Historia Mathematica 10 (1983) 435-447

EINE BISHER UNBEKANNTE ABHANDLUNG ÜBER DAS RECHENBRETT AUS DEM BEGINNENDEN 14. JAHRHUNDERT*

BY MENSO FOLKERTS
INSTITUT FÜR GESCHICHTE DER NATURWISSENSCHAFTEN,
DEUTSCHES MUSEUM, POSTFACH
D-8000 MÜNCHEN 26, F.R.G.

SUMMARIES

This article considers a previously unnoticed mathematical treatise on the counting board, presumably written about 1310 in Bordeaux by an otherwise unknown master Johannes de Elsa. The treatise is contained in manuscript lat. qu. 526, in the Staatsbibliothek Preussischer Kulturbesitz, Berlin. The author of the treatise explains the application of a counting board made from lead for three purposes: for sexagesimal fractions, for the Indian-Arabic calculations with whole numbers and for displaying the coins of shopkeepers and businessmen. His counting board is unusual for the period around 1300; it is similar to line and coin boards preserved from the end of the 15th century and later. This article contains an interpretation and an edition of the Latin text.

Der Aufsatz behandelt eine bisher unbeachtete mathematische Abhandlung über das Rechenbrett, die vermutlich um 1310 von einem sonst unbekannten Magister Johannes de Elsa in Bordeaux verfaßt wurde. Sie ist in der Handschrift lat. qu. 526 in Berlin, Staatsbibliothek Preußischer Kulturbesitz, erhalten. Der Autor lehrt die Verwendung einer aus Blei hergestellten Rechentafel für drei Zwecke: für die Sexagesimalbrüche, für das indisch-arabische Rechnen mit ganzen Zahlen und für die Münzdarstellung der Kaufleute. Seine Rechentafel ist für die Zeit um 1300 ungewöhnlich; sie ähnelt den Linien- und den Münzbrettern, die erst seit dem Ende des 15. Jahrhunderts erhalten sind. Der Aufsatz enthält eine Interpretation und Edition des lateinischen Textes.

Cet article porte sur un traité mathématique de la table à compter, probablement écrit vers 1310 à Bordeaux par maître Johannes de Elsa, par ailleurs inconnu. Jusqu'à maintenant passé inaperçu, le traité se trouve Berlin, Staatsbibliothek Preussischer Kultur-

*Herrn Prof. Dr. Kurt Vogel zum 95. Geburtstag gewidmet.

0315-0860/83 $3.00

besitz, manuscrit lat. qu. 526. L'auteur du traité montre comment une table à compter faite de plomb peut servir à trois usages: pour les fractions sexagésimales, pour les calculs indo-arabes des nombres entiers, et pour les calculs de monnaies pour les commerçants. Sa table à compter est inhabituelle pour cette période. Elle ressemble aux tables à lignes ou à monnaies du XV^e siècle. L'article contient une édition du texte latin ainsi qu'un commentaire.

1. EINLEITUNG

Bekanntlich rechnete man im spätmittelalterlichen Europa teils nach Art der Araber "auff Ziffern," d.h. schriftlich ohne Benutzung von Rechenhilfsmitteln, teils "auff Linien," d.h. mit Verwendung eines durch Linien unterteilten Rechenbretts. Das Rechnen auf dem Linienbrett wird in Handschriften und Drucken des 15. und 16. Jahrhunderts außerordentlich häufig dargestellt und war demnach sehr verbreitet. Umso erstaunlicher ist es, daß wir über die Frühgeschichte des Linienbretts fast nichts wissen: Die ältesten erhaltenen Rechenbretter stammen aus dem Ende des 15. Jahrhunderts; daß jedoch schon lange vorher auf Rechentischen gerechnet wurde, bezeugen die vielen Rechenpfennige, die bis ins 13. Jahrhundert zurückgehen, und Erwähnungen von Rechentischen in Hausratsverzeichnissen und anderen Dokumenten des Hoch- und Spätmittelalters [1]. Diese vereinzelten Hinweise ermöglichen natürlich keine Rückschlüsse auf die Form des Rechenbretts und das Rechnen auf ihm. Unklar bleibt auch, ob es Zusammenhänge zwischen dem spätmittelalterlichen Linienbrett und dem Abakus der Gerbertschen Schule gibt, der vom Ende des 10. Jahrhunderts bis zum 12. Jahrhundert vor allem im klösterlichen Bereich bekannt war [2]: Zwar gibt es prinzipielle Unterschiede, da das Gerbertsche Rechenbrett in Spalten eingeteilt ist, keine Fünferschritte kennt und mit je einem benannten Zahlstein pro Spalte arbeitet, während das Linienbrett waagerechte Linien aufweist, auf denen einander gleichwertige Zahlsteine liegen, die in den Zwischenräumen den fünffachen Wert repräsentieren. Andrerseits haben Untersuchungen von Poole [1912] und Haskins [1924, 327-335] die Möglichkeit eröffnet, daß der von Gerbert propagierte Klosterabakus das Vorbild für das Rechnen am englischen Königshof gewesen sein könnte, das in manchen Punkten mit dem Rechnen auf dem spätmittelalterlichen Münzbrett übereinstimmt [3].

