J. Math. Pures Appl.,
78, 1999, *p.* 701-722

TRANSFORMATIONS ISOTROPES DES GERMES DE FEUILLETAGES HOLOMORPHES

M. BERTHIER [a], **D. CERVEAU** [b], **R. MEZIANI** [c]

[a] *Chargé de Recherches au CNRS, IMR, Campus Beaulieu, Université de Rennes 1, 35042 Rennes cedex, France*
[b] *IMR, Campus Beaulieu, Université de Rennes 1, 35042 Rennes cedex, France*
[c] *Université IBN Tofail, Faculté des Sciences, Dép. de Math., B.P. 133, Kenitra, Maroc*

Manuscrit reçu le 20 mai 1998 ; révisé le 18 novembre 1998

ABSTRACT. – Given $\mathcal{F}_\omega$ a germ of holomorphic singular foliation at the origin of $\mathbf{C}^n$ defined by an equation $\omega = 0$ (with $\omega \wedge d\omega = 0$), we are interested in describing the group of isotropic transformations of $\mathcal{F}_\omega$, i.e., the group of those germs Φ of diffeomorphisms at the origin of $\mathbf{C}^n$ that satisfy $\Phi^*\omega \wedge \omega = 0$. © Elsevier, Paris

RÉSUMÉ. – Étant donné un germe $\mathcal{F}_\omega$ de feuilletage holomorphe singulier à l'origine de $\mathbf{C}^n$ d'équation $\omega = 0$ (avec $\omega \wedge d\omega = 0$), nous nous intéressons à décrire le groupe des transformations isotropes de $\mathcal{F}_\omega$ c'est à dire les germes Φ de difféomorphismes à l'origine de $\mathbf{C}^n$ tels que $\Phi^*\omega \wedge \omega = 0$. © Elsevier, Paris

1. Introduction

Nous nous intéressons dans ce qui suit aux germes de difféomorphismes holomorphes qui préservent un germe de feuilletage holomorphe à l'origine de $\mathbf{C}^n$.

1.1. Définitions et notations

Un germe de feuilletage holomorphe $\mathcal{F}_\omega$ de codimension un à l'origine de $\mathbf{C}^n$ est la donnée d'une équation $\omega = 0$ où ω désigne un germe de 1-forme holomorphe intégrable, i.e. satisfaisant l'identité $\omega \wedge d\omega = 0$. Quitte à diviser les coefficients de ω par un élément de $\mathcal{O}_n$, on se ramène au cas où le lieu singulier de $\mathcal{F}_\omega$, noté $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}_\omega)$, est de codimension supérieure où égale à deux. Notons $\mathrm{Diff}(\mathbf{C}^n, 0)$ le groupe des germes de difféomorphismes de $\mathbf{C}^n, 0$. On définit le sous groupe $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)$ de $\mathrm{Diff}(\mathbf{C}^n, 0)$ comme suit :

$$\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega) = \left\{\Phi \in \mathrm{Diff}(\mathbf{C}^n, 0),\ \Phi^*\omega \wedge \omega = 0\right\}.$$

De façon heuristique, ce groupe contient deux types d'éléments : les uns fixent toutes les feuilles de $\mathcal{F}_\omega$, ils forment un sous groupe distingué de $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)$ noté $\mathrm{Fix}(\mathcal{F}_\omega)$, les autres échangent certaines feuilles. Une des définitions possibles pour $\mathrm{Fix}(\mathcal{F}_\omega)$ est la suivante : un élément Φ de $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)$ appartient à $\mathrm{Fix}(\mathcal{F}_\omega)$ si et seulement s'il est isotope à l'identité dans $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)$. En dimension deux, ceci signifie que

$$\Phi(x, y) = \exp\left[f(x, y)\right]X(x, y)$$

où f appartient à $\mathcal{O}_2$, X est un germe de champ de vecteurs holomorphe générateur du noyau de ω et $\exp[\tau]X$ désigne le flot de X calculé au temps τ. Dans la pratique, cette définition de $\mathrm{Fix}(\mathcal{F}_\omega)$ n'est pas très exploitable, ne serait ce qu'à cause de la complexité de l'espace des germes de feuilles de $\mathcal{F}_\omega$. Si l'on espère pouvoir mener à bien quelques calculs, il nous faut introduire une définition plus "algébrique" inspirée par la remarque suivante. Soit $\mathcal{F}_\omega$ un germe de feuilletage holomorphe à l'origine de $\mathbf{C}^2$ possédant une intégrale première holomorphe minimale f (voir paragraphe 3) et soit Φ un élément de $\mathrm{Fix}(\mathcal{F}_\omega)$, i.e. vérifiant $f \circ \Phi = f$, tangent à l'identité ; en écrivant Φ comme l'exponentielle d'un champ de vecteurs formel $\widehat{Y}$ d'ordre deux (voir la Proposition 2.3), i.e.

$$\Phi(x, y) = \exp[1]\widehat{Y}(x, y),$$

on vérifie facilement que

$$\widehat{Y}.f = 0,$$

ce qui signifie encore que la forme ω annule $\widehat{Y}$. Il semble donc naturel étant donné un germe $\mathcal{F}_\omega$ de feuilletage holomorphe à l'origine de $\mathbf{C}^2$, de considérer le sous groupe $\mathrm{Fix}^{\mathrm{alg}}(\mathcal{F}_\omega)$ engendré par les germes Φ de $\mathrm{Diff}(\mathbf{C}^2, 0)$ qui s'écrivent

$$\Phi(x, y) = \exp[1]\widehat{h}(x, y)X(x, y),$$

où $\widehat{h}$ appartient au complété formel $\widehat{\mathcal{O}}_2$ de $\mathcal{O}_2$ et X est un germe de champ de vecteurs holomorphe générateur du noyau de ω.

La première partie de ce travail consiste à prouver que tout germe de $\mathrm{Fix}^{\mathrm{alg}}(\mathcal{F}_\omega)$ tangent à l'identité est un flot "fonctionnel" (Corollaire 2.9), ce qui entraine que $\mathrm{Fix}^{\mathrm{Alg}}(\mathcal{F}_\omega)$ est inclus dans $\mathrm{Fix}(\mathcal{F}_\omega)$. En particulier lorsque $\mathcal{F}_\omega$ possède une intégrale première holomorphe minimale, tout élément de $\mathrm{Fix}(\mathcal{F}_\omega)$ tangent à l'identité est de ce type. Nous traitons au préalable le cas où $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)$ contient un élément avec une partie linéaire générique.

La situation se clarifie singulièrement lorsque l'on dispose de la description de l'espace des germes de feuilles de $\mathcal{F}_\omega$. Nous revenons alors à la définition première suivante : un élément Φ de $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)$ fixe les feuilles de $\mathcal{F}_\omega$ si et seulement s'il induit l'identité sur cet espace de feuilles, ce que l'on peut vérifier sur certains exemples en utilisant des intégrales premières ou les orbites de l'holonomie. On dresse la liste complète des éléments de $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)$ et du quotient $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)/\mathrm{Fix}(\mathcal{F}_\omega)$ correspondant à un germe de feuilletage à l'origine de $\mathbf{C}^2$ défini par une équation $\omega = 0$ non dégénérée (cf. paragraphe 2.2). L'étude du centralisateur holomorphe (non tangent à l'identité) d'un germe de difféomorphisme résonnant de $\mathbf{C}, 0$ permet, par exemple, de montrer que ce quotient est génériquement fini si l'on considère une équation résonnante au sens de [14].

La seconde partie est consacrée aux germes $\mathcal{F}_\omega$ à l'origine de $\mathbf{C}^n$ possédant une intégrale première holomorphe minimale f. Dans ce contexte, on dispose d'un morphisme injectif

$$\sigma_f : \frac{\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)}{\mathrm{Fix}(\mathcal{F}_\omega)} \to \mathrm{Diff}(\mathbf{C}, 0)$$

dont l'image est notée $\mathrm{Per}_f(\mathcal{F}_\omega)$. Ce sous groupe reflète en un certain sens les propriétés géométriques du germe de feuilletage. On démontre par exemple que la fonction f est quasi homogène au sens de Saito si et seulement s'il existe un élément ϕ de $\mathrm{Per}_f(\mathcal{F}_\omega)$ dont la dérivée à l'origine n'est pas racine de l'unité (Théorème 3.1). On étudie ensuite le cas où cette hypothèse n'est pas satisfaite en liaison avec le théorème de Briançon Skoda [5] puis on discute notamment de l'existence d'isotropies périodiques (Théorème 3.4 et 3.7).

1.2. Exemples et remarques

1. Considérons la 1-forme $\omega = y^{p+1}\,dx - x\,dy$ et le feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ de $\mathbf{C}^2$ d'équation $\omega = 0$. Le difféomorphisme linéaire Φ qui à (x, y) associe $\Phi(x, y) = (x, \exp(2i\pi/p)y)$ appartient à $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)$. Il n'est pas difficile de vérifier qu'il fixe les composantes connexes de $\mathbf{C}^2 \setminus \{0\}$ muni de la topologie fine induite par les plaques de $\mathcal{F}_\omega$. Par contre si l'on choisit un polydisque $U = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2,\ |x| < \mu,\ |y| < \nu\}$, les feuilles de $\mathcal{F}_\omega$ peuvent donner naissance à plusieurs feuilles de la restriction $\mathcal{F}_U$ de $\mathcal{F}_\omega$ à U. Un calcul élémentaire montre que la restriction Φ_U de Φ à U fixe une infinité non dénombrable de feuilles de $\mathcal{F}_U$ tandis qu'une infinité non dénombrable d'autres feuilles sont permutées.

