ELSEVIER

Discrete Mathematics 150 (1996) 337–345

DISCRETE MATHEMATICS

Une méthode d'énumération des cycles négatifs d'un graphe signé

Dragoş-Radu Popescu

Faculté de Mathématique, Université de Bucarest, Roumanie

Received 20 October 1993; revised 8 December 1994

Résumé

Un graphe signé est un graphe non-orienté êdont les arêtes sont positives ou négatives. Un sous-graphe quelconque sera nommé négatif si il contient un nombre impair d'arêtes négatives. Nous avons élaboré une méthode d'énumération des sous-graphes négatifs d'une famille quelconque des sour-graphes d'un graphe signé. À l'aide de cette méthode nous avons déterminé – dans le cas d'un graphe complet signé quelconque – le nombre des k-cycles négatifs, des k-chaînes négatives et aussi quelques propriétés de divisibilité. Ainsi, pour tout graphe complet signé à n sommets le nombre des k-cycles négatifs ($3 \leqslant k \leqslant n$) est divisible per $2^{k-2-\lfloor \log_2(k-1) \rfloor}$ et le nombre des chaînes négatives à *k sommets* ($2 \leqslant k \leqslant n$) est divisible par $2^{k-1-\lfloor \log_2 k \rfloor}$. Ces évaluations sont les meilleures possibles.

1. Introduction

Le concept d'équilibre défini pour un graphe signé quelconque par Harary [5] tire son origine de théories psycho-sociologiques selon lesquelles des systèmes cognitifs et des groupes sociaux déséquilibrés évoluent vers l'état d'équilibre. Ainsi, dans l'étude des groupes sociaux interviennent des graphes non-orientés dont les arêtes sont positives ou négative, correspondant aux relations réciproques de sympathie ou d'antipathie entre le membres du groupe représentées par les sommets du graphe. Ces graphes sont nommées graphes signés. Un sous-graphe quelconque d'un graphe signé sera nommé négatif si il contient un nombre impair d'arêtes négatives et il sera nommé positif au contraire. Un graphe signé est équilibré si tous ses cycles sont positifs ou, en utilisant la caractérisation de Cartwright et Harary [3], si et seulement si l'ensemble des sommets peut être divisé en deux sous-ensembles (l'un d'elles pouvant être vide) tels que toutes les arêtes qui relient les sommets d'un même ensemble soient positives et les arêtes qui relient les sommets appartenant aux ensembles différents soient négatives. Les psychologues sont intéressés d'une évaluation du degré de déséquilibre d'un groupe social. Une mesure de déséquilibre, d'un graphe signé G est son indice de

SSDI 0012-365X(95)00198-0

déséquilibre, qui est égal, par définition, au rapport $|C^-(G)|/|C(G)|$ où $C^-(G)$ et $C(G)$ sont les ensembles des cycles négatifs respectivement de tous les cycles de G. On voit donc l'intérêt de l'étude du nombre $|C^-(G)|$ des cycles négatifs d'un graphe signé.

Problèmes concernant au sujet de l'équilibre des graphes signés et de l'indice de déséquilibre sont traités dans les ouvrages [1–17] et [19, 20].

Dans cet article nous présentons une méthode d'énumération des cycles négatifs d'un graphe signé et quelques propriétés de divisibilité de ce nombre. En particulièrement nous obtenons une généralisation d'un résultat obtenu par Tomescu [17].

2. Definitions et notations

Un graphe signé G de support S est un graphe simple S dont les arêtes sont positives ou négatives. Un sous-graphe quelconque sera nommé négatif si il contient un nombre impair d'arêtes négatives et il sera nommé positif au contraire. Le graphe simple dont les sommets sont les sommets de G et dont les arêtes sont les arêtes négatives de G sera noté G^-.

Soit une famille quelconque $F(G)$ des sous-graphes d'un graphe signé G. Nous notons par $F^-(G)$ respectivement $F^+(G)$ l'ensemble des sous-graphes négatifs respectivement positifs de $F(G)$. Si $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ sont p chaînes élémentaires de G nous notons par $F(G; Q_1, \ldots, Q_n)$ l'ensemble des sous-graphes de $F(G)$ qui contiennent toutes les p chaînes $Q_1, \ldots, Q_p$.

