C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I ••• (••••) •••–•••

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Équations différentielles/Géométrie différentielle

Surfaces de Bonnet et équations de Painlevé

Bonnet surfaces and Painlevé equations

Robert Conte [a,b]

[a] *Centre de mathématiques et de leurs applications, École normale supérieure de Cachan, CNRS, Université Paris-Saclay, 61, avenue du Président-Wilson, 94235 Cachan cedex, France*

[b] *Department of Mathematics, The University of Hong Kong, Pokfulam Road, Hong Kong*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 16 avril 2016
Accepté le 18 octobre 2016
Disponible sur Internet le xxxx

Présenté par Philippe G. Ciarlet

RÉSUMÉ

Nous montrons que les équations du repère mobile des surfaces de Bonnet conduisent à une paire de Lax matricielle isomonodromique d'ordre deux pour la sixième équation de Painlevé.

ABSTRACT

We show that the moving frame equations of Bonnet surfaces can be extrapolated to a second order, isomonodromic matrix Lax pair of the sixth Painlevé equation.

Abridged English version

In 1867, the geometer Pierre-Ossian Bonnet stated and solved the following problem: to determine all surfaces in $\mathbb{R}^3$ that can be mapped onto a given surface while conserving the principal radii of curvature. Among the numerous solutions, one important class, known as *Bonnet surfaces*, depends on six arbitrary constants and is characterized by the differential equation (1) [2, §11 p. 84, Eq. (52)] for the mean curvature H. Since this equation is solved [1] by the Hamiltonian of a particular sixth equation $\mathrm{P_{VI}}$ of Painlevé, the moving frame equations define a linear representation of this Hamiltonian. In this Note, we remove the restriction (4), express the moving frame equations with $\mathrm{P_{VI}}$ instead of its Hamiltonian, and finally normalize the result according to the prescription of Schlesinger. Our final result is an isomonodromic matrix Lax pair of $\mathrm{P_{VI}}$, either very symmetric but restricted to $\theta_\infty \neq 0$, see (16), or polynomial in the four θ_j's but less nice-looking, see (14).

1. Rappels sur les surfaces de Bonnet

Parmi les surfaces de $\mathbb{R}^3$ applicables sur une surface donnée avec conservation des courbures principales, il existe une classe remarquable, dépendant de six constantes arbitraires et connue sous le nom de *surfaces de Bonnet*, qui est caractérisée

Adresse e-mail : Robert.Conte@cea.fr.

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2016.10.019

par l'équation différentielle [2, §11 p. 84, Eq. (52)]

$$\frac{1}{2}(\log H')'' - \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha \xi}\right)^2 \frac{H' + H^2}{H'} + H' = 0, \tag{1}$$

où ξ désigne une certaine fonction des coordonnées conformes z, $\bar{z}$, $H(\xi)$ la courbure moyenne et α une constante éventuellement nulle.

Ce n'est que cent trente ans plus tard [1] que, pour α non nul, sa solution H sera reconnue égale à l'hamiltonien H_{VI} [13, Eq. (3)], [3, t page 341], [11],

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_{\mathrm{VI}} = & \frac{x(x-1)u'^2}{4u(u-1)(u-x)} \\ & + \frac{1}{4x(x-1)} \left[\theta_\infty^2 \left(\frac{1}{2} - u\right) + \theta_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{u}\right) \right. \\ & \left. + \theta_1^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x-1}{u-1}\right) + (\theta_x - 1)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x(x-1)}{u-x} - x\right)\right], \end{aligned} \tag{2}$$

de la sixième fonction de Painlevé P_{VI}, définie par

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = & \frac{1}{2}\left[\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-x}\right] u'^2 - \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{u-x}\right] u' \\ & + \frac{u(u-1)(u-x)}{2x^2(x-1)^2} \left[\theta_\infty^2 - \theta_0^2 \frac{x}{u^2} + \theta_1^2 \frac{x-1}{(u-1)^2} + (1-\theta_x^2)\frac{x(x-1)}{(u-x)^2}\right], \end{aligned} \tag{3}$$

