

JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 3, 369–397 (1970)

## Charakterisierung bester Approximationen in normierten Vektorräumen

BRUNO BROSOWSKI UND RUDOLF WEGMANN

*Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik  
8 München 23, Föhringer Ring 6, Deutschland*

*Communicated by L. Collatz*

Received September 20, 1969

### 1. EINLEITUNG

Es sei  $R$  ein normierter Vektorraum über dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen und  $V$  eine nichtleere Teilmenge von  $R$ . Ein Element  $v_0$  aus  $V$  heißt eine beste Approximation oder eine Minimallösung für ein Element  $f$  aus  $R$  bezüglich  $V$ , wenn jedes Element  $v$  aus  $V$  der Ungleichung  $\|f - v_0\| \leq \|f - v\|$  genügt. Ausgangspunkt unserer Untersuchungen bilden die beiden Verallgemeinerungen des Kolmogoroffschen Kriteriums aus der Theorie der linearen Tschebyscheff-Approximation komplexwertiger Funktionen. Um diese Verallgemeinerungen zu formulieren, benötigen wir zunächst einige Definitionen.

Jedem Element  $f$  aus  $R$  ordnen wir die Menge

$$\Sigma_f := \{L \in R^* : \|L\| \leq 1 \wedge L(f) = \|f\|\}$$

zu, die wir die Menge der Abweichungsfunktionale von  $f$  nennen. Diese Menge ist konvex und  $\sigma(R^*, R)$ -kompakt. Folglich hat sie Extrempunkte. Die Menge dieser Extrempunkte bezeichnen wir mit  $\mathcal{E}_f$ .

Jedem Element  $v_0$  aus  $V$  ordnen wir die Menge der Elemente  $g$  aus  $R$  zu, für die gilt: Für jede Umgebung  $U$  von  $g$  und für alle  $\epsilon > 0$  existiert eine reelle Zahl  $\eta$  mit  $0 < \eta < \epsilon$  und ein Element  $g'$  aus  $U$  mit  $v_0 + \eta g'$  aus  $V$ . Diese Menge ist ein nichtleerer abgeschlossener Kegel mit dem Scheitel  $0$ . Wir bezeichnen diese Menge mit  $\mathfrak{K}[v_0; V]$ .

Nun lauten die beiden Verallgemeinerungen des Kolmogoroffschen Kriteriums:

**GLOBALES KOLMOGOROFFSCHES KRITERIUM.** *Gilt für alle  $v$  aus  $V$  die Ungleichung*

$$\min_{L \in \mathcal{E}_{f-v_0}} \operatorname{Re} L(v - v_0) \leq 0,$$

*so ist  $v_0$  eine Minimallösung für  $f$  bezüglich  $V$ .*

**LOKALES KOLMOGOROFFSCHES KRITERIUM.** *Ist  $v_0$  eine Minimallösung für das Element  $f$  bezüglich  $V$ , so gilt für alle  $h$  aus  $\mathfrak{R}[v_0; V]$  die Ungleichung*

$$\min_{L \in \mathcal{E}_{f-v_0}} \operatorname{Re} L(h) \leq 0.$$

Einen Beweis dieser Kriterien findet man bei Brosowski [10]. Im Falle der Approximation durch Elemente aus einer konvexen Menge sind beide Kriterien notwendige und hinreichende Bedingungen für eine Minimallösung. Jedoch sind im allgemeinen die obigen Kriterien nicht umkehrbar. Wir nennen daher eine nichtleere Teilmenge  $V$  eines normierten Vektorraumes eine Kolmogoroff-Menge 1. Art, wenn jede beste Approximation bezüglich  $V$  dem globalen Kriterium genügt, und eine Kolmogoroff-Menge 2. Art, wenn das lokale Kriterium stets eine hinreichende Bedingung für eine beste Approximation ist.

In der vorliegenden Arbeit geben wir notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß eine Teilmenge  $V$  eines normierten Vektorraumes eine Kolmogoroff-Menge 1. Art oder 2. Art ist.

Verschiedene Spezialfälle des lokalen Kolmogoroffschen Kriteriums wurden schon früher von verschiedenen Autoren angegeben, so z.B. von Meinardus und Schwedt [24] im Falle der Tschebyscheff-Approximation reell- oder komplexwertiger Funktionen, von B. Brosowski [12] im Falle der Tschebyscheff-Approximation von Funktionen mit Werten in einem Prae-Hilbert-Raum, von Arold [1] im Falle der  $L_1$ -Approximation. In seiner hier genannten allgemeinen Form wurde das lokale Kriterium erstmals von Brosowski [8] angegeben. In dieser Arbeit wurde auch gezeigt, daß jede Kolmogoroff-Menge 2. Art eine Kolmogoroff-Menge 1. Art ist. Ferner wurde in dieser Arbeit die Frage nach der Charakterisierung der Kolmogoroff-Mengen 2. Art aufgeworfen. W. Krabs [22] nennt im Falle der Tschebyscheff-Approximation reeller Funktionen eine Charakterisierung der Kolmogoroff-Mengen 2. Art, allerdings unter den zusätzlichen Annahmen, daß die Menge  $V$  Fréchet-differenzierbar von einem Parameter abhängt und daß  $V$  eine Kolmogoroff-Menge 1. Art ist. In der vorliegenden Arbeit geben wir eine allgemeine Charakterisierung der Kolmogoroffschen Mengen 2. Art (diese Charakterisierung wurde unabhängig auch von Hoffmann [20] gefunden) und

zeigen als Anwendung, daß verschiedene für die Anwendungen wichtige Funktionenfamilien eine Kolmogoroff-Menge 2. Art bilden.

Das globale Kolmogoroff-Kriterium wurde im Falle eines normierten Vektorraumes für die Approximation durch Elemente aus einem linearen Teilraum von Singer [28] angegeben. Jedoch ist der Singersche Beweis für die Hinlänglichkeit dieses Kriteriums auch für beliebige Teilmengen  $V$  gültig. B. Brosowski [9] charakterisierte im Falle des normierten Vektorraumes  $C[Q, H]$  die Kolmogoroff-Mengen 1. Art durch die von ihm eingeführten regulären Funktionenmengen. Ferner wurde von B. Brosowski [8, 10] in beliebigen normierten Vektorräumen das folgende Kriterium angegeben:

*SATZ 1. Eine Teilmenge  $V$  eines normierten Vektorraumes  $R$  ist genau dann eine Kolmogoroff-Menge 1. Art, wenn  $V$  eine  $\alpha$ -Sonne ist.*

Dabei heißt eine Teilmenge  $V$  eine  $\alpha$ -Sonne, wenn für jedes Element  $f$  in  $R$  jede Minimallösung  $v_0$  für  $f$  bezüglich  $V$  auch eine Minimallösung für  $v_0 + \lambda \cdot (f - v_0)$  mit  $\lambda \geq 1$  ist. Man benutzt in diesem Satz zur Charakterisierung der Kolmogoroff-Mengen 1. Art eine andere approximations-theoretische Eigenschaft der Menge  $V$ . Weitere derartige approximations-theoretische Charakterisierungen der Kolmogoroff-Mengen 1. Art mit Hilfe einer Fixpunkteigenschaft der metrischen Projektion wurden von B. Brosowski [7, 13, 14] und von Brosowski, Hoffmann, Schäfer und Weber [18, 19] angegeben. Im Gegensatz dazu benutzt man im Falle  $C[Q, H]$  bei der Charakterisierung der Kolmogoroff-Mengen 1. Art durch die regulären Mengen nur Eigenschaften der Menge  $V$ , ohne auf ein Approximationsproblem Bezug zu nehmen. Man hat also in diesem Fall eine geometrische Charakterisierung der Kolmogoroff-Mengen 1. Art. Es erhebt sich die Frage nach einer Verallgemeinerung des Regularitätsbegriffs auf normierte Vektorräume. Von verschiedenen Autoren sind bisher Regularitätsbegriffe (vgl. Breckner und Kolumban [2, 3] und Brosowski [8, 10]) für den Fall eines normierten Vektorraumes angegeben worden. Jedoch sind diese keine Verallgemeinerung des von Brosowski [9, 12] im Falle des Raumes  $C[Q, H]$  angegebenen Regularitätsbegriffs, wie Brosowski und Weber [17] gezeigt haben. In der vorliegenden Arbeit geben wir eine neue Definition des Begriffs der regulären Menge in einem normierten Vektorraum und zeigen, daß eine Teilmenge eines normierten Vektorraumes genau dann regulär ist, wenn sie eine Kolmogoroff-Menge 1. Art ist. Mit diesem Nachweis ist klar, daß im Falle  $C[Q, H]$  die beiden Regularitätsbegriffe übereinstimmen. Jedoch kann man sie nicht elementar auseinander ableiten, wie der in Abschnitt 5 gegebene Beweis zeigt. Eine wichtige Rolle bei der Untersuchung von Eindeutigkeitsfragen spielt der Satz über den Durchschnitt von Extremalsignaturen (vgl. Brosowski [4, 5, 10, 11]). Wir führen im letzten Abschnitt Extremalsignaturen

