi la "star-height" d'une partie F fermée pour un homomorphisme sur un groupe donné dépend essentiellement de cet homomorphisme.

D'autre part, rappelons que si F est une partie fermée par un homomorphisme dans un monoïde fini, la complexité des sous-groupes de ce monoïde ne semble pas en relation avec la "star-height" de F: ainsi (Schützenberger, 1965) $\bar{\mathrm{Q}}_1$ contient des parties fermées par un homomorphisme dans un monoïde contenant des sous-groupes arbitrairement complexes; par contre Eggan (Eggan, 1963) construit une famille d'ensembles de "star-height" croissant indéfiniment, et pourtant fermés par des homomorphismes dans des monoïdes n'ayant que des sous-groupes triviaux (Schützenberger, 1965).

Remarques: (a) Considérons plus généralement un homomorphisme dans un monoïde qui soit union d'un groupe G et d'un zéro noté 0, (avec $\forall_G\, g\ \ 0g = g0 = 00 = 0$) et supposons que $F \cap \gamma^{-1}0 \neq \phi$. F est union d'une partie F' telle qu'il existe un groupe G et un homomorphisme $\bar{\gamma}$ de $\bar{X}'^*$ dans G satisfaisant $\bar{\gamma}^{-1}\bar{\gamma}F' = F'$, et d'une partie $\gamma^{-1}0 = \bar{X}^* X_0 \bar{X}^*$ où $\bar{X}$ désigne l'ensemble $\{x \in X \mid X^* x X^* \cap F \neq \phi\}$

$$X_0 = \{x \in \bar{X} \mid \gamma x = 0\}$$

$$\text{et} \quad \bar{X}' = \{x \in \bar{X} \mid X^* x X^* \cap F' \neq \phi\} = \bar{X} \backslash X_0$$

Considérons en effet un mot f_0 de F tel que $\gamma f_0 = 0$, et dont aucun facteur gauche ou droit n'est nul (c'est-à-dire tel que son image par γ soit 0). (On peut obtenir un tel mot à partir d'un mot f quelconque de $\gamma^{-1}0$, en prenant le plus petit facteur gauche nul de f, soit g_1, puis le plus petit facteur droit nul de g_1, soit f_0 ; f_0 n'a par hypothèse aucun facteur droit propre nul; et s'il avait un facteur gauche f_0' nul, $g_1 = g_1' f_0 = g_1' f_0' f_0''$ aurait également un facteur gauche $g_1' f_0'$ nul, ce qui est contraire à l'hypothèse.) Donc f_0 est tel que $\gamma f_0 = 0$, et qu'aucun de ses facteurs gauches ou droits propres ne vérifie la même relation. Si f_0 n'est pas réduit à une lettre,

$$\exists f_1 \qquad \exists f_2 \qquad f_1 \neq f_0 \qquad f_2 \neq f_0 \qquad f_1 f_2 = f_0$$

D'aprés l'hypothèse, γf_1 et γf_2 sont différents de 0, ils appartiennent donc à G; G étant un groupe, leur produit $\gamma f_1 f_2$ appartient aussi à G, ce qui contredit l'hypothèse que $\gamma f_0 = \gamma f_1 f_2 = 0$.

f_0 se réduit donc à une lettre. Par conséquent, si γX^* contient 0, γX contient 0, et tout mot f tel que $\gamma f = 0$ contient au moins une lettre x telle que $\gamma x = 0$ (soit une lettre de X_0).

Comme réciproquement il est clair que tout mot f contenant au moins une lettre x de X_0 vérifie $\gamma f = 0$, on a bien $\gamma^{-1}0 = \bar{X}^* X_0 \bar{X}^*$.

Soit alors $\bar{X}'$ l'ensemble des lettres apparaissant dans les mots de $F' = \gamma^{-1}\gamma F'$, et soit $\bar{\gamma}$ la restriction de γ à $\bar{X}'^*$: $\bar{\gamma}$ est un homomorphisme de $\bar{X}'^*$ dans G, tel que $F' = \gamma^{-1}\gamma F' = \bar{\gamma}^{-1}\bar{\gamma} F'$.

