JOURNAL OF ALGEBRA 10, 194–210 (1968)

Über die Gruppen von Mathieu

HEINZ LÜNEBURG

Department of Mathematics, University of Illinois, Chicago, Illinois 60680

Communicated by B. Huppert

Received February 23, 1968

EINLEITUNG

Seitdem Mathieu in der zweiten Hälfte des letzten Jahrhunderts die später nach ihm benannten, mehrfach transitiven Gruppen M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24} angegeben hat [*6*], [*7*], wurden wiederholt neue Konstruktionen dieser Gruppen angegeben [*2*], [*3*], [*5*], [*9*], [*10*], [*11*]. Unter all diesen Konstruktionen scheint mir die von Witt angegebene, die durchsichtigste zu sein, da sie am wenigsten Rechnung erfordert. Ich möchte nun in dieser Note die Mathieugruppen aufs Neue konstruieren, indem ich von der Bemerkung ausgehe, daß die Mathieuschen Gruppen Automorphismengruppen von Steinersystemen sind, die bis auf Isomorphie durch ihre Parameter eindeutig bestimmt sind [*12*]. Analysiert man nämlich die Witt'schen Eindeutigkeitsbeweise etwas genauer, so erhält man die Existenz der fraglichen Steinersysteme sowie ihre Automorphismengruppen gratis. Was man sich zu verschaffen hat, um diese Eindeutigkeit zu beweisen, ist nur eine detaillierte Kenntnis der affinen Ebene über $GF(3)$ und der projektiven Ebene über $GF(4)$. Dies möchte ich hier im einzelnen darlegen.

1. GRUNDLEGENDE BEGRIFFE UND RESULTATE

In diesem Abschnitt werden wir die im folgenden wichtigen, grundlegenden Begriffe definieren und diejenigen Resultate angeben, die wir immer wieder benutzen werden. Alle betrachteten Mengen und Strukturen sind endlich.

Ist $\mathfrak{P}$ eine Menge, deren Elemente wir Punkte, und $\mathfrak{B}$ eine Menge, deren Elemente wir Blöcke nennen, und ist $I \subseteq \mathfrak{P} \times \mathfrak{B}$, so nennen wir $\mathfrak{J} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{B}, I)$ eine *Inzidenzstruktur*. Statt $(P, \mathfrak{b}) \in I$ bzw. $(P, \mathfrak{b}) \notin I$ schreiben wir meist $P\,I\,\mathfrak{b}$ bzw. $P \not I \mathfrak{b}$. Ist $P\,I\,\mathfrak{b}$, so sagen wir P inzidiert mit $\mathfrak{b}$, der Punkt P liegt auf dem Block $\mathfrak{b}$, etc. Auf I definieren wir zwei Äquivalenzrelationen $\sim$ und $\approx$ durch $(P, \mathfrak{b}) \sim (Q, \mathfrak{c})$ genau dann, wenn $P = Q$ ist, und $(P, \mathfrak{b}) \approx (Q, \mathfrak{c})$

genau dann, wenn $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ ist. Ist I_P die durch P bestimmte Äquivalenzklasse von $\sim$ und $I_\mathfrak{b}$ die durch $\mathfrak{b}$ bestimmte Äquivalenzklasse von $\approx$, so ist $\bigcup_{P\in\mathfrak{P}} I_P = I = \bigcup_{\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}} I_\mathfrak{b}$ und $I_P \cap I_Q = \emptyset = I_\mathfrak{b} \cap I_\mathfrak{c}$, falls $P \neq Q$ und $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{c}$ ist. Setzt man $r_P = |I_P|$ und $k_\mathfrak{b} = |I_\mathfrak{b}|$, so ist also

$$(1.1) \qquad \sum_P r_P = |I| = \sum_\mathfrak{b} k_\mathfrak{b}\,.$$

r_P ist die Anzahl der mit P inzidierenden Blöcke und $k_\mathfrak{b}$ die Anzahl der Punkte auf $\mathfrak{b}$. Ferner setzen wir im folgenden stets $v = |\mathfrak{P}|$ und $b = |\mathfrak{B}|$. Die Inzidenzstruktur $\mathfrak{J}$ heißt eine *taktische Konfiguration* mit den Parametern v, b, k und r, falls $k_\mathfrak{b} = k$ ist für alle $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$ und $r_P = r$ für alle $P \in \mathfrak{P}$. Aus (1.1) folgt

(1.2) *Es ist $vr = bk$ für alle taktischen Konfigurationen mit den Parametern v, b, k und r.*

Ist $\mathfrak{J} = \{\mathfrak{P}, \mathfrak{B}, I\}$ und $P \in \mathfrak{P}$, so definieren wir die *abgeleitete Struktur* $\mathfrak{J}_P$ wie folgt:

(i) *Die Punkte von $\mathfrak{J}_P$ sind die von P verschiedenen Punkte von $\mathfrak{J}$.*

(ii) *Die Blöcke von $\mathfrak{J}_P$ sind die mit P inzidierenden Blöcke von $\mathfrak{J}$.*

(iii) *Inzidenz in $\mathfrak{J}_P$ ist gleichbedeutend mit Inzidenz in $\mathfrak{J}$.*

Die Inzidenzstruktur $\mathfrak{S}$ heißt ein *Steiner-System* mit den Parametern v, k, t, falls $k_\mathfrak{b} = k$ ist für alle Blöcke $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{S}$ und falls durch t verschiedene Punkte von $\mathfrak{S}$ stets genau ein Block geht. Wir setzen dabei stets voraus, daß $t \geqslant 2$ ist.

Es seien $P_1, \ldots, P_i$ mit $i \leqslant t$ paarweise verschiedene Punkte des Steiner-Systemes $\mathfrak{S}$ und λ_i sei die Anzahl der Blöcke, die mit ihnen inzidieren. Dann ist $\lambda_t = 1$ unabhängig von der Auswahl der Punkte $P_1, \ldots, P_t$. Es sei bereits bewiesen, daß λ_{i+1} von der Auswahl der Punkte $P_1, \ldots, P_{i+1}$ unabhängig ist. Dann ist die i-mal abgeleitete Struktur $\mathfrak{S}_{P_1,\ldots,P_i}$ eine taktische Konfiguration mit den Parametern $v^* = v - i$, $b^* = \lambda_i$, $k^* = k - i$ und $r^* = \lambda_{i+1}$. Nach (1.2) ist daher $(v-1)\lambda_{i+1} = \lambda_i(k-i)$. Also ist $\lambda_i = \lambda_{i+1}(v-i)(k-i)^{-1}$ ebenfalls von der Auswahl von $P_1, \ldots, P_i$ unabhängig. Setzt man $\lambda_0 = b$, so folgt aus (1.2), daß $\lambda_0 = \lambda_1 v k^{-1}$ ist. Mit vollständiger Induktion folgt nun die Gültigkeit von

(1.3) *Ist $\mathfrak{S}$ ein Steiner-System mit den Parametern v, k, t, so ist $\lambda_i = \binom{v-i}{t-i}\binom{k-i}{t-i}^{-1}$ für $i = 0, 1, \ldots, t$.*

Ein Steiner-System mit den Parametern $v = n^2 + n + 1$, $k = n + 1 \geqslant 3$ und $t = 2$ heißt eine *projektive Ebene der Ordnung n*. In diesem Fall ist $b = \lambda_0 = \binom{v}{2}\binom{k}{2}^{-1} = n^2 + n + 1 = v$ und $r = \lambda_1 = n + 1$.

Ein Steiner-System mit den Parametern $v = n^2$, $k = n \geqslant 2$ und $t = 2$

heißt *affine Ebene der Ordnung* n. In diesem Fall ist $b = n(n+1)$ und $r = n+1$.

Ist $\mathfrak{S}$ eine projektive oder affine Ebene, so nennen wir die Blöcke von $\mathfrak{S}$ *Geraden*.

Bekanntlich erhält man jede affine Ebene der Ordnung n, indem man aus einer geeigneten projektiven Ebene der Ordnung n eine geeignete Gerade und sämtliche auf ihr liegenden Punkte entfernt.

Zwei Geraden g und h einer affinen Ebene heißen *parallel*, in Zeichen $g \parallel h$, falls entweder $g = h$ ist oder falls g und h keinen Punkt gemeinsam haben. Die so definierte Relation „parallel" ist eine Äquivalenzrelation, ihre Äquivalenzklassen nennen wir *Parallelenscharen*. Eine Parallelenschar einer affinen Ebene der Ordnung n enthält genau n Geraden und insgesamt gibt es $n+1$ Parallelenscharen.

Aus Witt [*12*] übernehmen wir

(1.4) *Es gibt bis auf Isomorphie nur eine affine und auch nur eine projektive Ebene der Ordnung* 3 *und* 4.

Dies sind dann natürlich die Ebenen über GF(3) bzw. GF(4).