ein und beweisen, daß der "Durchschnittssatz" auch für die Kolmogoroff-Mengen 1. Art gültig ist. Als Anwendung ergibt sich ein hinreichendes Eindeutigkeitskriterium für Kolmogoroff-Mengen 1. Art, das im Falle der Tschebyscheff-Approximation im Raume  $C[Q, H]$  auch notwendig ist. Ferner zeigen wir, daß sich ein Ergebnis von I. Singer [27] aus der Theorie der linearen Approximationen auf die Approximation durch Elemente aus Kolmogoroff-Mengen 1. Art verallgemeinern läßt.

## 2. CHARAKTERISIERUNG DER KOLMOGOROFF-MENGEN 2. ART

Es gilt der folgende

**SATZ 2.** *Eine Teilmenge  $V$  eines normierten Vektorraumes  $R$  ist genau dann eine Kolmogoroff-Menge 2. Art, wenn für jedes Element  $f$  aus  $R$  und  $v_0$  aus  $V$  die folgende Bedingung (S) erfüllt ist:*

(S) *Gilt für ein  $v$  aus  $V$  die Ungleichung  $\operatorname{Re} L(v - v_0) > 0$  für jedes  $L$  aus  $\mathcal{E}_f$ , so gibt es ein  $h$  aus  $\mathfrak{R}[v_0; V]$  in der Art, daß  $\operatorname{Re} L(h) > 0$  für jedes  $L$  aus  $\mathcal{E}_f$  gilt.*

*Beweis. Notwendigkeit.* Gegeben sei  $f$  aus  $R$  und  $v_0$  aus  $V$  mit  $\operatorname{Re} L(v - v_0) > 0$  für jedes  $L$  aus  $\mathcal{E}_f$ . Da jede Kolmogoroff-Menge 2. Art eine 1. Art ist (vgl. Brosowski [8]), ist  $v_0$  keine Minimallösung für  $f + v_0$  bezüglich  $V$ . Da für Kolmogoroff-Mengen 2. Art das lokale Kolmogoroff-Kriterium hinreichend ist, gibt es ein  $h$  aus  $\mathfrak{R}[v_0; V]$  mit  $\operatorname{Re} L(h) > 0$  für jedes  $L$  aus  $\mathcal{E}_f$ .

*Hinlänglichkeit.* Gegeben sei ein Element  $v_0$  aus  $V$  und ein Element  $f$  aus  $R$  mit der Eigenschaft

$$\min_{L \in \mathcal{E}_{f-v_0}} \operatorname{Re} L(h) \leq 0$$

für jedes  $h$  aus  $\mathfrak{R}[v_0; V]$ . Dann folgt mit Hilfe der Bedingung (S) die Ungleichung

$$\min_{L \in \mathcal{E}_{f-v_0}} \operatorname{Re} L(v - v_0) \leq 0$$

für jedes  $v$  aus  $V$ . Wegen der Hinlänglichkeit des globalen Kolmogoroff-Kriteriums ist  $v_0$  eine Minimallösung für  $f$  bezüglich  $V$ . Folglich ist  $V$  eine Kolmogoroff-Menge 2. Art.

Wir geben einige Beispiele für Kolmogoroff-Mengen 2. Art.

BEISPIEL 1 (Konvexe Mengen). Da für jede konvexe Menge die Inklusion

$$V \subset v_0 + \mathfrak{R}[v_0; V]$$

für alle  $v_0$  aus  $V$  gilt, ist bereits das Element  $v - v_0$  aus  $\mathfrak{R}[v_0; V]$ . Folglich ist die Bedingung (S) aus Satz 2 erfüllt. Wir haben somit

SATZ 3. *Jede konvexe Menge ist eine Kolmogoroff-Menge 2. Art.*

Das folgende Beispiel zeigt, daß nicht jede Kolmogoroff-Menge 2. Art konvex ist.

BEISPIEL 2 (Verallgemeinerte rationale Funktionen im Raum  $C[Q]$ ). Es bezeichne  $C[Q]$  den normierten Vektorraum der auf dem kompakten Hausdorff-Raum  $Q$  stetigen reellwertigen Funktionen versehen mit der Tschebyscheff-Norm. Für jedes Element  $f$  aus  $C[Q]$  besteht die Menge  $\mathcal{E}_f$  aus den sogenannten Punktfunktionalen  $\epsilon \cdot L_x$ , wobei sich  $\epsilon$  und  $x$  aus der Beziehung

$$\epsilon \cdot L_x(f) = \epsilon \cdot f(x) = \|f\|, \quad |\epsilon| = 1,$$

bestimmen. Mit den Bezeichnungen

$$M_f^+ := \{x \in Q : f(x) = \|f\|\}$$

und

$$M_f^- := \{x \in Q : -f(x) = \|f\|\}$$

lautet im Falle  $C[Q]$  die Bedingung (S):

(S<sub>T</sub>) *Ist  $v(x) - v_0(x) > 0$  für jedes  $x$  aus  $M_f^+$  und ist  $v(x) - v_0(x) < 0$  für jedes  $x$  aus  $M_f^-$ , so gibt es ein  $h$  aus  $\mathfrak{R}[v_0; V]$  in der Art, daß  $h(x) > 0$  für jedes  $x$  aus  $M_f^+$  und  $h(x) < 0$  für jedes  $x$  aus  $M_f^-$  gilt.*

Es seien  $U$  und  $W$  lineare Teilräume von  $C[Q]$ . Mit diesen definieren wir die Menge

$$V := \left\{ \frac{u}{w} \in C[Q] : (u, w) \in U \times W \text{ und } \forall_{x \in Q} w(x) > 0 \right\},$$

von der wir voraussetzen, daß sie nicht leer ist. Zu beliebigen Elementen  $u_0/w_0$  aus  $V$ ,  $u$  aus  $U$ ,  $w$  aus  $W$ , zu jedem  $\delta > 0$  und zu jedem  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $\lambda_0 > 0$ , für das gilt

$$\left\| \frac{u}{w_0} - w \cdot \frac{u_0}{w_0^2} - \left( \frac{u_0 + \lambda_0 u}{w_0 + \lambda_0 w} - \frac{u_0}{w_0} \right) \right\| < \delta, \quad \frac{u_0 + \lambda_0 u}{w_0 + \lambda_0 w} \in V$$

und

$$\lambda_0 < \epsilon.$$

Folglich gilt die Inklusion

$$\left\{ \frac{u}{w_0} - w \cdot \frac{u_0}{w_0^2} \in C[Q] : (u, w) \in U \times W \right\} \subset \mathfrak{R} \left[ \frac{u_0}{w_0} ; V \right].$$

