JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS **85**, 420–457 (1989)

Représentations tempérées des groupes de Lie nilpotents

F. DU CLOUX

Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique,
Plateau de Palaiseau, 91128 Palaiseau Cedex,
Unité Associée au CNRS n° 169, France

Communicated by M. Vergne

Received October 15, 1987; revised December 20, 1987

INTRODUCTION

Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe, $\hat{G}$ son dual unitaire. Le problème de trouver une paramétrisation satisfaisante de $\hat{G}$ a été résolu par Kirillov avec sa célèbre "méthode des orbites," qui établit une bijection canonique entre $\hat{G}$ et l'espace des G-orbites dans $\mathbf{g}^*$ (espace vectoriel dual de l'algèbre de Lie $\mathbf{g}$ de G). L'un des buts du présent travail est de suggérer qu'au-delà du cadre unitaire habituel, existe une théorie "différentiable" des représentations qui n'a sans doute pas reçu jusqu'à présent toute l'attention qu'elle mérite. Cette idée n'est certainement pas nouvelle (cf. [13] par exemple); mais pour pouvoir aborder de manière systématique les aspects infinitésimaux de la question, il est nécessaire de disposer de la notion de série de Taylor d'une fonction différentiable en un point de $\hat{G}$, que nous avons récemment définie dans [6].

Le cadre que nous proposons ici pour la théorie différentiable est celui des représentations (fréchétiques) différentiables tempérées de G (déf. 1.2.). Notre résultat principal (th. 5.1.) est la classification des représentations différentiables tempérées topologiquement irréductibles: ce sont exactement, à isomorphisme près, les espaces de vecteurs C^∞ des représentations unitaires irréductibles de G. On peut donc à bon droit considérer $\hat{G}$ comme le dual différentiable (tempéré) de G. Ce résultat est assez surprenant si l'on songe à l'énorme quantité de représentations tempérées topologiquement irréductibles mais non nécessairement différentiables que l'on peut construire déjà pour le groupe de Heisenberg (en fixant l'action du centre), en imposant des conditions de type L^p ou de décroissance à l'infini par exemple; d'après le théorème, les espaces de vecteurs C^∞ de ces représentations sont tous isomorphes entre eux. A notre connaissance, c'est la première classe naturelle de représentations topologiquement irréductibles non

0022-1236/89 \$3.00

unitaires que l'on parvient à classifier complètement. (La théorie des ($\mathfrak{g}$, K)-modules du cas semi-simple nous semble être un autre problème; notre résultat est plutôt à rapprocher de ceux de Casselman et Wallach sur les actions différentiables des groupes de Lie réductifs exposés dans [16].)

Notre démonstration de ce théorème utilise pleinement les techniques infinitésimales. Rappelons que pour nous les fonctions différentiables sur $\hat{G}$ sont données par l'algèbre de convolution $\mathscr{S}$ des fonctions de Schwartz sur G (cf. [9, introduction], pour une justification de la terminologie) et que par définition $\mathscr{S}$ agit dans les représentations tempérées. Nous montrons alors que l'action de $\mathscr{S}$ passe au quotient en une action d'une algèbre de séries de Taylor $\hat{\mathscr{S}}$; la surjectivité de l'application canonique $\mathscr{S} \to \hat{\mathscr{S}}$ n'est d'ailleurs pas évidente, et constitue un "lemme de Borel," lemme 5.11. Pour conclure, nous utilisons les résultats de [6] sur la structure de $\hat{\mathscr{S}}$, et un lemme fondamental sur l'algèbre $\mathscr{W}$ des matrices à décroissance rapide (déf. 3.1.), qui est l'analogue dans la théorie différentiable du théorème de Stone–Von Neumann: nous montrons (th. 3.4.) qu'essentiellement $\mathscr{W}$ n'a qu'une seule représentation différentiable au sens de la déf. 3.2. Cela confirme le rôle universel joué par l'algèbre $\mathscr{W}$ dans la théorie des représentations différentiables. Au cours de la démonstration s'introduisent des algèbres de jets de fonctions différentiables le long de certaines "sous-variétés" de $\hat{G}$, qui apparaissent de façon naturelle comme des déformations formelles (itérées) au sens de Gerstenhaber [11] des algèbres de fonctions différentiables sur les variétés en question; cela nous paraît un encouragement à "penser géométriquement" dans ce contexte.

L'un des avantages de la théorie différentiable sur la théorie unitaire est qu'on y dispose d'une notion intéressante de module de longueur finie. De fait nous avons montré [7, 8] que l'étude des modules de longueur finie reflète exactement la structure infinitésimale du dual en un point. Une retombée intéressante pour nous du th. 5.1 est alors que la catégorie de modules de longueur finie que nous avions introduite un peu arbitrairement dans [7, chap. III] n'est autre, a posteriori, que la catégorie de tous les G-modules tempérés différentiables V de longueur finie au sens le plus naïf du terme, i.e., tels qu'il existe une suite $V_0 = 0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$ de sous- G-modules fermés de V tels que V_j/V_{j-1} soit topologiquement irréductible pour $1 \leqslant j \leqslant n$ (même la condition des suites de composition "fortes" est automatique).

Enfin dans un dernier paragraphe nous abordons les propriétés homologiques des représentations différentiables tempérées. Nous démontrons en particulier que si $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ est une suite exacte forte de G-modules différentiables, alors V est tempéré si et seulement si V' et V'' le sont, ce qui là encore constitue un résultat de stabilité assez inespéré.

1. Représentations tempérées

1.1. Gardons les notations de l'introduction. Nous appellerons G-module un espace de Fréchet (complexe) muni d'une action continue de G. Si l'on a à considérer une action de G dans un espace localement convexe complet plus général, nous parlerons de G-module localement convexe; par exemple, si E et F sont deux G-modules, l'espace $\mathrm{Hom}(E, F)$ des applications linéaires continues de E vers F devient un G-module localement convexe pour l'action naturelle de G si on le munit de la topologie de la convergence compacte (ce que nous ferons toujours par la suite).

Rappelons qu'un vecteur x d'un G-module localement convexe est dit différentiable si l'application $g \to gx$ de G dans E est différentiable; l'espace E_∞ des vecteurs différentiables de E est canoniquement muni d'une topologie que en fait un G-module localement convexe (cf. [5, chap. I, par. 2, n° 3], ou [14, par. 1 dans le cas fréchétique]); on dit que E est différentiable si $E = E_\infty$ avec sa topologie. Si E est fréchétique, il en va de même pour E_∞, et E est alors différentiable si et seulement si tous ses vecteurs sont différentiables.

Nous notons $\hat{\otimes}$ le produit tensoriel projectif (complété) de deux ELCS complets (cf. [15, Chap. 43]). Rappelons que l'application exponentielle identifie $\mathscr{S}$ à $\mathscr{S}(\mathbf{g}) \simeq \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$, ce qui montre que l'espace de Fréchet $\mathscr{S}$ est nucléaire. De plus, si E est un ELCS complet quelconque, on peut identifier $\mathscr{S} \hat{\otimes} E$ à $\mathscr{S}(G, E)$, ce que nous ferons librement [15, chap. 51, pp. 51–58].

1.2. Définition. On dit qu'un G-module E est tempéré, si pour toute semi-norme continue q sur E il existe une semi-norme continue q' et $m \in \mathbf{N}$ tels que:

$$q(\exp(\xi)\, x) \leqslant (1 + |\xi|)^m\, q'(x) \qquad \text{pour tous } \xi \in \mathbf{g},\ x \in E,$$

où $|\ |$ est une norme quelconque sur $\mathbf{g}$ (par exemple $|\xi| = |\xi_1| + \cdots + |\xi_n|$ si $\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$ est l'écriture de ξ dans une base $(e_1, ..., e_n)$ de $\mathbf{g}$).

1.3. Fixons une mesure de Haar dg sur G, et soit (E, ρ) un G-module tempéré. Alors pour toute $\varphi \in \mathscr{S}$ et tout $x \in E$ l'intégrale $\int_G \varphi(g)\, \rho(g) \cdot x\, dg$ converge dans E, et l'on définit ainsi une application linéaire $\rho(\varphi)\colon E \to E$, évidemment continue. Il est facile de voir que $\rho(\varphi_1 * \varphi_2) = \rho(\varphi_1)\, \rho(\varphi_2)$ pour tous $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{S}$, et on voit ainsi que E est un $\mathscr{S}$-module topologique pour le produit de convolution habituel sur $\mathscr{S}$ qui fait de $\mathscr{S}$ une algèbre de Fréchet.

1.4. Proposition. *Soit E un G-module tempéré. Alors tout sous-module fermé et tout quotient de E sont tempérés. De même le* G-module E_∞ *est tempéré.*

Démonstration. Il est évident qu'un sous- G-module fermé E_1 de E est tempéré. Soit $F = E/E_1$. Alors la topologie de F est définie par les semi-normes $\dot{q}(x) = \inf_{y \in E_1} q(x-y)$ où q parcourt l'ensemble des semi-normes continues sur E. Comme E_1 est G-stable, on a:

$$\inf_{y \in E_1} q(gx - y) = \inf_{y \in E_1} q(g(x-y))$$

d'où $m \in N$ et q' tels que $\dot{q}(\exp(\xi)\, x) \leqslant (1 + |\xi|)^m\, \dot{q}'(x)$.

En ce qui concerne E_∞, nous allons utiliser le théorème de Dixmier-Malliavin [10, th. 3.3] qui affirme que pour tout G-module E, l'application canonique $C_c^\infty(G) \otimes E \to E_\infty$ (produit tensoriel non complété) est surjective. A fortiori il en sera ainsi pour l'application canonique $\mathscr{S} \otimes E \to E_\infty$, et donc pour son prolongement $\mathscr{S} \mathbin{\hat{\otimes}} E = \mathscr{S}(G, E) \to E_\infty$, où l'action de G sur $\mathscr{S}(G, E)$ se fait simplement par translations à gauche, sans action sur E. On vérifie immédiatement que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}(G, E)$ sont des G-modules tempérés; donc E_∞ est tempéré comme quotient d'un G-module tempéré.

1.5. Exemples. Une représentation unitaire, une représentation banachique uniformément bornée, sont évidemment tempérées. On a déjà vu que si E est un espace de Fréchet, $\mathscr{S}(G, E)$ est un G-module tempéré.

Si H est un sous-groupe fermé connexe de G, la restriction à H d'un G-module tempéré est un H-module tempéré. Si F est un H-module tempéré, on définit $\mathscr{S}\ \mathrm{Ind}_H^G(F)$ comme l'espace des $\varphi \in C^\infty(G, F)$ t.q. $\varphi(gh) = h^{-1}\varphi(g)$ pour tous $g \in G$, $h \in H$, et tels que la restriction de φ à un relèvement Y de G/H dans G comme variété algébrique (construite à l'aide d'une base coexponentielle à $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$ dans $\mathfrak{g}$, disons, cf. [1, chap. I, n° 3.6]) appartienne à $\mathscr{S}(Y, F)$. Alors on peut vérifier que $\mathscr{S}\ \mathrm{Ind}_H^G(F)$ est un G-module tempéré. En particulier, $\mathscr{S}(G/H)$ est un G-module tempéré pour l'action régulière gauche, et $\mathscr{S}$ est un $G \times G$-module tempéré.

Soient E_1 et E_2 deux G-modules tempérés; alors $E_1 \mathbin{\hat{\otimes}} E_2$ est un $G \times G$-module tempéré, et donc un G-module tempéré pour l'action diagonale.

1.6. *Cas des G-modules différentiables.*

1.6.1. Nous avons déjà mentionné dans la démonstration de la prop. 1.4 le théorème de Dixmier-Malliavin, qui joue un rôle fondamental dans tout cet article (en général avec un produit tensoriel complété, ce qui donne une assertion beaucoup plus faible, mais au moins une fois sans compléter le produit tensoriel).

Pour les G-modules différentiables, il entraîne que la condition de "tempérance" la plus faible que l'on puisse envisager entraîne en fait celle, assez forte, de la déf. 1.2.:

1.6.2. PROPOSITION. *Un G-module différentiable (E, ρ) est tempéré si et seulement si "tous ses vecteurs sont tempérés," i.e., si et seulement si pour tout $x \in E$, l'application: $\varphi \to \varphi * x$ de $C_c^\infty(G)$ vers E donnant l'action de $C_c^\infty(G)$ se prolonge en une application linéaire continue de $\mathscr{S}$ vers E.*

Démonstration. La nécessité est évidente.

Pour la suffisance, on voit déjà que la condition de l'énoncé permet de définir pour toute $\varphi \in \mathscr{S}$ une application linéaire $\rho(\varphi)$: $E \to E$. De plus, approchant φ par des éléments de $C_c^\infty(G)$, on voit que $\rho(\varphi)$ est continue de E dans E comme limite simple d'applications linéaires continues. On a donc une application bilinéaire $\mathscr{S} \times E \to E$ donnée par $(\varphi, x) \to \rho(\varphi)\, x$, continue parce que séparément continue; elle se prolonge en une application linéaire continue $\mathscr{S} \hat{\otimes} E = \mathscr{S}(G, E) \to E$ qui est un G-morphisme parce que c'est vrai sur le sous-espace dense $C_c^\infty(G) \otimes E$. D'après le théorème de Dixmier et Malliavin, cette application est surjective; donc E est tempéré comme quotient du G-module tempéré $\mathscr{S}(G, E)$ (prop. 1.4.).

1.6.3. *Remarque.* Le même raisonnement montre en fait que si (E, ρ) est un G-module non nécessairement différentiable, alors E_∞ est tempéré dès lors que "tous les vecteurs de E sont tempérés".

1.7. LEMME. *Soit (E, ρ) un G-module. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base coexponentielle à* 0 *dans G* [1, chap. I, n° 3.6]. *Alors E est tempéré si et seulement si il est tempéré sous l'action des sous-groupes* $\exp(\mathbf{R}e_j)$ *de G, $1 \leqslant j \leqslant n$.*

Démonstration. Comme la restriction d'un module tempéré à un sous-groupe fermé connexe est tempéré, la nécessité est claire. Considérons la suffisance. Soit q une semi-norme continue sur E. Il existe alors des semi-normes continues $q_1, ..., q_n$ et des entiers $m_1, ..., m_n$ tels que pour tous $x \in E$, $\xi_1, ..., \xi_n \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} &q(\exp(\xi_1 e_1) \cdots \exp(\xi_n e_n)\, x) \\ &\quad \leqslant (1 + |\xi_1|)^{m_1}\, q_1(\exp(\xi_2 e_2) \cdots \exp(\xi_n e_n)\, x) \\ &\quad \leqslant \cdots \leqslant (1 + |\xi_1|)^{m_1} \cdots (1 + |\xi_n|)^{m_n}\, q_n(x). \end{aligned}$$

Comme par définition d'une base coexponentielle tout élément de G s'écrit de façon unique sous la forme $\exp(\xi_1 e_1) \cdots \exp(\xi_n e_n)$, il existe des polynômes $P_1, ..., P_n$ sur $\mathbf{g}$ tels que $\exp(\xi) = \exp(P_1(\xi)\, e_1) \cdots \exp(P_n(\xi)\, e_n)$ pour tout $\xi \in \mathbf{g}$, donc on aura un entier $m \in \mathbf{N}$ et une constante $M > 0$ tels que:

$$q(\exp(\xi)\, x) \leqslant (1 + |\xi|)^m\, M q_n(x) \qquad \text{avec} \quad |\xi| = |\xi_1| + \cdots + |\xi_n|.$$

C.Q.F.D.

1.8. *Remarque.* Dans [5, déf. 5.1] on trouve la définition suivante (énoncée dans le cas commutatif):

Un G-module localement convexe (E, ρ) est tempéré s'il vérifie:

(RT1): Pour tout $x \in E$ l'application $\varphi \to \varphi * x$ définissant l'action de $C_c^\infty(G)$ se prolonge en une application linéaire continue de $\mathscr{S}$ vers E.

(RT2): Les applications linéaires $\rho(\varphi)$ ainsi définies sont continues.

(RT3): Il existe un voisinage V de 0 dans $\mathscr{S}$ tel que les $\rho(\varphi)$, $\varphi \in V$, soient équicontinus.

Comme nous l'avons vu, (RT1) est la condition minimale à imposer à un module pour être tempéré, et si E est de Fréchet, elle implique (RT2). En revanche, (RT3) nous semble beaucoup trop forte. Comme le signale d'ailleurs Bruhat, les vecteurs différentiables d'une représentation tempérée ne donnent pas toujours une représentation tempérée en son sens. Par exemple, si $(\mathscr{H}, \sigma)$ est une représentation unitaire irréductible de dimension infinie du groupe de Heisenberg, l'action de G dans $\mathscr{H}_\infty$ ne vérifie pas (RT3). Comme c'est justement le cas des représentations différentiables qui nous semble le plus intéréssant, nous avons adopté une définition moins restrictive.

2. Représentations irréductibles tempérées dans le cas commutatif

Dans ce paragraphe, on suppose que $G = \mathbf{R}^n$ est commutatif.

2.1. Ce paragraphe est consacré à la démonstration du théorème 2.2, qui est en fait un cas particulier du théorème 5.1. Nous préférons le démontrer séparément pour donner au lecteur un avant-goût des raisonnements de "support" qui seront utilisés.

Comme cela ne nous coûte pas plus cher, nous affaiblissons les hypothèses fréchétiques. Nous retrouvons alors la conclusion du corollaire à la proposition 5.1 de [5], mais sous des hypothèses beaucoup plus faibles (cf. remarque 1.8: nous n'imposons que les conditions (RT1) et (RT2)).

2.2. Théorème. *Soit (E, ρ) un G-module localement convexe topologiquement irréductible. On suppose que l'action de $C_c^\infty(G)$ se prolonge en une action séparément continue de $\mathscr{S}$ sur E. Alors E est une représentation unitaire de dimension* 1 *de G (démonstration au n° 2.4).*

2.3. Lemme. *Soit $V = \mathbf{C}^\mathbf{N}$ l'espace de Fréchet de toutes les suites de nombres complexes, avec la topologie de la convergence simple. Alors pour tout* ELCS *E, et toute application linéaire continue u: $V \to E$, $u(V)$ est fermé dans E.*

De plus, s'il existe sur E une norme continue, $u(V)$ est de dimension finie.

Démonstration. La première assertion est un cas particulier de [4, chap. II, exercice 13] où l'on voit même que $u(V)$ possède un supplémentaire topologique.