avec toutefois trois contraintes entre les quatre paramètres θ_j,

$$\theta_\infty = 0,\ \theta_0^2 = \theta_1^2,\ \theta_x^2 = 1. \tag{4}$$

La considération des variétés riemaniennes $\mathbb{R}^3(c)$, que nous adoptons désormais en lieu et place de $\mathbb{R}^3$, permet d'introduire un paramètre supplémentaire c [15] dans les équations du repère mobile et donc de relâcher une contrainte, puisque $\theta_0^2 - \theta_1^2 = 4c$,

$$\mathrm{d}\sigma = (\mathbb{U}\mathrm{d}z + \mathbb{V}\mathrm{d}\bar{z})\sigma, \tag{5}$$

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} (1/4)U_z & -Q\,\mathrm{e}^{-U/2} \\ (1/2)(H+c)\mathrm{e}^{U/2} & -(1/4)U_z \end{pmatrix},\ \mathbb{V} = \begin{pmatrix} -(1/4)U_{\bar{z}} & -(1/2)(H-c)\mathrm{e}^{U/2} \\ \overline{Q}\,\mathrm{e}^{-U/2} & (1/4)U_{\bar{z}} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

où e^U, H, Q, $\overline{Q}$ sont les coefficients des deux formes quadratiques fondamentales

$$\mathrm{I} = <\mathrm{d}\mathbf{F}, \mathrm{d}\mathbf{F}> = \mathrm{e}^U \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z}, \tag{7}$$

$$\mathrm{II} = -<\mathrm{d}\mathbf{F}, \mathrm{d}\mathbf{N}> = Q\,\mathrm{d}z^2 + \mathrm{e}^U H \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z} + \overline{Q}\,\mathrm{d}\bar{z}^2. \tag{8}$$

2. Représentation linéaire de H_{VI} et de P_{VI}

Après une transformation conforme, les valeurs de Bonnet [2, §11]

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{4c_z(z+\bar{z})}}, \\ \mathrm{e}^U = -\dfrac{32 c_z c_q}{c_h} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}H},\ H = \dfrac{2c_h c_z}{c_q} Y,\ Y = x(x-1)\mathrm{H}_{\mathrm{VI}}, \\ Q = \dfrac{4c_q}{c_h} \dfrac{2c_z}{\sinh(2c_z(z+\bar{z}))} \dfrac{\sinh(2c_z\bar{z})}{\sinh(2c_z z)},\ \overline{Q} = \dfrac{4c_q}{c_h} \dfrac{2c_z}{\sinh(2c_z(z+\bar{z}))} \dfrac{\sinh(2c_z z)}{\sinh(2c_z\bar{z})}, \end{cases} \tag{9}$$

où les constantes complexes non nulles c_q, c_z, c_h permettent de couvrir les conventions des divers auteurs [5], définissant ainsi une représentation linéaire de H_{VI} par des matrices d'ordre deux de trace nulle,

$$\begin{aligned} \mathbb{U}\mathrm{d}z + \mathbb{V}\mathrm{d}\bar{z} = & x(x-1)\frac{Y''}{Y'}(c_z \mathrm{d}\bar{z} - c_z \mathrm{d}z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ & + \sqrt{Y'} \begin{pmatrix} 0 & -S_1 \mathrm{d}z - \dfrac{Y - (\theta_0^2 + \theta_1^2)/8}{Y'} 4c_z \mathrm{d}\bar{z} \\ S_2 \mathrm{d}\bar{z} + \dfrac{Y + (\theta_0^2 + \theta_1^2)/8}{Y'} 4c_z \mathrm{d}z & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$S_1 = \frac{2c_z}{\sinh(2c_z(z+\bar{z}))}\frac{\sinh(2c_z\bar{z})}{\sinh(2c_z z)},\ S_2 = \frac{2c_z}{\sinh(2c_z(z+\bar{z}))}\frac{\sinh(2c_z z)}{\sinh(2c_z\bar{z})}. \tag{10}$$