Es seien  $u/w$  und  $u_0/w_0$  aus  $V$  gegeben mit

$$\frac{u(x)}{w(x)} - \frac{u_0(x)}{w_0(x)} > 0 \quad \text{für } x \text{ aus } M_f^+$$

und

$$\frac{u(x)}{w(x)} - \frac{u_0(x)}{w_0(x)} < 0 \quad \text{für } x \text{ aus } M_f^-$$

für ein  $f$  aus  $C[Q]$ . Wegen  $w(x) > 0$  und  $w_0(x) > 0$  für  $x$  aus  $Q$  folgen die Ungleichungen

$$\frac{u(x)}{w_0(x)} - w(x) \cdot \frac{u_0(x)}{w_0^2(x)} > 0 \quad \text{für } x \text{ aus } M_f^+$$

und

$$\frac{u(x)}{w_0(x)} - w(x) \cdot \frac{u_0(x)}{w_0^2(x)} < 0 \quad \text{für } x \text{ aus } M_f^-.$$

Da  $u/w_0 - w \cdot (u_0/w_0^2)$  aus  $\mathfrak{R}[u_0/w_0 ; V]$  ist, folgt mit Hilfe von  $(S_T)$ , daß  $V$  eine Kolmogoroff-Menge 2. Art ist. Im Falle  $\dim W > 1$  ist diese Menge nicht konvex.

Im Beweis zu Satz 2 hatten wir benutzt, daß jede Kolmogoroff-Menge 2. Art auch eine 1. Art ist. Das folgende Beispiel zeigt, daß die Umkehrung im allgemeinen nicht gilt.

**BEISPIEL 3.** Gegeben sei die  $(x, y)$ -Ebene  $E_2$  versehen mit der Norm

$$\|(x, y)\| := \max(|x|, |y|).$$

Ferner sei

$$V := \{(x, y) \in E_2 : y = x^3\}.$$

Für das Element  $(0, 0)$  ist

$$\mathfrak{R}[(0, 0); V] = \{(x, y) \in E_2 : y = 0\}$$

Man überlegt sich leicht, daß für die Elemente  $f := (0, 1)$  und  $v_0 := (0, 0)$  die lokale Kolmogoroff-Bedingung erfüllt ist und daß  $v_0$  keine beste Approximation für  $f$  bezüglich  $V$  ist.

Da es andererseits zu jedem  $f$  aus  $E_2$  genau eine Minimallösung für  $f$  bezüglich  $V$  gibt, ist  $V$  eine Kolmogoroff-Menge 1. Art.

Besonders wichtig für die Anwendungen ist der folgende Spezialfall. Es sei  $P$  eine offene Teilmenge eines normierten Vektorraumes  $E$  und  $v : P \rightarrow R$  eine Fréchet-differenzierbare Abbildung. Wir setzen

$$V := \{v_a \in R : a \in P\},$$

wobei  $v_a$  das Bild von  $a$  bezeichnet, und definieren für jedes  $a_0$  aus  $P$  den in  $R$  enthaltenen linearen Teilraum

$$\Omega_{a_0} := \{v'_{a_0}(b) \in R : b \in E\},$$

wobei  $v'_{a_0}$  die Fréchet'sche Ableitung von  $v$  an der Stelle  $a_0$  bezeichnet. Es gilt die Inklusion  $\Omega_{a_0} \subset \mathfrak{R}[v_{a_0}; V]$ , vgl. Lobry [23] oder Brosowski [10]. Daher gilt: Ist  $v_{a_0}$  eine Minimallösung für  $f$  bezüglich  $V$ , so gilt für jedes Element  $h$  aus  $\Omega_{a_0}$  die Ungleichung

$$\min_{L \in \mathcal{E}_f - v_{a_0}} \operatorname{Re} L(h) \leq 0. \quad (1)$$

Es erhebt sich die Frage, unter welchen Bedingungen diese Bedingung hinreichend für eine Minimallösung ist. Eine Antwort gibt der

**SATZ 4.** *Gegeben sei eine nichtleere Teilmenge  $V$  eines normierten Vektorraumes  $R$ , die Fréchet-differenzierbar von einem Parameter abhängt. Dann gilt: Die Bedingung (1) ist genau dann hinreichend für eine beste Approximation, wenn für jedes Element  $f$  aus  $R$  und für jedes Element  $v_{a_0}$  aus  $V$  die folgende Bedingung  $(S_F)$  erfüllt ist.*

$(S_F)$  *Gilt für  $v$  aus  $V$  die Ungleichung  $\operatorname{Re} L(v - v_0) > 0$  für jedes  $L$  aus  $\mathcal{E}_f$ , so gibt es ein  $h$  aus  $\Omega_{a_0}$  in der Art, daß  $\operatorname{Re} L(h) > 0$  für jedes  $L$  aus  $\mathcal{E}_f$  gilt.*

Der Beweis verläuft analog zu dem von Satz 2.

### 3. KOLMOGOROFF-MENGEN 2. ART IM RAUME $C[Q, H]$

Es sei nun  $C[Q, H]$  der normierte Vektorraum der auf dem kompakten Hausdorff-Raum  $Q$  definierten stetigen Abbildungen in den Prae-Hilbert-Raum  $H$  versehen mit der Tschebyscheff-Norm, die bekanntlich durch

$$\|f\| := \max_{x \in Q} \|f(x)\|_H$$

definiert ist. Nach Singer [29] haben die Extremalfunktionale der Einheitskugel im Dualraum von  $C[Q, H]$  die Form

$$L_{\epsilon, x} : g \rightarrow (\epsilon, g(x)),$$

wobei  $\epsilon$  aus  $H$  mit  $\|\epsilon\|_H = 1$  und  $x$  aus  $Q$  fest vorgegeben ist. Für jedes Element  $f$  aus  $C[Q, H]$  setzen wir

$$M_f := \{x \in Q : \|f(x)\|_H = \|f\|\}.$$

Es gilt der

**SATZ 5.** *Es sei  $V$  eine nichtleere Teilmenge des Raumes  $C[Q, H]$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(K2)  $V$  ist eine Kolmogoroff-Menge 2. Art.

(S) Für alle  $f$  aus  $C[Q, H]$  und alle  $v_0$  aus  $V$  gilt: Genügt ein  $v$  aus  $V$  der Ungleichung

$$\operatorname{Re}(f(x), v(x) - v_0(x)) > 0$$

für jeden Punkt  $x$  aus  $M_f$ , so gibt es ein  $h$  aus  $\mathfrak{R}[v_0; V]$  in der Art, daß

$$\operatorname{Re}(f(x), h(x)) > 0$$

für jedes  $x$  aus  $M_f$  gilt.

(S') Für alle  $f$  aus  $C[Q, H]$  und für alle  $v_0$  aus  $V$  gilt: Genügt ein  $v$  aus  $V$  der Ungleichung

$$\operatorname{Re}(f(x), v(x) - v_0(x)) > 0$$

für alle  $x$  aus einer abgeschlossenen Teilmenge  $A$  von  $Q$ , so gibt es ein  $h$  aus  $\mathfrak{R}[v_0; V]$  in der Art, daß

$$\operatorname{Re}(f(x), h(x)) > 0$$

für jedes  $x$  aus  $A$  gilt.