Nous étudierons dans ce travail les familles des arêtes, des cycles et des k-cycles (des cycles avec k sommets), des chaînes et des k-chaînes (des chaînes avec k sommets) notées respectivement: $E(G)$, $C(G)$, $C_k(G)$, $P(G)$, $P_k(G)$.

Pour tous les graphes simples G_1, G_2 notons par $\binom{G_1}{G_2}$ le nombre des sous-graphes de G_1 isomorphes à G_2. Si le graphe G_2 est composé des p chaînes élémentaires $Q_1, \ldots, Q_p$ ayant les ensemble des sommets deux à deux disjoints nous notons

$$\binom{G_1}{Q_1 \cdots Q_p}$$

au lieu de $\binom{G_1}{G_2}$ ou

$$\binom{G_1}{t_1 \ldots t_p}$$

où t_i représentes le nombre des arêtes de la chaîne Q_i $(i = 1, \ldots, p)$ [12].

3. Nombre des sous-graphes négatifs

Il et bien connu que pour s ensembles $A_1, \ldots, A_s$, leurs différence symétrique, noté $\triangle_{i=1}^{s} A_i$, est l'ensemble de tous les éléments de leur réunion qui appartiennent à un nombre impair des ensembles.

La formule suivante est une analogue du principe d'inclusion et d'exclusion pour la différence symétrique.

Proposition 3.1.

$$\left|\mathop{\triangle}_{i=1}^{s} A_i\right| = \sum_{i=1}^{s} (-2)^{i-1} \sum_{\substack{K \subset \{1,\ldots,s\} \\ |K| = i}} \left|\bigcap_{p\in K} A_p\right|.$$

Dèmonstration. D'après la formule de Jordan on a:

$$\begin{aligned}\left|\mathop{\triangle}_{i=1}^{s} A_i\right| &= \sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ k \text{ impair}}} \sum_{i=k}^{s} (-1)^{i-k}\binom{i}{k} \sum_{\substack{K \subset \{1,\ldots,s\} \\ |K| = i}} \left|\bigcap_{p\in K} A_p\right| \\ &= \sum_{i=1}^{s} \sum_{\substack{k \geqslant 1 \\ k \text{ impair}}} (-1)^{i-k}\binom{i}{k} \sum_{\substack{K \subset \{1,\ldots,s\} \\ |K| = i}} \left|\bigcap_{p\in K} A_p\right| \\ &= \sum_{i=k}^{s} (-2)^{i-1} \sum_{\substack{K \subset \{1,\ldots,s\} \\ |K| = i}} \left|\bigcap_{p\in K} A_p\right|. \qquad \square\end{aligned}$$

Théorème 3.2. *Soit G un graphe signé et F(G) une famille quelconque de sous-graphes de G. Alors:*

$$|F^-(G)| = \sum_{i=1}^{|E^-(G)|} (-2)^{i-1} \sum_{\{e_{j_1},\ldots,e_{j_i}\} \subseteq E^-(G)} |F(G; e_{j_1}, \ldots, e_{j_i})|.$$

Démonstration. La formule résulte immédiatement de la Proposition 3.1 et des observations suivantes:

$$|F^-(G)| = \left|\mathop{\triangle}_{e\in E^-(G)} F(G;e)\right| \quad \text{et} \quad \bigcap_{k=1}^{i} F(G; e_{j_k}) = F(G; e_{j_1}, \ldots, e_{j_i}). \qquad \square$$

4. Cas des graphes complets signés: le nombre des *k*-cycles et des *k*-chaînes négatives

Nous étudierons des graphes complets signés c'est-à-dire des graphes signés de support K_n.

Proposition 4.1. *Pour toutes p chaînes élémentaires $Q_1, \ldots, Q_p$ du graphe complet K_n avec les ensembles de sommets deux à deux disjoints et ayant ensemble t arêtes on a:*

(a) $|C_k(K_n; Q_1, \ldots, Q_p)| = 2^{p-1}(k-t-1)!\binom{n-t-p}{n-p}$, *où* $3 \leqslant k \leqslant n$;

(b) $|P_k(K_n; Q_1, \ldots, Q_p)| = 2^{p-1}(k-t)!\binom{n-t-p}{n-p}$, *où* $2 \leqslant k \leqslant n$ *et* $3 \leqslant n$.

Démonstration. Nous esquisserons la démonstration de la prémière formule [18], l'autre étant similaire.