$\mathfrak{E}$ sie eine affine oder projektive Ebene der Ordnung n. Eine Menge von $n+1$ Punkten von $\mathfrak{E}$, von denen keine drei kollinear sind, heißt ein *Oval* von $\mathfrak{E}$. Eine Gerade g von $\mathfrak{E}$ heißt eine *Sekante*, *Tangente* bzw. *Passante* des Ovals $\mathfrak{o}$, je nachdem ob g mit $\mathfrak{o}$ zwei, einen oder keinen Punkt gemeinsam hat. Nach Qvist [*8*] gilt nun

(1.5) *Ist* $\mathfrak{o}$ *ein Oval in einer projektiven Ebene* $\mathfrak{E}$ *gerader Ordnung, so gibt es einen Punkt* K *in* $\mathfrak{E}$, *der sogenannte Knoten von* $\mathfrak{o}$, *mit der Eigenschaft, daß die Geraden durch* K *gerade die sämtlichen Tangenten von* $\mathfrak{o}$ *sind. Überdies sind keine drei Punkte aus* $\mathfrak{o} \cup \{K\}$ *kollinear.*

Ist $\mathfrak{h}$ eine Menge von $n+2$ Punkten in einer projektiven Ebene der geraden Ordnung n, von denen keine drei kollinear sind, so nennen wir $\mathfrak{h}$ ein *Hyperoval.*

Außer (1.5) benötigen wir noch das folgende Resultat von Qvist [*8*].

(1.6) *Ist* $\mathfrak{E}$ *eine projektive Ebene der Ordnung* n, *ist* n *gerade und* $\mathfrak{m}$ *eine Menge von Punkten von* $\mathfrak{E}$, *von denen keine drei kollinear sind, so ist* $|\mathfrak{m}| \leqslant n+2$.

2. Die kleinen Mathieu-Gruppen

Wir beginnen mit einem Hilfssatz.

(2.1) *Es sei* $\mathfrak{A}$ *eine affine Ebene der Ordnung* n *und* $\mathfrak{K}$ *eine Menge von Ovalen von* $\mathfrak{A}$ *mit den Eigenschaften*:

(a) $|\mathfrak{K}| \geqslant n^2(n-1)$.

(b) *Zwei verschiedene Ovale aus* $\mathfrak{K}$ *haben höchstens zwei Punkte gemeinsam.*

Dann gilt:

(1) $|\mathfrak{K}| = n^2(n-1)$.

(2) *Jeder Punkt von $\mathfrak{A}$ ist in genau $\lambda_1 = n^2 - 1$ Ovalen aus $\mathfrak{K}$ enthalten.*

(3) *Zwei verschiedene Punkte von $\mathfrak{A}$ sind in genau $\lambda_2 = n$ Ovalen aus $\mathfrak{K}$ enthalten.*

(4) *Drei nicht-kollineare Punkte von $\mathfrak{A}$ sind in genau einem Oval aus $\mathfrak{K}$ enthalten.*

Beweis. Wir betrachten die Inzidenzstruktur, die aus den Punkten von $\mathfrak{A}$ und den Ovalen aus $\mathfrak{K}$ besteht. Sind X, Y und Z drei verschiedene Punkte, so bezeichnen wir mit $\lambda(X)$, $\lambda(X, Y)$ bzw. $\lambda(X, Y, Z)$ die Anzahl der Ovale durch X bzw. X, Y, bzw. X, Y, Z. Ferner sei $|\mathfrak{K}| = b$. Aus (1.1) folgt dann, daß $\sum_X \lambda(X) = b(n+1)$, $\sum_Y \lambda(X, Y) = \lambda(X)\, n$ und $\sum_Z \lambda(X, Y, Z) = \lambda(X, Y)(n-1)$ ist. Wegen (b) ist $\lambda(X, Y, Z) \leqslant 1$. Ferner ist $\lambda(X, Y, Z) = 0$, falls X, Y und Z kollinear sind. Also ist $\sum_Z \lambda(X, Y, Z) \leqslant n(n-1)$. Daher ist $\lambda(X, Y) \leqslant n$. Hieraus folgt, daß $\sum_Y \lambda(X, Y) \leqslant n(n^2-1)$ ist. Somit ist $\lambda(X) \leqslant n^2 - 1$. Unter Benutzung von (a) folgt damit schließlich, daß $n^2(n^2-1) \leqslant b(n+1) = \sum_X \lambda(X) \leqslant n^2(n^2-1)$ ist. Dies impliziert, daß $b = n^2(n-1)$ ist. Es seien X_0, Y_0, Z_0 drei nicht kollineare Punkte mit $\lambda(X_0, Y_0, Z_0) = 0$. Dann folgt der Reihe nach, daß $\lambda(X_0, Y_0) < n$, daß $\lambda(X_0) < n^2 - 1$ und daß $n^2(n^2-1) < n^2(n^2-1)$ ist. Dieser Widerspruch zeigt die Gültigkeit von (4). Ebenso beweist man (2) und (3).

Ein Steiner-System $\mathfrak{S}$ mit den Parametern $v = n^2 + 1, k = n + 1 \geqslant 3$ und $t = 3$ heißt eine *Möbiusebene der Ordnung n.* Ist P ein Punkt von $\mathfrak{S}$, so ist $\mathfrak{S}_P$ eine affine Ebene der Ordnung n. Die Blöcke von $\mathfrak{S}$, die nicht durch P gehen, sind Ovale von $\mathfrak{S}_P$. Die Anzahl der Blöcke von $\mathfrak{S}$ ist gleich $n(n^2+1)$ und die Anzahl der Blöcke durch einen Punkt von $\mathfrak{S}$ gleich $n(n+1)$, so daß die Anzahl der Blöcke von $\mathfrak{S}$, die nicht durch P gehen, gleich $n^2(n-1)$ ist. Da es, falls n Potenz einer Primzahl ist, stets eine Möbiusebene der Ordnung n gibt, so daß $\mathfrak{S}_P$ zur affinen Ebene über GF(n) isomorph ist (s. etwa Benz [*1*], §4), folgern wir, daß es in der affinen Ebene über GF(n) Mengen von Ovalen gibt, die die Bedingungen (a) und (b) von (2.1) erfüllen.

Es bezeichne nun $\mathfrak{A}$ stets die affine Ebene der Ordnung 3. Ein Oval in $\mathfrak{A}$ ist dann nichts anderes als ein Viereck. Es gilt nun

(2.2) (Witt [*12*]) *Zwei Paare von Gegenseiten eines Vierecks in $\mathfrak{A}$ bestehen aus parallelen Geraden, während sich die Geraden des dritten Paares in einem Punkt von $\mathfrak{A}$ schneiden. Die Kollineationsgruppe von $\mathfrak{A}$ ist auf den Vierecken transitiv.*

Beweis. Da auf der uneigentlichen Geraden von $\mathfrak{A}$ nur vier Punkte liegen, bestehen mindestens zwei der Paare von Gegenseiten eines Vierecks aus parallelen Geraden. Nun gibt es in der projektiven Ebene der Ordnung 3 kein

Viereck mit kollinearen Diagonalpunkten. Daher schneiden sich die Geraden des dritten Gegenseitenpaares in einem eigentlichen Punkt. Es seien nun A, B, C, D und A', B', C', D' zwei Vierecke und es sei etwa $AB \parallel CD$, $BC \parallel DA$ bzw. $A'B' \parallel C'D'$ und $B'C' \parallel D'A'$. Die Kollineationsgruppe von $\mathfrak{A}$ ist auf den Dreiecken transitiv. Es gibt also eine Kollineation γ mit $A^\gamma = A'$, $B^\gamma = B'$ und $C^\gamma = C'$. Dann ist aber, da γ parallele Geraden in parallele Geraden überführt, $(CD)^\gamma = C'D'$ und $(DA)^\gamma = D'A'$. Also ist $D^\gamma = C'D' \cap D'A' = D'$, Q.E.D.

Sind A, B und C drei nicht kollineare Punkte von $\mathfrak{A}$, so liegen auf den Geraden AB, BC, CA insgesamt sechs der neun Punkte von $\mathfrak{A}$. Folglich ist jedes Dreieck von $\mathfrak{A}$ in genau drei Vierecken enthalten.

Wie wir bemerkt haben, gibt es in $\mathfrak{A}$ eine Menge $\mathfrak{B}$ von Vierecken, die die Bedingungen (a) und (b) von (2.1) erfüllen. Aus (2.2) folgt, daß jedes Viereck in einer solchen Menge liegt. $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_N$ seien alle diese Mengen. Da jedes Dreieck in genau drei Vierecken enthalten ist, jedoch wegen (2.1) (b) höchstens in einem Viereck aus einem vorgebenen $\mathfrak{B}_i$, ist $N \geqslant 3$.