Pour la deuxième, il suffit de remarquer que la topologie de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ peut être définie par les semi-normes $q_n(x) = |x_0| + \cdots + |x_n|$, $n \in \mathbf{N}$. Donc toute semi-norme continue sur $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ passe au quotient par un sous-espace de codimension finie. Si donc $\| \ \|$ est une norme continue sur E, il existe un sous-espace fermé M de V avec $\dim(V/M) < \infty$ tel que $\|u(x)\| = 0$ dès que $x \in M$; d'où $u(x) = 0$ dès que $x \in M$. C.Q.F.D.

2.4. *Démonstration du théorème* 2.2. Nous suivons la démonstration de [5, chap. II, par. 5, n° 3].

(a) En composant l'action de $\mathscr{S}$ avec la transformation de Fourier, nous pouvons supposer que l'on a une action séparément continue de $\mathscr{S}$ muni du produit multiplicatif usuel.

Pour chaque ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, notons $I(\Omega)$ l'idéal $C_c^\infty(\Omega)$ de $\mathscr{S}$. Alors il est facile de vérifier qu'il existe un plus grand ouvert Ω tel que $I(\Omega) \cdot E = 0$. Nous appellerons support de (E, ρ) le complémentaire de cet ouvert, et nous le noterons $\operatorname{supp}(\rho)$.

(b) Comme $I(\mathbf{R}^n) = C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ est dense dans $\mathscr{S}$, si $\operatorname{supp}(\rho) = \varnothing$ on a $\mathscr{S} \cdot E = 0$, ce qui est impossible puisque $\mathscr{S} \cdot E$ est dense dans E. Donc $\operatorname{supp}(\rho) \neq \varnothing$.

Soient $x_1 \neq x_2$ dans $\operatorname{supp}(\rho)$, et soient Ω_j, $j = 1, 2$, deux ouverts de $\mathbf{R}^n$ tels que $x_j \in \Omega_j$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$. Alors $\mathscr{I}(\Omega_1)\, \mathscr{I}(\Omega_2) = 0$, donc $\mathscr{I}(\Omega_1)\, \mathscr{I}(\Omega_2)\, E = 0$. Or par définition du support $\mathscr{I}(\Omega_2)\, E \neq 0$; alors $\mathscr{I}(\Omega_1)\, E = 0$, ce qui est absurde. Donc $\operatorname{supp}(\rho) = \{x\}$ est réduit à un point.

(c) Comme la tensorisation par les caractères unitaires translate les supports, on peut dorénavant supposer que $\operatorname{supp}(\rho) = \{0\}$. Soit $\Omega = \mathbf{R}^n / \{0\}$; alors l'action de $\mathscr{S}$ dans E passe au quotient par l'adhérence de $\mathscr{I}(\Omega)$ dans $\mathscr{S}$. Il est bien connu que cette adhérence est exactement l'espace des $\varphi \in \mathscr{S}$ dont la série de Taylor à l'origine est nulle; comme d'autre part d'après le lemme de Borel l'application $\varphi \to \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} (\partial^\alpha \varphi / \alpha!)\, x^\alpha$ est une surjection de $\mathscr{S}$ sur $\mathbf{C}[[x_1, ..., x_n]]$, on voit finalement que l'action de $\mathscr{S}$ dans E passe au quotient en une action de l'algèbre de Fréchet $\mathbf{C}[[x_1, ..., x_n]] = \hat{\mathscr{S}}$.

Or, comme espace de Fréchet celle-ci est isomorphe à $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. D'après le lemme 2.3, on voit donc que pour tout $x \in E$, $\mathscr{S} \cdot x$ est fermé dans E, donc $\hat{\mathscr{S}} x = E$ puisque E est irréductible. Mais cela revient à dire que E est algébriquement irréductible sous l'action de $\mathscr{S}$. Comme le seul idéal maximal de $\hat{\mathscr{S}}$ est l'idéal $\mathbf{m}$ engendré par $x_1, ..., x_n$, on voit que $E \simeq \mathscr{S}/\mathbf{m} = \mathbf{C}$.

C.Q.F.D.

3. Représentations de l'algèbre $\mathscr{W}$

3.1. Nous allons dans ce paragraphe étudier les représentations d'une algèbre de Fréchet très particulière, qui apparaît sans cesse dans la théorie des représentations différentiables (même en dehors du cas nilpotent), et semble y jouer un rôle très analogue à celui de l'algèbre des opérateurs compacts dans la théorie unitaire.

Soit donc $\mathscr{W}$ l'algèbre des matrices $(a_{mn})_{m,n \in \mathbf{N}}$, $a_{mn} \in \mathbf{C}$, à décroissance rapide (cela signifie que $\sup_{m,n}((m+n)^k |a_{mn}|) < +\infty$ $\forall k \in \mathbf{N}$). C'est une algèbre de Fréchet pour le produit naturel des matrices; on peut la munir d'une involution en posant $(a^*)_{mn} = \bar{a}_{mn}$, mais cela ne nous servira pas ici. On note $S = \mathscr{S}(\mathbf{N})$ l'espace des suites $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ à décroissance rapide, et on fait agir $\mathscr{W}$ sur $\mathscr{S}$ par $(ax)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$. On vérifie facilement que l'on obtient ainsi un $\mathscr{W}$-module (fréchétique) algébriquement simple.

De façon générale, nous appellerons $\mathscr{W}$-module un espace de Fréchet E muni d'une action de $\mathscr{W}$ telle que l'application bilinéaire $\mathscr{W} \times E \to E$ définissant l'action soit continue (bien entendu, la continuité séparée suffit).

3.2. Définition. Soit E un $\mathscr{W}$-module; alors on note E_∞ l'image dans E de l'application canonique $\mathscr{W} \hat{\otimes} E \to E$, muni de la topologie quotient de celle de $\mathscr{W} \hat{\otimes} E$.

Nous dirons (par abus de langage) que E est différentiable si $E_\infty = E$.

3.3. Voici la justification de la terminologie ci-dessus. Supposons G non-commutatif, et soit $(\mathscr{H}, \sigma)$ une représentation unitaire irréductible de dimension infinie de G. On sait alors que l'image de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ est isomorphe à $\mathscr{W}$ (cf. [6, th. 3.3] par exemple). Fixons un tel isomorphisme, ce qui permet de considérer tout $\mathscr{W}$-module comme un $\mathscr{S}$-module. Alors un $\mathscr{W}$-module E est différentiable si et seulement si il provient d'un G-module différentiable. En effet si E est différentiable, c'est un quotient de $\mathscr{W} \hat{\otimes} E$, donc de $\mathscr{S} \hat{\otimes} E = \mathscr{S}(G, E)$ avec l'action régulière gauche de G, qui est bien un G-module différentiable; la réciproque résulte du théorème de Dixmier et Malliavin (cf. n° 1.6.1). On voit en particulier que $\mathscr{W}$ et $\mathscr{W} \hat{\otimes} E$ sont différentiables, et que E_∞ est toujours un $\mathscr{W}$-module différentiable.

3.4. Théorème. *Soit E un $\mathscr{W}$-module. Alors E est différentiable si et seulement si il est de la forme $S \hat{\otimes} F$, où S est le module standard défini au n° 3.1, F un espace de Fréchet, et où l'action de $\mathscr{W}$ se fait sur le premier facteur.*

Plus précisément, on obtient des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre de la catégorie des espaces de Fréchet vers celle des $\mathscr{W}$-modules différentiables par les formules: $F \to S \hat{\otimes} F$, $E \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{W}}(S, E)$.

Démonstration. Il est clair que tout $\mathscr{W}$-module de la forme $S \hat{\otimes} F$ est différentiable; démontrons la réciproque.

Démontrons d'abord que tout sous- $\mathscr{W}$-module fermé E_1 de $S \hat{\otimes} F$ est de la forme $S \hat{\otimes} F_1$, où F_1 est un sous-espace fermé de F. Pour cela, introduisons les matrices élémentaires e_{mn}, dont le seul coefficient non nul se trouve à la ligne m, colonne n, et est égal à 1, et de même les suites élémentaires ε_n dont le seul terme non nul est le n-ième qui vaut 1. Identifions F à $\varepsilon_0 \otimes F$, ce qui donne une décomposition $\mathscr{S}(\mathbf{N}, F) = F \oplus \mathscr{S}(\mathbf{N}^*, F)$. Posons $F_1 = E_1 \cap F$. Alors il est clair que $\varepsilon_n \otimes F_1 = e_{n0} F_1 \subset E_1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, donc $\mathscr{S}(\mathbf{N}, F_1) \subset E_1$. Réciproquement, si $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ appartient à E_1, on a $x_n = e_{0n} x \in F_1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, ce qui montre bien que toutes les coordonnées de x sont dans F_1.

De plus, à cause de l'exactitude du produit tensoriel projectif avec un espace nucléaire, on a $\mathscr{S}(\mathbf{N}, F)/\mathscr{S}(\mathbf{N}, F_1) = \mathscr{S}(\mathbf{N}, F/F_1)$. Il suffit maintenant de remarquer que $\mathscr{W}$ lui-même est de la forme $S \hat{\otimes} S^\vee$, où $S^\vee$ est l'espace vectoriel conjugué de S, par la formule $x \otimes y(z) = (z \mid y)\, x$; comme E est un quotient de $\mathscr{W} \hat{\otimes} E = S \hat{\otimes} S^\vee \hat{\otimes} E$, on a bien la decomposition voulue.

Un raisonnement analogue montre que $u \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{W}}(S, S \hat{\otimes} F)$ est entièrement déterminé par $u(\varepsilon_0)$, qui doit appartenir à $F = \varepsilon_0 \otimes F$, et que l'on obtient ainsi une bijection continue de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{W}}(S, S \hat{\otimes} F)$ sur F. Montrons que cette application est bicontinue (cela n'est pas tout à fait évident puisque $\mathrm{Hom}(S, S \hat{\otimes} F)$ n'est pas de Fréchet en général). Il faut montrer qu'étant donnés un compact K de S et un voisinage Ω de 0 dans $S \hat{\otimes} F$, il existe un voisinage Ω_1 de 0 dans F tel que si $u \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{W}}(S, S \hat{\otimes} F)$ on ait $u(K) \subset \Omega$ dès lors que $u(\varepsilon_0) \in \Omega_1$. Or on peut trouver un compact L de $\mathscr{W}$ tel que $K \subset L\varepsilon_0$; il suffit alors de prendre Ω_1 assez petit pour que $L\Omega_1 \subset \Omega$, et on aura: $u(K) \subset u(L\varepsilon_0) = Lu(\varepsilon_0) \subset \Omega$.

Ceci montre bien que tout $u \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{W}}(S \hat{\otimes} F_1, S \hat{\otimes} F_2)$ provient d'une application linéaire continue v: $F_1 \to F_2$; comme la réciproque est triviale, le théorème est démontré.

3.5. Corollaire. *Tout $\mathscr{W}$-module différentiable topologiquement irréductible est isomorphe à S.*

Démonstration. Il est clair que $S \hat{\otimes} F$ ne peut être topologiquement irréductible que si F est de dimension 1.

3.6. Corollaire. *Tout $\mathscr{W}$-module topologiquement irréductible autre que $\mathbf{C}$ avec l'action triviale de $\mathscr{W}$ contient S comme sous-espace dense.*

Démonstration. Si $E \neq \mathbf{C}$, E_∞ n'est pas nul donc est dense dans E; de plus on démontre facilement que E_∞ est topologiquement irréductible; alors $E_\infty \simeq S$ d'après le corollaire 3.5.

3.7. Considérons maintenant le cas des bimodules. Nous appellerons $\mathscr{W}$-bimodule un espace de Fréchet $\mathscr{B}$ muni d'une action continue à droite et à gauche de $\mathscr{W}$, les deux actions commutant entre elles. Nous dirons que $\mathscr{B}$ est différentiable, si les deux actions de $\mathscr{W}$ sont différentiables au sens de la définition 3.2.

Soit $\mathscr{W}^0$ l'algèbre opposée à $\mathscr{W}$. Il est clair que tout $\mathscr{W}$-bimodule $\mathscr{B}$ est canoniquement muni d'une action à gauche de $\mathscr{W} \hat{\otimes} \mathscr{W}^0$. Dans le cas différentiable, la réciproque est vraie. Pour le voir, réalisons $\mathscr{W}$ de la façon suivante. Soit $\mathfrak{n}$ l'algèbre de Lie de Heisenberg de base (e_1, e_2, e_3) avec $[e_1, e_2] = e_3$. Soit N le groupe de Lie simplement connexe correspondant. Identifions N à $\mathbf{R}^3$ par l'application $(x_1, x_2, x_3) \to \exp(x_1 e_1) \exp(x_2 e_2) \exp(x_3 e_3)$ (cf. paragraphe 4), ce qui identifie $\mathscr{S}(N)$ à $\mathscr{S}$ $(\mathbf{R}^3)$. Alors l'application $\varphi \to \int_{\mathbf{R}} \varphi(x)\, e^{2i\pi x_3}\, dx_3$ établit une surjection de $\mathscr{S}(N)$ sur $\mathscr{S}(\mathbf{R}^2)$ muni du produit

$$\varphi_1 * \varphi_2(x_1, x_2) = \int_{\mathbf{R}^2} \varphi_1(x_1 - y_1, x_2 - y_2)\, \varphi_2(y_1, y_2)\, e^{-2i\pi(x_2 - y_2) y_1}\, dy_1\, dy_2,$$

qui est isomorphe à $\mathscr{W}$. La même construction identifie $\mathscr{W} \hat{\otimes} \mathscr{W}^0$ à un quotient de $\mathscr{S}(N \times N^0)$, où N^0 est le groupe de Lie opposé à N. On voit donc que tout $\mathscr{W} \hat{\otimes} \mathscr{W}^0$-module $\mathscr{B}$ devient un $\mathscr{S}(N \times N^0)$-module, et d'après le n° 3.3 provient d'un $N \times N^0$-module tempéré différentiable si $\mathscr{B}$ est différentiable. Alors il devient un N-bimodule par restriction à $N \times \{1\}$ et $\{1\} \times N^0$, donc un $\mathscr{S}$-bimodule.

Puisque l'algèbre $\mathscr{W} \hat{\otimes} \mathscr{W}^0$ est isomorphe à $\mathscr{W}$ (cf. [6, lemme 3.2]), et que $\mathscr{W}$ considéré comme $\mathscr{W} \hat{\otimes} \mathscr{W}^0$-module à gauche est le module standard, le théorème 3.4 s'applique et nous dit que tout $\mathscr{W}$-bimodule différentiable $\mathscr{B}$ est de la forme $\mathscr{W} \hat{\otimes} B$, où $B = \mathrm{Hom}_{\mathscr{W}, \mathscr{W}}(\mathscr{W}, \mathscr{B})$ est un espace de Fréchet, les deux actions se faisant sur le premier facteur.

Nous allons maintenant étendre les résultats de [6, par. 5, n° 5.9] sur les couplages de bimodules de longueur finie.

3.8.1. LEMME. *Soit α un nombre algébrique, $\alpha \notin (\mathbf{Q})$; alors la fonction $\varphi : x \to x/(2 - e^{2i\pi x} - e^{2i\pi\alpha x})$ appartient à $\mathcal{O}_M(\mathbf{R})$, l'espace des fonctions C^∞ a croissance lente ainsi que toutes leurs dérivées.*

Démonstration. Puisque $\alpha \notin (\mathbf{Q})$, la fonction $2 - e^{2i\pi x} - e^{2i\pi\alpha x}$ ne s'annule que pour $x = 0$, et y a un zero simple. Donc la fonction φ est bien définie et C^∞ sur $\mathbf{R}$. Comme on a

$$\varphi'(x) = \frac{2 - e^{2i\pi x} - e^{2i\pi\alpha x} + 2i\pi x(e^{2i\pi x} + \alpha e^{2i\pi\alpha x})}{(2 - e^{2i\pi x} - e^{2i\pi\alpha x})^2}$$

avec des formules analogues pour les dérivées successives, on voit qu'il suffit de montrer qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $1/(2 - e^{2i\pi x} - e^{2i\pi\alpha x}) = o(|x|^k)$ pour $|x| \to +\infty$.

Nous allons utiliser le théorème de Liouville qui dit que si $d = \deg(\alpha)$, il existe une constante $C = C(\alpha)$ telle que pour tous $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}^*$ on ait $|\alpha - p/q| \geqslant C/q^d$.

On voit facilement que pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a $1 - \cos 2\pi x \geqslant (\pi^2/3)\, d(x, \mathbf{Z})^2$. On a donc les minorations:

$$\begin{aligned}|2 - e^{2i\pi x} - e^{2i\pi\alpha x}| &\geqslant 2 - \cos 2\pi x - \cos 2\pi\alpha x\\ &\geqslant \max(1 - \cos 2\pi x,\, 1 - \cos 2\pi\alpha x)\\ &\geqslant \frac{\pi^2}{3}\max(d(x, \mathbf{Z})^2, d(\alpha x, \mathbf{Z})^2).\end{aligned}$$

Soient $p_1, p_2 \in \mathbf{Z}$ tels que $d(x, \mathbf{Z}) = |x - p_1|$, $d(x, (1/\alpha)\,\mathbf{Z}) = |x - p_2/\alpha|$. On peut supposer $x > 0$ par symétrie; alors pour x assez grand, p_1 et p_2 seront $\geqslant 0$, et on a évidemment $|p_1 - p_2/\alpha| \leqslant d(x, \mathbf{Z}) + d(x, (1/\alpha)\,\mathbf{Z})$. Or d'après le théorème de Liouville appliqué à $1/\alpha$ on a

$$\left|p_1 - \frac{p_2}{\alpha}\right| = p_2\left|\frac{p_1}{p_2} - \frac{1}{\alpha}\right| \geqslant \frac{C}{p_2^{d-1}} \geqslant \frac{C}{(\alpha x + 1)^{d-1}}$$

puisque $x + 1/\alpha \geqslant p_2/\alpha$. Mais alors il faut que $\max(d(x, \mathbf{Z}), d(x, (1/\alpha)\,\mathbf{Z})) \geqslant C/2(\alpha x + 1)^{d-1}$, et comme $d(\alpha x, \mathbf{Z}) = \alpha d(x, (1/\alpha)\,\mathbf{Z})$, on aura finalement $|2 - e^{2i\pi x} - e^{2i\pi\alpha x}| \geqslant C'/(\alpha x + 1)^{2d-2}$, ce qui démontre le lemme.