(b) Remarquons maintenant que l'on ne peut remplacer dans la définition de **G** le terme épimorphisme par le terme homomorphisme sans introduire d'autres restrictions, comme le montre l'exemple obtenu en prenant pour γ un monomorphisme de X^* dans le groupe libre engendré par X: il est toujours possible d'établir un tel monomorphisme, et toute partie F de X^* possède la propriété de fermeture $F = \gamma^{-1}\gamma F$ pour l'homomorphisme γ.

Notons que l'on pourrait se dispenser de l'hypothèse de surjectivité en faisant des hypothèses de finitude sur G ou sur γ (par exemple que tous les éléments $\gamma f (f \in X^*)$ soient d'ordre fini). En effet si G est fini, l'image par γ d'un sous-monoïde quelconque A^* de X^* (et en particulier de X^* lui-même) est un sous-groupe de G. En effet, soit a un élément quelconque de A^*. La suite $\gamma a, \gamma a^2, \gamma a^3, \cdots \gamma a^k, \cdots$ des puissances de γa n'a qu'un nombre fini d'éléments distincts. Il existe donc deux exposants m et n (avec par exemple $m > n$) tels que

$$\gamma(a^m) = \gamma(a^n) = (\gamma a)^m = (\gamma a)^n.$$

G étant un groupe, ceci équivaut à $(\gamma a)^{m-n} = \gamma e = \gamma(a^{m-n})$.

γa admet donc γa^{m-n-1} comme inverse. Tout élément du sous-monoïde γA^* admettant un inverse dans γA^*, et l'élément neutre γe appartenant à γA^* puisque e appartient à A^*, γA^* est un sous-groupe de G.

On peut donc alors se restreindre, en prenant pour G le sous-groupe γX^*, au cas où γ est un homomorphisme sur un groupe, ce que nous supposerons désormais.

VÉRIFICATION DE LA PROPRIÉTÉ

Soit une partie F élément de $\bar{\mathsf{Q}}_1 \cap \mathsf{G}$: F appartenant à $\bar{\mathsf{Q}}_1$, est, par définition, de la forme

$$\bigcup_{1 \leq i \leq n} \prod_{1 \leq j \leq m}^{1} A_{ij} B_{ij}^*$$

où A_{ij} appartient à $\bar{\mathsf{Q}}_0 \cup \{e\}$, et B_{ij} appartient à $\bar{\mathsf{Q}}_0$, donc $\bigcup_{ij} (A_{ij} \cup B_{ij}) \cap X^p X^* = \phi$ pour un certain entier p.

Nous montrerons successivement que:

—l'on peut se ramener sans perte de généralité au cas où G et X sont finis.

—il existe un couple d'indices (i_1, j_1) et un sous-groupe H_1 de G satisfaisant

$$\gamma B_{i_1 j_1}^* = H_1 \quad \text{et} \quad X^* = \{f \in X^* \mid X^* f X^* \cap B_{i_1 j_1}^* \neq \phi\}$$

—l'ensemble minimal U des générateurs de $\gamma^{-1} H_1$, formant un code bipréfixe fini complet tel que le monoïde syntactique associé à U^* soit un groupe, est nécessairement de la forme $U = X^{k_1}$, ce qui conduit au résultat.