2. Il n'existe pas de germe de feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ à l'origine de $\mathbf{C}^2$ tel que le difféomorphisme

$$\phi(x, y) = \left(x + x^2 + x^3, y + y^2 + y^3\right)$$

appartienne à $\mathrm{Fix}^{\mathrm{alg}}(\mathcal{F}_\omega)$. En effet l'unique champ de vecteurs formel d'ordre deux dont Φ est l'exponentielle au temps 1 s'écrit :

$$\widehat{Y} = \widehat{Y}_1(x)\frac{\partial}{\partial x} + \widehat{Y}_1(y)\frac{\partial}{\partial y},$$

où $\widehat{Y}_1(z) = z^2(1 + z\widehat{l}(z))$, $\widehat{l}$ étant une série formelle necessairement divergente [1].

3. Soit $\mathcal{F}_\omega$ le feuilletage de $\mathbf{C}^2$ d'équation $\omega = x^2\,dy - y(1 + \lambda x)\,dx = 0$ et Φ le difféomorphisme qui à (x, y) associe $(x, y.\exp(2i\pi\lambda))$, i.e. Φ est l'holonomie "fibrée faible" de $\mathcal{F}_\omega$. On vérifie comme dans l'exemple 1 que Φ fixe les composantes connexes de $\mathbf{C}^2 \setminus \{0\}$ muni de la topologie fine. Par contre, si l'on choisit une nouvelle fois de restreindre $\mathcal{F}_\omega$ à un polydisque U, on vérifie encore que cette "holonomie fibrée" ne fixe plus toutes les composantes connexes de $U \setminus \{0\}$. En particulier, il n'existe aucune série formelle $\widehat{\tau}$ de $\widehat{\mathcal{O}}_2$ telle que

$$\Phi(x, y) = \exp\left[\widehat{\tau}(x, y)\right]X(x, y)$$

où

$$X(x, y) = x^2\frac{\partial}{\partial x} + y(1 + \lambda x)\frac{\partial}{\partial y}.$$

4. Pour être en mesure d'affirmer qu'un élément Φ de $\mathrm{Diff}(\mathbf{C}^2, 0)$ tangent à l'identité appartient à $\mathrm{Fix}^{\mathrm{alg}}(\mathcal{F}_\omega)$ pour un certain germe $\mathcal{F}_\omega$, il ne suffit pas de considérer l'unique champ de vecteurs formel $\widehat{X}$ d'ordre supérieur ou égal à deux dont il est l'exponentielle au temps 1. En effet, le germe

$$\Phi(x, y) = \exp[1]\left(\frac{2i\pi x^2}{1 + \lambda x}\frac{\partial}{\partial x}\right) = \exp[1]\widehat{X}(x, y) = \exp[1]\left(\widehat{X}(x, y) + 2i\pi y\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

appartient à $\mathrm{Fix}^{\mathrm{alg}}(\mathcal{F}_\omega)$ avec $\omega = x^2\,dy - y(1 + \lambda x)\,dx$ bien que $\widehat{X}$ ne soit pas annulé par cette dernière 1-forme. Ce fait justifie notamment le Lemme 2.5.

1.3. Les motivations

L'étude des sous groupes $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)$, $\mathrm{Fix}(\mathcal{F}_\omega)$ et $\mathrm{Fix}^{\mathrm{alg}}(\mathcal{F}_\omega)$ attachés à un germe de feuilletage holomorphe peut trouver des applications par exemple dans les deux types de problèmes suivants.

1. Classification des germes de feuilletages au travers de l'holonomie projective. Il s'agit de construire des conjugaisons entre feuilletages holomorphes le long d'un diviseur exceptionnel donné par une désingularisation. Dans la plupart des cas étudiés, la démarche consiste à produire de telles conjugaisons en relevant via une fibration transverse aux feuilletages fixée (type fibration de Hopf) [1] des conjugaisons entre les groupes d'holonomie associés aux composantes du diviseur. Dans [4], on montre que cette méthode n'est pas toujours applicable : il existe des exemples de formes nilpotentes dont les holonomies projectives sont holomorphiquement conjuguées et qui ne peuvent être conjuguées par une conjugaison respectant une fibration naturelle (la fibration de Hopf de la dernière composante du diviseur exceptionnel). Ceci résulte de ce que le groupe $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_{\omega_e})$ où ω_e désigne l'équation d'Euler

$$\omega_e = y^2\,dx - \left(x + y^2\right)dy = 0$$

ne contient pas d'élément fibré en la variable x non trivial. Par ailleurs, il est impossible en toute généralité d'exhiber de telles fibrations. [2] Une des méthodes envisageables pour attaquer le problème consiste à recoller des conjugaisons locales, les obstructions au recollement se situant dans certains groupes d'isotropie.

2. Description des feuilletages le long de composantes de Kupka. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe sur une variété holomorphe $\mathcal{M}$ défini par un système de données locales intégrables $(U_\alpha, \omega_\alpha)$. Une composante de Kupka pour $\mathcal{F}$ est une composante irréductible K du lieu singulier de $\mathcal{F}$ contenue dans l'ensemble

$$K(\mathcal{F}) = \left\{p \in U_\alpha,\ \omega_\alpha(p) = 0,\ d\omega_\alpha(p) \neq 0\right\}$$

(voir [7]). D'après le théorème classique de Kupka [11], le feuilletage $\mathcal{F}$ se "déploie" le long de K à partir d'un germe $\mathcal{F}_0$ réalisé dans une section transverse à $\mathcal{F}$. La représentation

$$\rho : \pi_1(K) \to \mathrm{Iso}(\mathcal{F}_0)$$

permet de décrire complétement le comportement de $\mathcal{F}$ au voisinage de K.

Les notations utilisées sont les suivantes : $\mathrm{Diff}(\mathbf{C}^n, 0)$ désigne le groupe des germes de difféomorphismes holomorphes à l'origine de $\mathbf{C}^n$, $\chi(\mathbf{C}^n, 0)$ le $\mathcal{O}_n$ -module des germes de champs de vecteurs, $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}^n, 0)$ et $\widehat{\chi}(\mathbf{C}^n, 0)$ leur complété formel respectif. Enfin, nous notons $\widehat{\mathrm{Diff}}_p(\mathbf{C}, 0)$ (resp. $\widehat{\mathrm{Diff}}_{\geqslant p}(\mathbf{C}, 0)$) les éléments de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}, 0)$ tangents à l'identité à l'ordre p (resp. à un ordre supérieur ou égal à p) et $\chi_p(\mathbf{C}^n, 0)$ les éléments de $\chi(\mathbf{C}^n, 0)$ dégénérés d'ordre p.

2. Transformations isotropes et flots fonctionnels des germes de feuilletages holomorphes

Nous considérons dans ce qui suit un germe $\mathcal{F}_\omega$ de feuilletage holomorphe à l'origine de $\mathbf{C}^n$, d'équation $\omega = 0$ dont le lieu singulier est de codimension supérieure où égale à deux. La proposition énoncée ci-après montre que si $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)$ contient un élément à partie linéaire générique, $\mathcal{F}_\omega$ est formellement logarithmique.

PROPOSITION 2.1. – *Soit $\mathcal{F}_\omega$ un germe de feuilletage holomorphe à l'origine de $\mathbf{C}^n$ tel qu'il existe un germe Φ de $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)$ dont la partie linéaire est à spectre non résonnant : si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$*

[1] En fait, la fibration est transverse en dehors de certaines feuilles analytiques spéciales qui sont des fibres de celle-ci.

[2] Considérer l'exemple d'un germe de feuilletage avec quatre droites et une parabole comme séparatrices.

sont les valeurs propres de $\Phi'(0)$, *l'égalité*

$$\lambda_1^{i_1}\cdots\lambda_n^{i_n}=1$$

n'est possible que si le multi-indice $(i_1,\dots,i_n)$ *de* $\mathbf{Z}^n$ *est le multi-indice nul. Il existe des coordonnées formelles* $(\widehat{x}_1,\dots,\widehat{x}_n)$ *et des nombres complexes* $\mu_1,\dots,\mu_n$ *tel que* $\mathcal{F}_\omega$ *soit formellement défini par l'équation*

$$\widehat{x}_1\cdots\widehat{x}_n\sum_{i=1}^n\mu_i\frac{d\widehat{x}_i}{\widehat{x}_i}=0.$$

La preuve résulte d'un calcul analogue à celui qu'effectue Kodaira dans son livre [10] pour montrer la non existence de fonctions méromorphes non constantes sur une variété de Hopf générique.

2.1. Transformations isotropes tangentes à l'identité et flots en dimension deux

Nous commençons par rappeler deux résultats bien connus sur l'application exponentielle.

PROPOSITION 2.2. – *L'application exponentielle réalise une bijection entre* $\widehat{\chi}_2(\mathbf{C}^n,0)$ *et les éléments tangents à l'identité de* $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C},0)$. *Par ailleurs, si* $\widehat{X}$ *est un champ de vecteurs formel nilpotent* (*d'ordre supérieur ou égal à deux éventuellement*), *chaque composante du difféomorphisme* $\exp[t]\widehat{X}$ *appartient à* $\mathbf{C}[t][[x_1,\dots,x_n]]$.

Dorénavant tous les germes de feuilletages holomorphes rencontrés sont supposés non dicritiques (voir [15]).

Notons

$$\pi:\widetilde{\mathbf{C}}^2\to\mathbf{C}^2$$

l'application d'éclatement de l'origine définie en coordonnées locales par

$$\pi(x,t)=(x,tx),\qquad \pi(s,y)=(sy,y).$$

Dans la suite de ce paragraphe, $\mathcal{F}_\omega$ désigne un germe de feuilletage holomorphe à l'origine de $\mathbf{C}^2$, à singularité isolée et X un germe de champ de vecteurs holomorphe générateur du noyau de ω.

THÉORÈME 2.3. – *Un élément* Φ *tangent à l'identité de* $\mathrm{Diff}(\mathbf{C}^2,0)$ *appartient à* $\mathrm{Fix}^{\mathrm{alg}}(\mathcal{F}_\omega)$ *si et seulement s'il existe une série formelle* $\widehat{\tau}$ *de* $\widehat{\mathcal{O}}_2$ *telle que*

$$\Phi(x,y)=\exp\big[\widehat{\tau}(x,y)\big]X(x,y).$$

Preuve. – Nous commençons par la condition nécessaire.

