Indag. Mathem., N.S., 11 (3), 437–452 September 25, 2000

Sur une classe de fonctions arithmétiques liées aux diviseurs d'un entier

par R. de la Bretèche

Département de Mathématiques, UMR 8628 CNRS-Université Bâtiment 425, Université de Paris XI-Orsay, 91405 Orsay cedex, France
e-mail: Regis.De-La-Breteche@math.u-psud.fr

Communicated by Prof. R. Tijdeman at the meeting of February 28, 2000

RÉSUMÉ

Soit $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{\tau(n)} = n$ la suite croissante des diviseurs d'un entier générique n. Nous étudions l'élément maximal E d'une classe de fonction arithmétique qui contient, entre autres, la fonction d'Erdős f définie par $f(n) := \mathrm{card}\{i \in [1, \tau(n)[: \quad (d_i, d_{i+1}) = 1\}$ et les fonctions κ_s définies par $\kappa_s(n) := \mathrm{card}\{d \mid n : \quad (d, s) = 1, \quad d(d+s) \mid n\}$. Dans le prolongement de la méthode de Tenenbaum [T91], nous montrons, en particulier, l'inégalité

$$E(n) \leq \tau(n)^c$$

avec

$$c := \frac{\log 3}{\log 2} - \frac{2}{3} = 0,9182958\ldots.$$

Grâce à un résultat combinatoire de Baranyai, nous établissons l'optimalité de cet exposant.

ABSTRACT

Let $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{\tau(n)} = n$ be the increasing sequence of divisors of an integer n. We study the maximal element E of an class of arithmetic functions. The class has, among others, the Erdős's function f defined by $f(n) := \mathrm{card}\{i \in [1, \tau(n)[: \quad (d_i, d_{i+1}) = 1\}$ and the functions κ_s defined by $\kappa_s(n) := \mathrm{card}\{d \mid n : \quad (d, s) = 1, \quad d(d+s) \mid n\}$. Developing the Tenenbaum's method [T91], we show, in particular, the inequality

$$E(n) \leq \tau(n)^c$$

with

$$c := \frac{\log 3}{\log 2} - \frac{2}{3} = 0,9182958\ldots.$$

A combinatorial result of Baranyai yields the optimality of this exponent.

1. PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

Désignons par $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{\tau(n)} = n$ la suite croissante des diviseurs d'un entier générique n. Ces dernières années, l'étude des diviseurs s'est énormément développée. De nombreux résultats ont été établis en moyenne ou pour presque tout entier n (i.e. sur un ensemble de densité unité). Il s'agit là d'écarter un ensemble de densité asymptotique nulle pour pouvoir décrire la structure multiplicative d'un entier normal. Pour plus de détails, nous invitons le lecteur à consulter les livres *Divisors* [HT88] et *Sets of multiples* [H96].

Une approche différente consiste à chercher des résultats valables pour tout entier n. La question sous-jacente est le conflit qui existe entre l'ordre additif, la trace de l'ordre usuel sur $\mathbb{Z}$, et l'ordre multiplicatif. Lorsque $n = \prod_{i=1}^{\omega(n)} p_i^{\nu_i}$ avec $p_1 < p_2 < \ldots < p_{\omega(n)}$, les diviseurs d de n s'écrivent sous la forme

$$d = \prod_{i=1}^{\omega(n)} p_i^{r_i} \qquad (0 \le r_i \le \nu_i).$$

L'ordre multiplicative est alors l'ordre lexicographique sur les mots définis par $r_{\omega(n)} r_{\omega(n)-1} \ldots r_1$[1] (Voir l'article récent de Stef et Tenenbaum [ST98]).

Plusieurs fonctions ont été introduites pour décrire la structure de l'ensemble des diviseurs. Nous nous proposons ici d'étudier l'ordre de grandeur de l'élément maximal de la classe de fonctions arithmétiques $\mathcal{E}$ définie ci-dessous.

Nous dirons qu'une application g_n, définie sur l'ensemble des diviseurs de n et à valeurs entières, est régulière si g_n est injective et si l'on a pour tous diviseurs d, t de n

$$\big((d, g_n(d)) = 1, \quad (t, g_n(t)) = 1, \qquad d g_n(d) = t g_n(t) \mid n\big) \Longrightarrow d = t.$$

Nous désignons par $\mathcal{E}$ la classe des fonctions arithmétiques F du type

$$(1.1) \qquad F(n) := \operatorname{card}\big\{d \mid n : \qquad g_n(d) \mid n, \quad (d, g_n(d)) = 1\big\}$$

pour une application régulière convenable g_n. Ces notions ont été introduites par Tenenbaum dans [T91].

La classe $\mathcal{E}$ contient plusieurs éléments importants :

(a) La fonction d'Erdős définie par

$$f(n) := \operatorname{card}\big\{i \in [1, \tau(n)[: \quad (d_i, d_{i+1}) = 1\big\},$$

est associée à la fonction $g_n : \{d \mid n\} \to \mathbb{N}$ définie par $g_n(d_i) = d_{i+1}$ si $i = 1, \ldots, \tau(n) - 1$ et $g_n(n) = n + 1$. On ne sait pas si f admet un ordre moyen

---

[1] Ainsi les diviseurs de 120 sont classés dans l'ordre multiplicatif croissant suivant
1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120.

ou un ordre normal. Un encadrement de $f(n)$ entre deux puissances de $\log n$ pour un ensemble d'entiers n de densité unité est établi dans [ET89]. Cette fonction reste encore très mystérieuse. Son étude a constitué l'une des motivations premières de ce travail.