1. Le théorème de Kleene équivaut à l'assertion suivante, que nous utiliserons sans démonstration: "Soit F de "star-height" finie. Il existe un homomorphisme φ de X^* sur un monoïde quotient fini φX^* (dit monoïde syntactique de F) tel que $\varphi^{-1}\varphi F = F$ et que φX^* soit image homomorphe de tout monoïde χX^* image de X^* par un homomorphisme ψ satisfaisant la condition $\psi^{-1}\psi F = F$." On rappelle que φ est défini par la condition suivante (Teissier 1951):[2]

$$\forall f \forall f' \in X^* \varphi f = \varphi f' \Leftrightarrow \quad (\forall f_1, f_2 \in X^* f_1 f f_2 \in F \Leftrightarrow f_1 f' f_2 \in F).$$

En particulier le groupe $G = \gamma X^*$ admet pour image homomorphe le monoïde syntactique φX^*. φX^*, image homomorphe d'un groupe, est

[1] $\prod$ désigne ici l'opération produit de concaténation.

[2] Dans la suite, de nombreux exposés de la question ont été donnés sous des formes variées; à l'intention des lecteurs de langue anglaise, citons par exemple (Rabin et Scott, 1959).

lui aussi un groupe. Il est d'autre part, on l'a vu, fini. Il nous suffira donc désormais de vérifier la propriété en supposant le groupe G fini (en prenant sinon pour groupe le monoïde syntactique φX^* et pour homomorphisme φ).

φX^* étant fini, φ détermine une partition de X en un nombre fini de classes, $y_1, y_2, \cdots y_s$, telles que deux lettres quelconques x et x' de X appartiennent à une même classe y_i si et seulement si $\varphi x = \varphi x'$, soit

$$\forall f_1, f_2 \in X^* \qquad f_1 x f_2 \in F \Leftrightarrow f_1 x' f_2 \in F$$

c'est-à-dire que l'on peut sans modifier F, remplacer chaque occurrence d'une lettre x dans une expression de F, par la lettre y_i désignant la partie de X classe d'équivalence de x. (Ceci revient à dire que l'homomorphisme ρ de X^* sur $Y^* = \{y_1, y_2, \cdots y_s\}^*$ défini par $\rho x = y_i$ vérifie $\rho^{-1}\rho F = F$.) En fait seuls les symboles y_i interviennent donc dans la donnée de F (qui peut être considérée comme une partie de γ^*), et de l'épimorphisme φ; et l'hypothèse: il existe un homomorphisme φ de X^* sur un groupe fini φX^* tel que $F = \varphi^{-1}\varphi F$ peut s'écrire: il existe un homomorphisme $\bar{\varphi}$ de Y^* sur un groupe $\bar{\varphi}_1 Y^*(= \varphi X^*)$ tel que $F = \bar{\varphi}^{-1}\bar{\varphi}F$.

Pour simplifier l'énoncé, nous supposerons donc désormais X fini.

2. Il existe un couple d'indices (i_1, j_1), tels que:

$$X^* = \{f \in X^* \mid X^* f X^* \cap B^*_{i_1 j_1} \neq \phi\}$$

En effet, vérifions d'abord que

$$\forall f \in X^* \qquad X^* f X^* \cap F \neq \phi. \tag{1}$$

G étant un groupe, $\forall f \in X^* \quad \exists\, \alpha \in G \quad (\gamma f)\, \alpha \in \gamma F \subset G$. Or γ est surjectif; donc il existe dans X^* un mot g dont l'image par γ est α.

$$\forall f \qquad \exists g \qquad \gamma(fg) \in \gamma F$$

et comme $\gamma^{-1}\gamma F = F$, ceci entraine $fg \in F$. Donc $fX^* \cap F \neq \phi$, et a fortiori $X^* f X^* \cap F \neq \phi$.