LEMME 2.4. – *Soit* Φ *un germe de difféomorphisme holomorphe tangent à l'identité qui s'écrit*

$$\Phi(x,y)=\exp[1]\widehat{h}(x,y)X(x,y)$$

où $\widehat{h}$ *appartient à* $\widehat{\mathcal{O}}_2$ *et* X *est un germe de champ de vecteurs holomorphe à singularité isolée. Si le champ de vecteurs formel* $\widehat{h}X$ *est nilpotent, il existe un élément* $\widehat{\tau}$ *de* $\widehat{\mathcal{O}}_2$ *tel que*

$$\Phi(x,y)=\exp\big[\widehat{\tau}(x,y)\big]X(x,y).$$

Preuve. – Le coefficient de X dans l'égalité

$$\exp[s]\widehat{h}X = \mathrm{id} + \sum_{i\geqslant 1}\frac{s^i}{i!}\bigl(\widehat{h}X\bigr)^i$$

s'écrit

$$\widehat{t}(x, y, s) = \sum_{k\geqslant 1}\frac{s^k}{k!}g_k(x, y)$$

où les g_k sont déterminés par

$$g_1(x, y) = \widehat{h}(x, y), \qquad g_{k+1}(x, y) = \widehat{h}(x, y)(X.g_k)(x, y).$$

Ce coefficient est bien défini comme série formelle puisque $\widehat{h}X$ est un champ de vecteurs nilpotent. Notons $\Psi_s(x, y)$ le "flot"

$$\Psi_s(x, y) = \exp\bigl[\widehat{t}(x, y, s)\bigr]X(x, y).$$

On vérifie aisément que

$$\left.\frac{\partial \Psi_s(x, y)}{\partial s}\right|_{s=0} = \widehat{h}(x, y)X\bigl(\Psi_s(x, y)\bigr)$$

ce qui prouve que

$$\Psi_1(x, y) = \exp[1]\widehat{h}(x, y)X(x, y). \qquad \square$$

Considérons désormais un germe Φ de difféomorphisme holomorphe tangent à l'identité tel qu'il existe $\widehat{h}$ appartenant à $\widehat{\mathcal{O}}_2$ et X un germe de champ de vecteurs holomorphe à singularité isolée vérifiant

$$\Phi(x, y) = \exp[1]\widehat{h}(x, y)X(x, y).$$

Nous nous limitons au seul cas où $\widehat{h}$ est une unité et X un champ non nilpotent (sinon on applique le lemme précédent). Soit Ψ le difféomorphisme tangent à l'identité défini par

$$\Psi(x, y) = \exp[1]\bigl(-\widehat{h}(0)\bigr)X(x, y) \circ \exp[1]\widehat{h}(x, y)X(x, y).$$

LEMME 2.5. – *Notons $\widetilde{\mathcal{F}}_X$ le feuilletage éclaté strict de $\mathcal{F}_X$ et $\widetilde{\Psi}$ le difféomorphisme défini par*

$$\pi \circ \widetilde{\Psi} = \Psi \circ \pi.$$

Soit m un point du diviseur $\pi^{-1}(0)$ régulier pour le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}_X$ et $\widehat{I}$ une intégrale première formelle de ce dernier en m. On a

$$\widehat{I} \circ \widetilde{\Psi} = \widehat{I}.$$

Preuve. – Puisque les fonctions holomorphes sont denses dans les séries formelles pour la topologie de Krull, il suffit de le vérifier pour un élément h quelconque de $\mathcal{O}_2^*$. Le difféomorphisme

$$\exp[-s]h(0)X \circ \exp[s]hX$$

s'éclate en

$$\exp[-s]h(0)\pi^*X \circ \exp[s](h \circ \pi)\pi^*X.$$

On vérifie alors que

$$\widehat{I} \circ \exp[-s]h(0)\pi^*X \circ \exp[s](h \circ \pi)\pi^*X = \widehat{I}$$

et ce pour tout s de l'intervalle $[0, 1]$. □

Puisque Ψ est tangent à l'identité, il existe un unique champ de vecteurs formel $\widehat{Y}$ d'ordre supérieur ou égal à deux tel que $\Psi = \exp[1]\widehat{Y}$.

LEMME 2.6. – *Il existe $\widehat{g}$ appartenant à $\widehat{\mathcal{O}}_2$ tel que*

$$\widehat{Y} = \widehat{g}X, \qquad \widehat{g}(0) = 0.$$

Preuve. – En un point générique du diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(0)$ le champ de vecteurs π^*X se normalise en $\partial/\partial t$. Notons $\widetilde{Y}$ l'image de $\pi^*\widehat{Y}$ par cette normalisation. D'après le lemme précédent

$$x \circ \exp[1]\pi^*\widetilde{Y} = x$$

et par suite

$$x \circ \exp[s]\widetilde{Y} = x$$

pour tout s de l'intervalle $[0, 1]$ (remarquer que puisque $\widehat{Y}$ est d'ordre supérieur ou égal à 2, le champ $\widetilde{Y}$ est nilpotent, éventuellement d'ordre supérieur ou égal à deux). On en déduit que $\widehat{Y}$ est colinéaire à X. □

Pour conclure, il suffit d'appliquer le Lemme 2.5 pour obtenir

$$\Psi(x, y) = \exp\big[\widehat{t}(x, y)\big]X(x, y)$$

et

$$\Phi(x, y) = \exp\big[\widehat{h}(0) + \widehat{t}(x, y)\big]X(x, y).$$

Intéressons nous maintenant à la condition suffisante et écrivons de nouveau $\phi(x, y) = \exp[1]\widehat{Y}(x, y)$ où $\widehat{Y}$ est un champ formel qui s'annule à l'ordre 2. Après éclatement le champ X se normalise en

$$\widetilde{X} = x^k \frac{\partial}{\partial t}$$

k étant un entier positif ou nul. Puisque son flot fixe la variable x, on en déduit que

$$x \circ \exp[1]\pi^*\widehat{Y} = x$$

et on conclut comme précédemment. □

COROLLAIRE 2.7. – *Soit Φ un élément tangent à l'identité de* $\mathrm{Fix}^{\mathrm{alg}}(\mathcal{F}_\omega)$*, il existe un* "*temps*" *τ holomorphe, i.e. appartenant à $\mathcal{O}_2$, tel que*

$$\Phi(x, y) = \exp\big[\tau(x, y)\big]X(x, y).$$

Preuve. – Il suffit de prouver que $\widehat{\tau}$ converge. En un point régulier m du diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(0)$ le champ de vecteurs holomorphe $\pi^* X$ se normalise holomorphiquement en $x^k(\partial/\partial t)$. L'éclaté $\widetilde{\Phi}$ de Φ s'écrit après cette normalisation

$$\widetilde{\Phi}(x,t) = \exp\bigl[\widehat{g}(x,t)\bigr] x^k \frac{\partial}{\partial t}.$$

Puisque le flot de $x^k(\partial/\partial t)$ est $(x, \tau x^k + t)$, on constate que les séries transversalement formelles $\widehat{g}$ et $\widehat{\tau} \circ \pi$ convergent en m. Il suffit d'appliquer un résultat classique de [15] pour obtenir la convergence de $\widehat{\tau}$. □

COROLLAIRE 2.8. – *Soit $\mathcal{F}_\omega$ un germe de feuilletage à l'origine de $\mathbf{C}^2$ et Φ un élément de* $\mathrm{Fix}^{\mathrm{Alg}}(\mathcal{F}_\omega)$ *tangent à l'identité, alors Φ appartient à* $\mathrm{Fix}(\mathcal{F}_\omega)$.

COROLLAIRE 2.9. – *Soit $\mathcal{F}_\omega$ un germe de feuilletage holomorphe à l'origine de $\mathbf{C}^2$ possédant une intégrale première holomorphe. Si Φ est un élément tangent à l'identité de* $\mathrm{Fix}_1(\mathcal{F}_\omega)$*, il existe un germe τ de $\mathcal{O}_2$ et un générateur X du noyau de ω tel que*

$$\Phi(x,y) = \exp\bigl[\tau(x,y)\bigr] X(x,y).$$

2.2. Étude complète des singularités non dégénérées en dimension deux

Nous appelons non dégénérés les germes $\mathcal{F}_\omega$ de feuilletages holomorphes à l'origine de $\mathbf{C}^2$ définis par une équation $\omega = 0$ où le germe de 1-forme holomorphe ω vérifie : le spectre de tout champ de vecteurs holomorphe X dual de ω – au sens où $\omega(X) = 0$ – est constitué de deux valeurs propres non nulles. Il s'avère que l'on a une bonne description de ce qu'est l'espace des feuilles d'un tel germe de feuilletage, c'est ce qui facilite ici notre étude. Nous procédons cas par cas suivant les propriétés classiques de normalisation du germe ω (voir les rappels dans l'introduction de [14]).

Transformations isotropes des singularités de type Dulac. Il s'agit des équations $\omega = 0$ holomorphiquement conjuguées à un modèle

$$\omega_n = x\,dy - n\bigl(y + x^n\bigr)\,dx = 0.$$

On vérifie facilement que la fonction

$$g(x,y) = \frac{1}{x^n} e^{y/x^n}$$

est une intégrale première uniforme de ω_n. Soit maintenant $\Phi(x,y) = (x\varphi_1, \varphi_2)$ un élément de $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_{\omega_n})$ où φ_1 est une unité et φ_2 un élément de $\mathcal{M}_2$.

LEMME 2.10. – *Avec les notations précédentes, on a $g \circ \Phi = \lambda g$ où λ est un nombre complexe non nul.*

Introduisons maintenant les champs de vecteurs

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + n\bigl(y + x^n\bigr)\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad Y = x^n \frac{\partial}{\partial y}$$

dont les flots sont notés $\exp[t]X$ et $\exp[t]Y$.