(b) Les fonctions κ_s définies par

$$\kappa_s(n) := \mathrm{card}\{d \mid n : \quad (d,s) = 1, \quad d(d+s) \mid n\}$$

sont associées aux fonctions $g_{n,s}$ définies par

$$g_{n,s}(d) = \begin{cases} d+s & \text{si } (d,s) = 1, \\ n+d & \text{si } (d,s) > 1. \end{cases}$$

La fonction $\kappa_1(n)$ dénombre les couples de diviseurs d'un entier n de la forme $(d, d+1)$. Elle a été introduite pour la première fois par Erdős et Hall dans [EH78]. Cette fonction a été étudiée ensuite par de nombreux auteurs Balog, Erdős, Hall, Tenenbaum dans [EH78], [ET89], [T91], [BET90].

(c) Les fonctions h_s définies par

$$h_s(n) := \mathrm{card}\{i \in [1, \tau(n)[: \quad d_{i+1} \equiv s (\mathrm{mod}\, d_i), \quad (s, d_i) = 1\} \tag{1.2}$$

sont associées aux fonctions $g'_{n,s}$ définies par

$$g'_{n,s}(d_i) = \begin{cases} d_{i+1} & \text{si } (d_{i+1}, s) = 1 \text{ et } d_{i+1} \equiv s (\mathrm{mod}\, d_i), \\ n + d_{i+1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est intéressant d'étudier la valeur de $E(n) := \max_{F \in \mathcal{E}} F(n)$ et de la comparer à $\tau(n)$ le nombre de diviseurs de l'entier n. Si les d se répartissent *régulièrement*, les fonctions de $\mathcal{E}$ doivent être petites par rapport à $\tau(n)$. Notons que la fonction E est un élément de $\mathcal{E}$ et que la valeur de $E(n)$ ne dépend que de la structure multiplicative de n, c'est-à-dire des valeurs de

$$\omega_\nu(n) := \mathrm{card}\{p : \quad p^\nu \| n\}.$$

Une des propriétés fondamentale de E que nous utiliserons est la sur-multiplicativité de E.

Théorème 1. (a) *Pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, on a*

$$E(n)E(m) \leq E(nm). \tag{1.3}$$

Nous améliorons sensiblement les meilleures majorations précédemment connues de E.

Théorème 2. (a) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$E(n) \leq \tau(n)^c \tag{1.4}$$

avec

$$c := \frac{\log 3}{\log 2} - \frac{2}{3} = 0,9182958\ldots \tag{1.5}$$

(b) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$(1.6) \qquad E(n) \le \tau(n) \prod_{p^\nu \| n} \left(\frac{2\sqrt{\nu}}{\nu+1} \right).$$

Remarque 2.1. Le Théorème 2 de [T91] affirme que l'on a $E(n) \le 3\tau(n)^{c'}$ avec $c' = 1 - 1/(2 + 36\log(3/2)) = 0,93974721\ldots$. Notre démonstration du Théorème 1 reprend la démarche de Tenenbaum [T91] en utilisant une fonction test différente. On utilise aussi la sur-multiplicativité de E établie au Théorème 1 pour éliminer le facteur 3.

Le Théorème 3c (cf. *infra*) nous permet d'établir que l'exposant dans la majoration (1.4) est optimal.

Remarque 2.2. L'inégalité (1.6) est triviale si n est sans facteur carré. Elle est meilleure que (1.4) lorsque n est divisible par un nombre relativement important de cubes de nombre premier.

Nous obtenons la majoration suivante qui permet d'enlever le facteur $\log(2\Omega(n))$ dans le majorant de la formule (24) de [T91].

Corollaire 2.1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$(1.7) \qquad E(n) = O\left(\frac{\tau(n)}{\Omega(n)} \right).$$

Remarque 2.3. D'après le Théorème 2 de [ET89], il existe une suite infinie d'entiers n telle que $\tau(n) \to \infty$ et $E(n) \ge f(n) \ge \tau(n)/(2\Omega(n)) \gg \tau(n)^{1/2}$. L'inégalité du Corollaire 2.1 est donc optimale au sens où

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{E(n)\Omega(n)}{\tau(n)} > 0.$$

La structure multiplicative des entiers n de la suite considérée par Erdős et Tenenbaum est très particulière. On a

$$(1.8) \qquad n = p^k p_1 p_2 \ldots p_r \qquad (2^r = k+1).$$

Erdős et Tenenbaum montrent, pour un choix pertinent des premiers p_i, que l'on a $f(n) \ge k$. En fait, il est facile de constater que $E(n) \le 2k + 2$.[2] Par conséquent, on a pour les entiers n de la forme (1.8)

$$E(n) \asymp f(n) \asymp \frac{\tau(n)}{\Omega(n)}.$$

Il est facile de démontrer, à partir du Théorème 1, que l'on a aussi, uniformément par rapport à $s \in \mathbb{N}^*$,

---

[2] En effet, pour tout diviseur d compté dans (1.1), on a soit $p \nmid d$ soit $p \nmid g_n(d)$. D'après l'injectivité de g_n, il en découle

$$E(n) \le 2\,\mathrm{card}\{d \mid n : \quad p \nmid d\} = 2k+2.$$

$$(1.9)\qquad \kappa_s'(n) := \operatorname{card}\{d \mid n : \quad d(d+s) \mid n\} \leq \tau((s,n))\tau(n)^c.$$

Le lien entre κ_s et κ_s' est simple. Nous avons

$$\begin{aligned}\kappa_s'(n) &= \sum_{t\,|(s,n)} \operatorname{card}\Big\{d' \mid \frac{n}{t} : \quad \Big(d', \frac{s}{t}\Big) = 1, \quad d'\Big(d' + \frac{s}{t}\Big) \mid \frac{n}{t^2}\Big\} \\ &= \sum_{t\,|(s,n)} \kappa_{s/t}\Big(\frac{n}{t^2}\Big),\end{aligned}$$

où nous avons adopté la convention $\kappa_s(x) = 0$ lorsque $x \notin \mathbb{N}$.