En contractant chaque chaîne Q_i à un sommet $x_i, i = 1, \dots, p$ on obtient un sous-graphe complet â $n - t$ sommets. Dans ce graphe les sous-graphes complets A qui contiennent tous les sommets $x_1, \dots, x_p$ sont en nombre $\binom{n-t-p}{k-t-p} = \binom{n-t-p}{n-k}$, le nombre des cycles hamiltoniens de chaque sous-graphe A est égal à $(k - t - 1)!/2$ et chaque cycle hamiltonien de chaque sous-graphe A peut être élargi à un k-cycle de K_n contenant les chaînes $Q_1, \dots, Q_p$ dans 2^p modes. Omettant les details la formule (a) résulte. □

Théorème 4.2. *Pour tous graphes complets signés G à n sommets on a les évaluations suivantes:*

$$\text{(a)}\ |C_k^-(G)| = \sum_{t=1}^{k-1} \left[(-2)^{t-1}(k-t-1)! \sum_{p=1}^{t} \left(2^{p-1} \binom{n-t-p}{k-t-p} \times \sum_{\substack{t_1 + \cdots + t_p = t \\ t_i \in \mathbb{N}, t_i \geqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant p}} \binom{G^-}{t_1 \dots t_p} \right) \right] + (-2)^{k-1} \binom{G^-}{k\text{-cycle}}$$

où $k \geqslant 3$;

$$\text{(b)}\ |P_k^-(G)| = \sum_{t=1}^{k-1} \left[(-2)^{t-1}(k-t)! \sum_{p=1}^{t} \left(2^{p-1} \binom{n-t-p}{k-t-p} \times \sum_{\substack{t_1 + \cdots + t_p = t \\ t_i \in \mathbb{N}, t_i \geqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant p}} \binom{G^-}{t_1 \dots t_p} \right) \right]$$

où $k \geqslant 2$.

Démonstrtation. Nous présenteron la démonstration seulement pour la prémière formule, l'autre étant similaire.

Nous notons par $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ l'ensemble $E^-(G)$ des arêtes négatives du graphe G et par $G_{i_1, \dots, i_t}$ le sous-graphe de G induit des arêtes $e_{i_1}, \dots, e_{i_t}$.

D'après le Théorème 3.2 et la Proposition 4.1 on a:

$$|C_k^-(G)| = \sum_{t=1}^{|E^-(G)|} (-2)^{t-1} \sum_{\{e_{i_1}, \dots, e_{i_t}\} \subseteq E^-(G)} |C_k(G; e_{i_1}, \dots, e_{i_t})|$$

où

$$|C_k(G; e_{i_1}, \dots, e_{i_t})| = \begin{cases} 1 & \text{si } t = k \text{ et } G_{i_1, \dots, i_t} \text{ est un } k\text{-cycle} \\ 2^{p-1}(k-t-1)! \dbinom{n-t-p}{k-t-p} & \text{si } t < k \text{ et } G_{i_1, \dots, i_t} \text{ est} \\ & \text{la réunion des } p \text{ chaînes disjointes} \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Donc:

$$|C_k^-(G)| = \sum |C_k(G; e_1)| - 2^1 \sum |C_k(G; e_1, e_2)| + 2^2 \sum |C_k(G; e_1, e_2, e_3)| - \cdots$$
$$\cdots + (-2)^{k-1} \sum |C_k(G; e_1, e_2, \ldots, e_k)|.$$

D'après l'évaluation précédente la dernière somme répresente le nombre des k-cycles du graphe G^-:

$$\sum |C_k(G; e_1, e_2, \ldots, e_k)| = \binom{G^-}{k\text{-cycle}}.$$

Pour $1 \leqslant t \leqslant k-1$, dans chaque somme $\sum |C_k(G; e_1, e_2, \ldots, e_t)|$ nous groupons les termes $|C_k(G; e_{i_1}, \ldots, e_{i_t})|$ associés aux graphes $G_{i_1,\ldots,i_t}$ isomorphes. D'après l'évaluation précédente nous retenons seulement les termes pour lesquels les graphes associés $G_{i_1,\ldots,i_t}$ sont une réunion des chaînes disjointes. Nous ordonnons de manière croissante les groupes ainsi formès d'après le nombre p des chaînes disjointes associés. Chaque terme $|C_k(G; e_{i_1}, \ldots, e_{i_t})|$ d'un groupe correspondant à un graphe composé de p chaînes disjointes est égal à:

$$2^{p-1}(k-t-1)! \binom{n-t-p}{k-t-p}$$

et leur nombre est:

$$\sum_{\substack{t_1 + \cdots + t_p = t \\ t_i \in \mathbb{N}, t_i \geqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant p}} \binom{G^-}{t_1 \ldots t_p}$$