3.8.2. LEMME. *Soit $\mathscr{B}$ un $\mathscr{W}$-bimodule différentiable. Notons $H_0(\mathscr{W}, \mathscr{B})$ le quotient de $\mathscr{B}$ par le sous-espace vectoriel formé des combinaisons lineaires finies d'éléments de la forme $a\varphi - \varphi a$, $a \in \mathscr{W}$, $\varphi \in \mathscr{B}$ (c'est le H_0 de Hochschild purement algébrique). Alors $H_0(\mathscr{W}, \mathscr{B})$ est séparé, et canoniquement isomorphe a $B = \mathrm{Hom}_{\mathscr{W},\mathscr{W}}(\mathscr{W}, \mathscr{B})$ par l'application $\varphi \to \mathrm{Tr}(\varphi)$.*

Démonstration. Considerons comme ci-dessus $\mathscr{B}$ comme N-bimodule. Notons $B_0(\mathscr{W}, \mathscr{B})$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{B}$ defini dans l'énoncé, et soit de même $B_0(N, \mathscr{B})$ le sous-espace de $\mathscr{B}$ engendré par les éléments de la forme $g\varphi - \varphi g$, $\varphi \in \mathscr{B}$, $g \in N$. Démontrons d'abord que $B_0(N, \mathscr{B})$ est fermé.

On remarque que l'on peut aussi engendrer $B_0(N, \mathscr{B})$ par les éléments de la forme $g\varphi g^{-1} - \varphi$ (changer φ en φg^{-1}). Identifions $\mathscr{B}$ à $\mathscr{W} \hat{\otimes} B = \mathscr{S}(\mathbf{R}^2, B)$, et soit $g = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. Alors $g^{-1} = (-x_1, -x_2, -x_3 - x_1 x_2)$, et on voit que $g\varphi g^{-1}(y_1, y_2) = e^{2i\pi(x_1 y_2 - x_2 y_1)}\, \varphi(y_1, y_2)$. En particulier, les éléments de la forme $(\lambda, 0, 0)$ et $(0, \mu, 0)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $\mu \in \mathbf{R}$, agissent respectivement par multiplication par $e^{2i\pi\lambda y_2}$ et $e^{-2i\pi\mu y_1}$. Il est clair que pour tous $g \in N$, $\varphi \in \mathscr{B}$ on a $(g\varphi g^{-1} - \varphi)(0, 0) = 0$. Reciproquement, montrons que si $\varphi(0,0)=0$, alors $\varphi \in B_0(N, \mathscr{B})$. Posons $g_1=(1,0,0)$, $g_2=(0,1,0)$, $h_1=(\sqrt{2},0,0)$, $h_2=(0,\sqrt{2},0)$. D'après les formules ci-dessus pour l'action de N, il suffit de montrer que φ peut s'écrire sous la forme $\varphi=(e^{-2i\pi y_1}+e^{-2i\pi\sqrt{2}y_1}-2)\,\varphi_1+(e^{2i\pi y_2}+e^{2i\pi\sqrt{2}y_2}-2)\,\varphi_2$, avec φ_1 et φ_2 dans $\mathscr{B}$. Or puisque $\varphi(0,0)=0$, on peut écrire $\varphi=y_1\psi_1+y_2\psi_2$, avec (au voisinage de 0) $\psi_j(y_1,y_2)=\int_0^1(\partial\varphi/\partial y_j)(ty_1,ty_2)\,dt$. On pose alors

$$\varphi_1=\frac{y_1}{e^{-2i\pi y_1}+e^{-2i\pi\sqrt{2}y_1}-2}\,\psi_1$$

$$\varphi_2=\frac{y_2}{e^{2i\pi y_2}+e^{2i\pi\sqrt{2}y_2}-2}\,\psi_2.$$

D'après le lemme 3.8.1 les fonctions φ_1 et φ_2 sont bien définies et appartiennent à $\mathscr{S}(\mathbf{R}^2, B)$, d'où notre assertion.

On a donc bien montré que $B_0(N, \mathscr{W})$ est fermé dans $\mathscr{B}$; de plus le quotient $H_0(N, \mathscr{W})$ s'identifie canoniquement à B (on vérifie facilement que dans l'écriture matricielle de $\mathscr{W}$ l'application $\varphi \to \varphi(0,0)$ devient l'application $\varphi \to \mathrm{Tr}(\varphi)$). Pour conclure, il nous suffit donc de démontrer qu'en fait $B_0(N, \mathscr{B})=B_0(\mathscr{W}, \mathscr{B})$. Or l'interprétation en termes de traces ou un calcul direct montrent aussitôt que $(a\varphi-\varphi a)(0,0)=0$ pour tous $a \in \mathscr{W}$, $\varphi \in \mathscr{B}$. Donc $B_0(\mathscr{W}, \mathscr{B}) \subset B_0(N, \mathscr{B})$. Réciproquement, soit $g\varphi-\varphi g \in B_0(N, \mathscr{B})$. D'après le théorème de Dixmier-Malliavin (cf. n° 1.6.1) on peut écrire φ comme somme finie

$$\sum_{j=1}^{s} a_j\varphi_j, \qquad a_j \in \mathscr{W},\ \varphi_j \in \mathscr{B}.$$

Or $ga_j\varphi_j-a_j\varphi_j g=(ga_j)\,\varphi_j-\varphi_j(ga_j)+(\varphi_j g)\,a_j-a_j(\varphi_j g)$ (compte tenu de la compatibilité entre les actions de N et de $\mathscr{W}$). C.Q.F.D.

3.9. *Remarque.* Le lemme 3.8.2 remplace le lemme 5.8 de [6] pour la définition des foncteurs $\hat{\otimes}_{\mathscr{W}}$ (cf. ci-dessous). L'avantage est que cela ne dépend pas d'une réalisation explicite de $\mathscr{W}$.

L'utilisation que nous avons faite de l'action de N peut s'interpréter comme une "version $\mathscr{S}$" du théorème 1 de [3], pour $G=\mathbf{R}^2$.

3.10. Définition. Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux $\mathscr{W}$-bimodules différentiables; on note $\mathscr{A} \hat{\otimes}_{\mathscr{W}} \mathscr{B}$ le $\mathscr{W}$-bimodule $H_0(\mathscr{W}, \mathscr{A} \hat{\otimes} \mathscr{B})$, où le H_0 est pris pour l'action de $\mathscr{W}$ à gauche sur B et à droite sur $\mathscr{A}$, et où l'action de $\mathscr{W}$ sur $\mathscr{A} \hat{\otimes}_{\mathscr{W}} \mathscr{B}$ se fait à gauche par son action à gauche sur $\mathscr{A}$, et à droite par son action à droite sur $\mathscr{B}$. (Ceci a un sens d'après le lemme 3.8.2.)

De même, si E est un $\mathscr{W}$-module à gauche différentiable, on définit de façon analogue $\mathscr{A} \hat{\otimes}_{\mathscr{W}} E$ comme $\mathscr{W}$-module à gauche.

3.11. LEMME. (i) *Soient* $\mathscr{A} = \mathscr{W} \hat{\otimes} \mathscr{A}$ *et* $\mathscr{B} = \mathscr{W} \hat{\otimes} B$ *deux* $\mathscr{W}$*-bimodules différentiables,* $E = S \hat{\otimes} F$ *un* $\mathscr{W}$*-module à gauche différentiable. Alors* $\mathscr{A} \hat{\otimes}_{\mathscr{W}} \mathscr{B} = \mathscr{W} \hat{\otimes} A \hat{\otimes} B$, $\mathscr{A} \hat{\otimes}_{\mathscr{W}} E = S \hat{\otimes} A \hat{\otimes} F$.

(ii) *Soit* $\mathscr{C}$ *un troisième* $\mathscr{W}$*-bimodule,* $\beta: \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ *une application bilinéaire continue. Alors* β *passe au quotient en un morphisme de* $\mathscr{W}$*-bimodules* $\mathscr{A} \hat{\otimes}_{\mathscr{W}} \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ *si et seulement si pour tous* $x \in \mathscr{A}$, $y \in \mathscr{B}$, $a \in \mathscr{W}$ *on a*:

$$\beta(ax, y) = a\beta(x, y)$$

$$\beta(x, ya) = \beta(x, y)\, a$$

$$\beta(xa, y) = \beta(x, ay).$$

Résultat analogue si $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{C}$ *sont des* $\mathscr{W}$*-modules à gauche.*

Démonstration. L'assertion (i) résulte des égalités $\mathscr{W} \otimes_{\mathscr{W}} \mathscr{W} \simeq \mathscr{W}$, $\mathscr{W} \hat{\otimes}_{\mathscr{W}} S = S$, qui se déduisent aussitôt du lemme 3.8.2. L'assertion (ii) est évidente.

3.12. Nous appellerons $\mathscr{W}$-algèbre un $\mathscr{W}$-bimodule différentiable $\mathscr{A}$ muni d'une structure d'algèbre associative (sans unité sauf dans le cas trivial où $\mathscr{A} = 0$) et telle que l'application $\beta: \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ donnant la multiplication vérifie la condition du lemme 3.11(ii). De même, si E est un espace de Fréchet, nous dirons qu'une action continue de $\mathscr{A}$ et une action différentiable de $\mathscr{W}$ sur E sont compatibles si l'application $\mathscr{A} \times E \to E$ donnant l'action de $\mathscr{A}$ vérifie ladite condition.

3.13. LEMME. *Soit* $\mathscr{A} = \mathscr{W} \hat{\otimes} A$ *une* $\mathscr{W}$*-algèbre. Alors* A *est canoniquement munie d'une structure d'algèbre de Fréchet de telle sorte que le produit de* $\mathscr{A}$ *s'écrive*:

$$(a \otimes x) \cdot (b \otimes y) = ab \otimes xy$$

pour les éléments décomposées. De même, si $E = S \hat{\otimes} F$ *est un* $\mathscr{A}$*-module avec une action compatible de* $\mathscr{W}$, F *est canoniquement muni d'une structure de* A*-module topologique.*

Démonstration. C'est immédiat: d'après le lemme 3.11 et le théorème 3.4, l'application canonique $\mathscr{A} \hat{\otimes} \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ donne naissance à une application linéaire continue $A \hat{\otimes} A \to A$, d'où une loi d'algèbre de Fréchet sur A, associative par fonctorialité de la construction. Résultat analogue dans le cas des modules.

4. Epinglage d'une algèbre de Lie nilpotente

4.1. Définition. Soit $n=\dim(\mathbf{g})$. Un *épinglage* de $\mathbf{g}$ est la donnée d'une suite décroissante $\mathbf{g}=\mathbf{g}_0 \supset \mathbf{g}_1 \supset \cdots \supset \mathbf{g}_n=0$ d'idéaux de $\mathbf{g}$, avec $j+\dim \mathbf{g}_j=n$ pour $0 \leqslant j \leqslant n$, et d'une base $e_1, ..., e_n$ de $\mathbf{g}$ telle que $\mathbf{g}_{j-1}=\mathbf{R}e_j \oplus \mathbf{g}_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$.

4.2. *Algèbres de Lie nilpotentes tordues.* Rappelons qu'un 2-cocycle sur $\mathbf{g}$ est une forme bilinéaire alternée ω telle que $\omega([\xi_1, \xi_2], \xi_3)+\omega([\xi_3, \xi_1], \xi_2)+\omega([\xi_2, \xi_3], \xi_1)=0$ $\forall \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbf{g}$. On peut alors définir une structure d'algèbre de Lie nilpotente $[\ ,\ ]^\sim$ sur $\mathbf{R} \oplus \mathbf{g}=\tilde{\mathbf{g}}$ en imposant que $\mathbf{R}$ soit central et que $[\xi, \eta]^\sim=\omega(\xi, \eta)+[\xi, \eta]$ pour $\xi, \eta \in \mathbf{g}$; inversement la donnée d'une extension centrale de $\mathbf{g}$ par $\mathbf{R}$ et d'un relèvement de $\mathbf{g}$ comme sous-espace vectoriel de l'extension définit un 2-cocycle.

Nous dirons que $(\mathbf{g}, \omega)$ est une algèbre de Lie nilpotente tordue (par ω). Comme cette situation s'introduit inexorablement en théorie des représentations, le mieux est de poser tout de suite les définitions dans le cas tordu; on retrouvera les notions habituelles en faisant $\omega=0$.

4.3. L'expérience montre que le choix d'un épinglage de $\mathbf{g}$ suffit à rendre canoniques tous les choix qui interviennent en théorie des représentations, tels que le choix d'un élément dans chaque orbite coadjointe, le choix d'une polarisation en ce point, le choix d'une base et d'une base coexponentielle à cette polarisation, etc.

La démonstration du théorème 5.1 nécessitera de pousser assez loin ce dévissage de la situation, auquel nous procédons maintenant (en nous limitant aux ingrédients dont nous aurons besoin par la suite).

4.4. Commençons par paramétrer le groupe de Lie simplement connexe G d'algèbre de Lie $\mathbf{g}$. Puisque $(e_1, ..., e_n)$ est une base coexponentielle à 0 dans $\mathbf{g}$, on a un difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$ sur G par la formule $(x_1, ..., x_n) \to \exp(x_1 e_1) \cdots \exp(x_n e_n)$; nous utilisons désormais cette identification. Nous allons montrer comment on peut obtenir de manière purement mécanique l'expression des champs de vecteurs invariants à gauche (ou à droite) sur G et l'écriture du produit.

En fait, les deux problèmes sont liés, puisque pour écrire le produit il suffit de savoir multiplier x à droite par un élément de la forme $\exp(y_j e_j)$; or $(d/dt)(z \exp(te_j))_{t=0}$ n'est autre que la valeur au point z du champ de vecteurs invariant à gauche associé à e_j. Il suffira donc de savoir écrire ce champ de vecteurs X_j, et d'integrer l'équation différentielle $\dot{z}=X_j(z)$ entre 0 et y_j, avec x comme valeur initiale.

Compte tenu du fait que les $\mathbf{g}_j$ sont des idéaux de $\mathbf{g}$, on voit déjà que les X_j sont de la forme:

$$X_j(x)=\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{k>j} X_{jk}(x_{j+1}, ..., x_n) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

où les X_{jk} sont des polynômes. De plus il est clair que $X_{jk}(0)=0$. En particulier, on a $X_n=\partial/\partial x_n$. On peut alors déterminer les X_j de proche en proche à partir de $j=n$ en écrivant les conditions:

$$[X_j, X_k]=\sum_{l>k} c^l_{jk} X_l \qquad \text{pour} \quad k>j$$

ce qui détermine les $\partial X_{jm}/\partial x_k$ pour tous $m, k>j$, donc permet de calculer X_{jm}. En particulier le fait que e_n soit central dans $\mathbf{g}$ entraîne que X_{jm} ne dépend pas de x_n; et plus généralement il est facile de démontrer qu'en fait X_{jm} ne dépend que des variables $x_{j+1}, ..., x_{m-1}$ si $m>j+1$, et que $X_{j,j+1}=0$.

On constate alors que le système $\dot{z}=X_j(z)$ se résout par quadratures successives de polynômes, où l'algorithme promis.

Exemple. Si $\mathbf{g}$ est l'algèbre de Heisenberg de base (e_1, e_2, e_3) avec $[e_1, e_2]=e_3$, on trouve:

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x_1}-x_2\frac{\partial}{\partial x_3}, \qquad X_2=\frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad X_3=\frac{\partial}{\partial x_3};$$

et le produit:

$$xy=(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3-x_2 y_1).$$

Il est clair que l'action régulière droite $\varphi \to \varphi * e_j$ de e_j est donnée par le champ de vecteurs $-X_j$. Si l'on veut écrire l'action régulière gauche, il faut de même écrire les champs de vecteurs invariants à droite. Ce n'est pas tout à fait un problème symétrique du précédent. En effet il faut maintenant calculer:

$$Y_j(x)=\frac{d}{dt}(\exp(te_j)\,x)_{t=0}.$$

On peut bien sûr obtenir les Y_j en différentiant la formule du produit, mais ce que l'on voudrait, c'est obtenir directement les Y_j à partir des X_j. Compte tenu du fait que $\mathbf{g}_j$ est un idéal dans $\mathbf{g}$, on peut écrire:

$$Y_j(x)=\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{k>j} Y_{jk}(x_1, ..., x_{k-1})\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Pour déterminer les Y_{jk}, on écrit que les Y_j commutent aux X_l. Comme $X_n=\partial/\partial x_n$, $X_{n-1}=\partial/\partial x_{n-1}$, ceci entraîne en particulier que les Y_{jk} ne dépendent ni de x_n ni de x_{n-1}; plus généralement on peut montrer que Y_{jk} ne dépend que de $x_1, ..., x_{k-2}$. Il est clair par ailleurs que $Y_1=\partial/\partial x_1$.

Enfin pour écrire l'automorphisme intérieur de G défini par $\exp(te_j)$, il faut intégrer entre 0 et t l'équation différentielle $\dot{z}=Z_j(z)$ avec $Z_j=Y_j-X_j$ et $z(0)=x$.

Dans l'exemple du groupe de Heisenberg, on obtient ainsi:

$$Y_1=\frac{\partial}{\partial x_1},\qquad Y_2=\frac{\partial}{\partial x_2}-x_1\frac{\partial}{\partial x_3},\qquad Y_3=\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$Z_1=x_2\frac{\partial}{\partial x_3},\quad Z_2=-x_1\frac{\partial}{\partial x_3},\qquad Z_3=0$$

(bien entendu, alors que les X_j vérifiaient les mêmes relations de crochet que les e_j, les Y_j vérifient les relations de crochet opposées).

4.5. Il est important pour nous de noter que si l'on écrit $xy=z$ avec $z=(z_1, ..., z_n)$ on a $z_j=x_j+y_j+a_j(x, y)$, où a_j est un polynôme en $x_1, ..., x_{j-1}$, $y_1, ..., y_{j-1}$. Il est d'ailleurs clair que a_j n'est autre que le 2-cocycle sur G/G_{j-1} associé à l'extension centrale G/G_j. En développant l'identité $(xy^{-1})\cdot y=x$, on obtient la formule utile:

$$(xy^{-1})_j=x_j-y_j-a_j(xy^{-1}, y).$$

De même, si $(\mathbf{g}, \omega)$ est une algèbre de Lie nilpotente tordue, $\tilde{\mathbf{g}}=\mathbf{g}\oplus\mathbf{R}$ l'extension centrale correspondante, un épinglage de $\mathbf{g}$ se prolonge de façon évidente en un épinglage $(e_1, ..., e_{n+1})$ de $\tilde{\mathbf{g}}$ en posant $e_{n+1}=1\in\mathbf{R}$. D'où un 2-cocycle a sur G définissant $\tilde{G}$, que nous appellerons 2-cocycle intégré associé à ω.