Soient maintenant $k_1, k_2, \cdots k_t$ ($t = |X|^k$) les mots de longueur k. D'après (1), $f = (k_1 k_2 \cdots k_t)^{m(p+2)}$ est facteur d'un mot de F: donc

$$\exists_N i \in N \quad \exists_{X^*} \quad \in g, g' gfg' = a_{i1}b_{i1} \cdots a_{im}b_{im} \qquad (a_{ij} \in A_{ij}, b_{ij} \in B^*_{ij})$$

$$\cdot l(f) \leqq l(gfg') = \sum_j l(a_{ij}) + \sum_j l(b_{ij}) \leqq pm + \sum_j l(b_{ij})$$

Soit

$$\sum_{j=1}^{m} l(b_{ij}) \geqq l(f) - pm = mkt(p + 2) - mp$$

$$= mk(t + 1) \qquad + mkt(p + 1) - mp - mk$$

$$\sum_{j=1}^{m} l(b_{ij}) \geqq mk(t + 1)$$

Donc l'un au moins des b_{ij} a longueur au moins $(t + 1)k$, donc contient un facteur de la forme: $ck_ik_{i+1} \cdots k_tk_1 \cdots k_{i-1}c'$. Par conséquent, quel que soit k, il existe un couple i, j tel que tous les mots de longueur k soient facteurs d'un même mot de B_{ij}^*, donc a fortiori soient chacun facteur d'un mot de B_{ij}^*.

Soit β_k l'un des B_{ij} tels que tous les mots de longueur k soient facteurs d'un mot de B_{ij}^* (donc tels que tous les mots de longueur au plus k soient facteurs d'un mot de B_{ij}^*).

Les B_{ij} étant en nombre fini, l'un d'eux au moins, soit B, obtenu pour le couple d'indices (i_1, j_1) apparait une infinité de fois dans la suite β_k. Tout mot arbitrairement long de X^* est donc facteur d'un mot de B^*, et

$$X^* = \{f \in X^* \mid X^*fX^* \cap B^* \neq \phi\} \tag{2}$$

3. Nous avons vu que G étant un groupé fini, γB^* est un sous-groupe H_1 de G. Considérons alors U, ensemble minimal de générateurs du sous-monoïde $U^* = \gamma^{-1}(H_1)$ de X^*. (Il est aisé de s'assurer de l'unicité de U).

U est un code bipréfixe (c'est-à-dire: $\phi = U \cap XX^*U = U \cap UXX^*$). En effet, supposons que u et vu (resp. uv) soient éléments de U. H_1 étant un groupe, si $\gamma\, u$ et $\gamma v \gamma u$ (resp. $\gamma u \gamma v$) sont éléments de H_1, il en est de même de γv. Donc $v \in \gamma^{-1}(H_1) = U^*$.

Ceci signifie soit que v est lui-même élément de U, auquel cas il y a contradiction entre l'hypothèse que U est minimal, et celle que u, v, et vu (resp. uv) en sont éléments, soit que v est engendré par certains éléments de U, parmi lesquels ne peut figurer vu (resp. uv); l'ensemble $U - \{vu\}$ (resp. $U - \{uv\}$) engendre donc v, et par conséquent vu (resp. uv); il est donc équivalent à U, ce qui contredit l'hypothèse que U est minimal. U, possédant la propriété qu'aucun de ses éléments ne peut être facteur gauche ou droit d'un autre élément de U, est par définition un code bipréfixe.

D'autre part, U est un code complet, c'est-à-dire que

$$\forall f \qquad X^*fX^* \cap U^* \neq \phi.$$

En effet U^* contient B^* par construction; et d'après (2) $\forall f\, X^*fX^* \cap B^* \neq \phi$ donc $\forall f\, X^*fX^* \cap U^* \supset X^*fX^* \cap B^* \neq \phi$.

Remarquons que U est fini. En effet, B est une partie finie de U^* d'après l'hypothèse que F appartient à $\bar{Q}_1$. B est donc engendré par un sous-ensemble fini W de U. W est un code bipréfixe comme partie du code bipréfixe U.

D'autre part, $B^* \subset W^* \subset U^*$ et, d'après (2)

$$\phi \neq X^*fX^* \cap B^* \subset X^*fX^* \cap W^*$$

Le code W est donc aussi un code complet.