PROPOSITION 2.11. – *Tout élément* $\Phi(x,y) = (x\varphi_1, \varphi_2)$ *de* $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_{\omega_n})$ *s'écrit*

$$\Phi = \exp[k]Y \circ \exp[\tau]X,$$

où k *est un nombre complexe et* τ *un germe de fonction holomorphe. De plus, le difféomorphisme* Φ *fixe les feuilles de* $\mathcal{F}_{\omega_n}$ *si et seulement si la constante* k *est de la forme* $k = 2i\pi nl$, l *appartenant à* $\mathbf{Z}$.

On obtient ainsi le :

COROLLAIRE 2.12. – *Avec les hypothèses de la proposition, le difféomorphisme* Φ *fixe les feuilles du feuilletage* $\mathcal{F}_{\omega_n}$ *si et seulement s'il est de la forme*

$$\Phi(x,y) = \exp\bigl[\varpi(x,y)\bigr]X(x,y),$$

où ϖ *est un germe de fonction holomorphe.*

Transformations isotropes des singularités non résonnantes linéarisables. On s'intéresse à des équations $\omega = x\,dy + \lambda y\,dx + \cdots = 0$, où λ n'est pas rationnel positif, qui sont holomorphiquement linéarisables. Rappelons que c'est notamment le cas lorsque λ vérifie l'une des conditions suivantes : il n'est pas réel, il est réel négatif non entier ou inverse d'entier, il est réel positif et satisfait la condition diophantienne de Brujno. Quitte à changer de coordonnées, on peut supposer ω linéaire. Notons alors X le champ de vecteurs holomorphe

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - \lambda y\frac{\partial}{\partial y}.$$

PROPOSITION 2.13. – *Tout élément* Φ *de* $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)$ *s'écrit sous la forme*

$$\Phi(x,y) = (x, \alpha y) \circ \exp\bigl[\tau(x,y)\bigr]X(x,y),$$

où α *est un nombre complexe non nul et* τ *un germe de fonction holomorphe. De plus, le germe* Φ *fixe les feuilles de* $\mathcal{F}_\omega$ *si et seulement si* α *est de la forme* $\alpha = e^{-2i\pi\lambda n}$, n *appartenant à* $\mathbf{Z}$. *Dans ce cas,* Φ *s'écrit*

$$\Phi(x,y) = \exp[2i\pi n]X \circ \exp\bigl[\tau(x,y)\bigr]X(x,y).$$

Les cas résonnants et quasi-résonnants. On discute maintenant des cas où λ est rationnel positif ou irrationnel positif ne satisfaisant pas la condition diophantienne de Brujno. Soient (x,y) des coordonnées (holomorphes) dans lesquelles ω s'écrit

$$\omega = xa(x,y)\,dy + \lambda y b(x,y)\,dx,$$

a et b étant des unités holomorphes avec $a(0,0) = b(0,0) = 1$. Notons une nouvelle fois X le champ de vecteurs

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - \lambda y\frac{b(x,y)}{a(x,y)}\frac{\partial}{\partial y}.$$

On dispose du théorème de "redressement" suivant [3,4] :

THÉORÈME 2.14. – *Tout élément Φ de* $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)$ *s'écrit*

$$\Phi(x,y)=\exp\bigl[\tau(x,y)\bigr]X\circ\bigl(x,\varphi(x,y)\bigr)$$

où τ appartient à $\mathcal{O}_2$ et $\varphi(x,y)$ s'écrit $\varphi(x,y)=yU(x,y)$, U étant une unité holomorphe.

Soit h le difféomorphisme d'holonomie de la séparatrice $y=0$ de ω et $\mathrm{C}(h)$ son centralisateur holomorphe, i.e.

$$\mathrm{C}(h)=\bigl\{\phi\in\mathrm{Diff}(\mathbf{C},0),\ h\circ\phi=\phi\circ h\bigr\}.$$

Grâce au théorème précédent, on a une application

$$\chi:\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)\to\mathrm{C}(h)/(h)$$

définie par $\chi(\Phi)=\varphi(1,y)$, (h) désignant le groupe monogène engendré par h. Les constructions classiques de [15] et [14] montre que χ est une application surjective.

LEMME 2.15. – *Le difféomorphisme Φ appartient à* $\mathrm{Fix}(\mathcal{F}_\omega)$ *si et seulement si $\chi(\Phi)$ est l'identité* (*modulo* (h)).

Preuve. – Elle résulte de ce que, dans ce contexte, l'espace des feuilles de $\mathcal{F}_\omega$ coincide avec l'espace des orbites de h [14]. □

COROLLAIRE 2.16. – *Un élément Φ de* $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)$ *fixe les feuilles de $\mathcal{F}_\omega$ si et seulement s'il existe un germe ϖ de fonction holomorphe tel que*

$$\Phi(x,y)=\exp\bigl[\varpi(x,y)\bigr]X(x,y).$$

Preuve. – Si $\chi(\Phi)=h^n$, le difféomorphisme Φ s'écrit

$$\Phi(x,y)=\exp\bigl[\tau(x,y)\bigr]X\circ\exp[2i\pi n]X(x,y).\qquad\square$$

Ainsi le groupe des germes de difféomorphismes holomorphes qui permutent les feuilles de $\mathcal{F}_\omega$ s'identifie-t-il au quotient $\mathrm{C}(h)/(h)$ du centralisateur holomorphe de h par le sous groupe monogène engendré par h. Dans le cas quasi-résonnant, les centralisateurs peuvent être très compliqués. L'objet du paragraphe suivant est de décrire le quotient $\mathrm{C}(h)/(h)$ correspondant à un germe h résonnant.

Description des centralisateurs des difféomorphismes résonnants. Fixons nous un germe h de difféomorphisme résonnant tel que $h'(0)=e^{2i\pi q/p}$ et notons $\widehat{\mathrm{C}}(h)$ son centralisateur formel, i.e.

$$\widehat{\mathrm{C}}(h)=\bigl\{\widehat{\phi}\in\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C},0),\ \widehat{\phi}\circ h=h\circ\widehat{\phi}\bigr\}.$$

LEMME 2.17. – *Les centralisateurs $\widehat{\mathrm{C}}(h)$ et $\widehat{\mathrm{C}}(h^q)$ coincident.*

Preuve. – Il suffit de montrer que $\widehat{\mathrm{C}}(h^q)$ est contenu dans $\widehat{\mathrm{C}}(h)$. Pour ce faire choisissons un élément $\widehat{\psi}$ de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C},0)$ tangent à l'identité qui normalise h^q suivant l'égalité

$$\widehat{\psi}^*h^q=\exp[t_0]X_{qk,\lambda},$$

où $\widehat{\psi}^* h^q$ désigne le composé $\widehat{\psi}^{-1} \circ h^q \circ \widehat{\psi}$ et $X_{qk,\lambda}$ le champ de vecteurs

$$X_{qk,\lambda} = \frac{2i\pi z^{qk+1}}{1+\lambda z^{qk}} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Soit $h = \widehat{\sigma} \circ \widehat{n}$ où $\widehat{\sigma}$ et $\widehat{n}$ la décomposition de Jordan formelle de h, $\widehat{\sigma}$ étant périodique de période q et $\widehat{n}$ tangent à l'identité. En comparant les deux écritures de h^q on constate que

$$\widehat{n} = \exp\left[\frac{t_0}{q}\right]\widehat{X},$$

où $\widehat{X}$ est le champ formel tel que $\widehat{\psi}^* \widehat{X} = X_{qk,\lambda}$. On a donc

$$\widehat{\psi}^* h = (\widehat{\psi}^* \widehat{\sigma}) \circ \left(\widehat{\psi}^* \exp\left[\frac{t_0}{q}\right]\widehat{X}\right) = (\widehat{\psi}^* \widehat{\sigma}) \circ \exp\left[\frac{t_0}{q}\right] X_{qk,\lambda}$$

et puisque $\widehat{\psi}^* \widehat{\sigma}$ commute avec $\widehat{\psi}^* \exp[t_0/q] X_{qk,\lambda}$, on en déduit que

$$\widehat{\psi}^* \widehat{\sigma} = e^{2i\pi p/q} \exp[t] X_{qk,\lambda}.$$

On vérifie alors que t est nécessairement nul et que

$$\widehat{\psi}^* h = e^{2i\pi p/q} \exp\left[\frac{t_0}{q}\right] X_{qk,\lambda}.$$

Considérons un élément $\widehat{\phi}$ de $\widehat{\mathrm{C}}(h^q)$. Puisqu'il appartient à $\widehat{\mathrm{C}}(\exp[t_0] X_{qk,\lambda})$, le difféomorphisme $\widehat{\psi}^* \phi$ s'écrit

$$\widehat{\psi}^* \phi = e^{2i\pi l/qk} \exp[t] X_{qk,\lambda}$$

et commute donc avec le difféomorphisme

$$e^{2i\pi p/q} \exp\left[\frac{t_0}{q}\right] X_{qk,\lambda} = \widehat{\psi}^* h.$$

Ceci prouve que $\widehat{\phi}$ appartient à $\widehat{\mathrm{C}}(h)$. $\square$

Le centralisateur $\widehat{\mathrm{C}}(h)$ est le sous groupe de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}, 0)$ constitué des éléments $\widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}_P \circ \widehat{\varphi}_T$ où

$$\widehat{\varphi}_P = (\widehat{\psi}^{-1})^* e^{2i\pi l/kq} z$$

et

$$\widehat{\varphi}_T = (\widehat{\psi}^{-1})^* \exp[t] X_{kq,\lambda},$$

l étant un entier modulo kq et t un nombre complexe. On hérite d'un isomorphisme τ :

$$\begin{aligned} \tau : (\widehat{\mathrm{C}}(h), \circ) &\to (\mathbf{Z}/_{kq\mathbf{Z}}, +) \times (\mathbf{C}, +), \\ \widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}_P \circ \widehat{\varphi}_T &\mapsto (l, t) \end{aligned}$$

le but étant un produit abélien. Nous distinguons deux cas pour la suite.