*Beweis.* Die Äquivalenz "(K2)  $\Leftrightarrow$  (S)" folgt aus Satz 2, die Implikation "(S')  $\Rightarrow$  (S)" ist trivial. Zum Nachweis der Implikation "(S)  $\Rightarrow$  (S')" seien eine abgeschlossene Teilmenge  $A$  von  $Q$  und Elemente  $v, v_0$  aus  $V$  und  $f$  aus  $R$  gegeben mit

$$\operatorname{Re}(f(x), v(x) - v_0(x)) > 0$$

für jedes  $x$  aus  $A$ . Nun definieren wir eine Abbildung  $g$  aus  $C[Q, H]$  durch

$$g(x) := \begin{cases} \frac{a \cdot f(x)}{\|f(x)\|_H} & \text{für } x \in \{x \in Q : \|f(x)\|_H \geq a\} \\ f(x) & \text{für } x \in \{x \in Q : \|f(x)\|_H \leq a\}, \end{cases}$$

wobei

$$a := \inf_{x \in A} \|f(x)\|_H > 0 \text{ ist.}$$

Nach dem Lemma von Urysohn gibt es eine auf  $Q$  stetige reelle Funktion  $m$  mit

$$m(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \{x \in Q : \operatorname{Re}(g(x), v(x) - v_0(x)) \leq 0\} \\ 1 & \text{für } x \in A \end{cases}$$

und  $0 \leq m(x) \leq 1$  für jedes  $x$  aus  $Q$ . Für jedes  $x$  aus  $M_{m \cdot g}$  gilt dann die Abschätzung

$$\operatorname{Re}(m(x) \cdot g(x), v(x) - v_0(x)) > 0.$$

Nach der vorausgesetzten Bedingung (S) gibt es dann ein  $h$  aus  $\mathfrak{R}[v_0; V]$  mit

$$\operatorname{Re}(m(x) \cdot g(x), h(x)) > 0$$

für jedes  $x$  aus  $M_{m \cdot g}$ . Da  $M_{m \cdot g}$  die Menge  $A$  enthält und da

$$m(x) \cdot g(x) = a \cdot f(x) / \|f(x)\|_H$$

für  $x$  aus  $A$  gilt, folgt auch

$$\operatorname{Re}(f(x), h(x)) > 0$$

für jedes  $x$  aus  $A$ , was zu beweisen war.

Die Bedingung (1) lautet im Falle des Raumes  $C[Q, H]$ : Für alle  $b$  aus  $E$  gilt die Ungleichung

$$\min_{x \in M_f} \operatorname{Re}(f(x), v'_{v_0}(b, x)) \leq 0. \quad (2)$$

Es gilt hier entsprechend zu Satz 5 der folgende

**SATZ 6.** *Es sei  $V$  eine nichtleere Teilmenge von  $C[Q, H]$ , die Fréchet-differenzierbar von einem Parameter abhängt, der in einer offenen Menge  $P$  eines normierten Raumes  $E$  variiert. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(K3) Für alle  $f$  aus  $C[Q, H]$  ist die Bedingung (2) hinreichend für eine Minimallösung.

(S<sub>F</sub>) Für alle  $f$  aus  $C[Q, H]$  und alle  $a$  aus  $P$  gilt: Genügt ein  $v$  aus  $V$  der Ungleichung

$$\operatorname{Re}(f(x), v(x) - v_a(x)) > 0$$

für alle  $x$  aus  $M_f$ , so gibt es ein  $b$  aus  $E$  in der Art, daß

$$\operatorname{Re}(f(x), v_a'(b, x)) > 0$$

für alle  $x$  aus  $M_f$  gilt.

(S<sub>F</sub>') Für alle  $f$  aus  $C[Q, H]$  und für alle  $a$  aus  $P$  gilt: Genügt ein  $v$  aus  $V$  der Ungleichung

$$\operatorname{Re}(f(x), v(x) - v_a(x)) > 0$$

für alle  $x$  aus einer abgeschlossenen Teilmenge  $A$  von  $Q$ , so gibt es ein  $b$  aus  $E$  in der Art, daß

$$\operatorname{Re}(f(x), v_a'(b, x)) > 0$$

für alle  $x$  aus  $A$  gilt.

Satz 6 beweist man genau wie Satz 5. Die Äquivalenz "(K3)  $\Leftrightarrow$  (S<sub>F</sub>') wurde von W. Krabs [22] im Falle  $H = \mathbb{R}$ , allerdings unter den zusätzlichen Bedingungen  $\dim \mathfrak{L}_\alpha < \infty$  und  $V$  eine Kolmogoroff-Menge 1. Art bewiesen.

Wir zeigen nun, daß die folgenden für die Anwendungen wichtige Funktionenklassen Kolmogoroff-Mengen 2. Art sind. Es sei  $V$  eine nichtleere Teilmenge von  $C[a, b]$ , die Fréchet-differenzierbar von einem Parameter abhängt. Jedem Element  $v$  aus  $V$  sei eine natürliche Zahl  $n(v) \geq 1$  so zugeordnet, daß die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Für alle  $v, v_0$  aus  $V$  hat jede Differenz  $v - v_0$  mit  $v \neq v_0$  höchstens  $n(v_0) - 1$  Nullstellen in  $Q$  (globale Haarsche Bedingung).

Für alle  $v_0$  aus  $V$  gilt  $\dim \mathfrak{L}_{v_0} = n(v_0)$  und  $\mathfrak{L}_{v_0}$  genügt der Haarschen Bedingung (lokale Haarsche Bedingung).

SATZ 7. Eine Teilmenge  $V$  von  $C[a, b]$ , die der globalen und lokalen Haarschen Bedingung genügt, ist eine Kolmogoroff-Menge 2. Art.

Beweis. Wir zeigen, daß die Bedingung (S<sub>F</sub>') von Satz 6 erfüllt ist, die in diesem Fall lautet:

Für alle  $v, v_0$  aus  $V$  und für jede abgeschlossene Teilmenge  $A$  von  $[a, b]$  mit

$$v(x) - v_0(x) \neq 0$$

existiert ein  $h$  aus  $\Omega_{v_0}$  mit

$$(v(x) - v_0(x)) \cdot h(x) > 0$$

für alle  $x$  aus  $A$ .

Es sei eine abgeschlossene Teilmenge  $A$  von  $[a, b]$  und  $v, v_0$  aus  $V$  mit  $v(x) - v_0(x) \neq 0$  für  $x$  aus  $A$  gegeben. Dann hat die Differenz  $v - v_0$  wegen der vorausgesetzten globalen Haarschen Bedingung höchstens  $k \leq n(v_0) - 1$  Nullstellen im Intervall  $[a, b]$ , in denen die Differenz  $v - v_0$  ihr Vorzeichen wechselt. Da  $\Omega_{v_0}$  der Haarschen Bedingung genügt, gibt es eine Funktion  $h$  in  $\Omega_{v_0}$ , die genau in diesen Punkten das Vorzeichen wechselt (vgl. Werner [30]). Dann hat die Funktion  $h$  oder  $-h$  die verlangten Eigenschaften.

Nach Satz 6 und nach Karlin und Studden [21] sind die folgenden im allgemeinen nichtlinearen Mengen Kolmogoroff-Mengen 2. Art.

$$v(x, a) := \sum_{\nu=1}^n a_\nu e^{\nu \cdot x} \quad a_\nu, \lambda_\nu \in \mathbb{R}, \quad (\text{a})$$

$$v(x, a) := \sum_{\nu=1}^n a_\nu e^{(x-t_\nu)^2}, \quad a_\nu, t_\nu \in \mathbb{R}, \quad (\text{b})$$

$$v(x, a) := \sum_{\nu=1}^n \frac{a_\nu}{x + t_\nu}, \quad a_\nu, t_\nu \in \mathbb{R}, t_\nu > 0, x > 0. \quad (\text{c})$$

#### 4. REGULÄRE MENGEN IN NORMIERTEN VEKTORRÄUMEN

Wir bezeichnen mit  $S_R$  die Einheitskugel eines normierten Vektorraumes, also die Menge

$$S_R := \{f \in R : \|f\| \leq 1\},$$

und mit  $\text{Ep } A$  die Menge der Extrempunkte einer Teilmenge  $A$  eines linearen Raumes. Die durch die  $\sigma(R^*, R)$ -Topologie in  $\text{Ep}S_{R^*}$  induzierte Topologie bezeichnen wir mit  $\sigma_{\text{Ep}}(R^*, R)$ - oder auch kurz mit  $\sigma_{\text{Ep}}$ -Topologie.