Montrons qu'un code W complet, fini, préfixe (cést à dire tel que $W \cap WXX^* = \phi$) ne peut être strictement contenu dans un autre code préfixe U (ce qui implique que $U = W$, donc que U soit fini). Supposons pour cela que $U \backslash W$ ne soit pas vide. Reprenant un raissonnement de (Schützenberger, 1959), considérons le monoïde syntactique $M = \psi X^*$ de W^*. M' étant fini admet un idéal bilatère minimal D qui d'après l'hypothèse que W est complet, (c'est-à-dire que W^* intersecte tous les idéaux bilatères de X^*) a une intersection non vide avec ψW^*. Soit alors $q \in \psi^{-1}(\psi W^* \cap D)$. q appartient à W^* et ψq appartient à D. D étant(Clifford et Preston 1961) union d'idéaux à droite minimaux R_j, ψq appartient à l'un d'eux, soit R_{j_1}, et

$$\forall f \in X^* \qquad \exists f' \in X^* \qquad (\psi q \psi f)\psi f' = \psi q$$

(car l'idéal à droite $\psi q f \psi X^*$ est contenu dans l'idéal minimal $\psi q \psi X^* = R_{j_1}$ donc lui est égal). Or $\psi q \in \psi W^*$. Donc

$$qff' \in \psi^{-1}\psi W^* = W^*$$

W est préfixe: q et qff' appartenant à W^*, ff' lui appartient nécessairement. Prenons en particulier $f \in U \backslash W$. On obtient alors une contradiction car $W \cup \{f\}$ ne peut être un code préfixe: en effet, si ff' appartient à W^*, ou bien f est facteur gauche d'un mot de W, ou bien f admet un mot de W pour facteur gauche.

On a vu que U étant un code préfixe complet fini ne peut être strictement inclus dans un autre code préfixe. Ceci implique que les ensembles:

$S = X^* - UX^*$

et $S' = \{f \mid fXX^* \cap U \neq \phi\}$

soient confondus. En effet, U étant un code préfixe, S' est contenu dans S. D'autre part, s'il existait un élément s de S qui ne soit pas élément de S', ce mot s, n'ayant pas de facteur gauche dans U, et n'étant pas facteur gauche d'un mot de U, pourrait être adjoint à U pour constituer un nouveau code préfixe, en contradiction avec l'hypothèse.

Donc $S = S'$, et

$$\forall s \in S \qquad U^* \cap sX^* \supset U \cap sX^* \neq \phi \tag{3}$$

Enfin le monoïde syntactique $M = \mu X^*$ associé à U^* est un groupe: en effet, puisque $\gamma^{-1}\gamma U^* = U^*$, M est, d'après la remarque faite en §1), image homomorphe du monoïde $\gamma X^* = G$; celui-ci étant un groupe, il en est de même de M.

4. Or dans (Schützenberger, 1961) il est démontré sous une terminologie un peu différente, que si, comme U, un code est bipréfixe, fini, tel que le monoïde syntactique associé à U^* soit un groupe (fini), et tel que, pour tout élément s de $S = X^* - UX^*$, on ait

$$U^* \cap sX^* \supset U \cap xX^* \neq \phi,$$

ce code est nécessairement formé de l'ensemble X^k des mots de longueur donnée k_1.

Afin d'être complet, nous reproduisons ici la démonstration. Soit a un élément de longueur maximale de U. Si la longueur $|a|$ de a est 1 l'hypothèse que tout élément s de S est facteur gauche d'un élément de U implique que U, partie de X, soit égale à X.