Il existe alors [1] un changement de variables $(z,\bar{z}) \to (x,t)$

$$x = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{4c_z(z+\bar{z})}},\ t = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{4c_z z}},\ \mathbb{U}\mathrm{d}z + \mathbb{V}\mathrm{d}\bar{z} = L\mathrm{d}x + M\mathrm{d}t, \tag{11}$$

rendant les nouvelles matrices L, M du repère mobile rationnelles en x et t,

$$L = -\frac{M_x}{t-x} + L_\infty,\ M = \frac{M_0}{t} + \frac{M_1}{t-1} + \frac{M_x}{t-x},\ M_\infty = -M_0 - M_1 - M_x. \tag{12}$$

Les quatre singularités $t = \infty, 0, 1, x$ sont du type de Fuchs, L_∞, et les résidus M_j ne dépendent que de x, Y, Y', Y'', θ_j. C'est précisément [14] une paire de Lax matricielle isomonodromique de H_{VI}.

La transformation birationnelle [13, Eq. (3)], [12, Table R] entre P_{VI} et son Hamiltonien permet ensuite de la convertir en une paire de Lax de P_{VI}. Après le changement de base défini par la matrice de passage

$$P_1 = \mathrm{diag}({Y'}^{1/4}, {Y'}^{-1/4}), \tag{13}$$

les matrices L et M sont rationnelles en toutes les variables et polynomiales en u', θ_0, θ_1. Il est alors facile, en exigeant seulement la conservation du degré des M_j et de L_∞ en u', de lever les restrictions (4) – lire les détails dans un article en cours de rédaction.

Valable pour des θ_j quelconques, cette première forme canonique de la paire de Lax,

$$\begin{cases} L = -\dfrac{u-x}{x(x-1)}M_\infty - \dfrac{M_x}{t-x},\ M = \dfrac{M_0}{t} + \dfrac{M_1}{t-1} + \dfrac{M_x}{t-x}, \\ M_\infty + M_0 + M_1 + M_x = 0, \\ M_\infty = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2a & -4 \\ a^2 - \theta_\infty^2 & -2a \end{pmatrix}, \\ M_0 = -\dfrac{1}{2(u-x)}\begin{pmatrix} e_0 & -2u(u-x) \\ \dfrac{e_0^2 - \theta_0^2(u-x)^2}{2u(u-x)} & -e_0 \end{pmatrix}, \\ M_1 = \dfrac{1}{2(u-x)}\begin{pmatrix} e_1 & -2(u-1)(u-x) \\ \dfrac{\mathrm{e}^2 - \theta_1^2(u-x)^2}{2(u-1)(u-x)} & -e_1 \end{pmatrix}, \\ M_x = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -\Theta_x & 0 \\ 2M_{x,21} & \Theta_x \end{pmatrix}, \\ M_{x,21} = -\dfrac{e^2 - (u-x)^2((\theta_\infty^2 + \Theta_x^2 - 2a\Theta_x)u(u-1) - \theta_0^2(u-1) + \theta_1^2 u)}{4u(u-1)(u-x)^2}, \\ e = x(x-1)u' + \Theta_x u(u-1),\ \Theta_x^2 = (\theta_x - 1)^2, \\ e_0 = e - (\Theta_x - a)u(u-x), \\ e_1 = e - (\Theta_x - a)(u-1)(u-x), \\ -4\det M_j = \theta_j^2,\ j = \infty, 0, 1;\ -4\det M_x = \Theta_x^2, \end{cases} \tag{14}$$

dépend d'une constante arbitraire a, qu'il est loisible de choisir égale à Θ_x ou à $\pm\theta_\infty$.