1. Le difféomorphisme h, ou de façon équivalente le difféomorphisme h^q, est non analytiquement normalisable. D'après [9] c'est le cas si et seulement si le centralisateur holomorphe tangent à l'identité $\mathrm{C}_1(h^q)$ de h^q est monogène. Il existe alors un élément $\widetilde{h}$ de $\mathrm{Diff}_1(\mathbf{C},0)$ tel que $\widetilde{h}^\nu = h^q$ pour un certain entier ν. On a

$$\widehat{\psi}^*\widetilde{h} = \exp\left[\frac{t_0}{\nu}\right]X_{kq,\lambda}$$

et

$$\mathrm{C}_1(h) = \mathrm{C}_1\big(h^q\big) = \big(\widehat{\psi}^{-1}\big)^*\left\{\exp\left[\frac{nt_0}{\nu}\right]X_{kq,\lambda},\ n\in\mathbf{Z}\right\}.$$

Le centralisateur tangent à l'identité de h s'identifie donc via τ au sous groupe $0\times\mathbf{Z}\frac{t_0}{\nu}$.

Considérons maintenant le morphisme ρ de $\mathrm{C}(h)$ dans $\mathrm{C}_1(h)$ qui à un germe ϕ fait correspondre sa puissance kq-ième, ϕ^{kq}. On a une suite exacte :

$$\mathrm{Id}\to\mathrm{Ker}\,\rho\to\mathrm{C}(h)\to\mathrm{Im}\,\rho\to\mathrm{Id}.$$

Le sous groupe $\mathrm{Im}\,\rho$ de $\mathrm{C}_1(h)$ s'envoie par τ sur un sous groupe monogène de $0\times\mathbf{Z}\frac{t_0}{\nu}$ que l'on note $0\times\mathbf{Z}\frac{m_0t_0}{\nu}$.

– Si $\mathrm{Ker}\,\rho$ est réduit à l'identité, le centralisateur $\mathrm{C}(h)$ est monogène engendré par un certain difféomorphisme convergent qui s'écrit

$$\big(\widehat{\psi}^{-1}\big)^*e^{2i\pi l_0/kq}\ \exp\left[\frac{m_0t_0}{kq\nu}\right]X_{kq,\lambda}.$$

– Si $\mathrm{Ker}\,\rho$ n'est pas réduit à l'identité il est alors de la forme $\mathbf{Z}/_{\tilde{p}\mathbf{Z}}$ où $\tilde{p}$ divise kq. Soient $\tilde{p}_1$ défini par $kq=\tilde{p}\tilde{p}_1$ et

$$\big(\widehat{\psi}^{-1}\big)^*e^{2i\pi l/kq}\big(\widehat{\psi}^{-1}\big)^*\ \exp\left[\frac{m_0t_0}{kq\nu}\right]X_{kq,\lambda}$$

un antécédent du générateur de $\mathrm{Im}\,\rho$. En écrivant $l=l_0+\tilde{p}_1l_1$ où l_0 appartient à l'ensemble $\{0,\dots,\tilde{p}_1-1\}$, puis

$$e^{2i\pi l/kq}=e^{2i\pi l_0/kq}e^{2i\pi l_1/\tilde{p}}$$

on constate que l'antécédent du générateur de $\mathrm{Im}\,\rho$ s'écrit encore

$$\big(\widehat{\psi}^{-1}\big)^*e^{2i\pi l_1/\tilde{p}}\big(\widehat{\psi}^{-1}\big)^*e^{2i\pi l_0/kq}\ \exp\left[\frac{m_0t_0}{kq\nu}\right]X_{kq,\lambda}.$$

Soit ϕ un élément de $\mathrm{Im}\,\rho$, il existe deux entiers m et n tels qu'un antécédent de ϕ par ρ s'écrive

$$\big(\widehat{\psi}^{-1}\big)^*\big(e^{2i\pi/\tilde{p}}\big)^m\circ\big(\widehat{\psi}^{-1}\big)^*\left(e^{2i\pi l_0/kq}\ \exp\left[\frac{m_0t_0}{kq\nu}\right]X_{kq,\lambda}\right)^n.$$

On en déduit que

$$\mathrm{C}(h)=\left\{\big(\widehat{\psi}^{-1}\big)^*\big(e^{2i\pi/\tilde{p}}\big)^m\circ\big(\widehat{\psi}^{-1}\big)^*\left(e^{2i\pi l_0/kq}\ \exp\left[\frac{m_0t_0}{kq\nu}\right]X_{kq,\lambda}\right)^n,\ m,n\in\mathbf{Z}\right\}.$$

2. Le difféomorphisme h est analytiquement normalisable. Soit ψ un germe de difféomorphisme holomorphe tangent à l'identité normalisant h. En reprenant ce qui précède, on constate que

$$\widehat{\mathrm{C}}(h) = \mathrm{C}(h) = \left\{ \left(\psi^{-1}\right)^* e^{2i\pi l/kq} \exp[t] X_{kq,\lambda},\ t \in \mathbf{C},\ l \in \mathbf{Z}/_{kq\mathbf{Z}} \right\}.$$

Cette discussion conduit à la proposition suivante :

PROPOSITION 2.18. – *Étant donné un germe h de difféomorphisme holomorphe résonnant non analytiquement normalisable, le quotient* $\mathrm{C}(h)/(h)$ *est un groupe fini.*

3. Transformations isotropes des germes de feuilletages possédant des intégrales premières holomorphes

Le contexte est le suivant : $\mathcal{F}_\omega$ désigne un germe de feuilletage à l'origine de $\mathbf{C}^n$, d'équation $\omega = 0$ dont le lieu singulier est de codimension supérieure ou égale à deux. On suppose de plus que $\mathcal{F}_\omega$ possède une intégrale première holomorphe, i.e. il existe un élément f de $\mathcal{O}_n$ tel que $\omega \wedge df = 0$. D'après [15] l'ensemble des intégrales premières de $\mathcal{F}_\omega$ est naturellement muni d'une structure d'anneau isomorphe à $\mathbf{C}\{f\}$ où f est minimal : f n'est pas une puissance ou, ce qui est équivalent, les fibres génériques de f sont connexes. Dans ce cadre et pour un tel f, les définitions précédentes se retranscrivent de la façon suivante :

$$\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega) = \left\{ \Phi \in \mathrm{Diff}\left(\mathbf{C}^n, 0\right),\ \exists \phi \in \mathrm{Diff}(\mathbf{C}, 0),\ f \circ \Phi = \phi \circ f \right\},$$

$$\mathrm{Fix}(\mathcal{F}_\omega) = \left\{ \Phi \in \mathrm{Diff}\left(\mathbf{C}^n, 0\right),\ f \circ \Phi = f \right\}.$$

Les sous groupes $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)$ et $\mathrm{Fix}(\mathcal{F}_\omega)$ ne dépendent pas du choix de f minimal. On dispose d'un morphisme injectif

$$\sigma_f : \frac{\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)}{\mathrm{Fix}(\mathcal{F}_\omega)} \to \mathrm{Diff}(\mathbf{C}, 0)$$

défini par $\sigma_f(\Phi) = \phi$ qui permet d'identifier le quotient $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)/\mathrm{Fix}(\mathcal{F}_\omega)$ à un sous groupe de $\mathrm{Diff}(\mathbf{C}, 0)$ noté $\mathrm{Per}_f(\mathcal{F}_\omega)$. Si g est une autre intégrale première minimale de $\mathcal{F}_\omega$, il existe un élément ψ de $\mathrm{Diff}(\mathbf{C}, 0)$ tel que $g = \psi \circ f$; on en déduit que $\mathrm{Per}_f(\mathcal{F}_\omega)$ est conjugué à $\mathrm{Per}_g(\mathcal{F}_\omega)$ par ψ :

$$\mathrm{Per}_f(\mathcal{F}_\omega) = \psi^{-1} \circ \mathrm{Per}_g(\mathcal{F}_\omega) \circ \psi.$$

Lorsque $\mathcal{F}_\omega$ possède une intégrale première minimale submersive, on vérifie facilement, en invoquant par exemple le théorème de Frobénius, que $\mathrm{Per}_f(\mathcal{F}_\omega)$ coincide avec $\mathrm{Diff}(\mathbf{C}, 0)$, i.e. le morphisme σ_f est surjectif – donc un isomorphisme. Par la suite nous écarterons systématiquement ce cas trivial. Notons encore $\mathrm{Per}'_f(\mathcal{F}_\omega)$ le sous groupe de $\mathbf{C}^*$ image de $\mathrm{Per}_f(\mathcal{F}_\omega)$ par le morphisme τ

$$\tau : \mathrm{Per}_f(\mathcal{F}_\omega) \to \mathbf{C}^*$$

qui à ϕ associe $\phi'(0)$. Le sous groupe $\mathrm{Per}'_f(\mathcal{F}_\omega)$ ne dépend pas du choix de f minimale ; dans la suite nous omettons l'indexage par f.

Un élément f de $\mathcal{O}_n$ est dit quasi homogène au sens de Saito ou simplement quasi homogène s'il existe un germe de champ de vecteurs holomorphe X de $\chi(\mathbf{C}^n, 0)$ tel que $X.f = f$ [16]. L'intérêt d'une telle définition réside notamment dans le résultat suivant : si f est à singularité isolée et quasi homogène au sens précédent, il existe un germe Ψ de $\mathrm{Diff}(\mathbf{C}^n, 0)$ tel que $f \circ \Psi$

soit un polynôme quasi homogène. Compte tenu du théorème d'Artin [2] (ou plus simplement d'un résultat standard de platitude), il suffit pour montrer qu'un germe f est quasi homogène, de prouver l'existence d'un champ formel

$$\widehat{X} = \sum_{i=1}^{n} \widehat{a_i}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

de $\widehat{\chi}(\mathbf{C}^n, 0)$ tel que $\widehat{X}.f = f$. Précisons encore que le caractère quasi homogène d'une intégrale première minimale ne dépend pas du choix de cette dernière, c'est une propriété uniquement liée à la géométrie du feuilletage.