4.6. D'une manière générale, dans le cas d'une algèbre de Lie tordue $(\mathbf{g}, \omega)$, il convient de faire toutes les constructions pour l'extension centrale $\tilde{\mathbf{g}}$, puis de faire $e_{n+1}=2i\pi$. Cela conduit à associer à $e_j\in\mathbf{g}$ non pas un champ de vecteurs mais un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant 1$, à savoir $\tilde{X}_j=X_j+2i\pi X_{j,n+1}(x_{j+1}, ..., x_n)$. Les $\tilde{X}_j$ forment avec les constantes une algèbre de Lie isomorphe à $\tilde{\mathbf{g}}$. La sous-algèbre de $\mathbf{C}[x_1, ..., x_n, \partial/\partial x_1, ..., \partial/\partial x_n]$ engendrée par les $\tilde{X}_j$ est isomorphe au quotient de $U(\tilde{\mathbf{g}})$ par l'idéal engendré par $(e_{n+1}-2i\pi)$; nous noterons $U(\mathbf{g}, \omega)$ cette algèbre. Remarquons qu'il n'est pas tout à fait exact que l'on retrouve $U(\mathbf{g})$ en construisant $U(\mathbf{g}, \omega)$ avec $\omega=0$. En effet comme maintenant "on a mis $2i\pi$ dans l'algèbre de Lie" il faut remplacer l'antiautomorphisme principal $u\to u^T$ de $U(\mathbf{g})$ (défini par $\xi^T=-\xi$ si $\xi\in\mathbf{g}$) par l'involution $u\to\bar{u}^T=u^*$, où $u\to\bar{u}$ est la conjugaison complexe: l'idéal $U(\tilde{\mathbf{g}})(e_{n+1}-2i\pi)$ n'est pas stable par $u\to u^T$, mais par $u\to u^*$. Pour unifier la théorie, nous écrirons dorénavant les actions à droite de $U(\mathbf{g})$ comme des actions antilinéaires à gauche.

De même, on note $\mathscr{S}(G, \omega)$ l'espace des $\varphi\in C^\infty(\tilde{G}, \mathbf{C})$ t.q. $\varphi(x_1, ..., x_{n+1})=e^{-2i\pi x_{n+1}}\varphi(x_1, ..., x_n, 0)$ et $\varphi|_{\mathbf{R}^n}\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$. On voit que la formule $\varphi \to \int_{\mathbf{R}} \varphi(x_1, ..., x_n, x_{n+1}+\tau)\, e^{2i\pi\tau}\, d\tau$ fait de $\mathscr{S}(G, \omega)$ un quotient de $\mathscr{S}(\tilde{G})$. Identifiant G à l'hyperplan $x_{n+1}=0$ de $\tilde{G}$, on obtient:

$$\varphi_1 * \varphi_2(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_1(xy^{-1})\, \varphi_2(y)\, e^{2i\pi a(xy^{-1}, y)}\, dy_1 \cdots dy_n$$

où a est le 2-cocycle intégré associé à ω (cf. n° 4.5).

L'interprétation du point de vue de la théorie des représentations est évidente: l'action de $\mathscr{S}(\tilde{G})$ dans un $\tilde{G}$-module tempéré E passe au quotient en une action de $\mathscr{S}(G, \omega)$, si et seulement si $\exp(\mathbf{R}e_{n+1})$ agit par le caractère $e^{2i\pi\tau}$. En particulier, nous noterons $\hat{G}^{\omega}$ l'ensemble des $(\mathscr{H}, \sigma) \in \tilde{G}^{\wedge}$ où $\exp(\mathbf{R}e_{n+1})$ agit par $e^{2i\pi\tau}$. De même que l'action régulière droite $\varphi \to \varphi * e_j$ de e_j sur $\mathscr{S}$ se fait par $-X_j$, l'action régulière droite de $\tilde{\mathbf{g}}$ sur $\mathscr{S}(G, \omega)$ se fait par les $-\tilde{X}_j$.

4.7. Le lemme suivant nous sera utile au n° 5.6.

Lemme. *Soit J un idéal de $U(\mathbf{g}, \omega)$, $\mathscr{S} = \mathscr{S}(G, \omega)$.*

(i) *On a $J * \mathscr{S} = \mathscr{S} * J$.*

(ii) *Soit $N = J * \mathscr{S} = \mathscr{S} * J$. Alors N est un idéal de $\mathscr{S}$, et $N^{\infty} = \bigcap_{k \geq 1} N^k$ est stable sous l'action de tous les opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux sur G.*

Démonstration. (a) On remarque que l'action adjointe de $\tilde{\mathbf{g}}$ sur $U(\tilde{\mathbf{g}})$ passe au quotient en une action de $\mathbf{g}$, d'où une action ajointe de $\mathbf{g}$ sur $U(\mathbf{g}, \omega)$. Soit F un sous-espace vectoriel $\mathrm{ad}(\mathbf{g})$-stable de dimension finie de J engendrant J comme idéal à droite. Alors il est clair que l'image de l'application canonique $u \otimes \varphi \to u * \varphi$ de $F \otimes \mathscr{S}$ dans $\mathscr{S}$ est égale à $J * \mathscr{S}$. Or l'application $u \otimes \varphi \to u * \varphi$ est un $\tilde{G}$-morphisme si l'on fait agir $\tilde{G}$ sur F par l'action adjointe. D'autre part le produit tensoriel d'un $\tilde{G}$-module tempéré par un $\tilde{G}$-module de dimension finie à sous-quotients simples triviaux est encore tempéré. Donc on a une action à gauche de $\mathscr{S}(\tilde{G})$ sur $F \otimes \mathscr{S}$, et l'application $u \otimes \varphi \to u * \varphi$ est un $\mathscr{S}(\tilde{G})$-morphisme. Alors $J * \mathscr{S}$ est un sous- $\mathscr{S}(\tilde{G})$-module à gauche de $\mathscr{S}$, comme image d'un $\mathscr{S}(\tilde{G})$-morphisme, et comme l'action à gauche de $\mathscr{S}(\tilde{G})$ sur $\mathscr{S}$ passe au quotient en une action de $\mathscr{S}$, $J * \mathscr{S}$ est un sous- $\mathscr{S}$-module à gauche de $\mathscr{S}$. En outre le théorème de Dixmier-Malliavin rappelé au n° 1.6.1 nous dit que $\mathscr{S}(\tilde{G}) * (F \otimes \mathscr{S}) = F \otimes \mathscr{S}$, d'où $\mathscr{S} * (J * \mathscr{S}) = J * \mathscr{S}$.

Reprenant le raisonnement pour l'action à droite on a de même $(\mathscr{S} * J) * \mathscr{S} = \mathscr{S} * J$. D'où $J * \mathscr{S} = \mathscr{S} * (J * \mathscr{S}) = (\mathscr{S} * J) * \mathscr{S} = \mathscr{S} * J$.

(b) D'après (a), N est un idéal de $\mathscr{S}$. Identifions $U(\mathbf{g}, \omega)$ à la sous-algèbre de $\mathbf{C}[x_1, ..., x_n, \partial/\partial x_1, ..., \partial/\partial x_n]$ engendrée par les opérateurs $\tilde{X}_j$, $1 \leq j \leq n$, introduits au n° 4.6. Alors l'action régulière droite de $u \in U(\mathbf{g}, \omega)$

sur $\varphi \in \mathscr{S}$ est donnée par $\varphi * u = u^*(\varphi)$, où $u \to u^*$ est l'involution de $U(\mathbf{g}, \omega)$ (cf. n° 4.6). Comme il est clair que $U(\mathbf{g})$ et $\mathbf{C}[x_1, ..., x_n]$ engendrent $\mathbf{C}[x_1, ..., x_n, \partial/\partial x_1, ..., \partial/\partial x_n]$, il suffira de prouver que N^∞ est stable sous l'action de $\mathbf{C}[x_1, ..., x_n]$.

Nous allons démontrer par récurrence sur j l'assertion plus précise suivante:

(∗) Soit $\mathbf{C}[x_1, ..., x_j]_k$ le sous-espace de $\mathbf{C}[x_1, ..., x_j]$ formé des polynômes de degré $\leqslant k$, $k \in \mathbf{N}$. Alors pour tout $q \in \mathbf{N}$ on a:

$$\mathbf{C}[x_1, ..., x_j]_k N^m \subset N^q \qquad \text{pour} \quad m \gg 0.$$

Faisons-le d'abord pour $j = 1$. Il suffit de prouver que si $q \in \mathbf{N}$ est donné on a $x_1 N^m \subset N^q$ pour $m \gg 0$. Or d'après le n° 4.5 on a $(xy^{-1})_1 = x_1 - y_1$, ce qui entraîne aussitôt que $x_1(\varphi * \psi) = (x_1 \varphi) * \psi + \varphi^* + \varphi^*(x_1 \psi)$ pour tous $\varphi, \psi \in \mathscr{S}$. En d'autres termes, la multiplication par x_1 définit une dérivation de $\mathscr{S}$; alors $x_1 N^q \subset N^{q-1}$, donc le résultat est immédiat.

Passons au cas général. Ecrivons comme au n° 4.5. $(xy^{-1})_j = x_j - y_j - a_j(xy^{-1}, y)$, où l'on peut écrire $a_j(x, y) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbf{N}^{j-1}} A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$ puisque $a_j(x, y)$ ne dépend que de $x_1, ..., x_{j-1}, y_1, ..., y_{j-1}$. On a alors:

$$x_j(\varphi * \psi) = (x_j \varphi) * \psi + \varphi * (x_j \psi) + \sum_{\alpha, \beta} A_{\alpha\beta}(x^\alpha \varphi) * (x^\beta \psi).$$

Si maintenant m est assez grand pour que $x^\alpha N^m$ et $x^\beta N^m$ soient contenus dans N^q pour tous les (α, β) tels que $A_{\alpha\beta} \neq 0$, et qu'en outre $m \geqslant q$, on aura bien $x_j(N^{2m}) \subset N^q$, d'où notre assertion. C.Q.F.D.

4.8. *Remarque.* Si G est un groupe de Lie connexe quelconque, le raisonnement fait en (a) en remplaçant $\mathscr{S}$ par C_c^∞ montre que $J * C_c^\infty(G) = C_c^\infty(G) * J$ pour tout idéal bilatère J de $U(\mathbf{g})$.

4.9. Nous allons maintenant donner une description du dual $\hat{G}^\omega$ d'un "groupe de Lie tordu." Cette description semblera peut-être compliquée, mais l'approche "par approximations successives" que nous suivrons est exactement celle qui s'introduit d'elle-même dans l'analyse des représentations tempérées irréductibles de (G, ω).

Nous appellerons "paramètres" certaines suites $\lambda = (\lambda_j)_{j \in J}$ de nombres réels, où J est une partie de $\{1, ..., n\}$ (nous dirons dans un instant quelles sont les suites permises). Nous dirons qu'un paramètre λ' prolonge λ si $J \subset J'$ et $\lambda'_j = \lambda_j$ pour $j \in J$. A tout paramètre λ nous allons associer:

(i) une partie (fermée) $\hat{G}^\omega_\lambda$ de $\hat{G}^\omega$;

(ii) une suite centralisante régulière $(\theta_j)_{j \in J}$ de $U(\mathbf{g}, \omega) = U$, engendrant un idéal premier P_λ (rappelons qu'une suite $(a_1, ..., a_s)$ d'éléments d'un anneau A est dite centralisante régulière, si pour tout $1 \leqslant t \leqslant s$ l'élément a_t est central et non-diviseur de 0 dans l'anneau quotient $A/(a_{t+1}, ..., a_s)$; ici on ordonne les θ_j pour l'ordre naturel sur J). Nous notons alors $U_\lambda = U/P_\lambda$;

(iii) une algèbre de convolution $\mathscr{S}_\lambda = \mathscr{S}/N_\lambda$, avec $N_\lambda = \mathscr{S} * P_\lambda = P_\lambda * \mathscr{S}$ (nous montrerons que N_λ est un idéal fermé de $\mathscr{S}$).

Nous montrerons que $\mathscr{S}_\lambda$ est isomorphe à algèbre $\mathscr{S}(H, \beta)$ d'un groupe de Lie tordu (H, β) convenable, et que U_λ est isomorphe à l'algèbre $U(\mathbf{h}, \beta)$ correspondante. Nous montrerons que $\hat{G}^\omega_\lambda = \{(\mathscr{H}, \sigma) \in \hat{G}^\omega$ t.q. $N_\lambda * \mathscr{H} = 0\}$.

Il faut se représenter les $\hat{G}^\omega_\lambda$ comme des "sous-variétés" (algébriques) particulièrement simples du dual $\hat{G}^\omega$; alors $\mathscr{S}_\lambda$ est l'algèbre des fonctions de Schwartz sur $\hat{G}^\omega_\lambda$, et U_λ est l'algèbre enveloppante correspondante.

Nous dirons qu'un paramètre λ est maximal s'il ne possède pas de prolongements stricts; nous verrons que cela équivaut à ce que $\hat{G}^\omega_\lambda$ soit réduit à un point. En fait, il sera clair que les paramètres maximaux sont en correspondance bijective avec les éléments de $\hat{G}^\omega$, et que pour λ quelconque les éléments de $\hat{G}^\omega_\lambda$ sont en correspondance bijective avec les prolongements maximaux de λ.

Bien entendu, la paramétrisation obtenue n'est pas véritablement différente de la méthode des orbites de Kirillov. On peut vérifier que si l'on complète les paramètres maximaux par des zéros pour les coordonnées non définies, et qu'on les identifie alors au point $\lambda_1 e_1^* + \cdots + \lambda_n e_n^*$ de $\mathbf{g}^*$, on obtient exactement un point et un seul dans chaque orbite coadjointe.

4.10. Nous allons maintenant décrire les suites permises, et construire les objets annoncés en (i), (ii) et (iii) ci-dessus. Nous procédons par récurrence sur dim $(\mathbf{g})$. Si $\dim(\mathbf{g}) = 0$, il n'y a rien à dire: seule la suite vide est permise et $\mathscr{S}_\varnothing = \mathbf{C}$. On suppose donc $n > 0$.

D'une manière générale, la suite vide est toujours permise (c'est parfois la seule), et $\mathscr{S}_\varnothing = \mathscr{S}$, $U_\varnothing = U$.

(a) Supposons que $\omega(\mathbf{g}, e_n) = 0$. Alors pour tout $\lambda_n \in \mathbf{R}$, la suite à un élément $\lambda = (\lambda_n)$ est permise. L'ensemble $\hat{G}^\omega_\lambda$ correspondant est l'ensemble des $(\mathscr{H}, \sigma) \in \hat{G}^\omega$ où $\exp(\mathbf{R}e_n)$ agit par le caractère $e^{2i\pi\lambda_n\tau}$.

Pour clarifier la situation, il convient d'effectuer une cotransformée de Fourier partielle en la variable x_n, qui s'écrit:

$$\bar{\mathscr{F}}_n \varphi(x_1, ..., x_{n-1}, t) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(x)\, e^{2i\pi t x_n}\, dx_n.$$

Cherchons l'expression du produit de convolution dans ces nouvelles variables. Il est clair que $\omega(\mathbf{g}, e_n) = 0$ équivaut au fait que l'idéal

$\mathbf{R}e_n \oplus \mathbf{R}e_{n+1}$ soit central dans $\tilde{\mathbf{g}}$ (notations 4.5). On vérifie alors sans mal que le produit dans $\tilde{G}$ s'écrit $xy = z$ avec:

$$z_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} + a(x, y)$$

$$z_n = x_n + y_n + a_n(x, y)$$

où a est le cocycle intégré associé à ω introduit au n° 4.5, ne dépendant maintenant que de $x_1, ..., x_{n-1}, y_1, ..., y_{n-1}$, donc vu comme 2-cocycle sur $G/\exp(\mathbf{R}e_n)$, et où a_n est le 2-cocycle sur $G/\exp(\mathbf{R}e_n)$ associé à G.

Alors on voit facilement que le produit dans $\mathscr{S}$ se fait "point par point" en la variable t, et que pour t fixé on obtient le produit de convolution de $\mathscr{S}(G/\exp(\mathbf{R}e_n), \omega + t\omega_n)$, où ω_n est le 2-cocycle sur $\mathbf{g}/\mathbf{R}e_n$ associé à $\mathbf{g}$. En d'autres termes, on a la formule:

$$\varphi_1 * \varphi_2(x_1, ..., x_{n-1}, t)$$
$$= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \varphi_1(xy^{-1}, t)\, \varphi_2(y, t)\, e^{2i\pi(a(xy^{-1}, y) + ta_n(xy^{-1}, y))}\, dy_1 \cdots dy_{n-1}$$

où $y = y_1, ..., y_{n-1}$ et xy^{-1} est calculé dans $G/\exp(\mathbf{R}e_n)$.

Il est clair que $(\mathscr{H}, \sigma) \in \hat{G}^{\omega}_{\lambda}$ si et seulement si $\varphi \in \mathscr{S}$ agit dans $\mathscr{H}$ par l'intermédiaire de $\bar{\mathscr{F}}_n(x_1, \lambda_n) \in \mathscr{S}(G/\exp(\mathbf{R}e_n), \omega + \lambda_n\omega_n)$. En d'autres termes, on voit que $\hat{G}^{\omega}_{\lambda}$ s'identifie à $\hat{G}'^{\omega'}$, où $G' = G/\exp(\mathbf{R}e_n)$, $\omega' = \omega + \lambda_n\omega_n \in Z^2(\mathbf{g}', \mathbf{R})$.

Considérons l'élément $\theta_n = e_n - 2i\pi\lambda_n$ de $U(\mathbf{g}, \omega)$. Il est manifestement central, et après transformation de Fourier son action dans $\mathscr{S}$ se fait par $2i\pi(t - \lambda_n)$. On voit donc que le noyau de la surjection canonique $\mathscr{S}(G, \omega) \to \mathscr{S}(G', \omega')$ définie par l'évaluation en $t = \lambda_n$ n'est autre que $N_\lambda = \theta_n * \mathscr{S} = \mathscr{S} * \theta_n$. Si l'on pose $P_\lambda = U(\mathbf{g}, \omega)\, \theta_n$, on aura bien $N_\lambda = P_\lambda * \mathscr{S} = \mathscr{S} * P_\lambda$ et $U(\mathbf{g}, \omega)/P_\lambda = U(\mathbf{g}', \omega')$, d'où toutes les propriétés annoncées.