Le Théorème 1 implique une nouvelle majoration de la fonction

$$\mathcal{H}(n) := \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{d_j - d_i},$$

qui a été étudiée par Tenenbaum (voir [T91]). La fonction $\mathcal{H}(n)$ est une mesure de la proximité des diviseurs.

Corollaire 2.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$(1.10)\qquad \mathcal{H}(n) \ll \tau(n)^c \log(\tau(n)) \log\log(2\tau(n)),$$

où c est la constante définie dans l'énoncé du Théorème 1.

Notons que ce corollaire découle du Théorème 1 de [ET89] lorsque n est un entier sans facteur carré.

Nous invitons le lecteur à consulter [T91] (lemme 1) pour une démonstration de (1.10) à partir de (1.9). Celle-ci repose sur l'identité

$$(1.11)\qquad \mathcal{H}(n) = \sum_{m|n} \frac{1}{m} \sum_{1 \leq s < n/m} \frac{1}{s} \kappa_s\Big(\frac{n}{m}\Big),$$

établie dans [T91].

Il est naturel d'essayer d'établir une minoration de $E(n)$. Ceci nous permet d'affirmer l'optimalité de l'exposant c dans la majoration du Théorème 2a.

Théorème 3. (a) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$(1.12)\qquad E(n) \geq \max_{\substack{d|n \\ (d,n/d)=1}} \big(\min\{\tau(d), \tau(n/d)\}\big) \geq \frac{\tau(n)^{1/2}}{\sqrt{V(n)+1}},$$

où $V(n)$ désigne le plus grand exposant ν dans l'écriture $n = \prod_{p^\nu \| n} p^\nu$.

(b) *Pour tout entier n de la forme $n = m^\nu$ où m est un entier sans facteur carré et $\nu \geq 2$, on a*

$$(1.13)\qquad E(n) \geq \frac{\tau(n)^{c(\nu)}}{\sqrt{2\nu+2}}$$

avec

$$c(\nu) := \frac{\log(2\nu+2)}{2\log(\nu+1)} = \frac{1}{2} + \frac{\log 2}{2\log(\nu+1)}.$$

(c) *Soit n un entier sans facteur carré et* $k = \left[\frac{1}{3}\omega(n)\right]$,[3] *on a*

$$E(n) \geq \binom{3k}{k}.$$

On a ainsi

$$\limsup_{\tau(n)\to+\infty} \left(\frac{\log E(n)}{\log \tau(n)}\right) = c. \tag{1.14}$$

Remarque 3.1. Il n'existe pas de constante c indépendante de n qui satisfasse la minoration (1.13) valable pour tout entier. Par exemple, on a $E(p^\nu) = 2$ pour tout p premier et $\nu \geq 2$. L'inégalité (1.12) est optimale dans le sens où le membre de droite est du même ordre de grandeur que $E(n)$ pour une infinité d'entiers n.

Remarque 3.2. Le résultat (c) est établi à l'aide d'un théorème profond de combinatoire de Baranyai [B73].

Cette étude de l'ordre de grandeur de $E(n)$ montre les limites de la définition de $\mathcal{E}$. La généralité de la classe $\mathcal{E}$ ne permet pas d'espérer améliorer de manière conséquente les majorations de f, κ_s et h_s des éléments de $\mathcal{E}$. Ainsi, la quantité $E(n)$ ne dépend que de $\omega_\nu(n) := \mathrm{card}\{p : \quad p^\nu \parallel n\}$ et non des facteurs premiers ce qui n'est pas le cas de $f(n)$ ou de $\kappa_s(n)$ et $h_s(n)$.[4]

Remerciements. Je tiens à remercier Gérald Tenenbaum pour ces précieux conseils lors de l'élaboration de ce travail, et Katona qui, par l'intermédiaire d'Andras Sárközy, a attiré mon attention sur le résultat de Baranyai [B73]. Je suis aussi très reconnaissant à Cécile Dartyge et au rapporteur de leur lecteur attentive et leurs remarques.

2. SUR-MULTIPLICATIVITÉ DE E

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. On définit les fonctions régulières g_n et g_m associées aux valeurs $E(n)$ et $E(m)$ et les ensembles

$$\begin{cases} \mathcal{F}_n := \{d \mid n : \quad g_n(d) \mid n, \qquad (d, g_n(d)) = 1\}, \\ \mathcal{F}_m := \{d \mid m : \quad g_m(d) \mid m, \qquad (d, g_m(d)) = 1\}, \end{cases}$$

de sorte que

$$E(n) = \mathrm{card}(\mathcal{F}_n), \qquad E(m) = \mathrm{card}(\mathcal{F}_m).$$

Considérons l'ensemble

[3] $[t]$ désigne la partie entière de t.

[4] On a $E(45) = E(99) = 3$ alors que $f(45) = 3$ et $f(99) = 2$.

$$\mathcal{F}_{n,m} := \{d \mid nm : \quad (d,n) \in \mathcal{F}_n, \quad (d,m) \in \mathcal{F}_m\}$$

et l'application g_{nm} définie sur les éléments d de $\mathcal{F}_{n,m}$ par

$$g_{nm}(d) = g_n((d,n))g_m((d,m)).$$

On peut définir l'application g_{nm} en dehors de $\mathcal{F}_{n,m}$ pour qu'elle soit régulière. La valeur de la fonction F de $\mathcal{E}$ en nm définie par l'application régulière g_{nm} vérifie

$$\begin{aligned} F(nm) &= \operatorname{card}\{d \mid nm : \quad g_{nm}(d) \mid nm, \qquad (d, g_{nm}(d)) = 1\} \\ &= \operatorname{card}(\mathcal{F}_{n,m}) = \operatorname{card}(\mathcal{F}_n)\operatorname{card}(\mathcal{F}_m) = E(n)E(m). \end{aligned}$$

On a donc bien

$$E(nm) \geq F(nm) = E(n)E(m),$$

le résultat recherché.