In Anbetracht dieser unklaren Quellenlage verdient ein Text besondere Aufmerksamkeit, der vermutlich um 1300 entstanden ist und recht deutlich die Herstellung eines Rechenbretts und das Rechnen auf ihm schildert. Von diesem Text, der bisher unbeachtet geblieben ist, kenne ich nur eine Handschrift, die ich im folgenden etwas näher beschreiben werde. Es schließen sich Mutmaßungen über den Autor an. Nach einer Inhaltsangabe des Textes mit den notwendigen Interpretationsversuchen folgt eine Edition der kleinen Schrift.

2. ÜBERLIEFERUNG DER SCHRIFT

Der Text befindet sich in der Handschrift lat.qu.526, die heute in der Staatsbibliothek Preußischer Kulturbesitz in Berlin (West) aufbewahrt wird. Dieser Codex, der entsprechend seinen Schriftformen wohl Anfang des 14.Jahrhunderts geschrieben wurde, besteht aus 52 Pergamentblättern. Er enthält auf den Blättern f.1r-46v Arzachels *Canones ad tabulas Toletanas* in der Übersetzung des Gerhard von Cremona und weitere astronomische Texte, vor allem über die Finsternisse. Es folgt auf f.47r-50v der Algorismus des Alexander de Villa Dei, der mitten im Abschnitt über das Quadratwurzelziehen abbricht [4]. Unter dem letzten Vers steht die Quadratzahl 66584641600 und ihre Wurzel 258040. Ohne Unterbrechung schließt sich der hier zu besprechende Traktat über das Rechenbrett an, der von f.50v bis f.51v reicht. Auf dem letzten Blatt der Handschrift (f.52rv) steht ein am Ende unvollständiger Text über das Rechnen mit Sexagesimalbrüchen, der mir sonst nicht bekannt ist; er bietet inhaltlich nichts Neues. Die ganze Handschrift ist recht sauber geschrieben; in- und subscriptiones fehlen überall. Es gibt zahlreiche Randbemerkungen und Korrekturen, die vermutlich vom Schreiber selbst ausgeführt wurden. Leider sind gegen Ende der Handschrift die oberen rechten Ecken stark beschädigt; dies hat zu einem--allerdings geringen--Textverlust geführt.

Eine Notiz auf dem vorderen Innendeckel besagt, daß die Handschrift im Jahre 1480 einem Magister Baptistus de Poleziis in Modena gehörte [5]. Später besaß sie M. Celotti, von dem sie Th. Phillipps erwarb (Nr.896 der Phillipps-Handschriften)[6]. 1898 wurde die Handschrift bei Sotheby versteigert [7] und von der Preußischen Staatsbibliothek erworben [8], wo sie die Signatur lat.qu.526 erhielt.

3. DER AUTOR

Der Text über das Rechenbrett, der sich in der Berliner Handschrift auf f.50v-51v befindet, stammt von *Johannes de Elsa, canonicus et magister scolarum Burdegalensis*. Weitere Angaben über den Autor gibt die Handschrift nicht. Johannes de Elsa muß gegen Ende des 13. oder Anfang des 14.Jahrhunderts gelebt haben, da die Handschrift im 14. Jahrhundert geschrieben wurde und im Text eine Zeile aus Alexander de Villa Deis *Carmen de algorismo* zitiert wird, das in der 1.Hälfte des 13.Jahrhunderts verfaßt wurde. Über die Lebensdaten dieses Johannes konnte ich nichts ermitteln [9]. Jedenfalls wird ein Johannes de Elza im Jahre 1309 zweimal in den Regesten des Papstes Clemens V. (1305-1314) erwähnt, und zwar als *canonicus ecclesie s.Nicolai de Nugarolio Auxitan. diocesis* [Regestum 1886,7] und als *magister* und *procurator*, der von Bertrandus de Andiran., dem ehemaligen Rektor einer Pfarrkirche der Franziskaner in der Diözese Agen, eingesetzt wurde [Regestum 1886, 81]. Es liegt nahe, diesen Johannes de Elza mit dem Autor unseres Traktats zu identifizieren. Wenn dies zutrifft, so war Johannes im Jahre 1309 Kanoniker der Kirche S. Nicolaus in Nogarolo im Bistum Auch, einem der reichen Bistümer Frankreichs. Nach 1309 und vermutlich vor 1314, dem Todesjahr von Clemens V., muß er Kanoniker von Bordeaux geworden sein. Clemens V., der aus dem niederen Adel von Agen stammte und dort selbst Kanoniker gewesen war, bekleidete vor seinem Pontifikat das Amt des Erzbischofs von Bordeaux. In seiner Papstzeit besetzte er mehrere Kanonikate in Bordeaux mit Verwandten. Unklar bleibt, an welcher Kirche in Bordeaux Johannes inkardiniert war. Man wird zunächst an die Kathedrale, S. André, denken, doch gab es im ersten Drittel des 14.Jahrhunderts in der Diözese Bordeaux weitere acht Kapitel, in denen er genauso gut ein Kanonikat innegehabt haben könnte [10].