Grundlegend für die weiteren Untersuchungen ist die folgende

**DEFINITION 1.** (1) Eine nichtleere Teilmenge  $V$  von  $R$  heißt regulär im Punkte  $v_0$  aus  $V$ , wenn für jedes Element  $f$  aus  $R \setminus V$ , für jedes Element  $v$  aus  $V$ , für jede reelle Zahl  $\lambda > 0$  und für jede  $\mathcal{E}_{f-v_0}$  enthaltende  $\sigma_{\text{Ep}}$ -abgeschlossene Teilmenge  $A \subset \text{Ep}S_{R^*}$  mit  $\text{Re } L(v - v_0) > 0$  für  $L$  aus  $A$  ein Element  $v_\lambda$  aus  $V$  existiert mit

(R1)  $\operatorname{Re} L(v_\lambda - v_0) > \operatorname{Re} L(f - v_0) - \|f - v_0\|$  für  $L$  aus  $A$ ;

(R2)  $\|v_\lambda - v_0\| < \lambda$ .

(2) Eine Teilmenge  $V$  von  $R$  heißt regulär, wenn  $V$  in jedem Punkt aus  $V$  regulär ist.

Wir beweisen zunächst das folgende

LEMMA 1 (*Variationslemma*). *Es sei  $V$  eine Teilmenge eines normierten Vektorraumes  $R$ , die in  $v_0$  aus  $V$  regulär ist. Ferner sei ein Element  $f$  aus  $R$  gegeben. Gibt es ein Element  $v$  aus  $V$  mit  $\operatorname{Re} L(v - v_0) > 0$  für  $L$  aus  $\mathcal{E}_{f-v_0}$ , so enthält für jede positive reelle Zahl  $\lambda$  die Menge*

$$U(\lambda; v_0) := \{v \in V : \|v - v_0\| < \lambda\}$$

ein Element  $v_\lambda$  mit

$$\|f - v_\lambda\| < \|f - v_0\|.$$

*Beweis.* Es genügt die Behauptung für alle hinreichend kleinen positiven  $\lambda$  zu beweisen. Sei

$$a := \min_{L \in \Sigma_{f-v_0}} \operatorname{Re} L(v - v_0).$$

Die Menge

$$N := \{L \in \Sigma_{f-v_0} : \operatorname{Re} L(v - v_0) = a\}$$

ist konvex und  $\sigma(R^*, R)$ -kompakt, besitzt also nach dem Satz von Krein-Milman mindestens einen Extrempunkt. Dieser ist dann auch Extrempunkt von  $\Sigma_{f-v_0}$ , liegt also in  $\mathcal{E}_{f-v_0}$ . Mithin ist

$$a = \min_{L \in \mathcal{E}_{f-v_0}} \operatorname{Re} L(v - v_0) > 0.$$

Die Menge

$$U := \left\{ L \in \operatorname{Ep} S_{R^*} : \operatorname{Re} L(v - v_0) > \frac{a}{2} \right\}$$

ist eine  $\sigma_{\operatorname{Ep}}$ -offene Teilmenge von  $\operatorname{Ep} S_{R^*}$  und enthält  $\mathcal{E}_{f-v_0}$ . Es gilt die Ungleichung

$$E^* := \sup_{L \in \operatorname{Ep} S_{R^*} \setminus U} \operatorname{Re} L(f - v_0) < \|f - v_0\|.$$

Wir beweisen diese Ungleichung indirekt und nehmen  $E^* = \|f - v_0\|$  an. Dann gibt es Funktionale  $L_1, L_2, \dots, L_k, \dots$  aus  $\operatorname{Ep} S_{R^*} \setminus U$  mit der Eigenschaft

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Re} L_k(f - v_0) = \|f - v_0\|.$$

Da  $S_{R^*}$  eine  $\sigma(R^*, R)$ -kompakte Menge ist, hat die Folge  $L_1, L_2, \dots, L_k, \dots$  einen  $\sigma(R^*, R)$ -Häufungspunkt  $L_0$  in  $S_{R^*}$  für den

$$\operatorname{Re} L_0(f - v_0) = \|f - v_0\|$$

und somit

$$L_0(f - v_0) = \|f - v_0\|$$

gilt. Folglich ist  $L_0$  aus  $\Sigma_{f-v_0}$  und somit  $\operatorname{Re} L_0(v - v_0) \geq a$ . Da andererseits  $\operatorname{Re} L_k(v - v_0) \leq a/2$  für  $k = 1, 2, \dots$ , gilt, erhalten wir einen Widerspruch.

Für jedes Funktional  $L$  aus der  $\sigma_{\text{Ep}}$ -abgeschlossenen Menge

$$\bar{U} := \left\{ L \in \text{Ep } S_{R^*} : \operatorname{Re} L(v - v_0) \geq \frac{a}{2} \right\}$$

gilt die Abschätzung  $\operatorname{Re} L(v - v_0) \geq a/2$ . Da  $V$  im Punkte  $v_0$  regulär ist, gibt es zu jeder positiven reellen Zahl  $\lambda$  ein Element  $v_\lambda$  aus  $V$ , das den Bedingungen

$$\operatorname{Re} L(v_\lambda - v_0) > \operatorname{Re} L(f - v_0) - \|f - v_0\| \quad (3)$$

für  $L$  aus  $\bar{U}$  und

$$\|v_\lambda - v_0\| < \lambda$$

genügt. Es sei nun  $\lambda$  so gewählt, daß

$$0 < \lambda < \|f - v_0\| - E^*$$

gilt. Für jedes Funktional  $L$  aus  $U$  gilt wegen der Ungleichung (3) die Abschätzung

$$\operatorname{Re} L(f - v_\lambda) = \operatorname{Re} L(f - v_0) - \operatorname{Re} L(v_\lambda - v_0) < \|f - v_0\|.$$

Für jedes Funktional  $L$  aus  $\text{Ep } S_{R^*} \setminus U$  gilt wegen  $0 < \lambda < \|f - v_0\| - E^*$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} L(f - v_\lambda) &= \operatorname{Re} L(f - v_0) - \operatorname{Re} L(v_\lambda - v_0) \\ &\leq E^* + \|v_\lambda - v_0\| \leq E^* + \lambda < \|f - v_0\|. \end{aligned}$$

Folglich gilt für alle  $\lambda$  mit  $0 < \lambda < \|f - v_0\| - E^*$  die Ungleichung

$$\operatorname{Re} L(f - v_\lambda) < \|f - v_0\|$$

für  $L$  aus  $\text{Ep } S_{R^*}$ . Mit Hilfe des Satzes von Krein–Milman beweist man dann auch

$$\text{Re } L(f - v_\lambda) < \|f - v_0\|$$

für alle  $L$  aus  $S_{R^*}$ . Da  $S_{R^*}$  eine  $\sigma(R^*, R)$ -kompakte Menge ist folgt

$$\|f - v_\lambda\| < \|f - v_0\|.$$

Aus dem Variationslemma ergibt sich die

*Folgerung.* Jedes lokale Minimum des Funktionals  $\Phi(v) := \|f - v\|$  auf einer Kolmogoroff-Menge 1. Art ist ein globales Minimum.

Ein Element  $v_0$  aus einer nichtleeren Teilmenge  $V$  eines normierten Vektorraumes  $R$  heißt ein solarer Punkt von  $V$ , wenn für jedes Element  $f$  aus  $R$  gilt: Ist  $v_0$  eine beste Approximation für  $f$  bezüglich  $V$ , so ist  $v_0$  auch eine beste Approximation für  $v_0 + \lambda \cdot (f - v_0)$  für jede nichtnegative reelle Zahl  $\lambda$ . Nach Brosowski [10] gilt das folgende

**LEMMA 2.** Ein Element  $v_0$  aus  $V$  ist genau dann ein solarer Punkt von  $V$ , wenn für alle  $f$  aus  $R$  gilt: Ist  $v_0$  eine beste Approximation für  $f$  bezüglich  $V$ , so genügt jedes Element  $v$  aus  $V$  der Ungleichung

$$\min_{L \in \mathcal{E}_{f-v_0}} \text{Re } L(v - v_0) \leq 0.$$

Wir beweisen nun den

**SATZ 8.** Eine Teilmenge  $V$  eines normierten Vektorraumes  $R$  ist genau dann im Punkte  $v_0$  aus  $V$  regulär, wenn  $v_0$  ein solarer Punkt von  $V$  ist.