3. MAJORATION DE $E(n)$

3.1. Un lemme intermédiaire. Nous commençons par montrer qu'il suffit d'établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité suivante

$$E(n) \leq 3\tau(n)^c. \tag{3.1}$$

Cela découle du résultat général suivant.

Lemme 3.1. *Soit g une fonction multiplicative positive telle que les $g(p^\nu)$ ne dépendent que de ν. S'il existe une constante $C > 1$ absolue et un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $E(n) \leq Cg(n)$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'inégalité $E(n) \leq g(n)$.*

Démonstration. Le fait que la valeur de $E(n)$ ne dépend que de la structure multiplicative de n joue un rôle crucial dans la démonstration.

Supposons qu'il existe une constante $a > 1$ et un entier $n \geq 2$ tels que $E(n) \geq ag(n)$. Nous construisons alors une suite infinie d'entiers $n_1, n_2, \ldots, n_k$ de même structure multiplicative que n qui sont premiers deux à deux. Soit $q_k := n_1 \times \ldots \times n_k$. Nous choisissons $k \geq (\log n_0)/\log 2$ de sorte que $q_k \geq n_0$. On a

$$E(q_k) \geq E(n)^k \geq a^k g(n)^k = a^k g(q_k),$$

ce qui contredit $E(q_k) \leq Cg(q_k)$ dès que $a^k > C$. Nous avons donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$E(n) \leq g(n). \tag{3.2}$$

Cela clôt la démonstration du Lemme 3.1. $\square$

3.2. Démonstration du Théorème 2a. La démonstration de (3.1) reprend la démarche du Lemme 3 de Tenenbaum [T91]. Dans [T91], il compare la valeur $\omega(d)$ des diviseurs à la moyenne de cette fonction

$$A(n) := \frac{1}{\tau(n)}\sum_{d|n}\omega(d) = \sum_{p^\nu\|n}\frac{\nu}{\nu+1}$$

sur l'ensemble des diviseurs. Pour tout diviseur d compté par $E(n)$, on a ainsi au moins une des trois éventualités suivantes :

$$\begin{cases} \omega(d) \leq (1-\alpha)A(n), \\ \omega(g_n(d)) \leq (1-\alpha)A(n), \\ \omega(dg_n(d)) \geq 2(1-\alpha)A(n). \end{cases}$$

Il applique les résultats obtenus en choisissant $\alpha = \frac{1}{3}$ de sorte que $2(1-\alpha) = 1+\alpha$. Notons, qu'ici, on a besoin pour obtenir le résultat de [T91] de comparer les valeurs de $\omega(d)$ à la moyenne $A(n)$ et non à $\frac{1}{2}\omega(n)$. Ceci permet d'obtenir le résultat même lorsque n a des facteurs carrés.

Nous utilisons aussi un paramètre $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ que nous choisirons égal à $\frac{1}{3}$ en fin de démonstration. Les $u_\alpha(\nu)$ sont des paramètres positifs qui seront fixés en cours de démonstration de façon optimale. Nous considérons $h_{n,\alpha}$ la fonction fortement additive définie sur les diviseurs de n par $h_{n,\alpha}(p) = u_\alpha(\nu)$ lorsque $p^\nu \| n$. La moyenne de $h_{n,\alpha}$ sur les diviseurs de n vaut

$$A_\alpha(n) := \frac{1}{\tau(n)}\sum_{d|n} h_{n,\alpha}(d) = \sum_{p^\nu\|n}\frac{\nu}{\nu+1}u_\alpha(\nu).$$

Pour $\alpha > 0$, désignons par $S^+(n,\alpha)$ (respectivement $S^-(n,\alpha)$) le nombre de diviseurs de d de n tels que

$$h_{n,\alpha}(d) \geq (1+\alpha)A_\alpha(n) \qquad \text{(respectivement } h_{n,\alpha}(d) \leq (1-\alpha)A_\alpha(n)\text{)}.$$

En choisissant $\alpha = \frac{1}{3}$, nous obtenons

$$E(n) \leq 2S^-\left(n, \tfrac{1}{3}\right) + S^+\left(n, \tfrac{1}{3}\right). \tag{3.3}$$

Nous allons choisir la fonction $h_{n,\alpha}$ pour que ces valeurs se *concentrent* autour de sa moyenne. Notre démarche aboutit au même résultat que dans [ET89] et [T91] quand n est sans facteur carré. L'introduction de la fonction test $h_{n,\alpha}$ permet de dépasser les difficultés supplémentaires dues notamment à la présence de facteur carré dans l'écriture de n.