4. INHALT DER SCHRIFT

Johannes de Elsa behauptet, ein Verfahren erfunden zu haben [*inveni*], das das Rechnen erleichtert. Er benötigt dazu eine rechteckige Tafel aus Blei [*plumbum*] mit den Seiten 1 *digitus* und 13 *digiti*. Indem zwischen dem 1. und 4., 4. und 7., 7. und 10., 10. und 13. *digitus* etwa die Hälfte weggenommen wird [*concavavi*], entsteht eine Rechentafel [*plumbum*], die fünf erhabene Stege [*dentes*] in gleichem Abstand aufweist. Diese Tafel wird so vor den Benutzer gelegt, daß die Stege nach rechts weisen (siehe Fig. 1) [11].

Diese Rechentafel kann für drei Arten der Zahldarstellung bzw. des Rechnens benutzt werden: für das Rechnen mit Sexagesimalbrüchen (§2), für das Rechnen mit ganzen Zahlen *iuxta doctrinam algorismi* (§§4-5) und für das Rechnen mit Münzeinheiten, *sicut computant mercatores* (§6). Johannes schildert in jedem dieser Fälle, wie man mit Hilfe von Rechenpfennigen [*denarii*] Zahlen auf dem Rechenbrett darstellt und wie man diese Zahlen dann in schriftlicher Form festhält.

Für die Bruchdarstellung (§1 Ende-§2) werden die Stege von oben nach unten durchnumeriert. Dann bezeichnet der erste (oberste) Steg die *signa*, der zweite die *gradus*, der dritte die *minuta*, der vierte die *secunda* und der fünfte die *tercia* (§1 Ende). Hier liegt also die in der Astronomie übliche Sexagesimalteilung der Grade zugrunde, wobei ein *signum* wohl 30 *gradus* enthält [12]. Die offenbar unbenannten und untereinander gleichartigen Rechenpfennige bezeichnen auf den Stegen jeweils eine entsprechende Einheit. Werden sie in der Verlängerung der Stege nach links angeordnet, so erhalten sie den jeweils fünffachen Wert; unmittelbar über den Stegen geben sie 10 entsprechende Einheiten an. Auf diese Weise benötigt man maximal vier *denarii* auf den Stegen, einen links davon

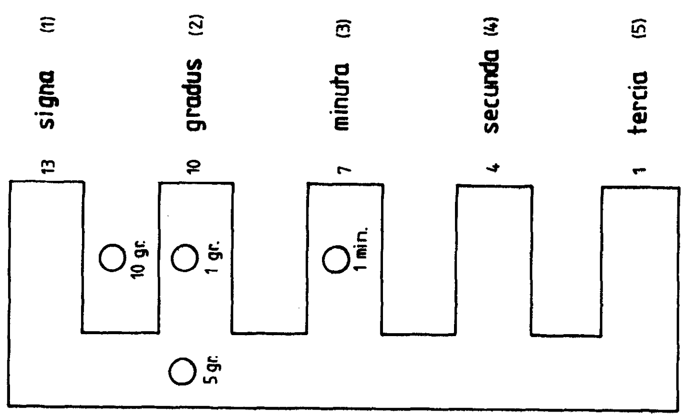


Fig. 1
Brüche

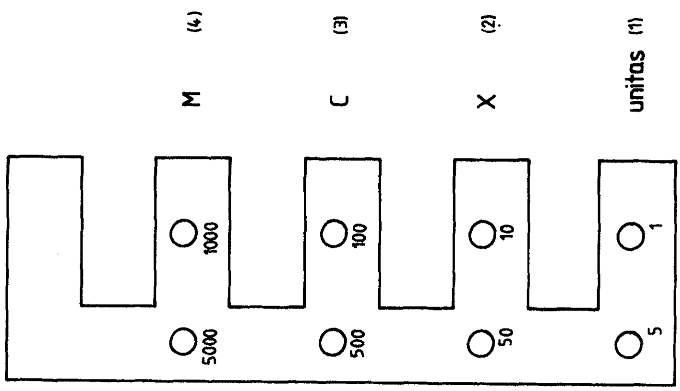


Fig. 2
ganze Zahlen

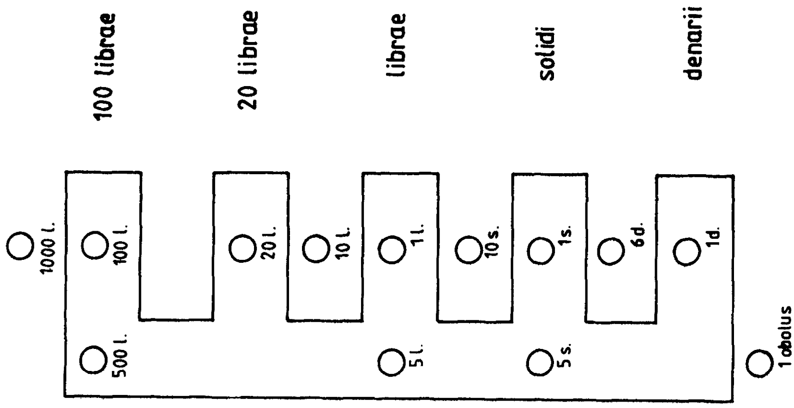


Fig. 3
Münzen

Die Figuren sind nicht maßstabsgerecht gezeichnet.

und fünf (bzw. zwei bei den *gradus*) in den Zwischenräumen; dies wird allerdings im Text nicht gesagt. Will man die so dargestellte Zahl aufschreiben, so muß man beachten, daß man immer bei den *signa* anzufangen hat und die übrigen vier Sexagesimalstellen von links nach rechts in der richtigen Reihenfolge ausfüllt; wenn auf der Rechentafel kein Stein liegt, erhält die entsprechende Stelle eine Null [*chifra*].