La définition des suites permises est maintenant immédiate: $\lambda = (\lambda_j)_{j \in J}$ est permise si et seulement si $J = \emptyset$ ou $n \in J$ et $\lambda' = (\lambda_j)_{j \in J' = J - \{n\}}$ est permise pour $\mathscr{S}(G', \omega')$, avec G' et ω' comme ci-dessus. Si $(\theta'_j)_{j \in J'}$ est la suite centralisante régulière construite par hypothèse de récurrence, on prend pour θ_j le relèvement canonique de θ'_j dans $U(\mathbf{g}, \omega)$ (ici on considère la base de $U(\mathbf{g}, \omega)$ formée des monômes ordonnées en les e_j, $j < n$, et θ_n, et on identifie $U(\mathbf{g}', \omega')$ au sous-espace vectoriel engendré par les monômes ne contenant pas θ_n). Complétant avec θ_n, on obtient de façon évidente une suite centralisante régulière avec les propriétés voulues, toutes les assertions se vérifiant au niveau de $\mathscr{S}(G', \omega')$ et de $U(\mathbf{g}', \omega')$.

(b) Supposons que $\omega(\mathbf{g}, e_n) \neq 0$. Nous dirons alors que $\mathscr{S}(G, \omega)$ nécessite un changement de variables.

Nous allons construite canoniquement une algèbre de Lie tordue $(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{k}, \beta)$, où $\mathbf{k}$ est un sous-quotient de $\mathbf{g}$ de dimension $n-2$, et où $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{k}$ sont orthogonaux pour β, de telle sorte que $\mathscr{S}(G, \omega) \simeq \mathscr{S}(\mathbf{R}^2 \times K, \beta)$,

$U(\mathbf{g}, \omega) \simeq U(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{k}, \beta)$, et cela bien que les algèbres de Lie $\mathbf{g}$ et $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{k}$ ne soient pas isomorphes en général. De fait, dans la décomposition $\mathbf{R}^2 \oplus \mathbf{k}$, β s'écrira $\beta_1 \oplus \beta_2$, où β_2 est un 2-cocycle sur $\mathbf{k}$ et β_1 le 2-cocycle standard sur $\mathbf{R}^2$, définie par $\beta_1(e_1, e_2) = 1$; on aura donc des décompositions:

$$\mathscr{S}(\mathbf{R}^2 \times K, \beta) \simeq \mathscr{S}(\mathbf{R}^2, \beta_1) \hat{\otimes} \mathscr{S}(K, \beta_2)$$

$$U(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{k}, \beta) \simeq U(\mathbf{R}^2, \beta_1) \otimes U(\mathbf{k}, \beta_2)$$

où l'on voit facilement que les algèbres $\mathscr{S}(\mathbf{R}^2, \beta_1)$ et $U(\mathbf{R}^2, \beta_1)$ sont respectivement isomorphes à l'algèbre $\mathscr{W}$ du paragraphe 3, et à l'algèbre de Weyl W_1 d'indice 1 sur C.

Voici comment on procède. Soit j le plus grand indice tel que $\omega(\mathbf{g}_j, e_n) = 0$. Alors $\omega(e_j, e_n) \neq 0$. En multipliant au besoin e_j par $1/\omega(e_j, e_n)$ on peut supposer que $\omega(e_j, e_n) = 1$. Soit $\mathbf{h}$ l'orthogonal de $\mathbf{R}e_n$ pour ω. En remplaçant au besoin e_i par $e_i - \omega(e_i, e_n)\, e_j$ pour $i < j$ on peut supposer que $\mathbf{h} = \oplus_{i \neq j} \mathbf{R}e_i$; en particulier $\mathbf{h}$ se trouve ainsi muni d'un épinglage. On pose $\mathbf{k} = \mathbf{h}/\mathbf{R}e_n$ avec son épinglage évident; β_2 est le 2-cocycle sur $\mathbf{k}$ défini par $\omega|_{\mathbf{h}}$; comme on l'a dit, on définit β sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{k}$ en complétant β_2 par le 2-cocycle canonique sur $\mathbf{R}^2$.

Définissons maintenant les isomorphismes annoncés. Nous utiliserons $x, y, ...$ pour désigner des $(n-2)$-uplets $(x_1, ..., \hat{x}_j, ..., \hat{x}_n)$ sans $j^{\text{ème}}$ ni $n^{\text{ème}}$ coordonnées. Alors H est paramétré par des $(n-1)$-uplets (x, x_n), et $\tilde{H}$ (cf. n° 4.5) par des n-uplets (x, x_n, x_{n+1}). Des produits tels que xy, xy^{-1} seront toujours supposés calculés dans K.

Posons $\mathscr{T} = \mathscr{S}(H, \omega)$, $V = U(\mathbf{h}, \omega)$. Soit π: $V \to U(\mathbf{k}, \beta_2)$ la surjection canonique. Alors il est bien connu que l'on obtient un isomorphisme d'algèbres $V \simeq \mathbf{C}[t] \otimes U(\mathbf{k}, \beta_2)$ en posant:

$$v(t) = \pi(\exp(-te_j)\, v) \qquad \text{pour } v \in V.$$

Comme nous l'avons montré dans [6, lemme 2.7], la même formule établit un isomorphisme d'algèbres de Fréchet involutives entre $\mathscr{T}$ et $\mathscr{S}(\mathbf{R}, \mathscr{S}(K, \beta))$ à condition de remplacer π par la projection canonique $\mathscr{T} \to \mathscr{S}(K, \beta)$ qui s'écrit:

$$\pi(\varphi)(x) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(x, x_n)\, dx_n.$$

En identifiant $\mathscr{S}(K, \beta)$ à $\mathscr{S}(\mathbf{R}^{n-2})$ à l'aide de l'épinglage de $\mathbf{k}$ on associe donc à $\varphi \in \mathscr{T}$ la fonction:

$$t \to \pi(\exp(-te_j)\, \varphi) \in \mathscr{S}(\mathbf{R}, \mathscr{S}(\mathbf{R}^{n-2})).$$

Il s'agit d'expliciter cette formule. Nous allons d'abord calculer $\bar{\mathscr{F}}_n(\exp(-te_j)\, \varphi) \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^{n-1})$ (pour t fixé), que nous évaluerons ensuite au point $\tau = 0$, en désignant par τ la variable de Fourier.

Pour calculer $\exp(-te_j)\,\varphi$, le mieux est de se placer sur H et d'interpréter $\mathscr{T}$ comme l'espace des restrictions à l'hyperplan $x_{n+1}=0$ des fonctions différentiables sur H vérifiant $\varphi(x, x_n, x_{n+1}+y_{n+1})= e^{-2i\pi y_{n+1}}\varphi(x, x_n, x_{n+1})$ et telles que $\varphi|_{x_{n+1}=0}\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^{n-1})$ (cf. n° 4.6). On a alors $\exp(-te_j)\ \varphi(x, x_n, 0)=\varphi(\exp(te_j)(x, x_n, 0)\ \exp(-te_j))$; nous devons donc calculer exp $(te_j)(x, x_n, 0)\ \exp(-te_j)$ dans $\tilde{H}$, puis le ramener à l'hyperplan $x_{n-1}=0$ à l'aide de la relation de covariance vérifiée par φ.

Posons $\exp(te_j)\ (x, x_n, 0)\ \exp(-te_j)=(\exp(te_j)\,x\,\exp(-te_j),\ z_n(t, x, x_n),\ z_{n+1}(t, x, x_n))$, et introduisons comme au n° 4.4 le champ de vecteurs Z_j sur $\tilde{H}$ associé à l'action adjointe de e_j. Alors z_n et z_{n+1} s'obtiennent en intégrant les équations différentielles:

$$\dot{z}_n(s, x, x_n)=Z_{j,n}(\exp(se_j)\,x\,\exp(-se_j))$$
$$\dot{z}_{n+1}(s, x, x_n)=Z_{j,n+1}(\exp(se_j)\,x\,\exp(-se_j),\ z_n(s, x, x_n))$$

entre 0 et t avec la condition initiale $z_n=x_n$, $z_{n+1}=0$.

En utilisant le fait que l'on peut écrire $Z_{j,n+1}(x, x_n)=x_n+Z'_{j,n+1}(x)$ où $Z'_{j,n+1}$ ne dépend plus de x_n, on obtient aisément les formules:

$$z_n(t, x, x_n)=x_n+A_n(t, x)$$
$$z_{n+1}(t, x, x_n)=tx_n+A'(t, x)$$

avec $A_n(t, x)=\int_0^t Z_{jn}(\exp(se_j)\,x\,\exp(-se_j))\,ds$ et $A'(t, x)=\int_0^t(A_n(s, x)+Z'_{j,n+1}(\exp(se_j)\,x\,\exp(-se_j)))\,ds$.

On aboutit ainsi à la formule:

$$\begin{aligned}&\exp(te_j)(x, x_n, 0)\exp(-te_j)\\ &\quad=(\exp(te_j)\,x\,\exp(-te_j),\ x_n+A_n(t, x),\ tx_n+A'(t, x))\end{aligned}$$

d'où finalement:

$$\begin{aligned}&(\exp(-te_j)\ \varphi(x, x_n))\\ &\quad=e^{-2i\pi(tx_n+A'(t,x))}\ \varphi(\exp(te_j)\,x\,\exp(-te_j),\ x_n+A_n(t, x))\end{aligned}$$

et donc:

$$\begin{aligned}&\mathscr{F}_n(\exp(-te_j)\ \varphi)(x, \tau)\\ &=\int_{\mathbf{R}}(\exp(-te_j)\ \varphi)(x, x_n)\,e^{2i\pi\tau x_n}\,dx_n\\ &=e^{-2i\pi A'(t,x)}\int_{\mathbf{R}}\varphi(\exp(te_j)\,x\,\exp(-te_j),\ x_n+A_n(t, x))\,e^{2i\pi(\tau-t)\,x_n}\,dx_n\\ &=e^{-2i\pi(A'(t,x)+(\tau-t)\,A_n(t,x))}\,\mathscr{F}_n\varphi(\exp(te_j)\,x\,\exp(-te_j),\ \tau-t).\end{aligned}$$

En faisant $\tau = 0$, cela donne:

$$\pi(\exp(-te_j)\,\varphi)(x) = e^{-2i\pi(A'(t,x) - tA_n(t,x))}\bar{\mathscr{F}}_n\varphi(\exp(te_j)\,x\exp(-te_j), -t)$$

ce qui montre bien que l'on a un isomorphisme d'espace de Fréchet $\mathscr{T} \to \mathscr{S}(\mathbf{R}, \mathscr{S}(\mathbf{R}^{n-2}))$ obtenu par composition de $\bar{\mathscr{F}}_n$, du changement de variables $(x, t) \to (\exp(te_j)\,x \,\exp(-te_j), -t)$ et de la multiplication par l'exponentielle imaginaire pure $e^{-2i\pi(A'(t,x) - tA_n(t,x))}$, opérations qui toutes préservent l'espace $\mathscr{S}$.

Ce qui compte pour nous est de remarquer qu'en outre ces trois isomorphismes préservent l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux, vue comme algèbre d'endomorphisme de $\mathscr{T}$.

Notons μ: $V \to \mathbf{C}[t] \otimes U(\mathbf{k}, \beta_2)$, et encore μ: $\mathscr{T} \to \mathscr{S}(\mathbf{R}, \mathscr{S}(K, \beta_2))$ les isomorphismes que l'on vient de définir. Les formules:

$$\mu(v) = \pi(\exp(-te_j)\,v), \qquad \mu(\varphi) = \pi(\exp(-te_j)\,\varphi)$$

montrent aussitôt que ces deux isomorphismes sont compatibles, en ce sens que $\mu(v * \varphi) = \mu(v) * \mu(\varphi)$ pour tous $v \in V$, $\varphi \in \mathscr{T}$ si l'on définit $\mu(v) * \mu(\varphi)(t) = \mu(v)(t) * \mu(\varphi)(t)$ comme l'action "point par point."

L'intérêt de l'opération est que $\exp(\mathbf{R}e_j)$ n'agit plus maintenant que sur la variable t (par translation). Si l'on passe alors à algèbre $\mathscr{S}$, identifiée comme espace de Fréchet à $\mathscr{S}(\mathbf{R}, \mathscr{T})$, et que l'on effectue la transformation μ sur le facteur $\mathscr{T}$, on voit que l'on obtient la même algèbre que si l'on était parti de $\mathscr{S}(\mathbf{R}^2 \times K, \beta)$ (en remplaçant e_j par e_1 et e_n par e_2). Ainsi, pour retrouver $\mathscr{S}(\mathbf{R}^2 \times K, \beta)$ à partir de $\mathscr{S}$, il suffit d'appliquer μ à l'argument $\mathscr{T}$, de changer t en $-t$ et d'effectuer une transformation de Fourier en sens inverse sur la variable t.

En résumé, nous avons établi deux isomorphismes compatibles v: $\mathscr{S} \to \mathscr{S}(\mathbf{R}^2 \times K, \beta)$, v: $U \to U(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{k}, \beta)$ qui de plus préservent l'algèbre de tous les opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux.

La définition des suites permises est maintenant immédiate: la suite $(\lambda_j)_{j \in J}$ est permise si et seulement si la suite $(\lambda_j, \lambda_n, \lambda_1, ..., \hat{\lambda}_j, ..., \hat{\lambda}_n)$ est permise pour $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{k}$.

Cela ne nous ramène pas encore dans tous les cas à l'hypothèse de récurrence; il est clair en fait que l'alternative est la suivante: (a) au bout d'un nombre fini de changements de variable on tombe dans le cas (a) de l'algorithme, ce qui nous conduit à l'hypothèse de récurrence, ou (b) après un nombre fini de changements de variable on obtient un isomorphisme $\mathscr{S} \simeq \mathscr{S}(\mathbf{R}^{2m}, \beta)$ où β est la 2-forme alternée canonique sur $\mathbf{R}^{2m}$, definissant le groupe de Heisenberg de dimension $2m+1$.

Dans ce cas, par définition la seule suite permise sera la suite vide (ce qui correspond au fait que $(\mathbf{R}^{2m})^{\wedge\beta}$ est réduit à un seul élément). Il est alors facile de vérifier a posteriori qu'en cas de changement de variables une suite $\lambda = (\lambda_k)_{k\in J}$ est permise si et seulement si ni j ni n n'appartiennent à J, et si λ est permise en tant que paramètre de $\mathscr{S}(K, \beta_2)$. La construction de la suite centralisante régulière $(\theta_k)_{k\in J}$ avec les propriétés annoncées se fait simplement par transport de structure; là encore il s'agit en fait de la construction pour $\mathscr{S}(K, \beta_2)$, "tensorisée" par $\mathscr{W} = \mathscr{S}(\mathbf{R}^2, \beta_1)$ dans le cas de $\mathscr{S}$, par $W_1 = U(\mathbf{R}^2, \beta_1)$ dans le cas de U.

4.11. De la définition même de l'algorithme ci-dessus, il résulte aussitôt qu'un paramètre λ est maximal si et seulement si $\hat{G}^{\omega}_{\lambda}$ est réduit à un point $(\mathscr{H}, \sigma)$ de $\hat{G}^{\omega}$. De plus on voit que cette circonstance ne peut se produire que si $\mathscr{S}_{\lambda} \simeq \mathscr{S}(\mathbf{R}^{2m}, \beta)$ où $m \in \mathbf{N}$ et où β est la 2-forme alternée canonique sur $\mathbf{R}^{2m}$, et $U_{\lambda} \simeq W_m$, l'algèbre de Weyl d'indice m. Dans ce cas P_{λ} est donc le noyau de l'action de U dans $\mathscr{H}_{\infty}$ (puisque $P_{\lambda}\mathscr{H}_{\infty} = 0$ et que W_m est simple), et $N_{\lambda} = \mathscr{S} * P_{\lambda}$ est le noyau de l'action de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{H}$ [6, th. 3.5].

5. Représentations irréductibles tempérées différentiables dans le cas général

5.1. Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant:

Théorème. *Soit (E, ρ) un G-module tempéré différentiable et topologiquement irréductible. Alors il existe une unique représentation unitaire irréductible $\mathscr{H}$ de G telle que $E \simeq \mathscr{H}_{\infty}$.*

5.2. La démonstration occupera toute la suite du paragraphe. L'unicité est bien sûr évidente: si $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}'$ sont deux représentations unitaires irréductibles de G, on a $\mathscr{H}_{\infty} \simeq \mathscr{H}'_{\infty}$ si et seulement si $\mathscr{H} \simeq \mathscr{H}'$ (cf. [14, cor. 3.5]).

Notre démonstration repose sur l'étude de l'annulateur de E dans $\mathscr{S}$; en fait nous allons montrer qu'il existe une représentation unitaire irréductible $\mathscr{H}$ de G telle que E soit annulé par $M^{\infty} = \bigcap_{n\geqslant 0} M^n$, où M est l'annulateur de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{S}$. Le théorème s'en déduira aussitôt à l'aide des résultats du paragraphe 3, et de ceux de [6].

Nous voudrions signaler que suivant une remarque de J. Ludwig il est possible de donner une démonstration plus simple du th. 5.1 (utilisant de toutes façons les résultats du paragraphe 3). Nous tenons néanmoins à conserver notre version, car à notre sens elle donne un plan d'attaque général pour toute question de nature infinitésimale sur $\hat{G}$. Un exemple en est fourni par the th. 5.16, pour lequel nous ne connaissons pas d'autre démonstration, et par la remarque 5.17 qui en découle.

5.3. Rappelons (cf. [11, chap. I, par. 1]) qu'une déformation (formelle) d'une algèbre associative A sur $\mathbf{C}$ est la donnée d'une loi d'algèbre sur l'espace vectoriel $A[[t]]$ telle que:

(i) l'application canonique $A[[t]] \to A$ est un morphisme d'algèbres.

(ii) $A[[t]]$ est en fait une $\mathbf{C}[[t]]$-algèbre pour l'action évidente de $\mathbf{C}[[t]]$.

Nous ne supposons pas nécessairement que A possède une unité; si c'est le cas, on imposera à $1 \in A[[t]]$ d'être élément unité dans $A[[t]]$.