Comme l'a montré Schlesinger [14, p. 105], le résidu M_∞ est constant et, s'il est inversible, il existe un changement de base permettant d'annuler le terme L_∞ dans (12) et donc de définir la paire de Lax de manière unique. Défini par la matrice de passage $P_2 P_3$,

$$P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ a-\theta_\infty & a+\theta_\infty \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} g^{-1/2} & 0 \\ 0 & g^{1/2} \end{pmatrix},\ \frac{g'}{g} = \theta_\infty \frac{u-x}{x(x-1)}, \tag{15}$$

il conduit pour θ_∞ non nul à la deuxième forme canonique, particulièrement élégante,

$$\begin{cases} \theta_\infty \ne 0: \ L=-\dfrac{M_x}{t-x},\ M=\dfrac{M_0}{t}+\dfrac{M_1}{t-1}+\dfrac{M_x}{t-x},\ \Theta_x^2=(\theta_x-1)^2, \\ M_\infty+M_0+M_1+M_x=0, \\ M_\infty=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\theta_\infty & 0 \\ 0 & -\theta_\infty\end{pmatrix}, \\ M_{0,11}=\ \dfrac{u-1}{N}\left[(e-\Theta_x u(u-x))^2-(u-x)^2(\theta_0^2+\theta_\infty^2 u^2)\right], \\ M_{0,12}=\ \dfrac{u-1}{N}\left[(e-(\Theta_x+\theta_\infty)u(u-x))^2-(u-x)^2\theta_0^2\right]g, \\ M_{0,21}=-\dfrac{u-1}{N}\left[(e-(\Theta_x-\theta_\infty)u(u-x))^2-(u-x)^2\theta_0^2\right]g^{-1}, \\ M_{1,11}=-\dfrac{u}{N}\left[(e-\Theta_x(u-1)(u-x))^2-(u-x)^2(\theta_1^2+\theta_\infty^2(u-1)^2)\right], \\ M_{1,12}=-\dfrac{u}{N}\left[(e-(\Theta_x+\theta_\infty)(u-1)(u-x))^2-(u-x)^2\theta_1^2\right]g, \\ M_{1,21}=\ \dfrac{u}{N}\left[(e-(\Theta_x-\theta_\infty)(u-1)(u-x))^2-(u-x)^2\theta_1^2\right]g^{-1}, \\ M_{x,11}=\ \dfrac{1}{N}\left[e^2-(u-x)^2\left[(\theta_\infty^2+\Theta_x^2)u(u-1)-\theta_0^2(u-1)+\theta_1^2 u)\right]\right], \\ M_{x,12}=\ \dfrac{1}{N}\left[e^2-(u-x)^2\left[(\Theta_x+\theta_\infty)^2)u(u-1)-\theta_0^2(u-1)+\theta_1^2 u)\right]\right]g, \\ M_{x,21}=-\dfrac{1}{N}\left[e^2-(u-x)^2\left[(\Theta_x-\theta_\infty)^2)u(u-1)-\theta_0^2(u-1)+\theta_1^2 u)\right]\right]g^{-1}, \\ -4\det M_j=\theta_j^2,\ j=\infty,0,1;\ -4\det M_x=\Theta_x^2, \end{cases} \tag{16}$$

avec les notations

$$\frac{g'}{g}=\theta_\infty\frac{u-x}{x(x-1)},\ e=x(x-1)u'+\Theta_x u(u-1),\ N=4\theta_\infty u(u-1)(u-x)^2. \tag{17}$$

Ce résultat, qui clôt nos précédentes recherches [9,4], est beaucoup plus simple et symétrique que celui de Jimbo et Miwa [8, Eq. (C.47)], [10], lire une comparaison détaillée dans [9] et dans [6, p. 211]. L'avantage décisif que procure l'origine géométrique de la représentation linéaire est l'inutilité de devoir supposer une représentation des quatre résidus respectant la constance de leur déterminant.

La structure de $\mathrm{P_{VI}}$ (u'' polynôme de degré deux en u') pourrait laisser espérer une paire de Lax encore plus simple, dont les résidus seraient des polynômes de degré un en u', mais le calcul montre qu'il n'en est rien.