La formule (a) résulte. □

Corollaire 4.3. *Le nombre des cycles négatifs d'un graphe complet signé $|C^-(G)|$ vérifie la formule suivante*:

$$|C^-(G)| = \sum_{t=1}^{n-1} (-2)^{t-1} \sum_{p=1}^{t} 2^{p-1} \left[\sum_{\max(3, t+p) \leqslant k \leqslant n} (k-t-1)! \binom{n-t-p}{k-t-p} \right] \cdot$$
$$\cdot \left[\sum_{\substack{t_1 + \cdots + t_p = t \\ t_i \in \mathbb{N}, t_i \geqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant p}} \binom{G^-}{t_1 \ldots t_p} \right] + \sum_{k=3}^{n} (-2)^{k-1} \binom{G^-}{k\text{-cycle}}.$$

5. Propriétés de divisibilité

Pour $n \in \mathbb{N}$ et p nombre premiere nous notons par $e_p(n)$ l'exposant du nombre p dans la décomposition dans facteurs premiers de $n!$.

Proposition 5.1. *Soit n un nombre naturel fixé et* $k = \lfloor \log_2(n+1) \rfloor$.

(a) *Pour tous* $m \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ *on a*:

$$m - e_2(m) \leqslant \lfloor \log_2(n+1) \rfloor;$$

(b) *Nous avons égalité dans* (a) *pour*:

$$m \in \{2^{k+1} - 1 - 2^i \mid i \in \{i_0, i_0+1, \ldots, k\},\quad i_0 = \lceil \log_2(2^{k+1} - 1 - n) \rceil\}.$$

Démonstration. (a) Soit $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$ et $m = c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0$, $c_i \in \{0, 1\}$, la représentation de m dans la base 2. On a:

$$e_2(m) = \sum_{i=1}^{k} \lfloor m/2^i \rfloor = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} c_j 2^{j-i} = \sum_{j=1}^{k} c_j \sum_{i=1}^{j} 2^{j-i} + c_0 - c_0 = \sum_{j=0}^{k} c_j (2^j - 1)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} c_j 2^j - \sum_{j=0}^{k} c_j = m - (c_0 + c_1 + \cdots + c_k).$$

Donc:

$$m - e_2(m) = c_0 + c_1 + \cdots + c_k.$$

Comme $0 \leqslant m < 2^{k+1} - 1$, au moins l'un des chiffres c_i ($i \in \{0, 1, \ldots, k\}$) est zero d'où: $m - e_2(m) \leqslant k = \lfloor \log_2(n+1) \rfloor$.

(b) Nous avons égalité si et seulement si m a dans sa représentation dans la base 2 exact une chiffre c_i ($i \in \{0, 1, \ldots, k\}$) égale à zero c'est-a-dire si et seulement si m est de la forme: $m = 2^{k+1} - 1 - 2^i$ où $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ et $m \leqslant n$. Donc il faut que nous avons: $k \geqslant i \geqslant \lceil \log_2(2^{k+1} - 1 - n) \rceil = i_0$. □

Corollaire 5.2. (a) *Pour* $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 3$ *on a*:

$$\min_{j=0}^{k-2} \{j + e_2(k - j - 2)\} = k - 2 - \lfloor \log_2(k-1) \rfloor.$$

Le minimum est atteint pour:

$$j \in \{k - 1 - 2^{q+1} + 2^i \mid i \in \{i_0, i_0+1, \ldots, q\},\qquad i_0 = \lceil \log_2(2^{q+1} - k + 1) \rceil\}$$

où $q = \lfloor \log_2(k-1) \rfloor$.

(b) *Pour* $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$ *on a*:

$$\min_{j=0}^{k-2} \{j + e_2(k - j - 1)\} = k - 1 - \lfloor \log_2 k) \rfloor$$

Le minimum est realizé pour:

$$j \in \{k - 2^{q+1} + 2^i \mid i \in \{i_0, i_0+1, \ldots, q\},\qquad i_0 = \lceil \log_2(2^{q+1} - k) \rceil\}$$

où $q = \lfloor \log_2 k \rfloor$.