Considérons $S^-(n,\alpha)$. Nous avons

$$S^-(n,\alpha) \leq \sum_{d|n}\exp\left\{(1-\alpha)A_\alpha(n) - h_{n,\alpha}(d)\right\} = \tau(n)\exp\left\{\sum_{p^\nu\|n} f_\nu(u_\alpha(\nu))\right\}$$

avec

$$f_\nu(u) := \log\left(\frac{1+\nu e^{-u}}{1+\nu}\right) + \frac{\nu(1-\alpha)}{\nu+1}u.$$

Il s'agit de minimiser $f_\nu(u_\alpha(\nu))$ grâce au choix de $u_\alpha(\nu)$. Nous avons

$$f_\nu'(u) = \frac{-\nu e^{-u}}{1+\nu e^{-u}} + \frac{\nu(1-\alpha)}{\nu+1} = \frac{\nu}{\nu+1}\Big(\frac{1-e^{-u}}{1+\nu e^{-u}} - \alpha\Big).$$

Nous choisissons $u_\alpha(\nu) := \log\big((1+\alpha\nu)/(1-\alpha)\big)$ de sorte que $f_\nu'(u_\alpha(\nu)) = 0$ et qu'ainsi

$$\begin{aligned} m_1(\nu,\alpha) &:= -\min_{u\in\mathbb{R}^+} f_\nu(u) = -f_\nu(u_\alpha(\nu)) \\ &= \frac{\nu(1-\alpha)}{\nu+1}\log\frac{1+\alpha\nu}{1-\alpha} - \log\frac{1}{1+\alpha\nu} \\ &= \frac{1+\alpha\nu}{1+\nu}\log(1+\alpha\nu) - \frac{\nu(1-\alpha)}{\nu+1}\log\frac{1}{1-\alpha}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Il vient

$$S^-(n,\alpha) \le \tau(n)\exp\Big\{-\sum_{p^\nu\|n} m_1(\nu,\alpha)\Big\}. \tag{3.5}$$

Majorons maintenant $S^+(n,\alpha)$. Nous avons

$$\begin{aligned} S^+(n,\alpha) &\le \sum_{d|n}\exp\{h_{n,\alpha}(d) - (1+\alpha)A_\alpha(n)\} \\ &= \tau(n)\exp\Big\{\sum_{p^\nu\|n}\Big(\log\Big(\frac{1+\nu e^{u_\alpha(\nu)}}{\nu+1}\Big) - \frac{\nu(1+\alpha)}{\nu+1}u_\alpha(\nu)\Big)\Big\} \\ &\le \tau(n)\exp\Big\{-\sum_{p^\nu\|n} m_2(\nu,\alpha)\Big\}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

où nous avons posé

$$m_2(\nu,\alpha) := \frac{\nu(1+\alpha)}{\nu+1}u_\alpha(\nu) - \log\Big(\frac{1+\nu e^{u_\alpha(\nu)}}{\nu+1}\Big).$$

En remplaçant $u_\alpha(\nu)$ par sa valeur, nous obtenons

$$\begin{aligned} m_2(\nu,\alpha) &= \frac{\nu(1+\alpha)}{1+\nu}\log\Big(\frac{1+\alpha\nu}{1-\alpha}\Big) - \log\Big(\frac{1+(\nu-1)\alpha}{1-\alpha}\Big) \\ &= \frac{\nu\alpha-1}{1+\nu}\log\Big(\frac{1+\alpha\nu}{1-\alpha}\Big) - \log\Big(\frac{1+(\nu-1)\alpha}{1+\alpha\nu}\Big). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Nous pouvons maintenant conclure la démonstration. Pour tout diviseur d compté par $F(n)$, nous avons au moins une des trois éventualités suivantes :

$$\begin{cases} h_{n,1/3}(d) \le \frac{2}{3}A_{1/3}(n), \\ h_{n,1/3}(g_n(d)) \le \frac{2}{3}A_{1/3}(n), \\ h_{n,1/3}(dg_n(d)) \ge \frac{4}{3}A_{1/3}(n). \end{cases}$$

Grâce à (3.3), (3.5) et (3.6), nous en déduisons que

$$E(n) \leq 3\tau(n) \exp\left\{ -\sum_{p^\nu \| n} \delta\left(\nu, \frac{1}{3}\right) \log(\nu+1) \right\}$$

avec

$$\delta\left(\nu, \frac{1}{3}\right) := \frac{\min\{m_1(\nu, \frac{1}{3}), m_2(\nu, \frac{1}{3})\}}{\log(\nu+1)}.$$

Une étude numérique permet de montrer pour tout $\nu \geq 1$ l'inégalité

(3.8) $$\delta\left(\nu, \frac{1}{3}\right) \geq \delta\left(1, \frac{1}{3}\right) = 1 - c = 1 - h\left(\frac{1}{3}\right),$$

où c est la constante définie en (1.5).

Nous rédigeons maintenant la démonstration de l'inégalité (3.8). Nous vérifions tout d'abord que nous avons pour tout $\nu \in \mathbb{N}$

(3.9) $$m_1\left(\nu, \frac{1}{3}\right) \leq m_2\left(\nu, \frac{1}{3}\right).$$

En effet, nous avons

$$(\nu+1)\left(m_1\left(\nu, \frac{1}{3}\right) - m_2\left(\nu, \frac{1}{3}\right)\right) = 2\log\left(\frac{2+\nu}{3}\right) - (\nu-1)\log\left(\frac{3+\nu}{2+\nu} \times \frac{3}{2}\right).$$

Un simple calcul fournit que ce terme est négative pour $\nu = 1, \ldots, 5$ et qu'il est inférieur à

$$2\log\left(\frac{2+\nu}{3}\right) - (\nu-1)\log\frac{3}{2}$$

qui est le terme générale d'une suite négative pour $\nu = 6$ et décroissante à partir de $\nu = 6$. Cela fournit la majoration (3.9).