Comme on peut le vérifier facilement, une déformation de A est entièrement connue lorque l'on connait le produit de deux éléments "constants": si a et b sont dans A, leur produit dans $A[[t]]$ est de la forme:

$$a \cdot b(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(a, b)\, t^k$$

où $c_0(a, b) = ab$ est le produit dans A, et où les c_k, $k \geqslant 1$, sont des applications bilinéaires vérifiant certaines "conditions de cocycle" traduisant l'associativité de $A[[t]]$. Le produit de deux éléments quelconques $a = \sum_0^\infty a_k t^k$ et $b = \sum_0^\infty b_l t^l$ de $A[[t]]$ s'écrit alors:

$$\begin{aligned} c &= \sum_{s=0}^{\infty} t^s \sum_{k+l=s} a_k \cdot b_l = \sum_{s=0}^{\infty} t^s \sum_{k+l=s} \left(\sum_{r=0}^{\infty} c_r(a_k, b_l)\, t^r \right) \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{k+l+m=s} c_m(a_k, b_l) \right) t^s \end{aligned}$$

Si A est une algèbre de Fréchet, $A[[t]] \simeq A^{\mathbf{N}}$ est muni d'une structure naturelle d'espace de Fréchet, et on voit que l'on obtient une algèbre de Fréchet en imposant aux c_k d'être continus (nous dirons parfois par abus de langage que les c_k sont les cocycles de la déformation; bien entendu, en général seul c_1 est un 2-cocycle de Hochschild).

5.4. Nous avons introduit au paragraphe 4, n° 4.9 et 4.10, certaines suites $(\lambda_j)_{j \in J}$, $J \subset \{1, ..., n\}$ de nombres réels, paramétrant certaines "sous-variétés" $\hat{G}_\lambda^\omega$ du dual d'un groupe de Lie nilpotent tordu (G, ω). A chaque paramètre λ, nous avons associé un idéal premier P_λ de $U(\mathbf{g}, \omega)$, engendré par une suite centralisante régulière $(\theta_j)_{j \in J}$, un idéal fermé $N_\lambda = P_\lambda * \mathscr{S}$ de $\mathscr{S}$, et l'algèbre $\mathscr{S}_\lambda = \mathscr{S}/N_\lambda$. Nous allons maintenant étudier l'algèbre $\hat{\mathscr{S}}_\lambda = \mathscr{S}/N_\lambda^\infty$, où comme d'habitude $N_\lambda^\infty = \bigcap_{m \in \mathbf{N}} N_\lambda^{m+1}$; ces algèbres joueront un rôle essentiel dans la démonstration du théorème 5.1. De même que nous avons interprété $\mathscr{S}_\lambda$ comme l'algèbre des "fonctions différentiables" sur $\hat{G}_\lambda^\omega$, nous interprétons $\hat{\mathscr{S}}_\lambda$ comme l'algèbre des jets de fonctions différentiables le long de la sous-variété $\hat{G}^{\omega}_{\lambda}$ de $\hat{G}^{\omega}$. En particulier, lorsque le paramètre λ est maximal, correspondant à un point $(\mathscr{H}, \sigma)$ de $\hat{G}^{\omega}$, nous retrouvons l'algèbre des jets de fonctions différentiables au point $(\mathscr{H}, \sigma)$ que nous avions définie dans [6] (dans un contexte non tordu, mais la généralisation est immédiate).

Nous dirons qu'un paramètre $\lambda' = (\lambda'_j)_{j \in J'}$ est un prolongement minimal de λ, si λ' est un prolongement de λ et $\# J' = \# J + 1$. Vu la définition des paramètres permis au n° 4.10, il est clair que si λ est un paramètre quelconque avec $\# J = s$, il y a une unique suite $\lambda^{(0)} = \varnothing < \lambda^{(1)} < \cdots < \lambda^{(s)} = \lambda$ de paramètres telle que pour tout $1 \leqslant k \leqslant s$, $\lambda^{(k)}$ soit un prolongement minimal de $\lambda^{(k-1)}$: $\lambda^{(k)}$ est simplement défini par la suite des k dernières coordonnées de λ.

5.5. LEMME. *Soit λ un paramètre minimal de $\hat{G}^{\omega}$ (i.e., $\# J = 1$). Alors tous les idéaux N^{m+1}_{λ}, $m \in \mathbf{N}$, sont fermés dans $\mathscr{S}$, et $\hat{\mathscr{S}}_{\lambda} = \mathscr{S}/N^{\infty}_{\lambda}$ est une déformation formelle de $\mathscr{S}_{\lambda}$ au sens du n° 5.3. De plus, on peut choisir l'identification $\hat{\mathscr{S}}_{\lambda} \simeq \mathscr{S}_{\lambda}[[t]]$ de telle manière que les cocycles de la déformation soient combinaison linéaire finie d'applications de la forme:*

$$(\varphi_1, \varphi_2) \to (u\varphi_1) * (v\varphi_2)$$

où u et v sont des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux dans l'identification $\mathscr{S}_{\lambda} \simeq \mathscr{S}(\mathbf{R}^{n-1})$ donnée par l'algorithme du n° 4.10.

Démonstration. (a) Supposons $J = \{j\}$ avec $j \neq n$; il est clair que ceci équivaut à $\omega(\mathbf{g}, e_n) \neq 0$. Nous sommes donc dans le cas (b) du n° 4.10. Dans ce cas, l'algorithme commence par un changement de variables, c'est-à-dire par un isomorphisme canonique $\mathscr{S}(G, \omega) \simeq \mathscr{S}(\mathbf{R}^2 \times K, \beta) = \mathscr{S}(\mathbf{R}^2, \beta_1) \hat{\otimes} \mathscr{S}(K, \beta_2)$, où $\beta = \beta_1 \oplus \beta_2$ est la somme directe du 2-cocycle canonique sur $\mathbf{R}^2$ et d'un 2-cocycle sur une algèbre de Lie $\mathbf{k}$ de dimension $n-2$. Par définition, le paramétrage de $\mathscr{S}_{\lambda}$ se déduit alors par transport de structure de celui de $\mathscr{S}_{\mu}$, où μ est le paramètre de $(\mathbf{R}^2 \times K)^{\wedge \beta}$ correspondant à λ. Cela transforme J en $\{j+1\}$ ou en $\{j+2\}$. Après un nombre fini de changements de variable, qui comme nous l'avons signalé au n° 4.10, préservent l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux, nous pouvons donc supposer que $J = \{n\}$.

(b) Dans ce cas, on commence par effectuer une cotransformée de Fourier par rapport à la dernière variable. Privilégiant la variable de Fourier, on peut écrire:

$$\mathscr{S} \simeq \mathscr{S}(\mathbf{R}, \mathscr{S}(\mathbf{R}^{n-1}))$$

et on a vu que dans ce cas la surjection canonique $\mathscr{S} \to \mathscr{S}_{\lambda}$ s'obtient simplement par évaluation au point $t = \lambda_n$. Le générateur canonique θ_n de P_{λ} que nous avons construit est $\theta_n = e_n - 2i\pi\lambda_n$. En variables de Fourier, il agit par multiplication par $2i\pi(t-\lambda_n)$. On voit donc que $N_\lambda^{m+1} = \{\varphi \in \mathscr{S}$ telque $\varphi^{(k)}(\lambda_n) = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant m\}$ est bien un idéal fermé de $\mathscr{S}$.

D'après le lemme de Borel classique, on obtient une surjection d'espaces de Fréchet $\mathscr{S} \to \mathscr{S}_\lambda[[t-\lambda_n]]$ en associant à $\varphi \in \mathscr{S}$ sa série de Taylor au point $t = \lambda_n$; le noyau de cette surjection est N_λ^∞ (ceci ne fait pas intervenir la structure d'algèbre de $\mathscr{S}$). Comme il est clair que cette identification fait de $\mathscr{S}/N_\lambda^\infty$ une $\mathbf{C}[[t-\lambda_n]]$ – algèbre, on voit que $\mathscr{S}/N_\lambda^\infty$ vérifie les deux conditions (i) et (ii) du n° 5.3, donc est bien une déformation formelle de $\mathscr{S}_\lambda$.

(c) Reste à décrire la forme des cocycles. Pour cela, il suffit de savoir calculer le produit dans $\hat{\mathscr{S}}_\lambda$ de deux éléments φ_1 et φ_2 de $\mathscr{S}_\lambda$. Notons encore φ_1 et φ_2 deux éléments de $\mathscr{S}$ égaux respectivement à φ_1 et φ_2 au voisinage de $t = \lambda_n$. Alors au voisinage de λ_n, la formule du produit établie au n° 4.10(a) donne:

$$\begin{aligned}\varphi_1 * \varphi_2(t) &= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \varphi_1(xy^{-1})\,\varphi_2(y)\,e^{2i\pi(ta_n(xy^{-1},y)+a(xy^{-1},y))}\,dy\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-\lambda_n)^k}{k!} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \varphi_1(xy^{-1})\,\varphi_2(y)(2i\pi a_n(xy^{-1},y))^k\\ &\quad\times e^{2i\pi(\lambda_n a_n(xy^{-1},y)+a(xy^{-1},y))}\,dy\end{aligned}$$

en remplaçant l'exponentielle par son développement en série (on voit donc que pour de telles fonctions "constantes" φ_1 et φ_2 la fonction $\varphi_1 * \varphi_2$ est analytique en t au voisinage de λ_n).

En développant $a_n(x, y)$ en combinaison linéaire finie de monômes $x^\alpha y^\beta = f_\alpha(x) f_\beta(y)$, où f_γ est la fonction $x \to x^\gamma$, on voit que pour tout $k \in \mathbf{N}$ l'application $(\varphi_1, \varphi_2) \to c_k(\varphi_1, \varphi_2)$ est combinaison linéaire finie d'applications de la forme:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{R}^{n-1}} f_\alpha(xy^{-1})\,\varphi_1(xy^{-1})\,f_\beta(y)\,\varphi_2(y)\,e^{2i\pi(\lambda_n a_n(xy^{-1},y)+a(xy^{-1},y))}\,dy\\ &\quad= (x^\alpha\varphi_1) * (x^\beta\varphi_2)\end{aligned}$$

où $*$ est le produit dans $\mathscr{S}_\lambda$. Les c_k sont donc bien de la forme annoncée (on a même seulement des opérateurs de multiplication, à ce niveau).

5.6. LEMME. *Soit λ un paramètre de $\hat{G}^\omega$ avec $J \neq \varnothing$, et soit $\lambda^{(1)}$ le paramètre minimal prolongé par λ* (cf. n° 5.4). *Pour alléger les notations, notons avec un indice* 1 *les objets $\mathscr{S}_1, N_1, P_1, \ldots$ associés à $\lambda^{(1)}$. Soit T_λ l'idéal de $\mathscr{S}_1$ correspondant à λ. Alors dans l'identification $\hat{\mathscr{S}}_1 \simeq \mathscr{S}_1[[t-\lambda_n]]$ définie au lemme* 5.5, *on a $N_\lambda^\infty/N_1^\infty \simeq T_\lambda^\infty[[t-\lambda_n]]$.*

Démonstration. Il est clair que $T_\lambda = N_\lambda/N_1$ est l'image de N_λ dans $\mathscr{S}_1$. Donc l'image de N_λ^∞ dans $\mathscr{S}_1$ est T_λ^∞, ce qui montre que si $\varphi = \Sigma\varphi_k(t-\lambda_n)^k$ appartient à $N_\lambda^\infty/N_1^\infty$, on a $\varphi_0 \in T_\lambda^\infty$. D'autre part, le lemme 4.7 dit que N_λ^∞ est stable par $\partial_t = \partial/\partial t$; par passage au quotient, cela reste vrai pour $N_\lambda^\infty/N_1^\infty$. Donc $\varphi_k = (1/k!)(\partial_t^k\varphi)_0 \in T_\lambda^\infty$ pour tout $k\in\mathbf{N}$, et on a bien $N_\lambda^\infty/N_1^\infty \subset T_\lambda^\infty[[t-\lambda_n]]$. Réciproquement, soit $\varphi \in T_\lambda^\infty[[t-\lambda_n]]$, et montrons que $\forall m\in\mathbf{N}$, $\varphi \in N_\lambda^{m+1}/N_1^\infty$. Puisque $N_1^{m+1} \subset N_\lambda^{m+1}$ de manière évidente, il suffit de montrer que l'on peut modifier φ par l'image dans $\hat{\mathscr{S}}_1$ d'un élément de N_λ^{m+1} pour avoir $\varphi_0 = \varphi_1 = \cdots = \varphi_m = 0$.

Nous aurons besoin pour cela d'utiliser l'assertion $(*)$ que nous avons établie dans la démonstration du lemme 4.7. En nous rappelant que l'opérateur ∂_t correspond à la multiplication par $2i\pi x_n$ dans les coordonnées initiales, on peut affirmer l'existence d'une suite d'entiers $\mu_0 = m+1 \leqslant \mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_m$ telle que:

$$\begin{array}{lll} \partial_t^j N_\lambda^{\mu_1} \subset N_\lambda^{\mu_0} & \text{pour} & 0\leqslant j\leqslant m \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial_t^j N_\lambda^{\mu_m} \subset N_\lambda^{\mu_{m-1}} & \text{pour} & 0\leqslant j\leqslant m. \end{array}$$

Comme $\varphi \in T_\lambda^\infty \subset T_\lambda^{\mu_m}$, on peut trouver $\psi^{(1)} \in N_\lambda^{\mu_m}$ telle que $(\varphi-\psi^{(1)})_0 = 0$; et comme $(\varphi-\psi^{(1)})_j = (1/j!)(\partial_t^j(\varphi-\psi^{(1)}))_0$ on voit que $(\varphi-\psi^{(1)})_j \in T_\lambda^{\mu_{m-1}}$ pour $1\leqslant j\leqslant m$. En particulier, $(\varphi-\psi^{(1)})_1 \in T_\lambda^{\mu_{m-1}}$; on peut donc modifier $\psi^{(1)}$ par un élément de $(t-\lambda_n)\,N_\lambda^{\mu_{m-1}} \subset N_\lambda^{\mu_{m-1}}$, pour obtenir $\psi^{(2)} \in N_\lambda^{\mu_{m-1}}$ telle que $(\varphi-\psi^{(2)})_0 = (\varphi-\psi^{(2)})_1 = 0$; cette fois les $(\varphi-\psi^{(2)})_j$, $2\leqslant j\leqslant m$, appartiendront à $T_\lambda^{\mu_{m-2}}$. Au bout de m étapes, on trouvera $\psi^{(m)} \in N_\lambda^{\mu_1}$ telle que $(\varphi-\psi^{(m)})_j = 0$ pour $0\leqslant j\leqslant m-1$, et $(\varphi-\psi^{(m)})_m \in N_\lambda^{\mu_0} = N_\lambda^{m+1}$; modifiant $\psi^{(m)}$ une dernière fois, on obtient bien un élément ψ de N_λ^{m+1} tel que $(\varphi-\psi)_j = 0$ pour $0\leqslant j\leqslant m$. C.Q.F.D.

5.7. COROLLAIRE. *Pour tout paramètre λ de $\hat{G}^\omega$, l'idéal N_λ^∞ est fermé dans $\mathscr{S}$.*

Démonstration. Cela résulte aussitôt du lemme 5.6, par récurrence sur $\dim(G)$; en effet N_1^∞ est fermé dans $\mathscr{S}$ d'après le lemme 5.5, et T_λ^∞ est fermé dans $\mathscr{S}_1$ par hypothèse de récurrence, donc $T_\lambda^\infty[[t-\lambda_n]] = N_\lambda^\infty/N_1^\infty$ est fermée dans $\hat{\mathscr{S}}_1$, d'où le corollaire.

5.8. COROLLAIRE (Structure des algèbres $\hat{\mathscr{S}}_\lambda$). (a) *Soit $\hat{\mathscr{T}}_1 = \mathscr{S}_1/T_\lambda^\infty$; alors $\hat{\mathscr{S}}_\lambda \simeq \hat{\mathscr{T}}_1[[t-\lambda_n]]$ est une déformation formelle de $\hat{\mathscr{T}}_1$; les cocycles de cette déformation sont déduits de ceux de $\hat{\mathscr{S}}_1$ (cf. lemme 5.5) par passage au quotient.*

(b) *Écrivons $\lambda^{(0)} = \varnothing < \lambda^{(1)} < \cdots < \lambda^{(s)} = \lambda$ comme au n° 5.4. Pour $1\leqslant l\leqslant s$ notons $\mathscr{S}_l, N_l, P_l, \ldots$, les objets associés à $\lambda^{(l)}$, et soit $\hat{\mathscr{T}}_l =$*

$\mathscr{S}_l/(N_\lambda/N_l)^\infty$ (*si* $\mathscr{S}_l$ *est identifié à* $\mathscr{S}(H, \beta)$ *suivant l'algorithme du n°* 4.10, $\hat{\mathscr{T}}_l$ *est le quotient de* $\mathscr{S}(H, \beta)$ *associé au paramètre de* $\hat{H}^\beta$ *défini par les* $s-l$ *premières coordonnées de* λ). *Alors on a une décomposition de* $\hat{\mathscr{S}}_\lambda$ *en système projectif* (*fini*):

$$\hat{\mathscr{S}}_\lambda = \varprojlim \hat{\mathscr{T}}_l$$

pour les applications canoniques $\hat{\mathscr{T}}_l \to \hat{\mathscr{T}}_{l+1}$ *avec* $\hat{\mathscr{T}}_0 = \hat{\mathscr{S}}_\lambda$, $\hat{\mathscr{T}}_s = \mathscr{S}_\lambda$, *et* $\hat{\mathscr{T}}_l$ *est une déformation formelle de* $\hat{\mathscr{T}}_{l+1}$ *pour* $0 \leqslant l \leqslant s-1$. *On peut donc écrire* $\hat{\mathscr{T}}_\lambda = \mathscr{S}_\lambda[[t_j - \lambda_j]]_{j \in J}$ *comme déformation formelle itérée de* $\mathscr{S}_\lambda$.