Im nächsten Abschnitt (§3) stellt Johannes fest, daß seine Rechentafel nicht nur für das Bruchrechnen, sondern auch für das Rechnen nach der Lehre des Algorismus oder nach Art der Kaufleute, die Ausgaben und Einnahmen in Münzeinheiten angeben, geeignet ist. Für diese beiden neuen Arten muß man die Stege umnumerieren, so daß der unterste jetzt die Nummer 1 und der oberste die Nummer 5 erhält. Auf diese Weise wächst der Wert der Zahlen, wenn man vom ersten zum zweiten Steg und weiter fortschreitet, nach Art einer *quantitas discreta* bis ins Unendliche [*ascendit et crescit in infinitum*], während bei den Sexagesimalbrüchen der entsprechende Vorgang--wegen der Numerierung der Stege im umgekehrten Sinn--nach Art einer *quantitas continua* zu unendlich kleinen Größen führt [*descendit et decrescit in infinitum*]. Diese uns etwas gekünstelt erscheinende Argumentation, die übrigens am Ende von §7 wieder aufgegriffen wird, zeigt, daß der Autor offenbar die Euklidübersetzung in der Fassung Adelhard II oder Campanus kannte: Dort wird nach den Postulaten und Axiomen des 1.Buches in einem Zusatz auf den Unterschied von kontinuierlichen und diskreten Größen hingewiesen und erwähnt, daß diese bis ins Unendliche ansteigen, jene bis ins Unendliche klein werden können [13].

§4 schildert die Zahldarstellung auf Johannes' Rechenbrett *iuxta doctrinam algorismi*. Von unten nach oben bezeichnen die Stege jetzt die Einer, Zehner, Hunderter, Tausender usw.: Johannes erwähnt ausdrücklich, daß man diese Reihe fortsetzen kann [*de pluribus locis, si ponantur ulterius quantum placuerit*]. Jeder Rechenstein auf einem Steg bezeichnet eine entsprechende Einheit; wird er in der Verlängerung des Stegs nach links auf die Seite gelegt [*a latere in directo ipsius ... dentis ex parte sinistra*], so nimmt er den fünffachen Wert an. Demnach sind--was wiederum nicht gesagt wird--maximal vier Einer und ein Fünfer möglich. Diese Zahlendarstellung stimmt mit derjenigen auf dem spätmittelalterlichen Rechenbrett vollkommen überein (siehe Fig. 2). Will man die so niedergelegte Zahl schriftlich festhalten, so muß man nur wissen, daß ein Rechenstein der Ziffer [*figura*] 1 entspricht, zwei Steine der Ziffer 2, usw. Daher kann jeder, der in der neuen Rechenkunst erfahren ist, schnell und ohne Probleme eine beliebige Zahl darstellen und aufschreiben (§5).

In §6 zeigt Johannes, wie man sein Brett auch für das Münzrechnen nach Art der Kaufleute benutzen kann. Jetzt repräsentiert der untere Steg 1 *denarius* und die weiteren 1 *solidus*, 1 *libra*, 20 *librae* und 100 *librae*. Ein Rechenpfennig, der in die Höhlung über die *denarii* gelegt wird, bedeutet 6 *denarii*; über den *solidi* bedeutet er 10 *solidi* und über den *librae* 10 *librae*. Hier liegt natürlich die Unterteilung 1 *solidus* = 12 *denarii* und 1 *libra* = 20 *solidi* zugrunde, so daß Rechensteine in den Zwischenräumen jeweils die Hälfte des darüberliegenden Werts angeben. In den Zwischenraum über dem Steg, der 20 *librae* bezeichnet, soll kein Stein gelegt werden, so daß auf dem 20-*librae*-Steg bis zu vier Rechenpfennige liegen können. Ein Stein links unter dem ersten Steg bezeichnet 1 *obolus* [14], ein Stein über dem fünften Steg 1000 *librae*. Legt man einen Stein links neben die Stege, die 1 *solidus*, 1 *libra* und 100 *librae* bedeuten, so verfünffachen sie ihren Wert (siehe Fig. 3). Jetzt bezeichnen die Stege also die verschiedenen Münzsorten bzw. größere Vielfache des Pfundes; nach links gerückte Steine erhöhen den Wert auf das Fünffache, Steine zwischen den Stegen betragen die Hälfte des Wertes auf dem darüberliegenden Steg. Dies ist genau dieselbe Art des Münzbretts, wie sie etwa bei Robert Recorde [1542] als *Merchants' Form* auftritt [15], aber auch Münzbretter anderer deutsch-, französisch- oder englischsprachiger Autoren dieser Zeit sind ähnlich angeordnet [16]. Bereits im 12. Jahrhundert bezeichnen die Kolonnen auf dem *scaccarium* des englischen Rechnungshofes von rechts nach links *d., s., lib.*, 20 *lib.*, 100 *lib.*; allerdings gibt es hier nur Ansätze einer Zehnerbündelung [17]. Ob Johannes de Elsa das Verfahren des englischen Rechnungshofes oder eine ähnliche Darstellungsmethode kannte und übernahm, läßt sich nicht belegen. Denkbar wäre auch, daß er Erfahrungen im kurialen Rechnungswesen in Avignon sammelte, das damals als fortschrittlich und vorbildlich galt [18].