*Beweis.* (a) Sei  $V$  in  $v_0$  regulär. Nach Lemma 2 haben wir zu zeigen: Ist  $v_0$  eine Minimallösung für  $f$  bezüglich  $V$ , so gilt

$$\min_{L \in \mathcal{E}_{f-v_0}} \text{Re } L(v - v_0) \leq 0$$

für alle  $v$  aus  $V$ . Gibt es ein Element  $v$  aus  $V$  mit  $\text{Re } L(v - v_0) > 0$  für alle  $L$  aus  $\mathcal{E}_{f-v_0}$ , so gibt es nach Lemma 1 ein Element  $v_\lambda$  aus  $V$  mit

$$\|f - v_\lambda\| < \|f - v_0\|.$$

(b) Sei  $v_0$  ein solarer Punkt von  $V$ . Gegeben sei ein Element  $f$  aus  $R \setminus V$ , ein Element  $v$  aus  $V$ , eine positive reelle Zahl  $\lambda$  und eine  $\mathcal{E}_{f-v_0}$  enthaltende  $\sigma_{\text{Ep}}$ -abgeschlossene Teilmenge  $A$  von  $\text{Ep } S_{R^*}$ , so daß

$$\text{Re } L(v - v_0) > 0 \tag{4}$$

für alle  $L$  aus  $A$  gilt. Wir haben zu zeigen, daß es ein  $v_\lambda$  aus  $V$  mit den Eigenschaften (R1) und (R2) gibt. Da  $A$  die Menge  $\mathcal{E}_{f-v_0}$  enthält, ist wegen (4)  $v_0$  keine Minimallösung für  $f$  bezüglich  $V$ . Da  $v_0$  ein solarer Punkt von  $V$  ist, ist  $v_0$  auch keine Minimallösung für

$$f_\mu := v_0 + \mu \cdot (f - v_0)$$

bezüglich  $V$  für alle  $\mu > 0$ . Es gibt daher ein  $w_\mu$  aus  $V$  mit

$$\|f_\mu - w_\mu\| < \|f_\mu - v_0\| = \mu \cdot \|f - v_0\|.$$

Sei nun

$$0 < \mu < \min\left(1, \frac{\lambda}{2 \cdot \|f - v_0\|}\right).$$

Dann ist

$$\|w_\mu - v_0\| \leq \|f_\mu - w_\mu\| + \|f_\mu - v_0\| < 2\mu \cdot \|f - v_0\| < \lambda \quad (5)$$

und

$$\|f - w_\mu\| \leq \|f - f_\mu\| + \|f_\mu - w_\mu\| < \|f - v_0\|. \quad (6)$$

Wegen (5) erfüllt  $v_\lambda := w_\mu$  die Bedingung (R2) und wegen (6) gilt

$$\operatorname{Re} L(f - v_0) - \operatorname{Re} L(w_\mu - v_0) = \operatorname{Re} L(f - w_\mu) < \|f - v_0\|$$

für alle  $L$  mit  $\|L\| \leq 1$ . Daraus folgt speziell für  $L$  aus  $A$  (da für diese  $L$  stets  $\|L\| \leq 1$  gilt) die Ungleichung

$$\operatorname{Re} L(w_\mu - v_0) > \operatorname{Re} L(f - v_0) - \|f - v_0\|.$$

Aus dem vorstehenden Satz folgt der

**SATZ 9.** *Es sei  $V$  eine nichtleere Teilmenge eines normierten Vektorraumes  $R$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (A)  $V$  ist eine  $\alpha$ -Sonne.
- (B)  $V$  ist eine Kolmogoroff-Menge 1. Art.
- (C)  $V$  ist regulär.

Wir geben das Beispiel

**BEISPIEL 4.** Es sei  $V$  eine Teilmenge von  $R$ , die sternförmig bezüglich  $v_0$  aus  $V$  ist. Dann ist  $V$  regulär in  $v_0$ .

Zum Nachweis sei ein Element  $v \neq v_0$  aus  $V$  und eine beliebige Teilmenge

$A$  von  $\text{Ep } S_{R^*}$  mit  $\text{Re } L(v - v_0) > 0$  für  $L$  aus  $A$  gegeben. Für  $\lambda > 0$  setzen wir

$$v_\lambda := \left(1 - \frac{\mu}{\|v - v_0\|}\right) v_0 + \frac{\mu}{\|v - v_0\|} \cdot v$$

mit  $0 < \mu < \min(\|v - v_0\|, \lambda)$ . Das Element  $v_\lambda$  ist aus  $V$ . Wir erhalten

$$\text{Re } L(v_\lambda - v_0) = \frac{\mu}{\|v - v_0\|} \cdot \text{Re } L(v - v_0) > 0 \geq \text{Re } L(f - v_0) - \|f - v_0\|$$

und

$$\|v_\lambda - v_0\| = \frac{\mu}{\|v - v_0\|} \cdot \|v - v_0\| < \lambda.$$

Aus diesem Beispiel ergibt sich der

**SATZ 10.** *Jeder lineare Teilraum und jede konvexe Menge eines normierten Vektorraumes  $R$  ist regulär.*

## 5. CHARAKTERISIERUNG DER REGULÄREN MENGEN IM RAUME $C[Q, H]$

Die Approximation im Raume  $C[Q, H]$  ist von Brosowski [9, 12] ausführlich studiert worden. Von ihm werden gewisse Teilmengen von  $C[Q, H]$  regulär genannt gemäß der folgenden Definition (Zur Unterscheidung nennen wir die von Brosowski im Raume  $C[Q, H]$  eingeführten regulären Mengen  $C$ -regulär und die oben eingeführten regulären Teilmengen in normierten Vektorräumen  $R$ -regulär).

**DEFINITION 2.** (1) Eine nichtleere Teilmenge  $V$  von  $C[Q, H]$  heißt  $C$ -regulär im Punkte  $v_0$  aus  $V$ , wenn für jedes  $f$  aus  $C[Q, H]$  für jedes  $v$  aus  $V$  mit

$$\text{Re}(f(x) - v_0(x), v(x) - v_0(x)) > 0$$

für  $x$  aus  $M_{f-v_0}$  und für jede positive reelle Zahl  $\lambda$  ein Element  $v_\lambda$  aus  $V$  existiert mit den folgenden Eigenschaften

$$(R1) \quad 2 \text{Re}(f(x) - v_0(x), v_\lambda(x) - v_0(x)) > \|v_\lambda(x) - v_0(x)\|_H^2$$

für  $x$  aus  $M_{f-v_0}$ ;

$$(R2) \quad \|v_\lambda - v_0\| < \lambda.$$

(2) Eine nichtleere Teilmenge  $V$  von  $C[Q, H]$  heißt  $C$ -regulär, wenn sie in jedem ihrer Punkte  $C$ -regulär ist.

Da  $C[Q, H]$  ein spezieller normierter Vektorraum ist, kann man auf Teilmengen  $V$  von  $C[Q, H]$  auch den Begriff  $R$ -regulär anwenden. Sowohl für  $R$ -reguläre Mengen als auch für  $C$ -reguläre Mengen gilt:

Eine Menge  $V$  ist genau dann regulär, wenn eine Minimallösung  $v_0$  für  $f$  bezüglich  $V$  stets dem globalen Kolmogoroffschen Kriterium genügt. Damit ist klar, daß für Mengen aus  $C[Q, H]$  die beiden Regularitätsbegriffe äquivalent sind. Im folgenden Satz zeigen wir nun die Äquivalenz der beiden Regularitätsbegriffe direkt.