Les quatre éléments non diagonaux M_{12}, M_{21} de (14) et de (16) ont chacun un seul zéro $t=f(u',u,x)$ (à condition de choisir $a=\pm\theta_\infty$ dans (14)), ces quatre zéros sont chacun solution d'une équation $\mathrm{P_{VI}}$ et ils sont donc reliés entre eux par des transformations birationnelles, comme schématisé dans [9, Eq. (4.4)]. Le plus simple de ces éléments est

$$(14):\ M_{12}=\frac{t-u}{t(t-1)}. \tag{18}$$

L'élimination d'une des deux composantes de σ, que ce soit dans (14) ou dans (16), engendre donc bien l'unique singularité apparente ($t=u$ dans l'exemple ci-dessus, $t=$ une autre fonction $\mathrm{P_{VI}}$ dans les trois autres cas) que possède la paire de Lax scalaire classique [7].

Enfin, la confluence classique [13] de $\mathrm{P_{VI}}$ vers les cinq autres équations de Painlevé définit des paires de Lax tout aussi symétriques, dont certaines apparemment nouvelles.

Remerciements

C'est un plaisir de remercier l'Unité mixte internationale UMI 3457 du Centre de recherches mathématiques de l'université de Montréal pour son soutien financier.

Références

[1] A.I. Bobenko, U. Eitner, A.V. Kitaev, Surfaces with harmonic inverse mean curvature and Painlevé equations, Geom. Dedic. 68 (1997) 187–227.
[2] O. Bonnet, Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée. Deuxième partie: Détermination de toutes les surfaces applicables sur une surface donnée, J. Éc. Polytech. Math. 42 (1867) 1–151, http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433698b/f5.image.

[3] J. Chazy, Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes, Acta Math. 34 (1911) 317–385.
[4] R. Conte, On the Lax pairs of the sixth Painlevé equation, RIMS Kôkyûroku Bessatsu B2 (2007) 21–27, arXiv:nlin.SI/0701049.
[5] R. Conte, A.M. Grundland, Reductions of Gauss–Codazzi equations, Stud. Appl. Math. 137 (2016) 306–327, http://dx.doi.org/10.1111/sapm.12121.
[6] R. Conte, M. Musette, The Painlevé Handbook, Springer, Berlin, 2008; Russian translation: Метод Пенлеве и его приложения (Regular and Chaotic Dynamics, Moscow, 2011).
[7] R. Fuchs, Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 141 (1905) 555–558.
[8] M. Jimbo, T. Miwa, Monodromy preserving deformations of linear ordinary differential equations with rational coefficients. II, Physica D 2 (1981) 407–448.
[9] R. Lin, R. Conte, M. Musette, On the Lax pairs of the continuous and discrete sixth Painlevé equations, J. Nonlinear Math. Phys. 10 (Supp. 2) (2003) 107–118, http://www.sm.luth.se/~norbert/home_journal/10s2_9.pdf and .ps.
[10] G. Mahoux, Introduction to the theory of isomonodromic deformations of linear ordinary differential equations with rational coefficients, in: R. Conte (Ed.), The Painlevé Property, One Century Later, in: CRM Series in Mathematical Physics, Springer, New York, 1999, pp. 35–76.
[11] J. Malmquist, Sur les équations différentielles du second ordre dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes, Ark. Mat. Astron. Fys. 17 (1922/1923) 1–89.
[12] K. Okamoto, Polynomial Hamiltonians associated with Painlevé equations, II. Differential equations satisfied by polynomial Hamiltonians, Proc. Jpn. Acad., Ser. A 56 (1980) 367–371.
[13] P. Painlevé, Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 143 (1906) 1111–1117.
[14] L. Schlesinger, Über eine Klasse von Differentialsystemen beliebiger Ordnung mit festen kritischen Punkten, J. Reine Angew. Math. 141 (1912) 96–145.
[15] B.A. Springborn, Bonnet pairs in the 3-sphere, Contemp. Math. 308 (2002) 297–303.

Please cite this article in press as: R. Conte, Surfaces de Bonnet et équations de Painlevé, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I (2016), http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2016.10.019