De (3.9) et (3.4), nous déduisons la formule

$$\delta\left(\nu, \frac{1}{3}\right) = \frac{1+\nu/3}{(\nu+1)\log(\nu+1)} \log\left(1 + \frac{\nu}{3}\right) - \frac{2\nu\log(3/2)}{3(\nu+1)\log(\nu+1)}.$$

Nous détaillons maintenant la démonstration de $\delta(\nu, \frac{1}{3}) \geq 1 - c$. Un calcul explicite pour les neufs premières valeurs fournit (3.8) pour $\nu \leq 9$. De simples transformations impliquent pour $\nu \geq 10$

$$\begin{aligned}
&\left(\delta\left(\nu,\frac{1}{3}\right)-(1-c)\right)(\nu+1)\log(\nu+1)\\
&\quad=\left(1+\frac{\nu}{3}\right)\log(3+\nu)-(1-c)(\nu+1)\log(\nu+1)-\log 3-\frac{\nu}{3}\log\frac{27}{4}\\
&\quad\geq\left(1+\frac{\nu}{3}-(1-c)(\nu+1)\right)\log(3+\nu)-\log 3-\frac{\nu}{3}\log\frac{27}{4}\\
&\quad=c\log(3+\nu)-\log 3+\frac{\nu}{3}\left((3c-2)\log(3+\nu)-\log\frac{27}{4}\right)\\
&\quad\geq\frac{\nu}{3}\left((3c-2)\log(3+\nu)-\log\frac{27}{4}\right)\geq 0.
\end{aligned}$$

Ainsi s'achève la démonstration de (3.1) et, par conséquent, celle du Théorème 2a. □

3.3. Démonstration du Théorème 2b. D'après le Lemme 3.1, on peut se contenter de montrer que

$$E(n)\leq 2\tau(n)\prod_{p^\nu\|n}\left(\frac{2\sqrt{\nu}}{\nu+1}\right). \tag{3.10}$$

Nous utilisons la méthode de Tenenbaum employé pour démontrer le Lemme 4 de [T91]. Nous introduisons la fonction test T définie sur les diviseurs de n par

$$T(d):=\prod_{\substack{p^\nu\|n\\ p\mid d}}\frac{1}{\nu}\qquad (d\mid n).$$

Lorsque $(d,g_n(d))=1$, nous avons

$$T(d)T(g_n(d))\geq T(n).$$

Nous avons donc $T(m)\geq\sqrt{T(n)}$ soit pour $m=d$ soit pour $m=g_n(d)$. Nous en déduisons que

$$E(n)\leq\frac{2}{\sqrt{T(n)}}\sum_{d\mid n}T(d)=2\prod_{p^\nu\|n}(2\sqrt{\nu}),$$

ce qui fournit la majoration (3.10) recherchée. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que le majorant établi en (1.6) n'est jamais plus grand que $\tau(n)$ (avec égalité si n est sans facteur carré). □

3.4. Démonstration du Corollaire 2.1. Nous allons utiliser de manière cruciale la majoration démontrée par Erdős et Tenenbaum (voir [ET89], formule 2.14)

$$E(n)\leq 2\frac{\tau(n)}{V(n)+1} \tag{3.11}$$

où nous avons posé $V(n) := \max_{p^\nu \| n} \nu$.

Nous envisageons trois cas :

(i) Soit $\omega(n) \geq (\log \Omega(n))/(1-c)$. Nous avons alors $E(n) \leq \tau(n)/\Omega(n)$, d'après le Théorème 2a[5].

(ii) Soit $\mathrm{card}\{p^\nu \| n : \quad \nu \geq \sqrt{V(n)}\} \geq 2$. Le Théorème 2b implique alors

$$E(n) \ll \frac{\tau(n)}{V(n)}.$$

(iii) Nous avons sinon

$$\omega(n) \leq (\log \Omega(n))/(1-c), \qquad \mathrm{card}\{p^\nu \| n : \nu \geq \sqrt{V(n)}\} \leq 1.$$

Montrons alors l'estimation $\Omega(n) \asymp V(n)$ ce qui est suffisant d'après (3.11). On a l'encadrement

$$V(n) \leq \Omega(n) \leq V(n) + \sqrt{V(n)}\,\omega(n) \leq V(n) + \sqrt{V(n)}\frac{\log \Omega(n)}{1-c}. \tag{3.12}$$

L'inégalité $\Omega(n) \leq V(n)\omega(n) \leq V(n)(\log \Omega(n))/(1-c)$ implique que nous avons $\log \Omega(n) \ll \log(V(n)+1)$. Nous en déduisons l'estimation $\Omega(n) \asymp V(n)$ en reportant cette majoration dans (3.12). Cela achève la démonstration du Corollaire 2.1. □

4. MINORATION DE $E(n)$

4.1. Démonstration du Théorème 3a. Montrons tout d'abord l'inégalité

$$E(n) \geq \max_{\substack{d \mid n \\ (d,n/d)=1}} \big(\min\{\tau(d), \tau(n/d)\}\big). \tag{4.1}$$

En effet, prenons d_1 un diviseur de n tel que $(d_1, n/d_1) = 1$ et que

$$\tau(d_1) = \max_{\substack{d \mid n \\ (d,n/d)=1}} \big(\min\{\tau(d), \tau(n/d)\}\big) \leq \tau(n/d_1). \tag{4.2}$$

Nous pouvons définir une injection de $\{m \in \mathbb{N} : \quad m \mid d_1\}$ dans $\{m \in \mathbb{N} : m \mid n/d_1\}$ puisque $\mathrm{card}(\{m \in \mathbb{N} : \quad m \mid d_1\}) \leq \mathrm{card}(\{m \in \mathbb{N} : \quad m \mid n/d_1\})$. Il est clair que cette application est régulière. Nous en déduisons que

$$E(n) \geq \tau(d_1) = \max_{\substack{d \mid n \\ (d,n/d)=1}} \big(\min\{\tau(d), \tau(n/d)\}\big).$$

Il reste à montrer la deuxième inégalité de (1.12). Supposons que

$$\tau(d_1) < \frac{\tau(n)^{1/2}}{\sqrt{V(n)+1}}.$$

Nous choisissons alors un nombre premier p et un exposant $\nu \in [1, V(n)]$ tels que $p^\nu \| n/d_1$. Nous avons alors