Auch in diesem Abschnitt wird angegeben (§6 Ende), daß ein nicht vorhandener Rechenstein die Null [*chifra*] bezeichnet. Das Wesen der Null charakterisiert Johannes, indem er den entsprechenden Vers aus dem Algorismus von Alexander de Villa Dei zitiert, allerdings nicht ganz korrekt [19].

Der abschließende Paragraph (§7) informiert darüber, daß Johannes vier oder mehr gleichartige Rechentafeln angefertigt hat. Dadurch, daß er sie aneinanderlegen kann, ist es ihm möglich, bei Rechenoperationen beide an der Rechnung beteiligten Zahlen und auch Zwischenergebnisse festzuhalten. Er erwähnt außer den vier Grundrechenarten noch die Darstellung der Zahlen [*ponere*], Verdoppeln und Halbieren [*duplare, dimidiare*] sowie Quadrat- und Kubikwurzelziehen [*radices extrahere in quadratis et cubicis*] und verweist ausdrücklich auf die Lehre des Algorismus [*sicut docet subtiliter algorismus*]. Vermutlich denkt er auch hier an die Schrift des Alexander de Villa Dei oder an den etwa zur gleichen Zeit entstandenen Traktat des Johannes de Sacrobosco, den verbreitetsten mathematischen Text des Mittelalters. Die vier Tafeln ermöglichen es auch, die Reihe der Brüche (siehe §2) nach unten oder die Reihe der natürlichen Zahlen (siehe §4) nach oben fortzusetzen und damit den Vorgang des *descendere* bzw. *ascendere in infinitum*, den er in §3 erwähnt hat, besser zu veranschaulichen. Es folgt in §8 noch eine sehr schematische Darstellung des Rechenbretts, bei der die Buchstaben wohl *signa, gradus, minuta* und *secunda* bezeichnen sollen und somit die Einteilung der Stege beim Bruchrechnen (§2) veranschaulichen.

5. WÜRDIGUNG DES TEXTES

Die Schrift des Johannes de Elsa ist die früheste in Westeuropa entstandene mathematische Abhandlung, in der Zahlen auf einem vom Gerbertschen abweichenden Rechenbrett dargestellt werden. Ungewöhnlich ist die dreifache Verwendung des Brettes: für das Bruchrechnen, für das Rechnen mit ganzen Zahlen und für das Münzrechnen. Daß ein Rechenbrett für Sexagesimalbrüche benutzt wird, ist originell; die Verwendung für das Rechnen mit ganzen Zahlen und zur Darstellung von Münzwerten nimmt das Linien- bzw. Münzbrett vorweg, wie es im 15. und 16.Jahrhundert überall verbreitet war. Ob Johannes mit Recht behauptet, diese Rechentafel selbst erdacht zu haben, wird man heute kaum klären können, doch spricht manches für Johannes' Anspruch; zumindest ist für seine Zeit ein Rechenbrett ungewöhnlich, das in gleicher Weise für die Bruchdarstellung der Astronomen, für das an den Universitäten gelehrte indisch-arabische Rechnen mit ganzen Zahlen und für das Münzrechnen der Kaufleute geeignet ist. Der Autor ist mit den theoretischen mathematischen Schriften (Euklid, Algorismus-Texte) ebenso vertraut wie mit der Münzdarstellung, so daß ich ihm die Übertragung dieser Kenntnisse auf seine Rechentafel zutrauen möchte. Auf jeden Fall ist seine kleine Schrift eine Ausnahmeerscheinung innerhalb des mathematischen Schrifttums des 13. und 14.Jahrhunderts.

6. BEMERKUNGEN ZUR EDITION

Die Edition gibt den Text der Berliner Handschrift so getreu wie möglich wieder; auch orthographische Varianten (z.B. der Wechsel *-ti-/-ci-*) wurden nicht angeglichen. Alle Abkürzungen wurden aufgelöst. Die vorsichtig durchgeführte Interpunktion soll das Verständnis des Textes ebenso erleichtern wie die Paragrapheneinteilung, die sich in der Handschrift nicht findet; nur zu Beginn der Paragraphen 2, 4 und 5 wird im Codex der Anfang eines neuen Abschnittes deutlich angegeben. Eckige Klammern [ ] bezeichnen zu tilgende Buchstaben, spitze Klammern < > geben Ergänzungen an, vor allem an den Stellen am oberen und seitlichen Rand von f.51, an denen durch die Beschädigung des Pergaments ein Textverlust eingetreten ist. Die Kreuze †† in §2 weisen auf einen korrupten Text hin.