Supposons donc $|a| \geqq 2$, soit $a = sxx'$ $(x, x' \in X)$. U étant un code bi-préfixe, aucun facteur gauche propre de a n'appartient à U, donc $sx \in S = X^* - UX^*$; pour tout élément x'' de X, $sxx'' \in S \cup U$, donc $sxx''X^* \cap U \neq \phi$. D'après l'hypothèse de la maximalité de $|a|$, ceci implique que $sxx'' \in U$ pour tout élément x'' de X. Tous les éléments $\mu x''$ de μX appartiennent donc à la même classe à gauche $(\mu sx)^{-1}\mu U^*$ modulo le sous-groupe μU^* de M. Ceci entraîne qu'on ne peut avoir $sx'' \in U$ pour aucun élément x'' de X. De même que précédemment, il en résulte que $sx''x''' \in U$ quels que soient x'' et x'''. On a donc prouvé que si $|a| = 2$, $U = X^2$.

Si $|a| \geqq 3$, on peut reprendre le raisonnement en posant $s = s'y$ $(y \in X)$; en utilisant le fait que, quels que soient x'' et x''', $\mu x''x'''$ appartient à la classe à gauche $(\mu s)^{-1}\mu U^*$, on montre que $s'x''x'''$ ne peut appartenir à U pour aucun x'', x''', puisque $s'yx$ n'appartient pas à U. On en déduit grâce à l'hypothèse de la maximalité de $|a|$, que $s'x''x'''x''''$

est élément de U, quels que soient x'', x''', x'''', ce qui démontre que $U = X^3$ si $|a| = 3$; si $|a| > 3$, $|a|$ étant fini, une simple récurrence donne le résultat.

$$\text{Donc } \gamma^{-1}(H_1) = U^* = (X^{k_1})^* \tag{4}$$

5. Montrons que ceci entraîne que H_1 est un sous-groupe normal (éventuellement confondu avec G), c'est-à-dire que

$$\forall g \in G \qquad gH_1g^{-1} \subset H_1$$

γ étant surjectif, on peut remplacer cette condition par

$$\forall f \in X^* \qquad (\gamma f)H_1(\gamma f)^{-1} \subset H_1 \quad \text{ou} \quad \gamma f(X^{k_1})^*(\gamma f)^{-1} \subset \gamma(X^{k_1})^*$$

Soit f un mot de $(X^{k_1})^*X^r$. $(0 \leqq r < k_1)$. $f^{k_1} \in (X^{k_1})^*$, donc γf^{k_1} a un inverse, soit γg, dans le sous-groupe $\gamma(X^{k_1})^*$, et γf admet $\gamma f^{k_1-1}g$ pour inverse.

Donc $\gamma f\gamma(X^{k_1})^*(\gamma f)^{-1} = \gamma(f(X^{k_1})^*f^{k_1-1}g) \subset \gamma(X^{k_1})^*$
et $H_1 = \gamma(X^{k_1})^*$ est un sous-groupe normal.

Montrons que la relation d'équivalence associée à H_1 dans G induit sur X^* par γ, les mêmes classes que la relation "avoir même longueur modulo k_1". D'après la relation $\gamma f^{k_1} \in H_1$, γf appartient à la classe $H_1 . (\gamma f^{k_1-1})^{-1}$. Dire que γf et γg sont équivalents mod. H_1, c'est dire que γg appartient aussi à $H_1(\gamma f^{k_1-1})^{-1}$, soit $\gamma\, gf^{k_1-1} \in H_1$, soit encore d'après (4), $gf^{k_1-1} \in (X^{k_1})^*$, ou

$$l(gf^{k_1-1}) \equiv 0 \text{ mod. } k_1, \qquad l(g) - l(f) \equiv 0 \text{ mod. } k_1.$$

Le groupe quotient G/H_1 est donc isomorphe au groupe cyclique additif C_{k_1} des entiers modulo k_1.