---

[5] Le Théorème 2 de [T91] était suffisant.

$$\begin{cases} \tau\Big(\dfrac{n}{d_1}\Big) > \tau\Big(\dfrac{n}{d_1 p^\nu}\Big) \geq \dfrac{\tau(n/d_1)}{V(n)+1} \geq \dfrac{\tau(n)^{1/2}}{\sqrt{V(n)+1}}, \\ \qquad\qquad \tau(d_1) < \tau(d_1 p^\nu) \leq \tau(n)^{1/2}\sqrt{V(n)+1}, \end{cases}$$

ce qui contredit la définition (4.2) de d_1. Cela achève la démonstration du Théorème 3a. □

Notons que le minorant dans (1.12) satisfait à

$$\max_{\substack{d \mid n \\ (d,n/d)=1}} \big(\min\{\tau(d), \tau(n/d)\}\big) \leq \tau(n)^{1/2}.$$

Le membre de droite correspond au bon ordre de grandeur de $E(n)$ pour une infinité d'entiers n (Considérer la suite des entiers de la forme $n = (\prod_{i=1}^3 p_i)^\nu$).

4.2. Démonstration du Théorème 3b. Lorsque m est sans facteur carré, les valeurs de $E(m^\nu)$ ne dépendent que de $\omega(m)$ et de ν. Pour $\nu \geq 1$, nous pouvons donc définir les fonctions arithmétiques m_ν et c_ν par

$$(4.3) \qquad m_\nu(\omega(n)) = 2^{\omega(n) c_\nu(\omega(n))} = E(m^\nu).$$

Grâce à la sur-multiplicativité de E, nous obtenons

$$m_\nu(k+k') \geq m_\nu(k) m_\nu(k'), \qquad (k+k')c_\nu(k+k') \geq k c_\nu(k) + k' c_\nu(k').$$

Soit $k_0 \in \mathbb{N}^*$. Nous en déduisons pour tout k la minoration

$$(4.4) \qquad m_\nu(k) \geq 2^{k_0 [k/k_0] c_\nu(k_0)} \geq 2^{(k-k_0+1)c_\nu(k_0)}.$$

Pour $\nu \geq 2$, un simple calcul fournit $m_\nu(2) = 2\nu + 2$ et, par conséquent,

$$c_\nu(2) = \frac{\log(2\nu+2)}{2\log(\nu+1)} = c(\nu).$$

Nous choisissons $n = p_1^\nu p_2^\nu$ avec $p_1 \neq p_2$. Pour tout diviseur d compté dans (1.1), nous avons soit $p_1 \nmid d$ soit $p_1 \nmid g_n(d)$. D'après l'injectivité de g_n, il en découle

$$E(n) \leq 2\,\mathrm{card}\{d \mid n : \quad p_1 \nmid d\} = 2\nu + 2.$$

Nous introduisons σ la permutation de $\{1, \ldots, \nu\}$ définie par $\sigma(i) = i+1$ pour $i \leq \nu - 1$. Nous définissons alors g_n par

$$g_n(1) = p_1 p_2, \quad g_n(p_1^2 p_2^2) = 1, \quad g_n(p_1^i) = p_2^{\sigma(i)}, \quad g_n(p_2^i) = p_1^{\sigma(i)},$$

pour $i = 1, \ldots, \nu$, les autres valeurs de $g_n(d)$ étant choisies de sorte que g_n soit injective. La fonction g_n est bien régulière et la fonction $F \in \mathcal{E}$ associée vérifie $F(n) = 2\nu + 2$. Nous avons donc bien $m_\nu(2) = 2\nu + 2$.

La minoration (4.4) appliquée à $k_0 = 2$ fournit le Théorème 3b.[6] □

---

[6] Un simple calcul fournit les premières valeurs de $m_1(k)$ et $c_1(k)$ définis en (4.3). Nous avons $m_1(2) = 3$, $m_1(3) = 5$, $m_1(4) = 9$, $m_1(5) = 17$, $m_1(6) = 30$, $m_1(7) = 55$, $m_1(8) = 111$, et ainsi $c_1(2) \approx 0,792$, $c_1(3) \approx 0,773$, $c_1(4) \approx 0,792$, $c_1(5) \approx 0,817$, $c_1(6) \approx 0,818$, $c_1(7) \approx 0,825$, $c_1(8) \approx 0,849$.

4.3. Démonstration du Théorème 3c. Pour établir la minoration de la même forme que (1.13), nous raisonnons de manière ensembliste. En effet, si n est un entier sans facteur carré ayant k facteurs premiers, nous mettons les diviseurs de n en correspondance avec les sous-ensembles d'un ensemble E à k éléments. Il s'agit donc de déterminer un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(E)$[7] avec le plus d'éléments possibles tel qu'il existe une application φ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{P}(E)$ satisfaisant à

(i) $\varphi : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{P}(E)$ soit injective.

(ii) $\forall I \in \mathcal{F}$, on a $\varphi(I) \cap I = \emptyset$.

(iii) $\varphi : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{P}(E)$ définie par $\varphi(I) = E \setminus (I \cup \varphi(I))$ soit injective.

Un résultat profond de combinatoire de Baranyai [B73] implique le résultat suivant.

Lemme 4.1 (Baranyai [B73]). *Soient r et k des entiers non nuls, et E un ensemble à rk éléments et F_k l'ensemble des parties de E à k éléments. On peut regrouper les $\binom{rk}{k}$ éléments de F_k par groupe de r éléments de sorte que chaque groupe forme une partition de E.*

Démonstration. Nous appliquons le Théorème 2 de [B73] en choisissant $p = 1$, $n = rk$, $h_1 = k$, $s = \frac{1}{r}\binom{rk}{k}$, $a_{i,j} = r$. □

En prenant $r = 3$, nous en déduisons le résultat suivant.