**SATZ 11.** *Jede  $R$ -reguläre Teilmenge von  $C[Q, H]$  ist  $C$ -regulär und umgekehrt.*

*Beweis.* (a) Es sei  $V$  aus  $C[Q, H]$   $R$ -regulär in  $v_0$  aus  $V$ . Gegeben sei ein  $f$  aus  $C[Q, H]$ , ein  $v$  aus  $V$  mit

$$\operatorname{Re}(f(x) - v_0(x), v(x) - v_0(x)) > 0$$

für  $x$  aus  $M_{f-v_0}$  und eine positive reelle Zahl  $\lambda$ . Dann ist  $\operatorname{Re} L_x(v - v_0) > 0$  für alle Funktionale  $L_x$  aus  $C[Q, H]$  von der Gestalt

$$L_x(g) := \left( \frac{f(x) - v_0(x)}{\|f(x) - v_0(x)\|_H}, g(x) \right)$$

mit  $x$  aus  $M_{f-v_0}$ . Diese Funktionale bilden gerade die Menge  $\mathcal{E}_{f-v_0}$ . Es ist also  $\operatorname{Re} L(v - v_0) > 0$  für alle  $L$  aus  $\mathcal{E}_{f-v_0}$ . Da für die Approximation bezüglich  $R$ -regulärer Mengen das globale Kolmogoroff-Kriterium notwendig ist, kann  $v_0$  keine Minimallösung für  $f$  bezüglich  $V$  sein. Da ferner wegen der  $R$ -Regularität jedes lokale Minimum des Funktionals  $\Phi(v) := \|f - v\|$  auf  $V$  ein globales Minimum ist, ist  $v_0$  auch keine Minimallösung für  $f$  bezüglich

$$V_\lambda := \{v \in V : \|v - v_0\| < \lambda\}.$$

Es gibt also ein  $v_\lambda$  aus  $V$  mit  $\|f - v_\lambda\| < \|f - v_0\|$ . Für alle  $x$  aus  $M_{f-v_0}$  gilt dann

$$\|f(x) - v_\lambda(x)\|_H < \|f(x) - v_0(x)\|_H = \|f - v_0\|.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 &< \|f(x) - v_0(x)\|_H^2 - \|f(x) - v_\lambda(x)\|_H^2 \\ &= (f(x) - v_0(x), f(x) - v_0(x)) - (f(x) - v_\lambda(x), f(x) - v_\lambda(x)) \\ &= 2 \operatorname{Re}(f(x) - v_0(x), v_\lambda(x) - v_0(x)) - \|v_\lambda(x) - v_0(x)\|_H^2 \end{aligned}$$

für alle  $x$  aus  $M_{f-v_0}$ . Da wegen  $v_\lambda$  aus  $V_\lambda$  auch  $\|v_\lambda - v_0\| < \lambda$  gilt, sind damit die Bedingungen (R1) und (R2) der  $C$ -Regularität im Punkte  $v_0$  gezeigt. Da  $v_0$  beliebig in  $V$  gewählt war, ist  $V$  also  $C$ -regulär.

(b) Sei nun  $V$  in  $v_0$   $C$ -regulär. Gegeben sei ein Element  $f$  aus  $C[Q, H]$ , ein Element  $v$  aus  $V$  und eine  $\mathcal{E}_{f-v_0}$  enthaltende  $\sigma_{\text{EP}}$ -abgeschlossene Menge  $A$  mit

$$\operatorname{Re} L(v - v_0) > 0$$

für  $L$  aus  $A$  und eine positive reelle Zahl  $\lambda$ . Wir haben zu zeigen, daß ein Element  $v_\lambda$  in  $V$  existiert, das den Bedingungen (R1) und (R2) der  $R$ -Regularität genügt.

Die Funktionale aus  $\mathcal{E}_{f-v_0}$  haben die Gestalt

$$L_x(g) = \left( \frac{f(x) - v_0(x)}{\|f(x) - v_0(x)\|_H}, g(x) \right)$$

mit  $x$  aus  $M_{f-v_0}$ . Aus  $\operatorname{Re} L(v - v_0) > 0$  für  $L$  aus  $A$  folgt dann

$$\operatorname{Re} \left( \frac{f(x) - v_0(x)}{\|f(x) - v_0(x)\|_H}, v(x) - v_0(x) \right) > 0$$

für alle  $x$  aus  $M_{f-v_0}$ , was gleichbedeutend ist mit

$$\operatorname{Re}(f(x) - v_0(x), v(x) - v_0(x)) > 0$$

für alle  $x$  aus  $M_{f-v_0}$ . (Für das weitere benutzen wir eine Beweisidee von Brosowski [12].)

Wegen der Kompaktheit der Menge  $M_{f-v_0}$  gibt es eine reelle Zahl  $a$  in der Art, daß für jeden Punkt  $x$  aus  $M_{f-v_0}$  die Ungleichung

$$\operatorname{Re}(f(x) - v_0(x), v(x) - v_0(x)) \geq a > 0$$

gilt. Die Menge

$$U := \left\{ x \in Q : \operatorname{Re}(f(x) - v_0(x), v(x) - v_0(x)) > \frac{a}{2} \right\}$$

ist wegen der Stetigkeit der Abbildungen  $f - v_0$  und  $v - v_0$  offen und enthält die Menge  $M_{f-v_0}$ . Für jeden Punkt  $x$  aus  $Q \setminus U$  gilt die Abschätzung

$$\|f(x) - v_0(x)\|_H < \|f - v_0\|.$$

Da  $Q \setminus U$  abgeschlossen und folglich kompakt ist, folgt

$$E^* := \max_{x \in Q \setminus U} \|f(x) - v_0(x)\|_H < \|f - v_0\|.$$

Für jeden Punkt  $x$  aus  $\bar{U}$  gilt die Abschätzung

$$\operatorname{Re}(f(x) - v_0(x), v(x) - v_0(x)) \geq \frac{a}{2} > 0.$$

Es gibt daher eine reelle Zahl  $c$  in der Art, daß

$$\|f(x) - v_0(x)\|_H \geq c > 0$$

für alle  $x$  aus  $\bar{U}$  gilt. Für jedes  $x$  aus  $Q$  setzen wir

$$g(x) := \begin{cases} c \cdot \frac{f(x) - v_0(x)}{\|f(x) - v_0(x)\|_H} & \text{für } x \in \{x \in Q : \|f(x) - v_0(x)\|_H \geq c\} \\ f(x) - v_0(x) & \text{für } x \in \{x \in Q : \|f(x) - v_0(x)\|_H \leq c\}. \end{cases}$$

Damit ist  $g$  eine stetige Abbildung von  $Q$  in  $H$ . Nach dem Lemma von Urysohn gibt es eine auf  $Q$  stetige reelle Funktion  $m$  mit den Eigenschaften

$$m(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \{x \in Q : \operatorname{Re}(g(x), v(x) - v_0(x)) \leq 0\} \\ 1 & \text{für } x \in \bar{U} \end{cases}$$

und  $0 \leq m(x) \leq 1$  für jedes  $x$  aus  $Q$ . Nun setzen wir  $h := m \cdot g$ . Dann gilt für jeden Punkt  $x$  aus  $M_h$  die Abschätzung

$$\operatorname{Re}(h(x), v(x) - v_0(x)) > 0.$$

Ist nämlich  $x$  aus  $M_h$ , so ist

$$m(x) \cdot \|g(x)\|_H = \|h(x)\|_H = \|h\| > 0$$

und somit  $m(x) > 0$  und  $\operatorname{Re}(g(x), v(x) - v_0(x)) > 0$ . Aus den letzten beiden Ungleichungen folgt die behauptete Ungleichung.