Démonstration. (a) Notons $k - j - 2 = m$ et $k - 2 = n$ dans la Proposition 5.1.
(b) Notons $k - j - 1 = m$ et $k - 1 = n$ dans la Proposition 5.1. □

Théorème 5.3. *Pour tout graphe complet signé G à n sommets on a*:

$$|C_k^-(G)| \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2^{k-2-\lfloor \log_2(k-1) \rfloor}) \quad où\ 3 \leqslant k \leqslant n;$$

$$|P_k^-(G)| \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2^{k-1-\lfloor \log_2 k \rfloor}) \quad où\ 2 \leqslant k \leqslant n.$$

Demonstration. D'après le Théorème 4.2 on a:

$$|C_k^-(G)| \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2^{\min_{j=0}^{k-2} \{j + e_2(k-j-2)\}})$$

$$|P_k^-(G)| \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2^{\min_{j=1}^{k-2} \{j + e_2(k-j-1)\}})$$

Le théorème résulte du Corollaire 5.2. □

Théorème 5.4. *Pour tout graphe complet signè G à n sommets on note*:

$$A_1^{(k)} := \{k - 2^{q_1+1} + 2^i \mid i_1 \leqslant i \leqslant q_1\} \quad pour\ 3 \leqslant k \leqslant n,$$

$$A_2^{(k)} := \{k - 2^{q_2+1} + 1 + 2^i \mid i_2 \leqslant i \leqslant q_2\} \quad pour\ 2 \leqslant k \leqslant n,$$

où

$$i_1 = \lceil \log_2(2^{q_1+1} - k + 1) \rceil, \qquad i_2 = \lceil \log_2(2^{q_2+1} - k) \rceil,$$

$$q_1 = \lfloor \log_2(k-1) \rfloor, \qquad q_2 = \lfloor \log_2 k \rfloor.$$

Nous avons:

$$|C_k^-(G)| \equiv \sum_{t \in A_1^{(k)}} (-2)^{t-1}(k-t-1)! \binom{n-t-1}{k-t-1} \binom{G^-}{t} (\mathrm{mod}\, 2^{k-1-\lfloor \log_2(k-1) \rfloor}), \quad (k \geqslant 3);$$

$$|P_k^-(G)| \equiv \sum_{t \in A_2^{(k)}} (-2)^{t-1}(k-t)! \binom{n-t-1}{k-t-1} \binom{G^-}{t} (\mathrm{mod}\, 2^{k-\lfloor \log_2 k \rfloor}), \quad (k \geqslant 2).$$

Demonstration. Du Corollaire 5.2 il résulte que $A_1^{(k)}$ est l'ensemble des indices t pour lesquels l'exposant de 2 dans le produit $2^{t-1}(k-t-1)!$, c-est-à-dire $(t-1) + e_2(k-t-1)$, est minimum, où $t \in \{0, 1, \ldots, k-2\}$. Le raisonement est similaire pour $A_2^{(k)}$.

Le théorème résulte maintenant du Théorème 4.2, le Corollaire 5.2 et de l'observation que dans chaque paranthèse carrée du membre droit des formules du Théorème 4.2 chaque terme est divisible par 2 à l'exception du premiere terme. □

Corollaire 5.5. *Soit G un graphe complet signé à n sommets et $i, k \in \mathbb{N}$, $3 \leqslant k \leqslant n$, $i \geqslant 1$.*

(a) *Si $k \geqslant 2^i$ alors:*

$$|P_k^-(G)| \equiv |C_k^-(G)| \equiv 0 \pmod{2^{2^i - i - 1}}$$

(b) *Si $k = 2^i + 1$ alors:*

$$|C_{2^i+1}^-(G)| \equiv (2^i - 1)!\binom{n-2}{2^i - 1} m \pmod{2^{2^i - i}} \quad \text{où } m = \binom{G^-}{1} = |E^-(G)|,$$

$$|P_{2^i+1}^-(G)| \equiv -2(2^i - 1)!\binom{n-2}{2^i - 1}\binom{G^-}{2} \pmod{2^{2^i - i + 1}}.$$