Lemme 4.2. *Soient E un ensemble à $3k$ éléments et F_k l'ensemble des parties de E à k éléments. Il existe une application $\varphi = \varphi_k$ de F_k dans F_k telle que*

(i) *L'application φ est bijective,*

(ii) *Pour tout $I \in F_k$, on a $\varphi(I) \cap I = \emptyset$,*

(iii) *L'application ψ de F_k dans F_k définie par $\psi(I) = E \setminus (I \cup \varphi(I))$ est bijective.*

Démonstration. Ceci est une conséquence directe du Lemme 4.1 de Baranyai [B73]. Considérons le cas $r = 3$. Indexant les groupes par j où $j \leq \frac{1}{3}\binom{3k}{k}$, nous avons alors

$$E = E_{j,1} \cup E_{j,2} \cup E_{j,3} \qquad \left(j = 1, \dots, \frac{1}{3}\binom{3k}{k}\right),$$

où les ensembles $E_{j,i}$ sont des élements de F_k tous distincts. Nous posons

$$\varphi(E_{j,1}) = E_{j,2}, \qquad \varphi(E_{j,2}) = E_{j,3}, \qquad \varphi(E_{j,3}) = E_{j,1},$$

lorsque $j = 1, \dots, \frac{1}{3}\binom{3k}{k}$. L'application φ ainsi définie vérifie bien les trois propriétés demandées. □

[7] $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E.

Le Théorème 3c découle du résultat suivant puisque la fonction m_1 est croissante et que l'on a, d'après la formule de Stirling, l'estimation asymtotique

$$\binom{3k}{k} \sim \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi k}} 2^{3ck}.$$

Lemme 4.3. *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\binom{3k}{k} \leq m_1(3k) \leq 4\binom{3k}{k}. \tag{4.5}$$

Démonstration. Nous n'avons pas essayer d'optimiser les constantes 1 et 4. Nous démontrons la forme ensembliste du résultat détaillée au début de cette sous-section. Nous détectons les éléments I de $\mathcal{F}$ par un des trois ensembles I, $\varphi(I)$ ou $\psi(I)$. Les cardinaux de ces ensembles vérifient $\mathrm{card}(I) + \mathrm{card}\varphi(I) + \mathrm{card}\psi(I) = 3k$. Si $\mathrm{card}(I) \geq k+1$, alors nous avons $\min\{\mathrm{card}\varphi(I), \mathrm{card}\psi(I)\} \leq k-1$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} m_1(3k) &\leq \mathrm{card}\{I \subset E : \quad \mathrm{card}(I) \leq k\} \\ &\quad + \mathrm{card}\{I \subset E : \quad \mathrm{card}\varphi(I) \leq k-1\} \\ &\quad + \mathrm{card}\{I \subset E : \quad \mathrm{card}\psi(I) \leq k-1\} \\ &= \binom{3k}{k} + 3\sum_{j=0}^{k-1}\binom{3k}{j}. \end{aligned}$$

La majoration

$$\binom{3k}{j} \leq 2^{-(k-j)}\binom{3k}{k}$$

valable pour $j = 0, \ldots, k$ implique la majoration du Lemme 4.3. La minoration découle immédiatement du Lemme 4.2. Cela achève la démonstration du Lemme 4.3 et donc celle du Théorème 3. $\square$

Après prépublication, Michel Balazard nous a indiqué que le résultat de Baranyai avait déjà été utilisé en théorie des nombres par Alladi, Erdős et Vaaler [AEV89] dans un problème proche du notre.

BIBLIOGRAPHIE

[AEV89] Alladi, K., P. Erdős et J.D. Vaaler – Multiplicative Functions and Small Divisors, II. J. Number Theory **31**, 183–190 (1989).

[BET90] Balog, A., P. Erdős et G. Tenenbaum – On arithmetic functions involving consecutive divisors. In : B. Berndt, H. Diamond, H. Halberstam, A. Hildebrand (eds), Analytic Number Theory (Urbana, 1989). Prog. Math. **85**, 77–90 (Birkäuser, 1990).

[B73] Baranyai, Z. – On the factorization of the complete uniform hypergraph. Infinite and finite sets (Colloq., Kestthely, 1973; dedicated to P. Erdős on his 60th birtday). Vol. I, pp 91–108, Colloquia Math. Societatis Janos Bolayi Vol. **10**, North-Holland, Amsterdam (1975).

[EH78] Erdős, P. et R.R. Hall – On some unconventional problems on the divisors of integers. J. Austral. Math. Soc. A **25**, 479–485 (1978).

[EH80] Erdős, P. et R.R. Hall – Values of the Divisor Functions on short Intervals. J. Number Theory **12**, 176–187 (1980).

[ET89] Erdős, P. et G. Tenenbaum – Sur les fonctions arithmétiques liées aux diviseurs consécutifs. J. Number Theory **31**, 285–311 (1989).

[H96] Hall, R.R. – Sets of Multiples. Cambridge Tracts in Mathematics, **118** (1996).

[HT88] Hall, R.R. et G. Tenenbaum – Divisors. Cambridge Tracts in Mathematicces **90** (1998).

[ST98] Stef, A. et G. Tenenbaum – Entiers lexicographiques. Paul Erdős (1913–1996). Ramanujan J., **2**, no 1-2, 167–184 (1998).

[T91] Tenenbaum, G. – Une inégalité de Hilbert pour les diviseurs. Indag. Mathem., New Ser. **2** (1), 105–114 (1991).

(Received September 1999)