Lorsque f n'est pas quasi homogène au sens de Saito, il existe d'après [5] un germe

$$Y = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

appartenant à $\chi(\mathbf{C}^n, 0)$ tel que $Y.f = f^n$.

3.1. Étude du sous groupe $\mathrm{Per}_f(\mathcal{F}_\omega)$

Nous commençons par la situation quasi homogène. Il s'agit d'établir le résultat suivant :

THÉORÈME 3.1. – *Soit $\mathcal{F}_\omega$ un germe de feuilletage holomorphe à l'origine de $\mathbf{C}^n$ possédant une intégrale première holomorphe minimale f (non submersive). Il y a équivalence entre*

(i) *le sous groupe $\mathrm{Per}'(\mathcal{F}_\omega)$ contient un élément λ de $\mathbf{C}$ non racine de l'unité,*

(ii) *le morphisme σ_f est surjectif,*

(iii) *l'intégrale première f est quasi homogène au sens de Saito.*

L'implication de (ii) vers (i) est triviale. La preuve de la proposition résulte des deux lemmes qui suivent.

LEMME 3.2. – *Sous les hypothèses du théorème, s'il existe λ appartenant à $\mathrm{Per}'(\mathcal{F}_\omega)$ non racine de l'unité, l'intégrale première f est quasi homogène au sens de Saito.*

Preuve. – Soit ϕ un élément de $\mathrm{Per}_f(\mathcal{F}_\omega)$ tel que $\tau(\phi) = \lambda$. Il existe un difféomorphisme formel $\widehat{\psi}$ de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}, 0)$ linéarisant ϕ, c'est à dire tel que

$$\widehat{\psi} \circ \phi \circ \widehat{\psi}^{-1}(z) = \lambda z.$$

L'élément $\widehat{f}$ de $\widehat{\mathcal{O}}_n$ défini par $\widehat{f} = \widehat{\psi} \circ f$ vérifie $\widehat{f} \circ \Phi = \lambda \widehat{f}$ où Φ est l'unique élément du quotient $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)/\mathrm{Fix}(\mathcal{F}_\omega)$ tel que $\sigma_f(\Phi) = \phi$. Au difféomorphisme Φ est attachée une décomposition de Jordan formelle

$$\Phi = \widehat{\Phi}_s \circ \widehat{\Phi}_u$$

où $\widehat{\Phi}_s$ et $\widehat{\Phi}_u$ désignent deux germes de difféomorphismes formels qui commutent – parties semi simple et unipotente respectivement. Puisque $\widehat{f}$ apparait comme vecteur propre de l'opérateur

$$\Phi^* : \widehat{\mathcal{O}}_n \to \widehat{\mathcal{O}}_n$$

qui à un élément g fait correspondre le composé $g \circ \Phi$, on a necessairement $\widehat{f} \circ \widehat{\Phi}_s = \lambda \widehat{f}$ et $\widehat{f} \circ \widehat{\Phi}_u = \widehat{f}$. Notons au passage que $\widehat{\Phi}_s$ n'est pas trivial puisque λ est différent de 1. Il existe un système de coordonnées formelles dans lequel $\widehat{\Phi}_s$ est diagonal, c'est à dire un difféomorphisme formel $\widehat{\chi}$ de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}^n, 0)$ tel que

$$\widehat{\chi}^{-1} \circ \widehat{\Phi}_s \circ \widehat{\chi}(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n) = L(x_1, \ldots, x_n).$$

Notons encore $\widehat{F} = \widehat{f} \circ \widehat{\chi}$; on a : $\widehat{F} \circ L = \lambda \widehat{F}$. Soit G le sous groupe de $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C}) \times \mathrm{GL}(1, \mathbf{C})$ défini par

$$\mathrm{G} = \left\{ \left(\left(\widehat{\Phi}_s \right)^n, \lambda^n \right),\ n \in \mathbf{Z} \right\}.$$

La clôture de Zariski $\overline{\mathrm{G}}$ de G dans $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C}) \times \mathrm{GL}(1, \mathbf{C})$ est de cardinalité infinie et tout élément de $\overline{\mathrm{G}}$ satisfait encore la dernière équation. On en déduit qu'il existe un sous groupe $\mathrm{G}_t = \{(\Psi_t, \mu_t)\}$ à un paramètre complexe de $\overline{\mathrm{G}}$ tel que

$$\widehat{f} \circ \Psi_t = \mu_t \widehat{F}.$$

Le champ de vecteurs X vérifiant

$$\frac{d}{dt} \Psi_t = X \circ \Psi_t$$

satisfait $X.\widehat{F} = \alpha \widehat{F}$, où α est un nombre complexe non nul. Ainsi $\widehat{F}$ et par suite f sont quasi homogènes au sens de Saito. □

LEMME 3.3. – *Sous les hypothèses du théorème, si f est quasi homogène au sens de Saito, le morphisme σ_f est surjectif.*

Preuve. – Soit X le champ de vecteurs de $\chi(\mathbf{C}^n, 0)$ tel que $X.f = f$. Notons $\exp[t]X$ le flot de X calculé au temps t. On constate que

$$f \circ \exp[t]X(x, y) = e^t f(x, y),$$

autrement dit : le difféomorphisme $\exp[t]X$ appartient $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)/\mathrm{Fix}(\mathcal{F}_\omega)$ pour tout t non nul. Soit maintenant ϕ appartenant à $\mathrm{Diff}(\mathbf{C}, 0)$; écrivons

$$\phi(z) = z e^v(z)$$

où v est dans $\mathcal{O}_1$. Le difféomorphisme

$$\Phi = \exp\big[v(f)\big] X$$

satisfait

$$f \circ \Phi = f e^{v(f)} = \phi \circ f. \qquad \square$$

Nous nous intéressons maintenant à la situation non quasi homogène en nous restreignant à la dimension deux. Dans le paragraphe suivant (3.2), nous expliquerons comment étendre aux dimensions supérieures les résultats obtenus ci-après.

THÉORÈME 3.4. – *Soit $\mathcal{F}_\omega$ un germe de feuilletage holomorphe à l'origine de $\mathbf{C}^2$ possédant une intégrale première holomorphe minimale f (non submersive). Si f n'est pas quasi homogène au sens de Saito alors*

(i) $\mathrm{Per}_f(\mathcal{F}_\omega)$ *contient* $\mathrm{Diff}_{\geqslant 1}(\mathbf{C}, 0)$ *comme sous groupe distingué.*

(ii) *Le morphisme τ identifie le quotient* $\mathrm{Per}(\mathcal{F}_\omega)/\mathrm{Diff}_{\geqslant 1}(\mathbf{C}, 0)$ *à un sous groupe fini du groupe multiplicatif* $\mathbf{C}^*$.

Preuve. – Il existe d'après [5] un germe X de $\chi(\mathbf{C}^2,0)$ tel que $X.f=f^2$. Notons une nouvelle fois $\exp[t]X$ le flot de X calculé au temps t. On a

$$\frac{d}{dt}\big(f\circ\exp[t]X\big)=\big(f\circ\exp[t]X\big)^2,$$

ce qui conduit à

$$f\circ\exp[t]X=\frac{f}{1-tf}.$$

Soit maintenant ϕ appartenant à $\mathrm{Diff}_{\geqslant 1}(\mathbf{C},0)$, il existe un élément v de $\mathcal{O}_1$ tel que

$$\phi(z)=\frac{z}{1-zv(z)}$$

et par suite

$$f\circ\exp\big[v(f)\big]X=\frac{f}{1-fv(f)}=\phi\circ f.$$

Si Φ appartient à $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)$ et ϕ est l'élément de $\mathrm{Diff}(\mathbf{C},0)$ tel que $\sigma_f(\Phi)=\phi$, en écrivant $\phi=\lambda\phi_1$ où $\lambda=\phi'(0)$, on obtient

$$f\circ\Psi=\lambda f$$

où $\Psi=\Phi\circ\Phi_1^{-1}$ et $\sigma_f(\Phi_1)=\phi_1$. Notons J_n l'espace des jets d'ordre n de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}^2,0)$. Le groupe G_n formé des couples (Ψ_n,μ) de $\mathrm{J}_n\times\mathbf{C}$ tels que

$$\Phi_n\circ f=\mu f,$$

modulo des termes d'ordre supérieur ou égal à $n+1$, est algébrique dans $\mathrm{J}_n\times\mathbf{C}^*$. En vertu du théorème classique de Chevalley [12], l'image Σ_n de G_n par la projection canonique

$$\pi_n:\mathrm{J}_n\times\mathbf{C}\to\mathbf{C}$$

est un ensemble constructible : il s'agit donc soit de $\mathbf{C}$ privé d'un nombre fini de points, soit d'un ensemble fini de points. Notons par ailleurs que si n' est supérieur à n alors $\Sigma_{n'}$ est contenu dans Σ_n. De deux choses l'une :

- s'il existe n_0 tel que Σ_{n_0} est fini alors le groupe $\mathrm{Per}'(\mathcal{F}_\omega)$ est fini ;
- si la projection Σ_n est infinie pour tout n, il existe un nombre complexe μ de module différent de 1 et un élément $\widehat{\Psi}$ de $\mathrm{Diff}(\mathbf{C}^2,0)$ tels que

$$f\circ\widehat{\Psi}=\mu f.$$

En procédant comme auparavant, on montre que f est quasi homogène, ce qui conduit à une contradiction. □

3.2. Compléments

Compatibilité de σ_f avec la décomposition de Jordan. Notons $\widehat{\mathrm{Iso}}(\mathcal{F}_\omega)$ et $\widehat{\mathrm{Fix}}(\mathcal{F}_\omega)$ les sous groupes de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}^n,0)$ définis par :

$$\widehat{\mathrm{Iso}}(\mathcal{F}_\omega) = \bigl\{\widehat{\Phi} \in \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}^n, 0),\ \exists \widehat{\phi} \in \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}, 0),\ f \circ \widehat{\Phi} = \widehat{\phi} \circ f\bigr\},$$
$$\widehat{\mathrm{Fix}}(\mathcal{F}_\omega) = \bigl\{\widehat{\Phi} \in \widehat{\mathrm{Diff}}\bigl(\mathbf{C}^n, 0\bigr),\ f \circ \widehat{\Phi} = f\bigr\}.$$

L'énoncé qui suit est un analogue pour $\widehat{\mathrm{Iso}}(\mathcal{F}_\omega)$ du théorème des répliques.