Wir identifizieren nun die Punkte von $\mathfrak{A}$ mit den geordneten Paaren (x, y) mit $x, y \in \mathrm{GF}(3)$. Dann ist $\mathfrak{c} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ ein Viereck in $\mathfrak{A}$. Die Anzahl der Vierecke durch zwei verschiedene Punkte von $\mathfrak{A}$ ist $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$. Da durch drei nicht kollineare Punkte genau drei Vierecke gehen, ist die Anzahl der Vierecke durch $(0, 0)$ und $(0,1)$, die mit $\mathfrak{c}$ nur diese Punkte gemeinsam haben, gleich $9 - 2 \cdot 2 - 1 = 4$. Nun haben die Vierecke

$$\mathfrak{v}_1 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 2)\}, \qquad \mathfrak{v}_2 = \{(0, 0), (0, 1), (2, 0), (2, 1)\},$$

$$\mathfrak{v}_3 = \{(0, 0), (0, 1), (2, 1), (2, 2)\}, \qquad \mathfrak{v}_4 = \{(0, 0), (0, 1), (2, 0), (2, 2)\}$$

mit $\mathfrak{c}$ nur die Punkte $(0, 0)$ und $(0, 1)$ gemeinsam und sind daher nach unserer Bemerkung alle Vierecke mit dieser Eigenschaft. Nun gibt es in der Menge $\{\mathfrak{c}, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3, \mathfrak{v}_4\}$ nur eine Teilmenge von drei Vierecken, die sich paarweise nur in zwei Punkten schneiden, nämlich $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$. Hieraus folgt, daß $\mathfrak{c}$ in genau einem der $\mathfrak{B}_i$ liegt. Nach (2.1) (1) ist $|\mathfrak{B}_i| = 3^2(3 - 1) = 18$. Also ist $18N$ die Anzahl der Vierecke in $\mathfrak{A}$. Andrerseits ist diese Anzahl gleich $\frac{1}{4!} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 3 = 18 \cdot 3$. Somit ist $N = 3$.

Es sei $\mathfrak{c}_1 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$, $\mathfrak{c}_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (2, 1)\}$ und $\mathfrak{c}_3 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 2)\}$. Dann ist $|\mathfrak{c}_i \cap \mathfrak{c}_j| \geqslant 3$. Wir können daher o.B.d.A. annehmen, daß $\mathfrak{c}_i \in \mathfrak{B}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ ist. Es sei γ die durch $(x, y)^\gamma = (2(x + y) + 1, x)$ und δ die durch $(x, y)^\delta = (y, x)$ definierte Kollineation von $\mathfrak{A}$. Eine triviale Rechnung zeigt dann, daß $\mathfrak{c}_1^{\delta} = \mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{c}_2^{\delta} = \mathfrak{c}_3$, $\mathfrak{c}_3^{\delta} = \mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_1^{\delta} = \mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2^{\delta} = \mathfrak{c}_3$ und $\mathfrak{c}_3^{\delta} = \mathfrak{c}_2$ ist. Da $\mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{B}_j = \emptyset$ ist, falls $i \neq j$ ist, ist $\mathfrak{B}_1^\gamma = \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_2^\gamma = \mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_3^\gamma = \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_1^\delta$, $\mathfrak{B}_2^\delta = \mathfrak{B}_3$ und $\mathfrak{B}_3^\delta = \mathfrak{B}_2$. Also gilt

(2.3) *Die Kollineationsgruppe* G *von* $\mathfrak{A}$ *induziert auf* $\{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3\}$ *die symmetrische Gruppe vom Grade* 3.

Es sei $U = \{\gamma \mid \gamma \in G, \mathfrak{B}_i^\gamma = \mathfrak{B}_i, i = 1, 2, 3\}$. Dann ist nach (2.3) $|G| = 6|U|$. Die Ordnung von G ist gleich $3^2 \cdot 3(3^2 - 1)(3 - 1) = 27 \cdot 16$. Also ist $|U| = 9 \cdot 8$. Nun sind alle involutorischen Kollineationen aus G, die drei Punkte von $\mathfrak{A}$ festlassen, zu der oben definierten Kollineation δ konjugiert. Hieraus folgt, daß keine dieser Involutionen in U liegt. Die Involutionen aus U sind daher Streckungen von $\mathfrak{A}$. Die Gruppe U ist Normalteiler von G und daher, da G auf den Punkten von $\mathfrak{A}$ zweifach transitiv operiert, noch transitiv auf den Punkten. Hieraus folgt, daß U alle Streckungen von $\mathfrak{A}$, die ja alle involutorisch sind, und folglich auch alle Translationen von $\mathfrak{A}$ enthält. Da die in U enthaltenen Involutionen alle Streckungen sind, folgt, daß ein 2-Element aus U höchstens einen Fixpunkt hat. Dies impliziert wiederum, daß die Identität die einzige Kollineation aus U ist, die mehr als einen Fixpunkt hat. Wegen $|U| = 9 \cdot 8$ gilt daher

(2.4) U *ist auf den Punkten von* $\mathfrak{A}$ *scharf zweifach transitiv.*

Wir sind nun in der Lage, den folgenden Satz von Witt zu beweisen.

(2.5) (Witt [11]) *Ist* $i = 1, 2$ *oder* 3, *so gibt es ein und bis auf Isomorphie auch nur ein Steiner-System mit den Parametern* $v = 9 + i$, $k = 3 + i$ *und* $t = 2 + i$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit dieser Steiner-Systeme.

1. *Fall*: $i = 1$. Es sei $\mathfrak{S}$ ein Steiner-System mit den Parametern $v = 10$, $k = 4$ und $t = 3$. Ferner sei P ein Punkt von $\mathfrak{S}$. Dann ist $\mathfrak{S}_P$ eine affine Ebene der Ordnung 3 und daher nach (1.4) isomorph zur affinen Ebene über GF(3). Nach (1.3) ist $b = \lambda_0 = 30$ und $r = \lambda_1 = 12$. Die Anzahl der Blöcke von $\mathfrak{S}$, die nicht mit P inzidieren, ist also gleich $30 - 12 = 18$. Nun ist aber jeder dieser Blöcke ein Viereck in $\mathfrak{S}_P$ und da zwei verschiedene Blöcke von $\mathfrak{S}$ höchstens zwei Punkte gemeinsam haben, folgt, daß die Menge der Blöcke von $\mathfrak{S}$, die nicht durch P gehen, gleich einem der $\mathfrak{B}_j$ ist. Nach (2.3) können wir annehmen, daß $j = 1$ ist. Damit ist die Eindeutigkeit in diesem Falle gezeigt.

2. *Fall*: $i = 2$. Es sei $\mathfrak{S}$ ein Steiner-System mit den Parametern $v = 11$, $k = 5$ und $t = 4$. Ferner seien P und Q zwei verschiedene Punkte von $\mathfrak{S}$. Dann ist wiederum $\mathfrak{S}_{P,Q}$ die affine Ebene über GF(3). Überdies sind $\mathfrak{S}_P$ und $\mathfrak{S}_Q$ Möbiusebenen der Ordnung 3. Es sei $\mathfrak{B}$ die Menge der mit P jedoch nicht mit Q inzidierenden Blöcke von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{B}'$ die Menge der mit Q aber nicht mit P inzidierenden Blöcke. Es folgt wiederum wie im ersten Falle, daß $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_j$ und $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}_k$ ist. Da zwei verschiedene Blöcke von $\mathfrak{S}$ höchstens drei Punkte gemeinsam haben, ist $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}'$. Auf Grund von (2.3) können wir

daher annehmen, daß $j = 1$ und $k = 2$ ist. Die Anzahl der Blöcke von $\mathfrak{S}$ ist nach (1.3) gleich 66. Somit gibt es $66 - 12 - 18 - 18 = 18$ Blöcke in $\mathfrak{S}$, die weder mit P noch mit Q inzidieren. Es sei $\mathfrak{b}$ ein solcher Block. Da $\mathfrak{b}$ fünf Punkte enthält und da auf jeder Geraden von $\mathfrak{S}_{P,Q}$ genau drei Punkte liegen, gibt es vier Punkte $U, V, X, Y \in \mathfrak{b}$, die ein Viereck bilden. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $\{U, V, X\} = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$ ist. Nun sind $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ und $\mathfrak{c}_3$ alle Vierecke von $\mathfrak{S}_{P,Q}$, die U, V und X enthalten. Da $\mathfrak{c}_1 \cup \{P\}$ und $\mathfrak{c}_2 \cup \{Q\}$ Blöcke von $\mathfrak{S}$ sind, folgt, daß $Y = (1,2)$ ist. Also ist $\mathfrak{b} = \{Z, (0,0), (0,1), (1,0), (1,2)\}$. Wir betrachten nun noch die Vierecke $\mathfrak{c}_4 = \{(0,0), (1,0), (1,2), (0,2)\}$ und $\mathfrak{c}_5 = \{(0,0), (1,0), (1,2), (2,2)\}$. Dann ist $|\mathfrak{c}_3 \cap \mathfrak{c}_i| \geqslant 3$ für $i = 1, 2, 4, 5$. Dies impliziert, daß $\mathfrak{c}_i$ für $i = 1, 2, 4, 5$ in $\mathfrak{V}_1 \cup \mathfrak{V}_2$ liegt. Somit ist $|\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}_i| \leqslant 3$ für $i = 1, 2, 4, 5$. Hieraus folgt $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}_1 = \{(0,0), (0,1), (1,0)\} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}_2$ und $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}_4 = \{(0,0), (1,0), (1,2)\} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}_5$. Also ist $Z \neq (1,1), (2,1), (0,2), (2,2)$. Andrerseits ist auch $Z \neq (0,0), (0,1), (1,0), (1,2)$. Daher ist $Z = (2,0)$, m.a.W. $\mathfrak{b}$ besteht aus dem Viereck X, Y, U, V und dem einzigen eigentlichen Diagonalpunkt dieses Vierecks. Da es insgesamt 18 Blöcke in $\mathfrak{S}$ gibt, die weder mit P noch mit Q inzidieren, gilt: Die Menge der Blöcke von $\mathfrak{S}$, die weder durch P noch durch Q gehen, besteht gerade aus den Vierecken von $\mathfrak{V}_3$ zuzüglich ihrer Diagonalpunkte. Damit ist auch in diesem Falle die Eindeutigkeit nachgewiesen.