(c) *Si* $\mathscr{S}_\lambda$ *est identifié à* $\mathscr{T}(H, \beta)$ *suivant l'algorithme du n°* 4.10, *les cocycles donnant les déformations ci-dessus sont combinaison linéaire finie d'applications de la forme :* $(\varphi, \psi) \to (u\varphi) * (v\psi)$, *où* u *et* v *sont des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux en les variables de* H *et en les* t_j *déjà définis.*

Démonstration. (a) Cela résulte immédiatement du lemme 5.6, puisque $\hat{\mathscr{S}}_\lambda = \mathscr{S}/N_\lambda^\infty \simeq \mathscr{S}_1[[t-\lambda_n]]/T_\lambda^\infty[[t-\lambda_n]] \simeq \hat{\mathscr{T}}_1[[t-\lambda_n]]$, ce qui définit $\hat{\mathscr{S}}_\lambda$ comme déformation-quotient de $\hat{\mathscr{S}}_1$.

(b) Cela résulte d'une application répétée de (a), puisque l'on sait que les $\mathscr{S}_l$ sont toujours des algèbres de fonctions de Schwartz sur des algèbres de Lie nilpotentes tordues convenables.

(c) On a vu que les changements de variable effectués dans l'algorithme du n° 4.10 préservaient l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux. Donc la condition écrite est stable par application de l'algorithme, et résulte alors d'une application répétée du lemme 5.5, compte tenu de ce qui précède.

5.9. Nous sommes maintenant en mesure d'entreprendre la démonstration du théorème 5.1.

LEMME. *Soit* (E, ρ) *un G-module tempéré différentiable et topologiquement irréductible. Soit* λ *un paramètre de* $\hat{G}$ *tel que l'action de* $\mathscr{S}$ *dans* E *passe au quotient en une action de* $\hat{\mathscr{S}}_\lambda$. *Alors si* λ *n'est pas maximal, il existe un unique prolongement minimal* λ' *de* λ (cf. n° 5.4) *tel que l'action de* $\mathscr{S}$ *passe au quotient en une action de* $\hat{\mathscr{S}}_{\lambda'}$.

Démonstration. Supposons λ non maximal, et soit $\mathscr{S}_\lambda \simeq \mathscr{S}(H, \beta) \simeq \mathscr{S}(\mathbf{R}^m)$ suivant l'algorithme du n° 4.10. Quitte à faite un nombre fini de changements de variable, ce qui n'affecte pas la description de $\hat{\mathscr{S}}_\lambda$ comme déformation formelle itérée de $\mathscr{S}_\lambda$ donnée au cor. 5.8, on peut supposer que $\beta(\mathbf{h}, e_m) = 0$.

On effectue alors la cotransformation de Fourier partielle $\hat{\mathscr{F}}_m$ pour écrire $\mathscr{S}_\lambda$ sous la forme $\mathscr{S}(\mathbf{R}, \mathscr{S}(\mathbf{R}^{m-1}))$ avec un produit “fibre à fibre.” Ceci permet de définir pour tout ouvert Ω de $\mathbf{R}$ l'idéal $\mathscr{I}(\Omega)$ de $\mathscr{S}_\lambda$, formé des éléments à support compact contenu dans Ω. Il est clair que l'idéal $\mathscr{I}(\Omega)$ est stable sous l'action des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux.

Soit j_1 le premier élément de J, $t_1 = t_{j_1}$, $\lambda_1 = \lambda_{j_1}$. Dans les notations du corollaire 5.8, on a donc $\hat{\mathscr{T}}_{s-1} = \mathscr{S}_\lambda[[t_1 - \lambda_1]]$. D'après ce qui précède, on voit immédiatement que $\mathscr{I}(\Omega)[[t_1 - \lambda_1]]$ est un idéal de $\hat{\mathscr{T}}_{s-1}$, et il est clairement stable sous l'action de tous les opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux en les variables de H et en t_1. Donc la construction se poursuit de proche en proche, et on voit que $\hat{\mathscr{I}}(\Omega) = \mathscr{I}(\Omega)[[t_j - \lambda_j]]_{j \in J}$ est un idéal de $\hat{\mathscr{S}}_\lambda$. De plus, il est évident que si Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts disjoints de $\mathbf{R}$ on a $\hat{\mathscr{I}}(\Omega_1)\ \hat{\mathscr{I}}(\Omega_2) = 0$, et que $\hat{\mathscr{I}}(\mathbf{R})$ est dense dans $\hat{\mathscr{S}}_\lambda$.

Nous dirons que $E|_\Omega = 0$, si $\hat{\mathscr{I}}(\Omega)\, E = 0$. Nous voudrions maintenant définir le support de E comme le complémentaire du plus grand ouvert Ω tel que $E|_\Omega = 0$. Comme l'utilisation de partitions de l'unité ne semble pas possible, nous allons directement démontrer que si $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, et si $\hat{\mathscr{I}}(\Omega_i)\, E = 0$ $\forall i \in I$, alors $\hat{\mathscr{I}}(\Omega)\, E = 0$. Soit $\varphi = \Sigma \varphi_\alpha (t - \lambda)^\alpha \in \hat{\mathscr{I}}(\Omega)$. Alors pour tout $x \in E_1$ on a $\varphi x = \lim_{k \to \infty} y_k$, où $y_k = (\sum_{|\alpha| \leqslant k} \varphi_\alpha (t - \lambda)^\alpha)\, x$. On voit donc qu'il suffit de démontrer que $\mathscr{I}(\Omega)[t_j - \lambda_j]_{j \in J}$ annule E (noter qu'a priori $\mathscr{I}(\Omega)[t_j - \lambda_j]_{j \in J}$ n'est pas un idéal de $\hat{\mathscr{S}}_\lambda$). Comme les $t_j - \lambda_j$ agissent aussi dans E, par l'intermédiaire des éléments θ_j correspondants dans $U(\mathbf{g}, \omega)$, on voit qu'il suffit de montrer que $\mathscr{I}(\Omega)$ annule E. Mais à ce niveau on peut utiliser un argument de partition de l'unité, et écrire $\mathscr{I}(\Omega) = +_{i \in \mathscr{I}}\, \mathscr{I}(\Omega_i)$ (sommes finies). Donc $\mathscr{I}(\Omega)\, E = 0$, et notre assertion est prouvée.

Une fois en possession de la notion de support d'un $\hat{\mathscr{S}}_\lambda$-module, on peut démontrer comme dans le cas commutatif (cf. n° 2.4) qu'en fait supp(E) est réduit à un point: supp$(E) = \{\lambda_m\}$. En d'autres termes, si Ω est le complémentaire de λ_m, l'action de $\hat{\mathscr{S}}_\lambda$ dans E passe au quotient par l'idéal $\hat{\mathscr{I}}(\Omega)$. Soit λ' le prolongement minimal de λ défini par λ_m. Alors $\hat{\mathscr{S}}_{\lambda'}$ est un quotient de $\hat{\mathscr{S}}_\lambda$, le noyau étant $N_{\lambda'}^\infty / N_\lambda^\infty$. Pour achever la démonstration il ne nous reste donc plus qu'à prouver que $\hat{\mathscr{I}}(\Omega)$ est dense dans $N_{\lambda'}^\infty / N_\lambda^\infty$. Comme toute la situation se décompose en produit, l'on se ramène à démontrer que $\mathscr{I}(\Omega)$ est dense dans l'espace des $\varphi \in \mathscr{S}_\lambda$ dont la série de Taylor en $t = \lambda_m$ est nulle, ce qui est bien connu.

5.10. *Fin de la démonstration du théorème* 5.1 (jusqu'au n° 5.12). Soit toujours (E, ρ) un G-module tempéré différentiable et topologiquement irréductible.

Par applications répétées du lemme 5.9, en partant du paramètre vide, on voit qu'il existe un (unique) paramètre maximal λ de $\hat{G}$ tel que l'action de $\mathscr{S}$ dans E passe au quotient en une action de l'algèbre $\hat{\mathscr{S}}_\lambda$. Nous avons vu au n° 4.11 que dans ce cas $P_\lambda = I$ est le noyau de l'action de $U(\mathbf{g})$ dans

$\mathscr{H}_\infty$, où $(\mathscr{H}, \sigma)$ est la représentation unitaire irréductible correspondant à λ, et que $N_\lambda = \mathscr{S} * I = M$ est le noyau de l'action de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{H}$. Donc nous avons démontré qu'il existe une unique représentation unitaire irréductible de G telle que l'action de $\mathscr{S}$ dans E passe au quotient en une action de $\mathscr{S}/M^\infty = \mathscr{A}[[t_j - \lambda_j]]_{j \in J}$, en notant $\mathscr{A} = \mathscr{S}/M = \mathscr{S}_\lambda$. Rappelons que $\mathscr{A} \simeq \mathscr{W}$ si $\mathscr{H}$ est de dimension infinie, $\mathscr{A} = \mathbf{C}$ si $\mathscr{H}$ est de dimension 1 (cela résulte de l'algorithme du n° 4.10; cf. aussi [6, th. 3.3]).

Dans le cas d'un paramètre maximal, nous avons démontré dans [6, prop. 5.6] qu'en fait toutes les puissances finies M^{m+1} de M sont des idéaux fermés de $\mathscr{S}$; cela nous avait conduit à considérer le système projectif d'algèbres de Fréchet $\varprojlim \mathscr{S}/M^{m+1}$. La décomposition $\mathscr{S}/M^\infty = \mathscr{A}[[t_j - \lambda_j]]_{j \in J}$ constitue déjà une sorte de "lemme de Borel" non-commutatif; il sera cependant commode de l'énoncer sous une forme plus intrinsèque comme suit:

5.11. Lemme ("Lemme de Borel"). *L'injection canonique $\mathscr{S}/M^\infty \to \varprojlim \mathscr{S}/M^{m+1}$ est un isomorphisme d'algèbres de Fréchet.*

Démonstration. Notons $\tau_1, ..., \tau_s$ les indéterminées $(t_j - \lambda_j)_{j \in J}$ prises dans leur ordre naturel, de sorte que l'espace de Fréchet $\mathscr{S}/M^\infty$ est identifié à $\mathscr{A}[[\tau_1, ..., \tau_s]]$. Pour chaque multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^s$, on a donc une "application-coefficient" $\varphi \to \varphi_\alpha$, surjection continue de $\mathscr{S}/M^\infty$ vers $\mathscr{A}$. Nous allons démontrer que pour chaque α fixé on a $\varphi_\alpha(M^{m+1}) = 0$ pour $\gg 0$.

Soit $\theta_1, ..., \theta_s$ la suite centralisante régulière engendrant I construite au n° 4.10. Comme notre assertion garde un sens pour les groupes de Lie nilpotents tordus, on peut raisonner par récurrence sur dim (G). Dans les notations du corollaire 5.8, on peut considérer $\mathscr{S}/M^\infty$ comme déformation de $\hat{\mathscr{S}}_1 \simeq \mathscr{A}[[\tau_1, ..., \tau_{s-1}]]$. Soit $\alpha' = (\alpha_1, ..., \alpha_{s-1})$, et M_1 l'idéal M/N_1 de $\mathscr{S}_1$, de sorte que $\hat{\mathscr{S}}_1 = \mathscr{S}_1/M_1^\infty$. Ecrivons $\varphi = \sum_{k \in \mathbf{N}} \varphi_k \tau_s^k$. On doit démontrer que pour $m \gg 0$, $(\varphi_{\alpha_s})_{\alpha'} = 0$ dès que $\varphi \in M^{m+1}$. Par hypothèse de récurrence, il suffit pour cela de prouver que si $m' \in \mathbf{N}$ est donné, il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $(\varphi_{\alpha_s}) \in M_1^{m'+1}$ dès que $\varphi \in M^{m+1}$. Or on a clairement $\varphi_0 \in M_1^{m+1}$ si $\varphi \in M^{m+1}$; et pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\varphi_k = (1/k!)(\partial^k/\partial\tau_s^k)_0$. Il suffit donc de prouver que $(\partial/\partial\tau_s)^{\alpha_s} M^{m+1} \subset M^{m'+1}$ pour $m \gg 0$. C'est le problème que nous avons déjà eu à résoudre dans la démonstration du lemme 5.6; nous avons vu que cela résultait de l'assertion $(*)$ établie dans la démonstration du lemme 4.7.

Pour conclure la démonstration du lemme, on procède comme suit. Soit $\psi = (\psi_m)_{m \in \mathbf{N}} \in \varprojlim \mathscr{S}/M^{m+1}$, où chaque ψ_m est un représentant du précédent. On veut montrer que ψ est l'image d'un élément $\varphi \in \mathscr{S}/M^\infty$. Pour cela, on commence par choisir $\varphi^{(0)} \in \mathscr{S}/M^\infty$ arbitraire se projetant sur ψ_0. Puis on choisit $\varphi^{(1)} \in M/M^\infty$ tel que $\varphi^{(0)} + \varphi^{(1)}$ se projette sur ψ_1, ... et ainsi de suite on choisit $\varphi^{(m)} \in M^m/M^\infty$ tel que $\varphi^{(0)} + \cdots + \varphi^{(m)}$ se projette sur ψ_m. D'après ce que l'on vient de démontrer, pour $\alpha \in \mathbf{N}^s$ fixé, on a $(\varphi^{(m)})_\alpha = 0$ pour $m \gg 0$. C'est exactement la condition qu'il faut pour que la série $\sum_{m \in \mathbf{N}} \varphi^{(m)}$ converge sans $\mathscr{S}/M^\infty$ vers un élément φ qui répond évidemment à la question.

5.12. Nous pouvons maintenant appliquer à $\mathscr{S}/M^\infty$ les résultats de [6] sur l'algèbre $\varprojlim \mathscr{S}/M^{n+1}$. En particulier, d'après [6, th. 1.5] on a une décomposition de $\mathscr{S}/M^\infty$ comme produit tensoriel d'algèbres de Fréchet $\mathscr{A} \hat{\otimes} C$, où C est un certain anneau local noethérien complet, en général non-commutatif, étudié dans [7]. Ici nous aurons seulement besoin de savoir que C est limite projective de $\mathbf{C}$-algèbres de dimension finie, donc $C \simeq \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ comme espace de Fréchet (car C est de dimension infinie sauf dans le cas trivial où $\dim(G) = 0$).

Dans le cas où $\mathscr{A} = \mathbf{C}$, il résulte immédiatement du lemme 2.3 que tout sous- $\mathscr{S}/M^\infty$-module de E est fermé, donc nul ou égal à E tout entier puisque E est topologiquement irréductible. En d'autres termes, E est un $\mathscr{S}/M^\infty$-module algébriquement simple. Or $\mathscr{S}/M^\infty \simeq C$ n'a qu'un seul idéal à gauche maximal, à savoir son radical $\mathbf{m}$ (cela résulte aussitôt de [7, prop. 4.5.1]), et $C/\mathbf{m} \simeq \mathbf{C}$ est de dimension 1. Donc $\dim(E) = 1$, et E est le caractère unitaire de G correspondant à M.

Supposons maintenant que $\mathscr{A} \simeq \mathscr{W}$. Alors la restriction à $\mathscr{A}$ de l'action de $\mathscr{S}/M^\infty$ définit une action de $\mathscr{W}$ sur E, manifestement non-dégénérée au sens de la définition 3.2 (en effet $\mathscr{S}/M^\infty$ est un $\mathscr{W}$-module non-dégénéré comme produit dénombrable de $\mathscr{W}$-modules non-dégénérés, et alors $\mathscr{W} * E = \mathscr{W} * (\mathscr{S}/M^\infty) * E = (\mathscr{S}/M^\infty) * E = E$). D'après le théorème 3.4, on a donc une décomposition $E = S \hat{\otimes} F$, où S est le $\mathscr{W}$-module simple standard et $F = \mathrm{Hom}_{\mathscr{W}}(S, E)$. En outre on a une action continue de C sur F (lemme 3.13), et il est clair que si F_1 est un sous- C-module fermé de F, $S \hat{\otimes} F_1$ est un sous- $\mathscr{S}/M^\infty$-module fermé de E, donc le C-module F est topologiquement irréductible. Comme précédemment, on en déduit que $\dim(F) = 1$, donc $E \simeq S$ est déjà irréductible comme $\mathscr{W}$-module, et l'action de C dans F passe au quotient par le radical $\mathbf{m}$.

De la description de [6, th. 1.5] il résulte que $\mathscr{A} \hat{\otimes} \mathbf{m} \subset \mathscr{S}/M^\infty$ est égal à M/M^∞. Donc l'action de $\mathscr{S}$ dans E passe en fait au quotient en une action de $\mathscr{S}/M = \mathscr{A}$. Or d'après le th. 3.4, $\mathscr{A}$ n'a qu'une seule représentation topologiquement irréductible non-dégénérée, à savoir $\mathscr{H}_\infty$, d'où $E \simeq \mathscr{H}_\infty$. C.Q.F.D.

5.13. COROLLAIRE (lemme de Schur tempéré). *Soient E_1 et E_2 deux G-modules tempérés topologiquement irréductibles. Alors il n'existe un opérateur d'entrelacement fermé non nul de E_1 vers E_2 que si et seulement si $E_{1\infty} \simeq E_{2\infty} \simeq \mathscr{H}_\infty$. Si cette condition est remplie, l'opérateur d'entrelacement* *est unique à la multiplication par un scalaire non nul près. (Nous disons opérateur fermé pour opérateur fermé non nécessairement borné et densément défini).*

En particulier, si E est un G-module tempéré topologiquement irréductible, il existe $(\mathscr{H}, \sigma) \in \hat{G}$ unique tel qu'il existe un opérateur d'entrelacement fermé non nul de $\mathscr{H}$ vers E; cet opérateur est alors unique à la multiplication par un scalaire non nul près.

Démonstration. La donnée d'un d'entrelacement fermé non nul de E_1 vers E_2 équivaut à la donnée d'un sous- G-module fermé $F \neq 0$ de $E_1 \oplus E_2$, disjoint de E_1 et de E_2. Alors F_∞ définit un opérateur d'entrelacement fermé de $E_{1\infty}$ vers $E_{2\infty}$. Comme les $E_{j\infty}$ sont de la forme $\mathscr{H}_\infty$ pour $(\mathscr{H}_j, \sigma_j) \in \hat{G}$ convenables, le lemme de Schur classique s'applique (cf. [14, th. 3.2]), et on voit qu'il ne peut exister un tel entrelacement que si $E_{1\infty} \simeq E_{2\infty} \simeq \mathscr{H}_\infty$.

Dans ce cas, on peut identifier $E_{1\infty} \oplus E_{2\infty}$ à $\mathscr{H}_\infty \oplus \mathscr{H}_\infty$, et alors l'adhérence dans $E_1 \oplus E_2$ de la diagonale de $\mathscr{H}_\infty \oplus \mathscr{H}_\infty$ fournit l'opérateur d'entrelacement cherché (même démonstration que dans [14, th. 3.2]). L'unicité à la multiplication par un scalaire non nul près résulte de ce que les seuls opérateurs d'entrelacement fermés de $\mathscr{H}_\infty$ vers lui-même sont les scalaires.