6. De $\quad F = \bigcup_i \prod_j A_{ij}B_{ij}^* \supset \prod_j A_{i_1j}B_{i_1j}^* \quad$ on déduit

$$\gamma F \supset \gamma(\prod_j A_{i_1j}B_{i_1j}^*) = \gamma(A_{i_11}B_{i_11}^* \cdots A_{i_1j_1})H_1\gamma(A_{i_1j_1+1} \cdots A_{i_1m}B_{i_1m}^*).$$

H_1 étant un sous-groupe normal de $G = \gamma X^*$, $\forall g \in G \quad gH_1 = H_1g$; en particulier, $\gamma(A_{i_11}B_{i_11}^* \cdots A_{i_1j_1})H_1\gamma(A_{i_1j_1+1} \cdots B_{i_1m}^*)$ peut s'écrire $H_1\gamma(A_{i_11} \cdots A_{i_1j_1}A_{i_1j_1+1} \cdots B_{i_1m}^*)$, d'où, si G_1 désigne la partie $\gamma(A_{i_11} \cdots A_{i_1j_1}A_{i_1j_1+1} \cdots B_{i_1m}^*)$ de $G = \gamma X^*$,

$\gamma F \supset \gamma(\prod_j A_{i_1j}B^*_{i_1j}) = H_1G_1 = \bigcup_{g\in G_1} H_1g$ et

$$\gamma^{-1}\gamma F = F \supset \gamma^{-1}(H_1G_1) = \gamma^{-1}[\bigcup_{g\in G_1} H_1g] = \bigcup_{g\in G_1}\gamma^{-1}(H_1g) = F_1 .$$

Si $F = F_1$, la propriété est démontrée car on a vu précédemment que $\gamma^{-1}(H_1g)$ est dans X^* une classe d'équivalence de la relation "avoir même longueur mod. k_1": donc $\gamma^{-1}(H_1g) = (X^{k_1})^*X^{l_{1,g}}$ où $l_{1,g}$ désigne la longueur mod k_1 des mots de $\gamma^{-1}g$; et $F_1 = \bigcup_{g\in G_1}(X^{k_1})^*X^{l_{1,g}}$.

Sinon, considérons la partie F_1' de F obtenue en supprimant dans l'expression $\bigcup_i \prod_j A_{ij}B^*_{ij}$ de F le produit $\prod_j A_{i_1j}B^*_{i_1j}$; F_1' est un élément de $\bar{Q}_1$ non confondu avec F (sinon le produit $\prod_j A_{i_1j}B^*_{i_1j}$ aurait pu être préalablement supprimé de l'expression de F). D'autre part, comme $F_1 = \gamma^{-1}\gamma(\prod_j A_{i_1j}B^*_{i_1j}) \supset \prod_j A_{i_1j}B^*_{i_1j}$, F_1' contient $F\backslash F_1$ car $F_1' \supset F\backslash\prod_j A_{i_1j}B^*_{i_1j} \supset F\backslash F_1$.

$F\backslash F_1$ étant fermée par γ puisqu'il en est ainsi de F et F_1, on peut, de même qu'en §2 en conclure que

$$\forall f \in X^* \qquad X^*fX^* \cap (F\backslash F_1) \neq \phi$$

donc a fortiori que

$$\forall f \in X^* \qquad X^*fX^* \cap F_1' \supset X^*fX^* \cap (F\backslash F_1) \neq \phi$$

On peut alors reprendre sur F_1' un raisonnement analogue à celui effectué sur F, d'où l'on déduit l'existence d'un couple d'indices (i_2, j_2) tel que

$$\forall f \in X^* \qquad X^*fX^* \cap B^*_{i_2j_2} \neq \phi$$

$\gamma B^*_{i_2j_2}$ étant un sous-groupe normal H_2 de G, tel que $\gamma^{-1}(H_2) = (X^{k_2})^*\cdot$

$$\begin{aligned}\gamma(\prod_j A_{i_2j}B^*_{i_2j}) &= \gamma(A_{i_21}B^*_{i_21}\cdots A_{i_2j_2})H_2\gamma(A_{i_2j_2+1}\cdots A_{i_2m}B^*_{i_2m})\\ &= H_2G_2 \subset \gamma F\cdot\end{aligned}$$

Donc $\gamma^{-1}(H_2G_2) \subset \gamma^{-1}\gamma F = F$.