3. *Fall*: $i = 3$. Es sei $\mathfrak{S}$ ein Steinersystem mit den Parametern $v = 12$, $k = 6$ und $t = 5$. Ferner seien P, Q und R drei verschiedene Punkte von $\mathfrak{S}$. Dann ist $\mathfrak{S}_{P,Q,R}$ die affine Ebene der Ordnung 3. Wir können daher die Menge der Blöcke durch Q und R, die nicht durch P gehen, mit $\mathfrak{V}_j$, die Menge der Blöcke durch R und P, die nicht durch Q gehen, mit $\mathfrak{V}_k$, und die Menge der Blöcke, die durch P und Q aber nicht durch R gehen, mit $\mathfrak{V}_l$ identifizieren. Es folgt wiederum, daß $j \neq k \neq l \neq j$ ist, so daß wir nach (2.3) annehmen können, daß $j = 1$, $k = 2$ und $l = 3$ ist. Dann können wir die Menge der Blöcke durch R, die weder durch P noch durch Q gehen mit $\mathfrak{V}_3^*$ identifizieren, wobei $\mathfrak{V}_3^*$ die Menge der Vierecke aus $\mathfrak{V}_3$ zuzüglich ihrer eigentlichen Diagonalpunkte ist. Entsprechend ist $\mathfrak{V}_1^*$ die Menge der Blöcke durch P, die weder mit Q noch mit R inzidieren, und V_2^* die Menge der Blöcke durch Q, die weder R noch P enthalten. Es sei nun $\mathfrak{b}$ ein Block, der keinen der Punkte P, Q und R enthält, Da $\mathfrak{b}$ sechs Punkte enthält, sind wenigstens drei unter ihnen kollinear. Es sei $\mathfrak{b} = \{X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3\}$ und X_1, X_2, X_3 seien kollinear. Nun ist $(Y_1Y_2) \cap (X_1X_2) = \emptyset$, da sonst $\mathfrak{b}$ mit einem Block aus $\mathfrak{V}_1^* \cup \mathfrak{V}_2^* \cup \mathfrak{V}_3^*$ fünf Punkte gemeinsam hätte. Also ist Y_1Y_2 zu X_1X_2 parallel. Ebenso folgt, daß Y_2Y_3 und X_1X_2 parallel sind. Da Y_2 sowohl auf der Geraden Y_1Y_2 als auch auf der Geraden Y_2Y_3 liegt, folgt, daß $Y_1Y_2 = Y_2Y_3$ ist, m.a.W., ist $\mathfrak{b}$ ein Block, der keinen der Punkte P,

Q und R enthält, so gibt es zwei parallele Geraden g und h, so daß $\mathfrak{b}$ gerade aus den mit g und h inzidierenden Punkten besteht. Die Anzahl der Blöcke von $\mathfrak{S}$, die mit wenigstens einem der Punkte P, Q und R inzidieren ist $12 + 3 \cdot 18 + 3 \cdot 18 = 120$. Die Gesamtzahl der Blöcke von $\mathfrak{S}$ ist nach (1.3) gleich 132. Somit ist die Anzahl der Blöcke von $\mathfrak{S}$, die mit keinem der Punkte P, Q und R inzidieren, gleich 12. Dies ist aber auch die Anzahl der Paare paralleler Geraden in der affinen Ebene der Ordnung 3. Damit ist auch in diesem letzten Fall die Eindeutigkeit gezeigt.

Die Existenz der fraglichen Steiner-Systeme ist nun trivial, wenn man nur weiß, daß die Mengen $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_3$ existieren. Daß sie existieren, folgt, wie wir weiter oben schon bemerkten, aus der Existenz der Möbiusebene der Ordnung 3.

Im folgenden bezeichne $\mathfrak{S}_{11}$ bzw. $\mathfrak{S}_{12}$ das Steiner-System mit den Parametern $v = 11, k = 5, t = 4$ bzw. $v = 12, k = 6, t = 5$.

(2.6) (Witt [*11*]) *Die Automorphismengruppe von $\mathfrak{S}_{12}$ ist auf den Punkten von $\mathfrak{S}_{12}$ scharf fünffach transitiv und die Automorphismengruppe von $\mathfrak{S}_{11}$ ist auf den Punkten von $\mathfrak{S}_{11}$ scharf vierfach transitiv.*

Beweis. Es sei G die Automorphismengruppe von $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{11}$ und P und Q seien zwei verschiedene Punkte von $\mathfrak{S}$. Dann ist $G_{P,Q}$ eine Gruppe von Kollineationen der affinen Ebene $\mathfrak{S}_{P,Q}$, die überdies $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ invariant läßt. Dann läßt $G_{P,Q}$ aber auch $\mathfrak{B}_3$ invariant. Also ist $G_{P,Q} \subseteq U$ (die Gruppe U wurde im Anschluß an (2.3) definiert). Da U die Menge $\mathfrak{B}_3^*$ invariant läßt, ist andrerseits $U \subseteq G_{P,Q}$. Also ist $U = G_{P,Q}$, m.a.W., sind P und Q irgendzwei verschiedene Punkte von $\mathfrak{S}$, so ist $G_{P,Q}$ auf den von P und Q verschiedenen Punkten nach (2.4) scharf zweifach transitiv. Hieraus folgt nun sofort, daß G selbst vierfach und damit scharf vierfach transitiv ist.

Ist $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{12}$ und sind P, Q und R drei verschiedene Punkte von $\mathfrak{S}$, so folgt wiederum, daß $G_{P,Q,R} = U$ ist. Da dies für irgenddrei Punkte von $\mathfrak{S}$ gilt, folgt, daß G scharf fünffach transitiv ist, Q.E.D.

Nach Witt [*11*] sind die Mathieugruppen M_{11} bzw. M_{12} Kollineationsgruppen von Steiner-Systemen mit den Parametern $v = 11, k = 5, t = 4$ bzw. $v = 12, k = 6, t = 5$. Aus der Eindeutigkeit dieser Systeme folgt daher, daß die hier konstruierten Gruppen die beiden kleinen Gruppen von Mathieu sind.

3. Zur Geometrie der projektiven Ebene der Ordnung 4

In diesem Abschnitt betrachten wir die projektive Ebene der Ordnung 4 und eine Reihe von Konfigurationen in dieser Ebene. Das, was hier über die Hyperovale in dieser Ebene gesagt wird, findet sich auch bei Edge [*4*], der offensichtlich Witt[*12*] nicht kannte, da er diese Arbeit nicht zitiert. Alle Resultate dieses wie auch des vorherigen Abschnittes stehen implizit bei Witt [*12*].

Es sei $\mathfrak{E}$ die projektive Ebene der Ordnung 4. Dann ist $P\Gamma L(3, 4)$ die volle Kollineationsgruppe von $\mathfrak{E}$. Die $PGL(3, 4)$ hat in $P\Gamma L(3, 4)$ den Index 2 und $PSL(3, 4)$ ist vom Index 3 in $PGL(3, 4)$. Ferner ist $PSL(3, 4)$ einfach. Die Ordnung der $PGL(3, 4)$ ist gleich $21 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 9$. Ein Hyperoval in $\mathfrak{E}$ ist nach Abschnitt 1 eine Menge von 6 Punkten, von denen keine drei kollinear sind. Es gilt nun

(3.1) *Vier Punkte von $\mathfrak{E}$, von denen keine drei kollinear sind, sind in genau einem Hyperoval von $\mathfrak{E}$ enthalten. Alle Hyperovale von $\mathfrak{E}$ bilden eine Bahn unter $PGL(3, 4)$.*

Beweis. P_1, P_2, P_3, P_4 seien vier Punkte von $\mathfrak{E}$, von denen keine drei kollinear sind. Auf den sechs Geraden P_iP_j $(i, j = 1, 2, 3, 4; i < j)$ liegen dann insgesamt 19 der 21 Punkte von $\mathfrak{E}$. Es gibt also noch zwei Punkte P_5 und P_6, von denen keiner mit zweien der Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 auf einer Geraden liegt. Hieraus folgt, daß es höchstens ein Hyperoval gibt, welches P_1, P_2, P_3, P_4 enthält. Nun bilden die Punkte P_1 bis P_5 ein Oval in $\mathfrak{E}$ und es folgt, daß P_6 der Knoten dieses Ovals ist. Somit ist die Menge der Punkte P_1 bis P_6 ein Hyperoval von $\mathfrak{E}$.