5.14. *Remarque.* On voit en particulier que si $E_{1\infty} \simeq E_{2\infty} \simeq \mathscr{H}_\infty$ tous les opérateurs d'entrelacement fermés non nuls de E_1 vers E_2 ont même domaine et même image, et que cet espace est canoniquement muni d'une topologie d'espace de Fréchet qui en fait un G-module tempéré topologiquement irréductible. Il serait raisonnable de noter $E_1 \cap E_2$ ce G-module.

5.15. Corollaire (cf. [13, cor. 3.4.2; 14, cor. 3.4]). *Soit E un G-module tempéré différentiable et topologiquement irréductible. Soit E' un G-module différentiable tempéré quelconque. Alors pour tout $u \in \mathrm{Hom}_G(E, E')$, $u(E)$ est fermé dans E'.*

Démonstration. D'après le th. 5.1, $E \simeq \mathscr{H}_\infty$ pour un $(\mathscr{H}, \sigma) \in \hat{G}$ convenable; en particulier E est annulé par le noyau M de l'action de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{H}_\infty$. Si $\mathscr{S}/M = \mathbf{C}$ il n'y a rien à démontrer. Supposons $\mathscr{S}/M \simeq \mathscr{W}$, et soit E'_1 l'annulateur de M dans E'. D'après le th. 3.4, E'_1 se décompose en $\mathscr{H}_\infty \hat{\otimes} F$ sous l'action de $\mathscr{W}$, donc de $\mathscr{S}$, et l'image de u est de la forme $\mathscr{H}_\infty \hat{\otimes} D$, où D est un sous-espace de dimension 1 de F, donc fermé.

5.16. Voici une autre application du mode de raisonnement qui nous a servi à établir le th. 5.1. Rappelons qu'un idéal P dans une algèbre A est dit premier, si l'algèbre A/P ne contient pas deux idéaux non nuls J_1 et J_2 tels que $J_1 \cdot J_2 = 0$.

THÉORÈME. *Soit P un idéal premier fermé de $\mathscr{S}$. Alors il existe une unique représentation unitaire irréductible $(\mathscr{H}, \sigma)$ de G, de noyau M, telle que $M^{\infty} \subset P$.*

Inversement, l'idéal M^{∞} est premier (et fermé), et dans la décomposition $\mathscr{S}/M^{\infty} \simeq \mathscr{A} \hat{\otimes} C$ rappelée au n° 5.12, on a une correspondance bijective entre idéaux fermés de $\mathscr{S}$ contenant M^{∞}, et idéaux de l'anneau local noethérien complet (non nécessairement commutatif) C. En particulier, on a une correspondance bijective entre idéaux premiers fermés de $\mathscr{S}$ contenant M^{∞}, et idéaux premiers de C.

Démonstration. Pour la première assertion, il suffit de montrer que le lemme 5.9 reste valable si l'on y remplace E par $\mathscr{S}/P$, considéré comme $\mathscr{S}$-module à gauche. Dans les notations de la démonstration du lemme, il s'agit de montrer que $\operatorname{supp}(\mathscr{S}/P) = \{\lambda_m\}$ est réduit à un point. Or comme P est premier, si Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts disjoints de $\mathbf{R}$, et si l'idéal $\hat{\mathscr{I}}(\Omega_1)$ n'annule pas $\mathscr{S}/P$, alors l'idéal $\hat{\mathscr{I}}(\Omega_2)$ annule $\mathscr{S}/P$. Cela n'est possible que si $\operatorname{supp}(\mathscr{S}/P)$ est réduit à un point.

Le fait que l'idéal M^{∞} soit premier résulte du fait que l'anneau C est intègre [7, prop. 4.5.1]. En effet la décomposition $\mathscr{S}/M^{\infty} \simeq \mathscr{W} \hat{\otimes} C$ montre que C s'identifie à $\operatorname{Hom}_{\mathscr{W},\mathscr{W}}(\mathscr{W}, \mathscr{S}/M^{\infty})$ et que la loi d'algèbre sur C n'est autre que la loi canonique définie au lemme 3.13. Alors il est clair que l'on a une correspondance bijective entre idéaux fermés de $\mathscr{S}/M^{\infty}$ et idéaux de C (nécessairement fermés d'après le lemme 2.3 et la noethérianité de C). Si maintenant on a dans $\mathscr{S}/M^{\infty}$ deux idéaux J_1 et J_2 de produit nul, on peut les supposer fermés en les remplaçant par leur adhérence, et l'on obtient donc deux idéaux K_1 et K_2 de C de produit nul, ce qui n'est possible que si l'un des deux est nul.

Le même raisonnement appliqué au quotient de $\mathscr{S}/M^{\infty}$ par un idéal fermé quelconque montre que $P \supset M^{\infty}$ est premier si et seulement l'idéal $\mathfrak{p}$ de C correspondant l'est. C.Q.F.D.

5.17. *Remarque.* Le th. 5.16 permet en fait de donner une version du th. 5.1 pour les G-modules localement convexes topologiquement irréductibles et tempérés en un sens faible. On trouve qu'un tel G-module contient toujours $\mathscr{H}_{\infty}$ comme sous-espace dense et est contenu dans $\mathscr{H}_{-\infty}$ (antidual de $\mathscr{H}_{\infty}$).

6. EXTENSIONS ENTRE MODULES TEMPÉRÉS

Dans ce paragraphe tous les G-modules sont supposés différentiables.

6.1. Notons $\mathbf{Temp}_G$ la catégorie des G-modules (différentiables) tempérés. Comme nous nous sommes limités aux espaces de Fréchet, il semble peu probable que la catégorie $\mathbf{Temp}_G$ possède suffisamment d'objets (relativement) injectifs, au sens de [12, chap. III, déf. 1.2]. En revanche, comme nous allons le voir, elle constitue un cadre excellent pour les raisonnements homologiques.

6.2. Lemme. *Soit F un espace de Fréchet. Alors $\mathscr{S}(G, F)$ avec l'action régulière gauche de G est un objet relativement projectif de* $\mathbf{Temp}_G$.

Démonstration (cf. [2]). Soit p: $A \to B$ une surjection forte de G-modules, avec A et B dans $\mathbf{Temp}_G$. Soit s: $B \to A$ un relèvement de l'espace de Fréchet B dans A, et soit u: $\mathscr{S}(G, F) \to B$ un G-morphisme. On choisit $\chi \in \mathscr{S}$ telle que $\int_G \chi(g)\, dg = 1$. Si $\varphi \in \mathscr{S}(G, F)$ est donné, on pose $\varphi_g(g') = \varphi(gg'^{-1})$, et on définit $v(\varphi)$ par:

$$v(\varphi) = \int_G gsg^{-1}u(\chi\varphi_g)\, dg.$$

Comme l'application $(g, g') \to \chi(g')\, \varphi(gg'^{-1})$ appartient manifestement à $\mathscr{S}(G \times G) = \mathscr{S}(G, \mathscr{S}(G))$, on voit que $g \to u(\chi\varphi_g) \in \mathscr{S}(G, B)$, et alors la définition des G-modules tempérés (déf. 1.2) entraîne que l'application $g \to gsg^{-1}u(\chi\varphi_g)$ appartient à $\mathscr{S}(G, A)$. Donc l'intégrale converge; la vérification du fait que v est un G-morphisme et que $p \circ v = u$ est immédiate.

6.3. Corollaire. *La catégorie* $\mathbf{Temp}_G$ *possède suffisamment de projectifs.*

Démonstration. D'après le théorème de Dixmier-Malliavin rappelé au n° 1.6.1 l'application canonique $\mathscr{S}(G, E) \to E$ donnée par $\rho(\varphi) = \int_G \rho(g)\, dg$ est une surjection (forte, comme on le vérifie aisément).

6.4. Si E_1 et E_2 sont dans $\mathbf{Temp}_G$, le corollaire 6.3 permet de définir les foncteurs $\mathrm{Ext}^*_{G,\mathrm{temp}}(E_1, E_2)$ et $\mathrm{Tor}^{G,\mathrm{temp}}_*(E_1, E_2)$ par les résolutions projectives du premier facteur pour les Ext, de n'importe quel facteur pour les Tor (en utilisant le produit tensoriel projectif). Nous nous proposons maintenant de démontrer que les $\mathrm{Ext}^*_{G,\mathrm{temp}}$ ainsi définis sont en fait les mêmes que les Ext^*_G habituels, définis à l'aide d'une résolution injective du 2ème facteur (cf. [12, chap. III, déf. 1.3]).

6.5. Lemme. *Soit $E \in$* $\mathbf{Temp}_G$, *et soit F un espace de Fréchet. Alors* $\mathrm{Ext}^j_G(\mathscr{S} \hat{\otimes} F, E) = 0$ $\forall j > 0$.

Démonstration. (a) Cas où E est lui-même de la forme $\mathscr{S} \hat{\otimes} M$, et où $G = \mathbf{R}$. On doit alors démontrer que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{R}}(\mathscr{S}(\mathbf{R}, F), \mathscr{S}(\mathbf{R}, M)) = 0$. Soit $\mathbf{g} = \mathbf{R}$ l'algèbre de Lie de G. D'après le théorème de van Est [12, chap. III, par. 7, cor. 7.2] il suffit de prouver que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{g}}(\mathscr{S}(\mathbf{R}, F), \mathscr{S}(\mathbf{R}, M)) = 0$, avec une action de $\mathbf{g}$ par $-d/dt$. Une transformation de Fourier sur les deux membres nous ramène au cas d'une action par multiplication par t. Le raisonnement est alors exactement le même que dans [7, lemme 4.5] (c'est un problème de division de distributions, qui nécessite un peu de soin à cause des conditions de croissance).

(b) Cas où E est quelconque, $\dim(G)=1$. On considère la suite exacte forte $0 \to E_1 \to \mathscr{S}(G, E) \to E \to 0$, où $\mathscr{S}(G, E) \to E$ est l'application canonique. La longue suite exacte de cohomologie correspondante donne une surjection: $\mathrm{Ext}^1_G(\mathscr{S}(G, F), \mathscr{S}(G, E)) \to \mathrm{Ext}^1_G(\mathscr{S}(G, F), E) \to 0$. D'après (a), $\mathrm{Ext}^1_G(\mathscr{S}(G, F), \mathscr{S}(G, E))=0$. Donc $\mathrm{Ext}^1_G(\mathscr{S}(G, F), E)=0$.

(c) Cas où G est quelconque, $j=1$. Alors le lemme dit que toute suite exacte forte de G-modules $0 \to E \to X \to \mathscr{S}(G, F) \to 0$ est scindée sous l'action de G. Comme $\mathscr{S}(G, F)$ est relativement projectif dans la catégorie $\mathbf{Temp}_G$, il suffit pour cela de montrer que le G-module X est tempéré (en effet la régularisation des cocycles, cf. [12, chap. III, par. 1, prop. 1.7] montre aussitôt que X est différentiable). Choisissons un épinglage de $\mathbf{g}$ (déf. 4.1). D'après le lemme 1.7, il suffit de montrer que X est tempéré sous l'action des sous-groupes à un paramètre $\exp(\mathbf{R}e_j)$ de G. Or le choix d'une base coexponentielle à $\mathbf{R}e_j$ dans $\mathbf{g}$ [1, chap. I, n° 3.6] montre aussitôt que le $\exp(\mathbf{R}e_j)$-module $\mathscr{S}(G, F)$ est de la forme $\mathscr{S}(\mathbf{R}, F_1)$, avec $F_1 = \mathscr{S}(Y, F)$, où $Y \simeq \mathbf{R}^{n-1}$ est une sous-variété algébrique de G "supplémentaire" de $\exp(\mathbf{R}e_j)$. D'après (b), on a donc $X \simeq E \oplus \mathscr{S}(G, F)$ sous l'action de $\exp(\mathbf{R}e_j)$, ce qui montre bien que $X|_{\exp(\mathbf{R}e_j)}$ est tempéré.

(d) Cas général. On fait une récurrence sur $\dim G$. D'après (b), on peut supposer $\dim(G)>1$. Choisissons comme dans (c) un épinglage de $\mathbf{g}$. D'après le théorème de van Est déjà cité, nous avons à démontrer la nullité de $H^j\,(\mathbf{g}, \mathrm{Hom}(\mathscr{S}(G, F), E))$ pour tout $j>0$. Considérons la suite spectrale de Hochschild-Serre par rapport à l'idéal $\mathbf{g}_1$ de $\mathbf{g}$. On a:

$$E_2^{pq} = H^p(\mathbf{g}/\mathbf{g}_1, H^q(\mathbf{g}_1, \mathrm{Hom}(\mathscr{S}(G, F), E))).$$

Comme on est dans le cas d'un idéal de codimension 1, la suite spectrale donne en fait naissance à des suites exactes:

$$0 \to E_2^{1,j-1} \to H^j \to E_2^{0j} \to 0.$$

Comme en (c), on voit que si $G_1 = \exp(\mathbf{g}_1)$, le G_1-module $\mathscr{S}(G, F)$ est de la forme $\mathscr{S}(G_1, F_1)$ avec $F_1 \simeq \mathscr{S}(\mathbf{R}, F)$. Par hypothèse de récurrence, on a donc $E_2^{pq}=0$ si $q>0$. Les suites exactes ci-dessus montrent alors que $H^j(\mathbf{g}, \mathrm{Hom}(\mathscr{S}(G, F), E))=0$ pour tout $j \geqslant 2$. Mais on sait déjà que $H^1=0$ d'après (c). C.Q.F.D.

6.6. COROLLAIRE. *Pour E et F dans* $\mathbf{Temp}_G$, *les cohomologies* $\mathrm{Ext}^*_{G,\mathrm{temp}}(E, F)$ *et* $\mathrm{Ext}^*_G(E, F)$ *sont canoniquement isomorphes (nous ne considérons pas de topologie sur les* Ext).

Démonstration. Soit $X_* \to E \to 0$ une résolution forte relativement projective de E avec X_j de la forme $\mathscr{S}(G, F_j)$ $\forall j \geqslant 0$. Alors $0 \to \mathrm{Hom}(E, F) \to \mathrm{Hom}(X_*, F)$ est une résolution du $\mathbf{g}$-module $\mathrm{Hom}(E, F)$, et d'après le lemme les $\mathbf{g}$-modules $\mathrm{Hom}(X_j, F)$ sont acycliques.

D'après le théorème des résolutions acycliques, le complexe $\mathrm{Hom}_{\mathbf{g}}(X_j, F) = \mathrm{Hom}_G(X_j, F)$ calcule donc la $\mathbf{g}$-cohomologie de $\mathrm{Hom}(E, F)$, c'est-à-dire les $\mathrm{Ext}^j_G(E, F)$. C.Q.F.D.

(N.B. Lorsque l'on a appliqué le théorème de van Est, et que l'on oublie comme nous le faisons la topologie sur les Ext, les Ext continus entre E et F s'identifient à la cohomologie du $\mathbf{g}$-module $\mathrm{Hom}(E, F)$ des applications linéaires continues de E vers F, considéré de façon purement algébrique. C'est ce qui justifie l'application du théorème des résolutions acycliques.)

6.7. COROLLAIRE. *Soit $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ une suite exacte forte de G-modules différentiables. Alors E est tempéré si et seulement si E' et E'' le sont.*

Démonstration. La nécessité est évidente (prop. 1.4). Considérons la suffisance. D'après le lemme avec $j = 1$, la surjection canonique $\mathscr{S}(G, E'') \to E''$ se relève en un G-morphisme $\mathscr{S}(G, E'') \to E$, puisque l'obstruction au relèvement se trouve dans $\mathrm{Ext}^1_G(\mathscr{S}(G, E''), E') = 0$. En considérant d'autre part la surjection canonique $\mathscr{S}(G, E') \to E'$, on obtient un G-morphisme $\mathscr{S}(G, E' \oplus E'') \to E$ qui est évidemment surjectif, d'où le résultat d'après la prop. 1.4.

RÉFÉRENCES

1. P. BERNAT *et al.*, "Représentations des groupes de Lie résolubles," Dunod, Paris, 1972.
2. P. BLANC, Projectifs dans la catégorie des G-modules topologiques, *C.R. Acad. Sci. Paris* **289** (1979), 161–163.
3. P. BLANC ET D. WIGNER, Homology of Lie groups and Poincaré duality, *Lett. Math. Phys.* **7** (1983), 259–270.
4. N. BOURBAKI, "Espaces vectoriels topologiques," Chap. 1–5, Masson, Paris, 1981.
5. F. BRUHAT, Représentations induites des groupes de Lie, *Bull. Soc. Math. France* **84** (1956), 97–205.
6. F. DU CLOUX, Jets de fonctions différentiables sur le dual d'un groupe de Lie nilpotent, *Invent. Math.* **88** (1987), 375–394.
7. F. DU CLOUX, Extensions entre représentations unitaires irréductibles des groupes de Lie nilpotents, in Homologie, groupes Ext^n, représentations de longueur finie des groupes de Lie, *Astérisque* **124–125** (1985), 129–212.

8. F. DU CLOUX, Représentations de longueur finie des groupes de Lie résolubles, *Mem. AMS*, à paraître.
9. A. CONNES, Non-commutative differential geometry, *Inst. Hautes Études Sci Publ. Math.* **62** (1986), 257–360.
10. J. DIXMIER ET P. MALLIAVIN, Factorisations de fonctions et de vecteurs indéfiniment différentiables, *Bull. Sci. Math.* (*2*) **102** (1978), 305–330.
11. M. GERSTENHABER, On the deformation of rings and algebras, *Ann. of Math.* **79**, No. 1 (1964), 59–103.
12. A. GUICHARDET, "Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie," Cedic-Fernand Nathan, Paris, 1980.
13. R. HOWE, On a connection between nilpotent groups and oscillatory integrals associated to singularities, *Pacific J. Math.* **73**, No. 2 (1977), 329–363.
14. N. POULSEN, On C^∞-vectors and intertwining bilinear operators for representations of Lie groups, *J. Funct. Anal.* **9** (1970), 87–120.
15. F. TRÈVES, "Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels," Academic Press, New York, 1967.
16. N. WALLACH, Asymptotic expansions of generalized matrix entries of representations of real reductive groups, *in* "Lie Group Representations I," pp. 287–369, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1024, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1983.