7. EDITION

(f.50v) Iohannes de Elsa canonicus et magister scolarum Burdegalensis invenit hoc opus.

(§1) <I>nveni quendam modum apertius et facilius computandi. Recepi enim de quadam tabula plana plumbi quandam partem in latitudine unum digitum et in longitudine 13 digitos habentem, quam tabulam voco plumbum. Et de duobus digitis aliquantulum largius sumptis qui erant inter primum et 4^{m} digitum, et similiter inter quartum et septimum, inter septimum et decimum, et inter decimum et terdecimum concavavi et removi fere medietatem, et sic remanserunt in ipso plumbo 5 digiti eminentes et equaliter distantes, quos voco dentes. Quod vel quem plumbum sic factum posui in longo coram me in tabulario, ita quod dentes erant versus partem dexteram. Et per primum dentem qui erat a me remocior, quem locum voco primum et superiorem, intelligo signa, per secundum gradus, per tercium minuta, per 4^{m} secunda, per quintum, quem voco ultimum locum et inferiorem, tercia.

(§2) Computo cum dicto plumbo et cum quibuslibet denariis ad hoc aptis sic. Quot ordinate pono denarios in primo dente, tot signa intelligo, et quociens a latere in directo ipsius primi dentis ex parte sinistra pono 1 denarium, tociens intelligo[1] 5 signa, et quociens extra ipsum plumbum supra et prope ipsum primum dentem pono 1 denarium, tociens intelligo 10 signa. Similiter quot pono denarios in secundo dente, tot gradus intelligo, et quociens a latere in directo similiter pono 1 denarium, tociens intelligo 5 gradus, et quociens in dicto loco concavo qui est immediate supra ipsum secundum dentem pono 1 denarium, tociens intelligo 10 gradus. (f.51r) Et simili modo facio et intelligo de minutis, secundis et terci<is> et quotuscumque fuerit †medius motus† vel quibus alius numerus. Scribendo ipsum semper incipio a signis, sive in illis fuerit aliquid sive nichil. Intelligo semper a parte sinistra incipiendo per primum locum signa, per secundum gradus, per tercium minuta, per quartum secunda, et per quintum tercia. In quolibet enim loco in quo nichil fuerit scribo chifram.

(§3) Quando autem cum dicto plumbo volo computare quemlibet alium numerum iuxta doctrinam algorismi vel sicut mercatores et multi alii homines per denarios, solidos, libras receptorum et expensorum[2] computant quaslibet certas summas, tunc inferiorem dentem dicti plumbi qui erit magis prope me voco primum dentem et primum locum, et inde quasi ascendendo procedo et computo sicut placet. Nam dicta prima computacio de signis, gradibus, minutis et aliis fractionibus se habet per modum quantitatis continue que descendit et decrescit in infinitum. Huius autem computacio se habet per modum quantitatis discrete que ascendit et crescit in infinitum.

(§4) Unde quando computo iuxta dictam doctrinam algorismi, quot pono denarios in primo dente, tot intelligo unitates, et quociens a latere in directo ipsius primi dentis ex parte sinistra pono 1 denarium, tociens intelligo 5 unitates, et quociens pono 1 denarium[3] in secundo loco, tociens intelligo 10 et in eius latere 50, et in tercio loco tociens 100 et in eius latere tociens 500, et in quarto loco tociens 1000 et in eius latere tociens 5000. Et sic potest fieri de aliis locis in dicto plumbo residuis et similiter de pluribus locis, si ponantur ulterius quantum placuerit procedendo et multiplicando per decies, cencies et milies ponendo in quolibet loco precedenti vel sequenti unum vel plures denarios.

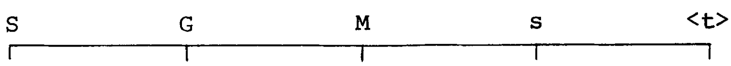
(§5) Quia sicut secundum algorismum prima figura significat 1 et secunda duo et sic de aliis secundum dictum modum quemlibet numerum augmentando, sic est hic quod 1 denarius positus in quocumque loco significat idem quod significat prima figura dicta, et duo[s] denarii idem quod secunda figura, et sic de aliis et in quolibet predictorum locorum sicut dictum est. Unde quilibet discretus in hac sciencia secundum (f.51v) <algorismum> poterit apercius et cicius solito quemlibet numerum com<puta>re, poteritque ipsum postea cum dictis figuris algorismi scri<bere> sicut fieri consuevit.