Die Gruppe $PGL(3, 4)$ ist auf den Vierecken von $\mathfrak{E}$ transitiv. Da jedes Viereck in genau einem Hyperoval enthalten ist und jedes Hyperoval ein Viereck enthält, folgt, daß $PGL(3, 4)$ auf der Menge der Hyperovale transitiv ist, Q.E.D.

Im folgenden sei stets $\Gamma = P\Gamma L(3, 4)$, $G = PGL(3, 4)$ und $S = PSL(3, 4)$. Ferner bezeichnen wir mit S_n die symmetrische und mit A_n die alternierende Gruppe vom Grade n.

(3.2) *Ist $\mathfrak{h}$ ein Hyperoval in $\mathfrak{E}$, so ist $\Gamma_{\mathfrak{h}}$, aufgefasst als Permutationsgruppe auf den Punkten von $\mathfrak{h}$, ähnlich zur S_6. Ferner ist $G_{\mathfrak{h}} = S_{\mathfrak{h}}$ ähnlich zur A_6.*

Beweis. Es sei $\Gamma_{\mathfrak{h}}^*$ die Einschränkung von $\Gamma_{\mathfrak{h}}$ auf $\mathfrak{h}$. Ist $\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{h}}$ und läßt γ alle Punkte von $\mathfrak{h}$ fest, so läßt γ eine Unterebene $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{E}$ punktweise fest. Ferner gilt, daß $\mathfrak{h}$ ein Hyperoval in $\mathfrak{F}$ ist. Aus (1.6) folgt daher, daß $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$ ist. Folglich ist $\gamma = 1$. Also sind $\Gamma_{\mathfrak{h}}$ und $\Gamma_{\mathfrak{h}}^*$ isomorph. Aus (3.1) folgt nun, daß $G_{\mathfrak{h}}$ auf den Punkten von $\mathfrak{h}$ scharf vierfach transitiv ist, da G auf den Vierecken von $\mathfrak{E}$ scharf vierfach transitiv ist. Also ist $G_{\mathfrak{h}}$ isomorph zur A_6. Nun ist die A_6 einfach. Folglich ist, da auch S einfach ist $G_{\mathfrak{h}} = S_{\mathfrak{h}}$. Weil G auf den Hyperovalen von $\mathfrak{E}$ transitiv operiert, folgt, daß $G_{\mathfrak{h}}$ in $\Gamma_{\mathfrak{h}}$ den Index 2 hat. Nun operiert $\Gamma_{\mathfrak{h}}$, wie wir gesehen haben, auf $\mathfrak{h}$ treu, so daß also $\Gamma_{\mathfrak{h}}$ zur S_6 isomorph ist, Q.E.D.

(3.3) *In $\mathfrak{E}$ gibt es genau* 168 *Hyperovale. Durch jeden Punkt von $\mathfrak{E}$ gehen* *genau* 48 *Hyperovale. Durch zwei verschiedene Punkte von* $\mathfrak{E}$ *gehen genau* 12 *Hyperovale und durch drei nicht kollineare Punkte gehen genau* 3 *Hyperovale.*

Beweis. Aus (3.1) und (3.2) folgt, daß die Anzahl der Hyperovale gleich $|G| \cdot |A_6|^{-1} = 168$ ist. Nun ist G auf den Punkten von $\mathfrak{E}$ zweifach transitiv. Also gehen durch jeden Punkt stets gleichviele Hyperovale, etwa r, und durch zwei verschiedene Punkte ebenfalls stets gleichviele Hyperovale, etwa λ. Aus (1.1) folgt, daß $21r = vr = bk = 168 \cdot 6$ und $5r = r(k-1) = \lambda(v-1) = 20\lambda$ ist. Aus diesen Gleichungen folgt $r = 48$ und $\lambda = 12$. Sind P, Q und R drei nicht kollineare Punkte, so gibt es genau 9 Punkte, die auf keiner der Geraden PQ, QR und RP liegen. Je drei von ihnen bestimmen mit P, Q, R zusammen genau ein Hyperoval. Also gehen durch P, Q und R genau drei Hyperovale, Q.E.D.

(3.4) *Es sei* $\mathfrak{h}$ *ein Hyperoval und* P *und* Q *seien zwei verschiedene Punkte auf* $\mathfrak{h}$. *Dann gibt es genau drei Hyperovale durch* P *und* Q, *die mit* $\mathfrak{h}$ *nur die Punkte* P *und* Q *gemeinsam haben.*

Beweis. Es sei $X \in \mathfrak{h}\backslash\{P, Q\}$. Nach (3.3) gehen durch P, Q und X genau zwei von $\mathfrak{h}$ verschiedene Hyperovale. Nach (3.1) haben diese Hyperovale mit $\mathfrak{h}$ auch nur die Punkte P, Q und X gemeinsam. Also gibt es durch P und Q genau $4 \cdot 2 + 1 = 9$ Hyperovale, die mit $\mathfrak{h}$ mehr als zwei Punkte gemeinsam haben. Nach (3.3) gibt es daher $12 - 9 = 3$ Hyperovale, die mit $\mathfrak{h}$ nur die Punkte P und Q gemeinsam haben, Q.E.D.

(3.5) *Sind* $\mathfrak{h}$ *und* $\mathfrak{h}'$ *zwei Hyperovale von* $\mathfrak{E}$, *die beide jeweils vier Punkte einer Unterebene* $\mathfrak{F}$ *der Ordnung* 2 *von* $\mathfrak{E}$ *enthalten, so liegen* $\mathfrak{h}$ *und* $\mathfrak{h}'$ *in derselben Hyperovalenbahn von* S.

Beweis. Bekanntlich induziert $S_{\mathfrak{F}}$ in $\mathfrak{F}$ die $PSL(3, 2)$. Nun ist $PSL(3, 2) = PGL(3, 2)$. Daher ist $S_{\mathfrak{F}}$ auf den Vierecken von $\mathfrak{F}$ transitiv. Unsere Behauptung folgt somit aus (3.1).

(3.6) *Sind* $\mathfrak{F}$ *und* $\mathfrak{F}'$ *zwei Unterebenen der Ordnung* 2 *von* $\mathfrak{E}$, *und ist* $\mathfrak{h}$ *ein Hyperoval, welches mit* $\mathfrak{F}$ *und auch mit* $\mathfrak{F}'$ *vier Punkte gemeinsam hat, so gibt es ein* $\delta \in S$ *mit* $\mathfrak{F}^{\delta} = \mathfrak{F}'$.

Beweis. Dies folgt aus der vierfachen Transitivität von $S_{\mathfrak{h}}$ auf den Punkten von $\mathfrak{h}$ und der Bemerkung, daß jedes Viereck von $\mathfrak{E}$ in genau einer Unterebene der Ordnung 2 liegt.

Aus $[G : S] = 3$ und $G_{\mathfrak{h}} = S_{\mathfrak{h}}$ folgt, daß S die Menge der Hyperovale in drei Bahnen der Länge $168 : 3 = 56$ zerlegt. $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ und $\mathfrak{H}_3$ seien diese Bahnen.

(3.7) *Ist* $i = 1, 2$ *oder* 3 *und sind* P, Q *und* R *drei nicht kollineare Punkte von* $\mathfrak{E}$, *so gibt es genau ein* $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_i$ *mit* $P, Q, R \in \mathfrak{h}$.

Beweis. S ist auf den Dreiecken von $\mathfrak{E}$ transitiv. Es gibt daher wenigstens ein $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_i$, welches P, Q und R enthält. Da P, Q und R nach (3.3) in genau drei Hyperovalen enthalten sind, gibt es auch nur ein solches $\mathfrak{h}$, Q.E.D.