PROPOSITION 3.5. – *Soit Φ un élément de $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)$ décomposé sous forme de Jordan formelle*

$$\Phi = \widehat{\Phi}_s \circ \widehat{\Phi}_u;$$

les difféomorphismes formels $\widehat{\Phi}_s$ et $\widehat{\Phi}_u$ appartiennent à $\widehat{\mathrm{Iso}}(\mathcal{F}_\omega)$.

Preuve. – Notons une nouvelle fois J_n l'espace des jets d'ordre n de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}^n, 0)$ et $\mathrm{Iso}_n(\mathcal{F}_\omega)$ le sous ensemble de J_n formé des éléments Ψ_n tels que

$$\Psi_n^* \omega \wedge \omega = 0 \bmod(n+1)$$

où $\mathrm{mod}(n+1)$ signifie que l'on omet les termes d'ordre supérieur ou égal à $n+1$. $\mathrm{Iso}_n(\mathcal{F}_\omega)$ est naturellement muni d'une structure de groupe algébrique. Le jet d'ordre n de Φ, noté Φ_n, appartient à $\mathrm{Iso}_n(\mathcal{F}_\omega)$ et possède une décomposition de Jordan

$$\Phi_n = (\Phi_n)_s \circ (\Phi_n)_u.$$

D'après le théorème des répliques classique [8], $(\Phi_n)_s$ et par suite $(\Phi_n)_u$ sont des éléments de $\mathrm{Iso}_n(\mathcal{F}_\omega)$. Par ailleurs, l'unicité d'une telle décomposition entraine qu'elle est compatible avec la filtration par les jets. Puisque $(\Phi_n)_s$ tend vers $\widehat{\Phi}_s$ pour la topologie de Krull, on en déduit que ce dernier et par suite $\widehat{\Phi}_u$ appartiennent à $\widehat{\mathrm{Iso}}(\mathcal{F}_\omega)$. □

Notons $\widehat{\sigma}_f$ le morphisme

$$\widehat{\sigma}_f : \frac{\widehat{\mathrm{Iso}}(\mathcal{F}_\omega)}{\widehat{\mathrm{Fix}}(\mathcal{F}_\omega)} \to \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}, 0)$$

qui à $\widehat{\Phi}$ fait correspondre $\widehat{\phi}$.

PROPOSITION 3.6. – *Soit Φ appartenant à $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)$, $\phi = \sigma_f(\Phi)$ et*

$$\Phi = \Phi_s \circ \Phi_u, \qquad \phi = \phi_s \circ \phi_u$$

les décompositions de Jordan formelles respectives. On a

$$\widehat{\sigma}_f(\widehat{\Phi}_s) = \widehat{\phi}_s, \qquad \widehat{\sigma}_f(\widehat{\Phi}_u) = \widehat{\phi}_u.$$

Preuve. – Il suffit de vérifier que les difféomorphismes $\widetilde{\phi}_s = \widehat{\sigma}_f(\widehat{\Phi}_s)$ et $\widetilde{\phi}_u = \widehat{\sigma}_f(\widehat{\Phi}_u)$ sont respectivement semi simple et unipotent. Vérifions tout d'abord que $\widetilde{\phi}_u$ est unipotent. Par définition, il existe un champ de vecteurs nilpotent Z de $\chi(\mathbf{C}^n, 0)$ tel que $\widehat{\Phi}_u = \exp[1]Z$. Compte tenu de la Proposition 2.3, on constate que le difféomorphisme $\exp[t]Z$ appartient à $\widehat{\mathrm{Iso}}(\mathcal{F}_\omega)$ pour tout nombre complexe t. Notons $\widehat{\phi}_t$ le difféomorphisme formel défini par $\widehat{\phi}_t = \widehat{\sigma}_f(\exp[t]Z)$. Il suffit de montrer que $\widehat{\phi}_1$ est tangent à l'identité. Pour cela, on écrit

$$\widehat{\phi}_t = a_1(t)z + \sum_{n \geqslant 2} a_n(t) z^n$$

où les coefficients a_i sont des polynômes en la variable t. Puisque $\widehat{\phi}_t$ est un difféomorphisme pour tout t, le polynôme a_1 est constant. Par ailleurs $a_1(0) = 1$.

Montrons maintenant que le difféomorphisme $\widetilde{\phi}_s$ est semi simple. Distinguons trois cas :

1. Le nombre complexe $\widetilde{\phi}_s'(0)$ n'est pas racine de l'unité. Le difféomorphisme $\widetilde{\phi}_s$ est semi simple en vertu du théorème de Poincaré.
2. Le nombre complexe $\widetilde{\phi}_s'(0)$ est racine de l'unité et $\widehat{\Phi}_s$ est un élément périodique de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}^n, 0)$. Le difféomorphisme $\widetilde{\phi}_s$ est de nouveau semi simple puisque périodique.
3. Le nombre complexe $\widetilde{\phi}_s'(0)$ est racine de l'unité et $\widehat{\Phi}_s$ n'est pas périodique. Dans ce cas $\widetilde{\phi}_s$ est encore périodique. Pour le montrer, raisonnons par l'absurde : il existe un entier q et un nombre complexe a_k non nul tels que

$$\widetilde{\phi}_s^q(z) = z + a_k z^k + \cdots .$$

La décomposition de f – intégrale première holomorphe minimale de ω – en composantes homogènes s'écrit

$$f = f_\mu + f_{\mu+1} + \cdots .$$

On constate que

$$(f_\mu + f_{\mu+1} + \cdots + f_{k\mu}) \circ \widehat{\Phi}_s^q = f_\mu + f_{\mu+1} + \cdots + f_{k\mu} + a_k f_\mu^k.$$

Ainsi

$$f_i \circ \widehat{\Phi}_s^q = f_i \quad \text{si } i = \mu, \ldots, k\mu - 1,$$

et

$$f_{k\mu} \circ \widehat{\Phi}_s^q = f_{k\mu} + a_k f_\mu^k.$$

Notons E l'espace vectoriel engendré sur $\mathbf{C}$ par $f_{k\mu}$ et f_μ^k.

– Si la dimension de E est deux, la matrice de $\widehat{\Phi}_s^q$ dans la base $(f_\mu^k, f_{k\mu})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_k & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\widehat{\Phi}_s^q$ est semi simple, sa restriction à tout sous espace est semi simple, ce qui implique que a_k doit être nul.

– Si la dimension de E est un, on a une relation $f_{k\mu} = \varepsilon f_\mu^k$, le nombre complexe ε étant non nul si a_k l'est. Ceci conduit à deux égalités

$$\varepsilon f_\mu^k \circ \widehat{\Phi}_s^q = \varepsilon f_\mu^k$$

et

$$\varepsilon f_\mu^k \circ \widehat{\Phi}_s^q = f_{k\mu} + a_k f_\mu^k = (\varepsilon + a_k) f_\mu^k,$$

qui montrent une nouvelle fois que a_k doit être nul. $\square$

Éxistence d'isotropies périodiques. Comme nouvelle application du théorème d'Artin, nous obtenons le :

THÉORÈME 3.7. – *Soit $\mathcal{F}_\omega$ un germe de feuilletage à l'origine de $\mathbf{C}^n$ possédant une intégrale première holomorphe minimale f non submersive. À tout nombre complexe λ de $\mathrm{Per}'(\mathcal{F}_\omega)$ différent de 1 et racine de l'unité on peut associer un élément périodique de $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)$ dans les deux cas suivants* :
– *la dimension n est deux,*
– *l'intégrale première f est quasi homogène au sens de Saito.*

Preuve. – Soit Φ tel que $\sigma_f(\Phi)=\phi$ avec $\phi'(0)=\lambda$. Compte tenu des Théorèmes 3.1 et 3.4, il existe un élément Φ_1 de $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)$ tel que

$$f\circ\Phi\circ\Phi_1^{-1}=\lambda f.$$

Notons Ψ le difféomorphisme $\Phi\circ\Phi_1^{-1}$. La partie semi simple de sa décomposition de Jordan formelle $\widehat{\Psi}_s$ vérifie encore l'équation précédente et il existe un difféomorphisme $\widehat{\chi}$ de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}^n,0)$ tel que

$$\widehat{\chi}^{-1}\circ\widehat{\Psi}_s\circ\widehat{\chi}=L$$

où L est diagonal. Par suite

$$f\circ\widehat{\chi}\circ L=\lambda f\circ\widehat{\chi}.$$

LEMME 3.8. – *Il existe un difféomorphisme diagonal périodique K,*

$$K(x_1,\dots,x_n)=(\lambda_1x_1,\dots,\lambda_nx_n)$$

et un entier $n(K)$ tels que

$$f\circ\widehat{\chi}\circ K=\lambda^{n(K)}f\circ\widehat{\chi}.$$

Preuve. – Notons G le sous groupe de $\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})\times\mathrm{GL}(1,\mathbf{C})$ formé des couples $(L,\lambda(L))$ tels que : L est un difféomorphisme diagonal, $\lambda(L)$ appartient au sous groupe de $\mathbf{C}^*$ engendré par λ et $f\circ\widehat{\chi}=\lambda(L)f\circ\widehat{\chi}$. Soit G^Z la cloture de Zariski de G. Puisque G contient des éléments $(L,\lambda(L))$ où L n'est pas périodique, G^Z est de cardinalité infinie. Par ailleurs, puisque λ est racine de l'unité et différent de 1, G^Z n'est pas connexe. Notons G_0 la composante neutre de G^Z. Il existe un couple (L_0,λ_0) de G^Z qui n'appartient pas à G_0 et un entier n_0 tel que l'élément $(L_0^{n_0},1)$ soit dans G_0. Puisque l'application exponentielle est surjective, il existe une matrice A telle que $L_0^{n_0}=\exp A$ et le difféomorphisme K cherché est donné par $K=L_0\exp(-A/n_0)$ (qui n'est pas trivial puisque le couple (L_0,λ_0) n'est pas dans G_0).