(§6) Si vero prout dictum est volo compu<ta>re sicut computant mercatores, quociens pono 1 denarium in primo dente, tot denarios intelligo, et in eius latere aliquantulum inferius tot obolos, et quociens pono 1 denarium in dicto loco concavo sequenti, tociens intelligo VI denarios, et in secundo dente tot solidos et in eius latere tociens V solidos <et in loco concavo> sequenti <X> solidos,[4] et in tercio dente tot libras et in eius latere tociens V libras seu C solidos et in loco concavo sequenti tociens X libras, et in quarto dente tociens XX libras. In cuius latere nec in loco concavo sequenti nec eciam in latere eiusdem loci concavi vel cuiuslibet alterius predicti loci concavi nichil pono, et in quinto et ultimo dente tociens C libras, et in eius latere tociens $\overset{C}{V}$ libras, et in loco supra et prope ipsum quintum dentem tociens intelligo M^m libras. In quolibet predictorum locorum si nullus denarius sit positus, intelligo ac si secundum doctrinam algorismi posita esset ibi chifra, de qua in ipso algorismo dicitur sic:

Nil[5] chifra significat, sed dat significare sequentem.

(§7) <F>eci eciam 4 vel plures consimiles plumbos, ut cum ipsis ponendo unum plumbum in directo alterius, vel scribendo in uno plumbo numerum addendum, subtrahendum, multiplicandum vel dividendum, ut levius possit retrahi ipse numerus multiplicans vel dividens et alias cicius et facilius secundum quemlibet propositum numerum possem ponere, addere, subtrahere, duplare, dimidiare, multiplicare, dividere ac eciam radices extrahere in quadratis et cubicis, sicut docet subtiliter algorismus. Possem insuper secundum predictos duos modos computandi, descendendo scilicet vel ascendendo, ponendo amplius unum vel plures plumbos quemlibet numerum [.q.] in infinitum sicut predictum est diminuere vel augere, necnon et omnia alia facere que necessaria essent ad computaciones huiusmodi faciendas.

(§8) Et hec est forma plumbi.



Apparatus criticus

1. et quociens-intelligo] *om. Ms, marg.add.* Ms^1
2. expensorum] expensarum *Ms*

3. tociens intelligo-1 denarium] *om. Ms, marg.add.Ms*[1]
4. <et in loco>-solidos] *om. Ms, marg.add.Ms*[1]
5. Nil] *correxi ex* Hic *(cf. Alexandri de Villa Dei algorismum)*

ANMERKUNGEN

1. Einen guten Überblick geben Menninger [1958, Band 2, 141-204] und Pullan [1968]. Die umfangreichste Materialsammlung über Rechenbrett und Rechensteine enthält Barnard [1916].

2. Über die Gerbert zugeschriebenen Abakusschriften und die Werke seiner Zeitgenossen und Nachfolger informiert am umfassendsten Bubnov [1899, pars I, 1, und App. I, B-E].

3. Der Dialog über das königliche Schatzamt [*Dialogus de scaccario*], der von Richard von Ely, dem Schatzmeister Heinrichs II., im 12.Jahrhundert verfaßt wurde, erwähnt in Buch I, Kap. 1 auch das in quadratische Felder eingeteilte Tuch auf dem Rechentisch [*scaccarium*] und unter den Beamten auch den Rechenmeister [I 5: *calculator*]. Die Darstellung der Münzen auf dem Rechentisch durch *calculi* erinnert an das Münzbrett im 15./16.Jahrhundert, doch sind die Kolonnen vertikal angeordnet. Die Textdeutung ist allerdings in Einzelheiten umstritten. Siehe [Siegrist 1963, 292-295; Johnson 1950].

4. Nach Z.238 in der Ausgabe von Steele [1922].

5. *Iste liber est Mri. Baptiste de polezijs de mutinis ordinis predicatorum quem emi pecunijs mihi ab ordine concessis anno domini 1480.*

6. Siehe den Nachdruck der Phillipps-Kataloge durch Munby [1968].

7. Nr.52 im Auktionskatalog: *Bibliotheca Phillippica. Catalogue of a further portion of the famous collection of classical, historical, topographical, and other manuscripts and autograph letters of the late Sir Thomas Phillipps ...,* June 1898.

8. Zugangsnummer: acc. 1898,30.

9. Ich danke Frau Dr. U. Lindgren und Herrn Dr. H. M. Schaller, beide München, für ihre Nachforschungen über Johannes de Elsa. Die folgenden Angaben beruhen auf ihren Informationen.

10. S. Seurin in Bordeaux (Stadt), S. Romain de Blaye, S. Vincent de Bourg, Saint Emilion, S. Pierre de l'Isle, S. Pierre de Vertheuil, Sainte-Marie-Madeleine de Pleine Selve, Saint Martin de Villedraut. Siehe [Guillemain 1974, 62, 71].

11. *Ita quod dentes erant versus partem dexteram.* Dies scheint im Widerspruch zur Vorschrift zu stehen, die Tafel *in longo coram me* zu legen, und bedeutet auch eine gewisse Unhandlichkeit, da der oberste Steg weit vom Rechner entfernt ist. Andrerseits glaube ich, daß der weitere Text keine andere Interpretation zuläßt, da die *dentes* als *superior* bzw. *inferior* bezeichnet werden und ich die Darstellung der Zahlen, wie sie im folgenden geschildert wird, nur mit dieser Anordnung in Einklang bringen kann. Ich

bin mir der Problematik dieser Interpretation bewußt, doch würden sich auch bei einer anderen Lage der Rechentafel die Aussagen nicht grundsätzlich andern.