(3.8) *Es sei $\mathfrak{H}$ eine Menge von* 56 *Hyperovalen von $\mathfrak{E}$. Genau dann ist $\mathfrak{H}$ eine Hyperovalenbahn von S, wenn keine zwei Hyperovale aus $\mathfrak{H}$ mehr als zwei Punkte gemeinsam haben.*

Beweis. Aus (3.7) folgt die Notwendigkeit der Bedingung. Es sei also umgekehrt $\mathfrak{H}$ eine solche Menge von Hyperovalen. Wir betrachten die Inzidenzstruktur $\mathfrak{J}$, die aus den Punkten von $\mathfrak{E}$ und den Hyperovalen aus $\mathfrak{H}$ besteht. Nach (1.1) ist dann $\sum_P r_P = \sum_{\mathfrak{h}} k_{\mathfrak{h}} = 56 \cdot 6$. Ferner betrachten wir die abgeleitete Struktur $\mathfrak{J}_P$. Dann ist nach (1.1) $\sum_{Q \neq P} r_Q^* = \sum_{P \in \mathfrak{h}} k_{\mathfrak{h}}^* = r_P \cdot 5$. Aus (3.4) folgt, daß $r_Q^* \leqslant 4$ ist. Also ist $5r_P \leqslant 20 \cdot 4$. Somit ist $r_P \leqslant 16$. Wäre nun $r_W < 16$ für einen Punkt W, so wäre $56 \cdot 6 = \sum_P r_P < 21 \cdot 16 = 56 \cdot 6$. Dieser Widerspruch zeigt, daß $r_P = 16$ ist für alle Punkte P von $\mathfrak{J}$. Ebenso folgt, daß $r_Q^* = 4$ ist für alle P und alle $Q \neq P$. Ist nun $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_i$, so folgt aus (3.4), daß auch alle diejenigen Hyperovale aus $\mathfrak{H}_i$, die mit $\mathfrak{h}$ genau zwei Punkte gemeinsam haben, in $\mathfrak{H}$ liegen. Die Anzahl dieser Ovale ist $\binom{6}{2} \cdot 3 = 45$. Es sei nun $\mathfrak{h}' \in \mathfrak{H}_i$. Die Anzahl der Ovale aus $\mathfrak{H}_i$ die $\mathfrak{h}'$ in genau zwei Punkten treffen, ist ebenfalls 45. Es gibt also ein $\mathfrak{h}'' \in \mathfrak{H}_i$, welches sowohl $\mathfrak{h}$ als auch $\mathfrak{h}'$ in genau zwei Punkten trifft, und es folgt der Reihe nach, daß $\mathfrak{h}'' \in \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{h}' \in \mathfrak{H}$ ist. Also ist $\mathfrak{H}_i \subseteq \mathfrak{H}$. Aus $|\mathfrak{H}_i| = 56 = |\mathfrak{H}|$ folgt dann die Behauptung.

(3.9) *Γ induziert auf $\{\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3\}$ die symmetrische Gruppe vom Grade* 3.

Beweis. Γ induziert eine Permutationsgruppe Π auf $\{\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3\}$, die wegen (3.1) sogar transitiv ist. Es genügt daher zu zeigen, daß Π eine Transposition enthält. Es seien P, Q, R drei nicht kollineare Punkte. Nach (3.7) gibt es genau ein $\mathfrak{h}_i \in \mathfrak{H}_i$ mit $P, Q, R \in \mathfrak{h}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Es sei $O \in \mathfrak{h}_1 \backslash \{P, Q, R\}$. Es gibt dann eine involutorische Kollineation γ, die O, P, Q und R als Fixpunkte hat. Die Menge der Fixpunkte von γ bilden eine Unterebene $\mathfrak{F}$ der Ordnung 2 von $\mathfrak{E}$. Wäre nun $\mathfrak{h}_2^\gamma = \mathfrak{h}_2$, so hätte γ wegen $|\mathfrak{h}_2 \backslash \{P, Q, R\}| = 3$ noch einen weiteren Fixpunkt auf $\mathfrak{h}_2$. Folglich hätten $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ mit $\mathfrak{F}$ je vier Punkte gemeinsam, was wegen (3.5) nicht sein kann. Also ist $\mathfrak{h}_2^\gamma \neq \mathfrak{h}_2$. Da $\mathfrak{h}_1^\gamma = \mathfrak{h}_1$ ist, ist $\mathfrak{h}_2^\gamma$ auch von $\mathfrak{h}_1$ verschieden. Somit ist $\mathfrak{h}_2^\gamma = \mathfrak{h}_3$. Ebenso folgt, daß $\mathfrak{h}_3^\gamma = \mathfrak{h}_2$ ist. Dann ist aber $\mathfrak{H}_1^\gamma = \mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2^\gamma = \mathfrak{H}_3$ und $\mathfrak{H}_3^\gamma = \mathfrak{H}_2$, Q.E.D.

(3.10) *Es gibt genau* 360 *Unterebenen der Ordnung* 2 *in $\mathfrak{E}$. Die Menge dieser Unterebenen wird von $PSL(3, 4)$ in drei Bahnen der Länge* 120 *zerlegt.*

Beweis. Vier Punkte, von denen keine drei kollinear sind, liegen in genau einer Unterebene der Ordnung 2. Da $PGL(3, 4)$ auf den Vierecken transitiv ist, ist $PGL(3, 4)$ auf der Menge der Unterebenen der Ordnung 2 transitiv. Der Stabilisator einer solchen Unterebene in $PGL(3, 4)$ ist isomorph zur $PGL(3, 2) = PSL(3, 2)$ und ist somit auch der Stabilisator dieser Unterebene in $PSL(3, 4)$. Die Anzahl aller Unterebenen ist daher

$$[PGL(3, 4) : PGL(3, 2)] = 360$$

und die Anzahl der Unterebenen in einer Bahn von $PSL(3, 4)$ ist gleich $360 : 3 = 120$, Q.E.D.

Aus (3.5), (3.6) und (3.10) folgt schließlich noch

(3.11) *$\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}^*$ seien zwei verschiedene Hyperovalenbahnen von $PSL(3, 4)$. Ist dann $\mathfrak{U}$ eine Menge von 120 Unterebenen der Ordnung 2 mit der Eigenschaft, daß keine Ebene aus $\mathfrak{U}$ mit einem Hyperoval aus $\mathfrak{H} \cup \mathfrak{H}^*$ vier Punkte gemeinsam hat, so ist $\mathfrak{U}$ eine Unterebenenbahn von $PSL(3, 4)$. Überdies gibt es genau eine solche Unterebenenbahn der $PSL(3, 4)$.*

Als letzte Bemerkung dieses Abschnittes beweisen wir

(3.12) *Es sei $\mathfrak{M}$ eine Menge von 8 Punkten von $\mathfrak{E}$ mit den Eigenschaften:*

(a) *Jede Gerade von $\mathfrak{E}$, die drei Punkte von $\mathfrak{M}$ enthält, enthält genau vier Punkte von $\mathfrak{M}$.*

(b) *Keine fünf Punkte von $\mathfrak{M}$ liegen in einer Unterebene der Ordnung 2 von $\mathfrak{E}$.*

Dann gibt es zwei Geraden g und h von $\mathfrak{E}$ mit

$$\mathfrak{M} = \{X \mid X\, I\, g \text{ oder } X\, I\, h \text{ und } X \neq g \cap h\}.$$

Beweis. Nach (1.6) gibt es wegen $n + 2 = 6 < 8$ drei kollineare Punkte in $\mathfrak{M}$. Aus (a) folgt dann, daß es eine Gerade g gibt, die genau vier Punkte von $\mathfrak{M}$ enthält. P_1, P_2, P_3, P_4 seien diese Punkte und P_5, P_6, P_7, P_8 seien die restlichen Punkte von $\mathfrak{M}$. Enthalten nun alle von g verschiedenen Geraden höchstens zwei Punkte von $\mathfrak{M}$, so folgt, daß $\{P_1, P_2, P_5, P_6, P_7, P_8\}$ und $\{P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8\}$ Hyperovale in $\mathfrak{E}$ sind. Aus (3.1) folgt dann aber, daß $\{P_1, P_2\} = \{P_3, P_4\}$ ist. Dieser Widerspruch zeigt, daß es eine von g verschiedene Gerade h gibt, die wenigstens drei und damit genau vier Punkte von $\mathfrak{M}$ enthält. Aus (b) folgt nun, daß $g \cap h \notin \mathfrak{M}$ ist. Folglich enthält h die Punkte P_5, P_6, P_7, P_8, Q.E.D.

4. Die grossen Mathieu-Gruppen

Wir beginnen wieder mit einem Hilfssatz.

(4.1) *Es sei $i = 1, 2$ oder 3. Ist dann $\mathfrak{S}$ ein Steiner-System mit den Parametern $v = 21 + i$, $k = 5 + i$ und $t = 2 + i$ und sind $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$ zwei ver-*

schiedene Blöcke von $\mathfrak{S}$, die i Punkte gemeinsam haben, so haben sie genau $i+1$ Punkte gemeinsam.

Beweis. Es sei $P_1, \ldots, P_i\, I\, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}'$. Dann ist $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{S}_{P_1,\ldots,P_i}$ die projektive Ebene der Ordnung 4 und $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$ sind zwei verschiedene Geraden von $\mathfrak{S}^*$. Es gibt daher noch genau einen weiteren Punkt P, der mit $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$ inzidiert, Q.E.D.

(4.2) (Witt [*12*]) *Ist $i = 1$, 2 oder 3, so gibt es ein und bis auf Isomorphie nur ein Steiner-System mit den Parametern $v = 21 + i$, $k = 5 + i$ und $t = 2 + i$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit dieser Steiner-Systeme.