Pour obtenir le résultat, il suffit de montrer que l'on peut trouver un difféomorphisme χ de $\mathrm{Diff}(\mathbf{C}^n,0)$ satisfaisant encore l'égalité

$$f\circ\chi\circ K=\lambda^{n(K)}f\circ\chi.$$

Écrivons le difféomorphisme

$$\widehat{\chi}(x_1,\dots,x_n)=\left(\sum_{i_1,\dots,i_n}\widehat{\chi}^1_{i_1,\dots,i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n},\dots,\sum_{i_1,\dots,i_n}\widehat{\chi}^n_{i_1,\dots,i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\right)$$

de la façon suivante

$$\widehat{\chi}(x_1,\dots,x_n)=\sum_{k=1,\dots,N}\left(\sum_{\lambda_1^{i_1}\cdots\lambda_n^{i_n}=\mu_k}\widehat{\chi}^1_{i_1,\dots,i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n},\dots,\sum_{\lambda_1^{i_1}\cdots\lambda_n^{i_n}=\mu_k}\widehat{\chi}^n_{i_1,\dots,i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\right)$$
$$=\sum_{k=1,\dots,N}\widehat{\Theta}_k(x_1,\dots,x_n)$$

où μ_k décrit toutes les valeurs, en nombre fini, du monôme $\lambda_1^{i_1}\cdots\lambda_n^{i_n}$ lorsque varie le multiindice $(i_1,\dots,i_n)$. Les séries formelles $\widehat{\Theta}_i=\widehat{\Theta}_i(x_1,\dots,x_n)$ sont solutions de l'équation

$$f(\mu_1Z_1+\cdots+\mu_NZ_N)-\lambda^{n(K)}f(Z_1+\cdots+Z_N)=0$$

analytique en les variables $(Z_1,\dots,Z_N)$. Il existe donc en vertu du théorème d'Artin ([2] ou [17]) une solution analytique

$$\Theta=\big(\Theta_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\Theta_N(x_1,\dots,x_n)\big)$$

tangente à $\widehat{\Theta}=(\widehat{\Theta}_1,\dots,\widehat{\Theta}_N)$ à un ordre arbitraire fixé au préalable. Il suffit de considérer le difféomorphisme

$$\chi(x_1,\dots,x_n)=\sum_{k=1,\dots,N}\Theta_i(x_1,\dots,x_n).\qquad\square$$

Invariant de Briançon Skoda et difféomorphismes tangents à l'identité. Le but de ce paragraphe est de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 3.9. – *Soit $\mathcal{F}_\omega$ un germe de feuilletage holomorphe à l'origine de $\mathbf{C}^n$ possédant une intégrale première minimale f non submersive et non quasi-homogène. Soit $1<k\leqslant n$ un entier tel qu'il existe un champ X de $\chi(\mathbf{C}^n,0)$ vérifiant $X.f=f^k$. Alors* :
(a) $\mathrm{Diff}_{\geqslant k-1}(\mathbf{C},0)$ *est inclus dans* $\mathrm{Per}_f(\mathcal{F}_\omega)$.
(b) *Il y a équivalence entre* :
  (i) *il existe un élément ϕ de* $\mathrm{Diff}_{k-2}(\mathbf{C},0)$ *dans* $\mathrm{Per}_f(\mathcal{F}_\omega)$;
  (ii) *il existe un champ Y de $\chi(\mathbf{C}^n,0)$ tel que $Y.f=f^{k-1}$* ;
  (iii) $\mathrm{Diff}_{\geqslant k-2}(\mathbf{C},0)$ *est inclus dans* $\mathrm{Per}_f(\mathcal{F}_\omega)$.

Preuve. – (a) Soit ϕ un élément de $\mathrm{Diff}_{\geqslant k-1}(\mathbf{C},0)$ écrit sous la forme

$$\phi(z)=z+z^k\varphi(z),$$

où φ est un germe de fonction holomorphe. On vérifie aisément qu'il existe un élément ψ de $\mathcal{O}_1$ pour lequel

$$\phi=\frac{z}{(1-(k-1)z^{k-1}\psi(z))^{1/k-1}}.$$

Compte tenu de ce que

$$\frac{d}{dt}\big(f\circ\exp[t]X\big)=\big(f\circ\exp[t]X\big)^k$$

on obtient

$$f\circ\exp\big[\psi(f)\big]X=\phi\circ f.$$

(b) L'implication de (i) vers (ii) se montre de la même façon. Il suffit de prouver que (i) entraine (ii). Ecrivons ϕ sous la forme

$$\phi(z) = z + \varepsilon z^{k-1} v(z)$$

où $v(0) = 1$. Il existe un élément ψ de $\mathrm{Diff}_{\geqslant k-1}(\mathbf{C}, 0)$ tel que

$$\phi(z) = \frac{z}{(1-(k-2)\varepsilon z^{k-2})^{1/k-2}} \circ \psi(z)$$

et par suite un germe Ψ de $\mathrm{Diff}(\mathbf{C}^n, 0)$ qui satisfait

$$f \circ \left(\Phi \circ \Psi^{-1}\right) = \frac{z}{(1-(k-2)\varepsilon z^{k-2})^{1/k-2}} \circ f$$

avec $\sigma_f(\Phi) = \phi$. D'après la Proposition 3.6 la partie unipotente de $\Phi \circ \Psi^{-1}$ vérifie encore cette égalité. On en déduit qu'il existe un champ nilpotent $\widehat{Y}$ de $\widehat{\chi}(\mathbf{C}^n, 0)$ pour lequel

$$f \circ \exp[t]\widehat{Y} = \frac{z}{(1-(k-2)\varepsilon t z^{k-2})^{1/k-2}} \circ f,$$

ce qui implique

$$\widehat{Y}.f = \varepsilon f^{k-1}.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème d'Artin. □

À propos des fonctions multiformes. Soit $\mathcal{F}_\omega$ un germe de feuilletage holomorphe à l'origine de $\mathbf{C}^n$ possédant une intégrale première multiforme $F = f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}$ où les f_i appartiennent à $\mathcal{O}_n$ et les λ_i sont des nombres complexes non tous rationnels. Si Φ est un élément de $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)$, il existe une constante complexe $c(\Phi)$ non nulle telle que

$$F \circ \Phi = c(\Phi) F.$$

Là encore, on hérite d'un morphisme σ_F de $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)$ dans $\mathbf{C}^*$ qui à Φ fait correspondre $c(\Phi)$.

PROPOSITION 3.10. – *Si l'image de σ_f contient un sous groupe c_t à un paramètre, l'intégrale première F est quasi homogène au sens de* [6].

Preuve. – Notons Φ_t l'élément de $\mathrm{Iso}(\mathcal{F}_\omega)$ tel que $\sigma_F(\Phi_t) = c_t$. En dérivant l'égalité

$$F \circ \Phi_t = c_t F$$

on vérifie que le générateur infinitésimal Y du sous groupe Φ_t satisfait

$$\left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i \, df_i}{f_i}\right)(Y) = \alpha$$

où α est la dérivée de c_t par rapport à t évaluée en 0. □

REFERENCES

[1] P. AHERN et J.-P. ROSAY, Entire functions, in the classification of differentiable germs tangent to the identity, in one and two variables, *Trans. Amer. Math. Soc.* 347 (2) (1995) 543–572.

[2] M. ARTIN, On the solutions of analytic equations, *Inventiones Math*. 5 (1968) 277–291.

[3] M. BERTHIER et R. MOUSSU, Réversibilité et classification des centres nilpotents, *Ann. Institut Fourier* 44 (1994) 465–494.

[4] M. BERTHIER, R. MEZIANI et P. SAD, On the classification of nilpotent singularities, Prépublication de l'IMR de Rennes, 96-07, à paraitre au *Bulletin des Sciences Mathématiques*.

[5] J. BRIANÇON et H. SKODA, Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de $\mathbf{C}^n$, *C. R. Acad. Sc. Paris* 278 (1974).

[6] D. CERVEAU et J.-F. MATTEI, Formes intégrables holomorphes singulières, *Astérisque* 97.

[7] D. CERVEAU et A. LINS NETO, Codimension one foliations in $\mathbf{CP}^n$, $n \geqslant 3$, with Kupka components, *Astérisque* 222.

[8] C. CHEVALLEY, *Théorie des Groupes de Lie*, Hermann.

[9] J. ECALLE, *Les Fonctions Résurgentes. Tome 3, L'Équation du Pont et la Classification Analytique des Objets Locaux*, Publ. Math. d'Orsay, 1985.

[10] K. KODAIRA, *Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 283.

[11] I. KUPKA, The singularities of integrable structurally stable Pfaffian forms, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 52 (1964) 1431–1432.

[12] S. LOJASIEWICZ, *Introduction to Complex Analytic Geometry*, Birkhäuser.

[13] J. MARTINET, Normalisation des champs de vecteurs holomorphes (d'après Brujno), *Séminaire Bourbaki*, Nov. 1980, exp. 564.

[14] J. MARTINET et J.-P. RAMIS, Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 16 (1983) 571–621.

[15] J.-F. MATTEI et R. MOUSSU, Holonomie et intégrales premières, *Ann. Sci. École Norm. Sup*. 13 (1980) 469–523.

[16] K. SAITO, Quasihomogene isolierte Singularitaten von Hyperflachen, *Inventiones Math*. 14 (1971) 123–142.

[17] J.-C. TOUGERON, *Idéaux de Fonctions Différentiables*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 71.