12. Der Text erwähnt nicht die Umrechnungsfaktoren.

13. Campanus (Text nach der *editio princeps*, Venedig 1482):

> *Quanta est aliqua quantitas ad quamlibet aliam eiusdem generis tantam esse quamlibet tertiam ad aliquam quartam eiusdem generis in quantitatibus continuis: hoc universaliter verum est sive antecedentes maiores fuerint consequentibus sive minores. magnitudo enim decrescit in infinitum. in numeris autem non sic: sed si fuerit primus submultiplex secundi: erit quilibet tertius eque submultiplex alicuius quarti: quoniam numerus crescit in infinitum: sicut magnitudo in infinitum minuitur.*

Der Text bei Adelhard II lautet ähnlich.

14. Der Umrechnungsfaktor zu den *denarii* wird nicht angegeben. Vermutlich ist 1 *denarius* = 2 *oboli*, möglicherweise auch = 4 *oboli*.

15. Siehe die ausführliche Darstellung bei Barnard [1916, 263-266].

16. Siehe [Barnard 1916, part III: *Methods of casting with jettons*]. Die Einteilung des Pfundes in 20 *solidi* und 240 *denarii* galt im Mittelalter offenbar in ganz Europa; siehe [Engel & Serrure 1905, 949-954, 1174-1179; Friedensburg 1926, 60-69; Luschin 1926, 193-206]. Ich gehe hier von der "normalen" Umrechnung der Münzeinheiten aus und sehe von Abweichungen ab, die durch den Münzfuß entstehen können.

17. 10 *s.* können durch einen halben Silberpfennig, 10 *lib.* durch einen halben Goldpfennig dargestellt werden; siehe [Siegrist 1963, 293].

18. Siehe [Guillemain 1978]. Der ehemalige Vatikanische Bibliothekar A. Paravicini Bagliani, der eine Biographie von Papst Clemens V. vorbereitet, gab auf schriftliche Anfrage allerdings die Auskunft, daß er einen Johannes de Elsa nicht kenne.

19. Zeile 7 in der Ausgabe von Steele [1922]: *Que nil significat; dat significare sequenti*. In der Berliner Handschrift heißt die entsprechende Stelle auf f.47r: *Nil chifra significat, dat significare sequenti*.

LITERATUR

Barnard, F. P. 1916. *The casting-counter and the counting-board. A chapter in the history of numismatics and early arithmetic.* London/New York: Oxford Univ. Press (Clarendon).

Bubnov, N. 1899. *Gerberti postea Silvestri II papae opera mathematica*. Berlin: Friedländer.

Engel, A., & Serrure, R. 1905. *Traité de numismatique du moyen âge*, Band 3. Paris: Leroux.

Friedensburg, F. 1926. *Münzkunde und Geldgeschichte der Einzelstaaten des Mittelalters und der Neueren Zeit* (Handbuch der Mittelalterlichen und Neueren Geschichte, hrsg. v.G.v. Below und F. Meinecke, IV, 5). München/Berlin: Oldenbourg.

Guillemain, B. 1974. *Le diocèse de Bordeaux*. Paris: Beauchesne.

——— 1978. *Les recettes et les dépenses de la chambre apostolique pour la quatrième année du pontificat de Clément V (1308-1309)* Rome: École française de Rome.

Haskins, C. H. 1924. *Studies in the history of mediaeval science*. Cambridge, Mass.: Harvard Univ. Press.

Johnson, C. 1950. *The course of the exchequer by Richard son of Nigel*. London: Nelson.

Luschin von Ebengreuth, A. 1926. *Allgemeine Münzkunde und Geldgeschichte des Mittelalters und der Neueren Zeit* (Handbuch der Mittelalterlichen und Neueren Geschichte, hrsg. v.G.v. Below und F. Meinecke, IV, 6) 2. Auflage. München/Berlin: Oldenbourg.

Menninger, K. 1958. *Zahlwort und Ziffer*, Band 2, 2. Auflage. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Munby, A. N. L. 1968. *The Phillips Manuscripts. Catalogus librorum manuscriptorum in bibliotheca D. Thomae Phillipps, Bt. Impressum typis medio-montanis 1837-1871. With an introduction by A. N. L. Munby, Litt. D.* London: Holland.

Poole, R. L. 1912. *The exchequer in the twelfth century*. Oxford.

Pullan, J. M. 1968. *The history of the abacus*. London: Hutchinson.

Recorde, R. 1542. *The ground of artes teaching the worke and practise of arithmetike*. London: Reynold Wolff.

Regestum. 1886. *Regestum Clementis Papae V ... cura et studio Monachorum Ordinis S. Benedicti* (Regestorum Vol. LVI) Rom: Typ. Vaticana.

Siegrist, M. 1963. *Richard von Ely, Dialog über das Schatzamt, eingeleitet, übersetzt und erläutert von M. Siegrist*. Zürich/Stuttgart: Artemis.

Steele, R. 1922. *The earliest arithmetics in English*. London: Oxford Univ. Press.