1. *Fall*: $i = 1$. Es sei $\mathfrak{S}$ ein Steiner-System mit den Parametern $v = 22$, $k = 6$ und $t = 3$ und P sei ein Punkt von $\mathfrak{S}$. Dann ist $\mathfrak{S}_P$ die projektive Ebene der Ordnung 4. Ist $\mathfrak{b}$ ein Block von $\mathfrak{S}$, der nicht durch P geht, so ist $\mathfrak{b}$ ein Hyperoval in $\mathfrak{S}_P$, da keine drei Punkte von $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{S}_P$ kollinear sind. Nach (1.3) besitzt $\mathfrak{S}$ genau 77 Blöcke, von denen 21 durch P gehen. Es gibt somit 56 Blöcke in $\mathfrak{S}$, die nicht durch P gehen. Die Menge $\mathfrak{H}$ dieser Blöcke hat die Eigenschaft, daß zwei verschiedene Blöcke von $\mathfrak{H}$ höchstens zwei Punkte gemeinsam haben. Aus (3.8) folgt daher, daß $\mathfrak{H}$ eine Hyperovalenbahn der $PSL(3, 4)$ ist. Aus (3.9) folgt nun die Eindeutigkeit von $\mathfrak{S}$.

2. *Fall*: $i = 2$. Es sei $\mathfrak{S}$ ein Steiner-System mit den Parametern $v = 23$, $k = 7$ und $t = 4$. Ferner seien P und Q zwei verschiedene Punkte von $\mathfrak{S}$. Dann sind $\mathfrak{S}_P$ und $\mathfrak{S}_Q$ zwei Steinersysteme mit den Parametern $v = 22$, $k = 6$ und $t = 3$, die nach dem eben Bewiesenen isomorph sind. Ferner ist $\mathfrak{S}_{P,Q} = \mathfrak{S}_{Q,P}$ die projektive Ebene der Ordnung 4. Ist $\mathfrak{H}$ die Menge der Blöcke von S, die durch P aber nicht durch Q gehen, und $\mathfrak{H}^*$ die Menge der Blöcke, die durch Q gehen, jedoch P nicht enthalten, so folgt einmal, daß $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}^* = \emptyset$ ist, da zwei verschiedene Blöcke von $\mathfrak{S}$ höchstens 3 Punkte gemeinsam haben. Zum andern folgt, daß $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}^*$ zwei Hyperovalenbahnen der $PSL(3, 4)$ sind. Auf Grund von (3.9) können wir annehmen, daß $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H}_2$ ist. Es sei nun $\mathfrak{U}$ die Menge der Blöcke, die weder P noch Q enthalten. Ist $\mathfrak{b} \in \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{b}'$ eine Gerade von $\mathfrak{S}_{P,Q}$ mit $|\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'| \geqslant 2$, so ist nach (4.1) $|\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'| = 3$. Hieraus folgt, daß die Punkte von $\mathfrak{b}$ zusammen mit den Geraden von $\mathfrak{S}_{P,Q}$, die $\mathfrak{b}$ in mindestens zwei Punkten treffen, ein Steiner-System mit den Parametern $v = 7$, $k = 3$ und $t = 2$ bilden, m.a.W. $\mathfrak{b}$ ist eine Unterebene der Ordnung 2 von $\mathfrak{S}_{P,Q}$. Die Anzahl der Blöcke von $\mathfrak{S}$ ist gleich 253. Somit ist $|\mathfrak{U}| = 253 - 2 \cdot 56 - 21 = 120$. Ferner ist klar, daß $|\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}| < 4$ ist für alle $\mathfrak{b} \in \mathfrak{U}$ und alle $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{H}_2$. Somit ist $\mathfrak{U}$ die durch $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ gemäß (3.11) eindeutig bestimmte Unterebenenbahn von $PSL(3, 4)$. Daher ist $\mathfrak{S}$ auch in diesem Fall eindeutig bestimmt.

3. *Fall*: $i = 3$. Ist j, k, l eine Permutation von 1, 2, 3, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{U}_l$ die durch $\mathfrak{H}_j$ und $\mathfrak{H}_k$ gemäß (3.11) eindeutig bestimmte Unterebenenbahn von $PSL(3,4)$. Es sei nun $\mathfrak{S}$ ein Steiner-System mit den Parametern $v = 24$, $k = 8$ und $t = 5$. Ferner seien P, Q und R drei paarweise verschiedene Punkte von $\mathfrak{S}$. Dann ist $\mathfrak{S}_{P,Q,R}$ die projektive Ebene der Ordnung 4. Es sei $\mathfrak{H}$ die Menge der Blöcke durch P und Q, die nicht durch R gehen, $\mathfrak{H}'$ die Menge der Blöcke durch Q und R, die P nicht enthalten, und $\mathfrak{H}''$ die Menge der Blöcke durch R und P, die nicht mit Q inzidieren. Dann sind $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{H}''$ gerade die Hyperovalenbahnen von $PSL(3, 4)$ und wir können wieder annehmen, daß $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}_2$ und $\mathfrak{H}'' = \mathfrak{H}_3$ ist. Wie wir bei Fall 2 gesehen haben, folgt dann, daß $\mathfrak{U}_3$ die Menge der Blöcke durch Q ist, die weder P noch R enthalten, daß $\mathfrak{U}_1$ die Menge der Blöcke durch R ist, die weder Q noch P enthalten, und daß $\mathfrak{U}_2$ die Menge der Blöcke durch P ist, die weder R noch Q enthalten. Es sei schließlich $\mathfrak{B}$ die Menge der Blöcke von $\mathfrak{S}$, die mit keinem der Punkte P, Q und R inzidieren. Die Gesamtzahl der Blöcke von $\mathfrak{S}$ ist 759. Also ist $|\mathfrak{B}| = 759 - 3 \cdot 120 - 3 \cdot 56 - 21 = 210$. Ist $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$, so folgt aus (4.1), daß jede Gerade von $\mathfrak{S}_{P,Q,R}$, die $\mathfrak{b}$ in drei Punkten trifft, $\mathfrak{b}$ in genau vier Punkten trifft. Ferner gilt, daß $\mathfrak{b}$ mit keinem Block aus $\mathfrak{U}_1 \cup \mathfrak{U}_2 \cup \mathfrak{U}_3$ fünf Punkte gemeinsam hat. Somit besteht $\mathfrak{b}$ nach (3.12) aus den Punkten zweier Geraden von $\mathfrak{S}_{P,Q,R}$, die alle von dem Schnittpunkt dieser Geraden verschieden sind. Nun ist die Anzahl der Geradenpaare von $\mathfrak{S}_{P,Q,R}$ gleich $\binom{21}{2} = 210 = |\mathfrak{B}|$. Daher liegt auch $\mathfrak{B}$ eindeutig fest. Damit ist die Eindeutigkeit von $\mathfrak{S}$ gezeigt.

Um die Existenz der fraglichen Steiner-Systeme zu zeigen, genügt es zu zeigen, daß es ein Steiner-System mit den Parametern $v = 24$, $k = 8$ und $t = 5$ gibt, da man die anderen durch ein-bzw. zweimalige Ableitung aus diesem erhält.

Es sei $\mathfrak{P}'$ die Menge der Punkte von $\mathfrak{E}$ und P, Q und R seien drei Elemente, die nicht in $\mathfrak{P}'$ liegen. Setze $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}' \cup \{P, Q, R\}$. Ferner sei

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{G} \cup \mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{H}_2 \cup \mathfrak{H}_3 \cup \mathfrak{U}_1 \cup \mathfrak{U}_2 \cup \mathfrak{U}_3 \cup \mathfrak{B}.$$

Dabei sei $\mathfrak{G}$ die Menge der Geraden von $\mathfrak{E}$, während $\mathfrak{H}_i$, $\mathfrak{U}_j$ und $\mathfrak{B}$ die bisherige Bedeutung haben mögen. Schließlich definieren wir $I \subseteq \mathfrak{P} \times \mathfrak{B}$ durch

(a) Ist $X \in \mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{y} \in \mathfrak{B}$, so ist $X I \mathfrak{y}$ genau dann, wenn $X \in \mathfrak{y}$ ist.

(b) P inzidiere mit den Blöcken aus $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_3$ und $\mathfrak{U}_2$ und nur mit diesen.

(c) Q inzidiere mit den Blöcken aus $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ und $\mathfrak{U}_3$ und nur mit diesen.

(d) R inzidiere mit den Blöcken aus $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_3$ und $\mathfrak{U}_1$ und nur mit diesen.

Setze $\mathfrak{S} = \{\mathfrak{P}, \mathfrak{B}, I\}$. Dann ist

$$v = 21 + 3 = 24, \qquad b = 21 + 3 \cdot 56 + 3 \cdot 120 + 210 = 759.$$

Schließlich ist $k = 8$. Wir zeigen nun, daß durch fünf verschiedene Punkte höchstens ein Block geht. Es seien also X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 fünf paarweise verschiedene Punkte von $\mathfrak{S}$.