Soit alors $F_2 = F_1 \cup \gamma^{-1}\cdot (H_2G_2)$.[3]

Si F_2 n'est pas confondu avec F, le raisonnement fait sur F_1' peut être repris sur la partie F_2' obtenue en supprimant dans l'expression de F_1' le produit $\prod_j A_{i_2j}B^*_{i_2j}$ (F_2' se déduit de F par suppression de deux termes). F étant union d'un nombre fini n de tels produits, au bout de

[3] Le couple (i_2j_2) est nécessairement distinct de (i_1j_1), puisque l'on a exclu le terme $\prod_j A_{i_1j}\cdot B^*_{i_1j}$. Il se peut cependant que $B_{i_2j_2} = B_{i_1j_1}$ et même que $F_2 = F_1$.

n étapes au plus on obtient (pour un entier $j \leqq n$)

$$F = F_j = \bigcup_{1 \leqq t \leqq j} \bigcup_{g \in G_t} \gamma^{-1}(H_t g) = \bigcup_{1 \leqq t \leqq j} \bigcup_{g \in G_t} (X^{k_t})^* X^{l_{t,g}}$$

soit, en posant $\quad q = ppcm_t\, k_t \qquad q = k_t h_t \qquad \forall t.$

$$F = \bigcup_{1 \leqq t \leqq j} (X^{k_t h_t})^*(\{e\} \cup X^{k_t} \cup X^{2k_t} \cdots \cup X^{k_t(h_t-1)})[\bigcup_{g \in G_t} X^{l_{t,g}}]$$

$$= (X^q)^*[\bigcup X^{s_i}] \text{ où } 0 \leqq s_i < s_{i+1} \leqq q - 1$$

Application: Pour l'ensemble $E = (x^* y x^* y)^*$ considéré par Eggan et McNaughton, posons: $\gamma e = \gamma x = \gamma y^2 \neq \gamma y$. Alors

$$K = \gamma^{-1}\gamma e = \gamma^{-1}\gamma K = (x^* y x^* y)^* x^* = E x^*$$

Si E était élément de $\tilde{Q}_1$, $K = Ex^*$ appartiendrait aussi à $\tilde{Q}_1$, ce qui est impossible d'après notre résultat.

RECEIVED: April 4, 1966; revised: May 31, 1966

Je remercie Monsieur le Professeur M. P. Schützenberger qui m'a proposé ce sujet et m'a aidée par de précieuses indications.

REFERENCES

CLIFFORD AND PRESTON (1961), "The Algebraic Theory of Semi-Groups." American Mathematical Society, Providence, R. I.

DEJEAN ET SCHÜTZENBERGER (1966), On a question of Eggan. *Inform. Control* **9,** 23–25.

DUBREIL-JACOTIN, M. L., LESIEUR, L., ET CROISOT, H. (1953), Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. Gauthier-Villars, Paris.

EGGAN, L. C. (1963), Transition graphs and the star-height of regular events. *Michigan Math. J.* **10,** 385–395.

MCNAUGHTON, R. Notes de cours M.I.T. 1963–1964.

RABIN, M. AND SCOTT, D. (1959), Finite automata and their decision problems. *IBM J. Res. Develop.* **3,** 114–125.

SCHÜTZENBERGER, M. P. (1959), Sur certains sous-demi-groupes qui interviennent dans un problème de mathématiques appliquées. *Publ. sci. Univ. Alger, Sér. A*, Déc. 1959, Tome 6.

SCHÜTZENBERGER, M. P. (1961), On a special class of recurrent events. *Ann. Math. Statist.* **32,** 1201–1213.

SCHÜTZENBERGER, M. P. (1965), On finite monoids having only trivial subgroups. *Inform. Control,* **8,** 190–194.

TEISSIER, M. (1951), Sur les équivalences régulières dans les demi-groupes. *Compt. rend. Acad. Sci. Paris* **232,** 1987–1989.