(c) *Si $k \in \{2^i + 1, 2^i + 2, \ldots, 2^i + 2^{i-1}\}$ alors:*

$$|C_k^-(G)| \equiv (-2)^{k - 2^{i-1}}(2^i - 1)!\binom{n - k + 2^i - 1}{2^i - 1}\binom{G^-}{k - 2^i} \pmod{2^{k - i - 1}}.$$

(d) *Si $i \geqslant 2$ et $k \in \{2^i + 1, 2^i + 2, \ldots, 2^i + 2^{i-1} - 1\}$ alors:*

$$|P_k^-(G)| \equiv (-2)^{k - 2^i}(2^i - 1)!\binom{n - k + 2^i - 2}{2^i - 2}\binom{G^-}{k - 2^i + 1} \pmod{2^{k - i}}.$$

(e) *Si $k = 2^i + 2^{i-1}$ alors:*

$$|P_k^-(G)| \equiv (2^i + 2^{i-1} - 1)!\binom{n-2}{2^i + 2^{i-1} - 2}\binom{G^-}{1} + 2^{2^{i-1}}(2^i - 1)!.$$

$$\times \binom{n - 2^{i-1} - 2}{2^i - 2}\binom{G^-}{2^{i-1} + 1} \pmod{2^{2^i + 2^{i-1} - i}}.$$

Observation. *Pour $i = 1$ et $i = 2$ le congruence* (b) *respectivement* (a) *nous fournissent les résultats suivents obtenus par Tomescu* [17]:

$$|C_3^-(G)| \equiv nm \pmod 2 \quad \text{où } m = \binom{G^-}{1} = |E^-(G)|:$$

$$|C_k^-(G)| \equiv 0 \pmod 2 \quad \text{où } k \geqslant 4.$$

References

[1] R. Abelson and M. Rosenberg, Symbolic psycho-logic: a model of attitudinal cognition, Behaviorial Sci. 3 (1958) 1–13.

[2] I. Akiyama, D. Avis, V. Chvátal and H. Era, Balancing signed graphs, Discrete Appl. Math. 3 (1981) 227–233.

[3] D. Cartwright and F. Harary, Structural balance: a generalization of Heider's theory, Psychol. Rev. 63 (1956) 277–293.

[4] C. Flament, Equilibre d'un graphe: Quelques résultates algebriques. Math. Sci. Humaines 30 (1970) 5–10.

[5] F. Harary, On the notion of balance of signed graph, Michigan Math. J. 2 (1953) 143–146.

[6] F. Harary, On local balance and N-balance in signed graphs. Michigan Math. J. 3 (1955) 37–41.

[7] F. Harary, On the measurement of structural balance, Behaviorial Sci. 4 (1959) 316–323.

[8] F. Harary and E.M. Palmer, On the number of signed graphs, Bull. Math. Biophys. 29 (1967) 759–765.

[9] F. Harary, B. Lindström and H.O. Zeterström, On balance in group graphs, Networks 12 (1982) 317–321.

[10] V.P. Iliev and G.S. Fridman, On the problem of approximation by graphs with a fixed number of components, Soviet Math. Dokl. 25(3) (1982) 666–670.

[11] M. Petersdorf, Einige Bemerkungen über vollstandige Bigraphen, Wiss. Z. Techn. Hochsch. Ilmenau 12 (1966) 257–260.

[12] D.-R. Popescu, Cycles dans les graphe signés, Studii şi Cercetäri Matematice, 43(3–4) (1991) 85–219.

[13] T. Sozanski, Processus d'équilibration et sousgraphes équilibrés d'un graphe signé complet, Math. Sci. Hum. 55 (1976) 25–36.

[14] T. Sozanski, Enumeration of weak isomorphism classes of signed graphs. J. Graph Theory 4 (1980) 127–144.

[15] I. Tomescu, Une caractérisation des graphes dont le degrée de désequilibre et maximal, Math. Sci. Hum. 42 (1973) 37–40.

[16] I. Tomescu, La réduction minimale d'un graphe à une reunion de cliques, Discrete Math. 10 (1974) 173–179.

[17] I. Tomescu, Sur le nombre de cycles négatifs d'un graphe complet signé, Math. Sci. Hum. 53 (1976) 63–67.

[18] I. Tomescu, Problems in combinatorics and graph theory (Wiley, New York, 1985).

[19] T. Zaslavsky, Characterization of signed graphs. J. Graph Theory 5 (1981) 401–405.

[20] T. Zaslavsky, Signed graphs, Discrete Appl. Math. 4 (1982).