1. $X_i \in \mathfrak{P}'$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$:

1.1. Sind die X_i kollinear, so gibt es offensichtlich genau einen Block $\mathfrak{b}$ mit $X_i I \mathfrak{b}$ nämlich die Gerade $\mathfrak{b} = X_1X_2$.

1.2. Sind X_1, X_2, X_3, X_4 kollinear, aber $X_5 \notin X_1X_2$, und ist $\mathfrak{b}$ ein Block mit $X_i I \mathfrak{b}$, so folgt, daß $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$ ist, so daß also $\mathfrak{b}$ eindeutig bestimmt ist.

1.3. $X_3 \in X_1X_2$, $X_4, X_5 \notin X_1X_2$. Ist $(X_1X_2) \cap (X_4X_5) \in \{X_1, X_2, X_3\}$, so ist der einzige Block durch $X_1, \ldots, X_5$ die durch X_1, X_2, X_4, X_5 aufgespannte Unterebene der Ordnung 2. Ist $(X_1X_2) \cap (X_4X_5) \notin \{X_1, X_2, X_3\}$, so ist der einzige Block durch $X_1, \ldots, X_5$ der Block

$$[(X_1X_2) \cup (X_4X_5)] \backslash [(X_1X_2) \cap (X_4X_5)].$$

1.4. Keine drei der X_i sind kollinear. Dann gibt es wiederum nur genau einen Block, der diese Punkte enthält, nämlich das durch sie eindeutig bestimmte Hyperoval.

2. $X_1, \ldots, X_4 \in \mathfrak{P}'$, $X_5 \in \{P, Q, R\}$. O.B.d.A. $X_5 = P$.

2.1. $X_1, \ldots, X_4$ kollinear. Dann ist X_1X_2 der einzige Block durch diese Punkte, da P auf keinem der Blöcke aus $\mathfrak{B}$ liegt.

2.2. X_1, X_2, X_3 kollinear, $X_4 \notin X_1X_2$. Sind $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ Blöcke durch $X_1, \ldots, X_5$, so folgt, daß $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \in \mathfrak{U}_2$ gilt. Nun ist die $PSL(3, 4)$ auf den Punktequadrupeln A_1, A_2, A_3, A_4 mit $A_3 \in A_1A_2$ und $A_4 \notin A_1A_2$ scharf transitiv, und jedes solche Punktequadrupel liegt in genau drei Unterebenen der Ordnung 2. Da je zwei solcher Unterebenen daher in zwei verschiedenen Unterebenenbahnen der $PSL(3, 4)$ liegen, folgt, daß $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2$ ist.

2.3. Keine drei der Punkte $X_1, \ldots, X_4$ kollinear. Sind $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ Blöcke durch $X_1, \ldots, X_5$, so ist einer der Blöcke eine Unterebene der Ordnung 2, der andere ein Hyperoval. Auf Grund unserer Definition von I ist daher $\mathfrak{b}_1 \in \mathfrak{H}_1 \cup \mathfrak{H}_3$ und $\mathfrak{b}_2 \in \mathfrak{U}_2$. Nun ist $|\, \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 \cap \mathfrak{P}' \,| \geqslant 4$ im Widerspruch zur Definition von $\mathfrak{U}_2$.

3. $X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{P}'$, $X_4, X_5 \in \{P, Q, R\}$. O.B.d.A. $X_4 = P$ und $X_5 = Q$.

3.1. Sind X_1, X_2, X_3 kollinear, so ist die Gerade X_1X_2 der einzige Block, der die Punkte $X_1, \ldots, X_5$ enthält.

3.2. Sind X_1, X_2, X_3 nicht kollinear, so gibt es genau einen Block, nämlich ein Hyperoval aus $\mathfrak{H}_1$, welcher $X_1, \ldots, X_5$ enthält.

4. $\{X_3, X_4, X_5\} = \{P, Q, R\}$. Dann ist der einzige Block durch $X_1, \ldots, X_5$ die Gerade X_1X_2.

Wir zeigen nun, daß durch 5 Punkte von $\mathfrak{S}$ genau ein Block geht. Mit $\lambda(X, Y, \ldots)$ bezeichnen wir die Anzahl der Blöcke durch die paarweise verschiedenen Punkte $X, Y, \ldots$. Nach (1.1) ist dann

$$\sum_Z \lambda(V, W, X, Y, Z) = 4\lambda(V, W, X, Y),$$

$$\sum_Y \lambda(V, W, X, Y) = 5\lambda(V, W, X),$$

$$\sum_X \lambda(V, W, X) = 6\lambda(V, W),$$

$$\sum_W \lambda(V, W) = 7\lambda(V),$$

$$\sum_V \lambda(V) = 8b = 8 \cdot 759.$$

Nun ist $\lambda(V, W, X, Y, Z) \leqslant 1$. Daher folgt der Reihe nach, daß $\lambda(V, W, X, Y) \leqslant 5$, $\lambda(V, W, X) \leqslant 21$, $\lambda(V, W) \leqslant 77$ und $\lambda(V) \leqslant 253$ ist. Gäbe es nun ein Punktequintupel V^*, W^*, X^*, Y^*, Z^* mit

$$\lambda(V^*, W^*, X^*, Y^*, Z^*) = 0,$$

so wäre $\lambda(V^*, W^*, X^*, Y^*) < 5$, $\lambda(V^*, W^*, X^*) < 21$, $\lambda(V^*, W^*) < 77$ und $\lambda(V^*) < 253$. Also wäre $8 \cdot 759 = \sum_V \lambda(V) < 24 \cdot 253 = 8 \cdot 759$,

Q.E.A.

Also geht durch fünf verschiedene Punkte von $\mathfrak{S}$ stets genau in Block, dh. $\mathfrak{S}$ ist ein Steiner-System mit den Parametern $v = 24$, $k = 8$ und $t = 5$,

Q.E.D.

(4.3) (Witt [*11*]) *Ist $\mathfrak{S}$ ein Steiner-System mit den Parametern $v = 24$, $k = 8$ und $t = 5$, so ist seine Kollineationsgruppe auf den Punkten fünffach transitiv. Der Stabilisator dreier Punkte ist isomorph zur $PSL(3, 4)$.*

Beweis. Sind P, Q, und R drei verschiedene Punkte von $\mathfrak{S}$, so enthält ihr Stabilisator, wie der Beweis von (4.2) zeigt, eine zur $PSL(3, 4)$ isomorphe Untergruppe, die auf den restlichen Punkten von $\mathfrak{S}$ noch zweifach transitiv operiert. Ist nun γ eine Kollineation, die P, Q, und R festläßt, so ist notwendig

$\mathfrak{H}_i^\gamma = \mathfrak{H}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Weil $P\Gamma L(3, 4)$ die volle Kollineationsgruppe der projektiven Ebene der Ordnung 4 ist, liegt γ in dieser Gruppe und daher sogar schon in der $PSL(3, 4)$. Also ist der Stabilisator irgenddreier Punkte isomorph zur $PSL(3, 4)$. Da der Stabilisator dreier Punkte auf den restlichen Punkten stets noch zweifach transitiv ist, folgt, wie man sich leicht überzeugt, daß die volle Kollineationsgruppe von $\mathfrak{S}$ sogar fünffach transitiv ist, Q.E.D.

Die so konstruierte Kollineationsgruppe von $\mathfrak{S}$ ist die Mathieu-Gruppe M_{24}, der Stabilisator eines Punktes die M_{23} und der Stabilisator zweier Punkte die M_{22}.

Literatur

1. Benz, W. Über Möbiusebenen. *Jber. DMV.* **63** (1961), 1–27.
2. Coxeter, H. S. M. Twelve points in PG(5, 3) with 95040 self-transformations. *Proc. Royal Soc.* **A** (1958), 247–293.
3. de Séguier, J.-A. Éléments de la théorie des groupes de substitutions. Paris, 1912.
4. Edge, W. L. Some implications of the geometry of the 21-point plane. *Math. Z.* **87** (1965), 348–362.
5. Hall, M., Jr. Note on the Mathieu group M_{12}. *Arch. Math.* **13** (1962), 334–340.
6. Mathieu, E. Mémoire sur l étude des fonctions de plusieurs quantités. *J. Math. p. et a.* [II] **6** (1861), 241–323.
7. Mathieu, E. Sur la fonction cinq fois transitive de 24 quantités. *J. Math. p. et a.* [II] **18** (1873), 25–46.
8. Qvist, B. Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane. *Ann. Acad. Sci. Fennicæ* **134** (1952).
9. Todd, J. A. On representations of the Mathieu groups as collineation groups. *Journ. Lond. Math. Soc.* **34** (1956), 406–416.
10. Whitelaw, T. A. On the Mathieu group of degree twelve. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **62** (1966), 351–364.
11. Witt, E. Die 5-fach transitiven Gruppen von Mathieu. *Abhandl. Math. Sem. Hamburg* **12** (1938), 256–264.
12. Witt, E. Über Steinersche Systeme. *Abhandl. Math. Sem. Hamburg* **12** (1938), 265–275.