Wegen der vorausgesetzten  $C$ -Regularität gibt es zu dem Element  $v$  aus  $V$ , zu dem Element  $h$  aus  $C[Q, H]$  und zu jeder reellen Zahl  $\mu > 0$  ein Element  $v_\mu$ , das den Bedingungen

$$2 \operatorname{Re}(h(x), v_\mu(x) - v_0(x)) > \|v_\mu(x) - v_0(x)\|_H^2$$

für  $x$  aus  $M_h$  und

$$\|v_\mu - v_0\| < \mu \tag{7}$$

genügt. Wegen  $M_h \supset \bar{U}$  und  $\|f(x) - v_0(x)\|_H \geq c$  für  $x$  aus  $\bar{U}$  folgt weiter

$$2 \operatorname{Re}(f(x) - v_0(x), v_\mu(x) - v_0(x)) > \|v_\mu(x) - v_0(x)\|_H^2$$

für  $x$  aus  $\bar{U}$ .

Es sei nun  $\mu$  eine reelle Zahl, die der Bedingung  $0 < \mu < \|f - v_0\| - E^*$  genügt. Dann gilt für jeden Punkt  $x$  aus  $U$  die Beziehung

$$\begin{aligned} & \|f(x) - v_\mu(x)\|_H^2 \\ &= \|f(x) - v_0(x) - (v_\mu(x) - v_0(x))\|_H^2 \\ &\leq \|f - v_0\|^2 - 2 \operatorname{Re}(f(x) - v_0(x), v_\mu(x) - v_0(x)) + \|v_\mu(x) - v_0(x)\|_H^2, \end{aligned}$$

aus der mit der oben bewiesenen Ungleichung

$$2 \operatorname{Re}(f(x) - v_0(x), v_\mu(x) - v_0(x)) > \|v_\mu(x) - v_0(x)\|_H^2$$

die Abschätzung

$$\|f(x) - v_\mu(x)\|_H^2 < \|f - v_0\|^2$$

folgt. Für jeden Punkt  $x$  aus  $Q \setminus U$  gilt wegen  $0 < \lambda < \|f - v_0\| - E^*$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|f(x) - v_\mu(x)\|_H &= \|f(x) - v_0(x) - (v_\mu(x) - v_0(x))\|_H \\ &\leq \|f(x) - v_0(x)\| + \|v_\mu(x) - v_0(x)\|_H \\ &< E^* + \|f - v_0\| - E^* = \|f - v_0\|. \end{aligned}$$

Folglich gilt für alle  $\mu$  mit  $0 < \mu < \|f - v_0\| - E^*$  die Ungleichung

$$\|f - v_\mu\| < \|f - v_0\|,$$

die gleichbedeutend mit der Ungleichung

$$\operatorname{Re} L(f - v_\mu) < \|f - v_0\|$$

für alle  $L$  aus  $C[Q, H]^*$  mit  $\|L\| = 1$  ist und somit auch für alle  $L$  aus  $A$  gültig ist.

Wählen wir  $\mu$  mit  $0 < \mu < \lambda$ , so genügt dieses  $v_\mu$  wegen der vorstehenden Betrachtung der Bedingung (R1) und wegen der Ungleichung (7) der Bedingung (R2) der  $R$ -Regularität. Folglich ist  $V$   $R$ -regulär im Punkte  $v_0$ . Da  $v_0$  beliebig in  $V$  gewählt war, ist  $V$  daher  $R$ -regulär.

## 6. BEWEIS DES DURCHSCHNITSSATZES FÜR KOLMOGOROFF-MENGEN 1. ART

Wir verallgemeinern den von Rivlin und Shapiro [26] eingeführten Begriff der Extremalsignatur auf normierte Vektorräume.

DEFINITION 3. (1) Eine nichtleere  $\sigma_{\text{Ep}}$ -abgeschlossene Teilmenge  $A$  von  $\text{Ep } S_{R^*}$  heißt eine Signatur, wenn es ein vom Nullelement verschiedenes Element  $f$  aus  $R$  gibt mit  $\mathcal{E}_f \supset A$ .

(2) Eine Teilmenge  $A \subset R^*$  heißt extremal für das Element  $v_0$  aus  $V$  bezüglich einer Teilmenge  $V$  von  $R$ , wenn jedes Element  $v$  aus  $V$  der Ungleichung

$$\min_{L \in A} \text{Re } L(v - v_0) \leq 0$$

genügt.

Mit Hilfe dieser Definition läßt sich das globale Kolmogoroff-Kriterium folgendermaßen formulieren:

Wenn die Signatur  $\mathcal{E}_{f-v_0}$  extremal ist für  $v_0$  bezüglich  $V$ , dann ist  $v_0$  Minimallösung für  $f$  bezüglich  $V$ .

Wir beweisen nun den

SATZ 12. Gegeben sei eine Kolmogoroff-Menge 1. Art  $V$  eines normierten Vektorraumes  $R$ , ein Element  $f$  aus  $R$  und eine Teilmenge  $T$  von  $V$ . Dann gilt: Die Teilmenge  $T$  von  $V$  ist genau dann eine Menge von Minimallösungen für das Element  $f$  aus  $R$ , wenn der Durchschnitt

$$\Delta := \bigcap_{v \in T} \mathcal{E}_{f-v}$$

extremal für alle  $v$  aus  $T$  ist.

*Beweis. Hinlänglichkeit.* Sei  $v_0$  beliebig aus  $T$ . Da  $\Delta$  extremal für  $v_0$  ist, ist auch  $\mathcal{E}_{f-v_0}$  extremal für  $v_0$ . Folglich ist  $v_0$  eine Minimallösung für  $f$  bezüglich  $V$ .

*Notwendigkeit.* Wir beweisen die Notwendigkeit in mehreren Schritten.

Zunächst zeigen wir durch vollständige Induktion nach  $n$  die folgende Aussage:

(1) Für alle  $f$  aus  $R$  gilt: Sind  $v_1, \dots, v_n$  Minimallösungen für  $f$  bezüglich  $V$ , dann gibt es zu jedem  $v$  aus  $V$  ein  $L$  aus

$$\Gamma := \bigcap_{v=1}^n \Sigma_{f-v_v}$$

mit

$$\text{Re } L(v - v_v) \leq 0$$

für alle  $v = 1, \dots, n$ .

Aus (1) folgt dann unmittelbar, daß  $\Gamma$  extremal ist für jedes der Elemente  $v_1, \dots, v_n$  bezüglich  $V$ .

Da  $V$  eine Kolmogoroff-Menge 1. Art ist, ist für jedes Element  $f$  aus  $R$  und für jede Minimallösung  $v$  für  $f$  die Menge  $\Sigma_{f-v}$  extremal für  $v$  bezüglich  $V$ . Die Behauptung (1) gilt also für  $n = 1$ .

Nun zeigen wir, daß die Behauptung (1) für  $n + 1$  gilt, wenn sie für  $n$  gültig ist. Es seien

$$v_1, v_2, \dots, v_{n+1} \in V$$

Minimallösungen für  $f$  bezüglich  $V$  und  $v$  ein beliebiges Element aus  $V$ . Wir haben dann zu zeigen, daß es ein Funktional  $L$  aus  $R$  gibt mit den folgenden Eigenschaften:

$$\|L\| = 1; \quad (8)$$

$$L(f - v_\nu) = E(f; V), \quad \nu = 1, 2, \dots, n + 1; \quad (9)$$

$$\operatorname{Re} L(v - v_\nu) \leq 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, n + 1, \quad (10)$$

wobei wir

$$E(f; V) := \inf_{v \in V} \|f - v\|$$

gesetzt haben. Es sei bemerkt, daß es im Falle der Ungleichungen (10) genügt nur die Ungleichung für  $\nu = 1$  zu beweisen. Die übrigen Ungleichungen folgen mit Hilfe von (9) aus der für  $\nu = 1$ .

Nun definieren wir für jede nichtnegative reelle Zahl  $\lambda$  das Element

$$f_\lambda := f + \lambda \cdot (f - v_{n+1})$$

und die Menge

$$S_\lambda := \{g \in R : \|f_\lambda - g\| < (1 + \lambda) \cdot E(f; V)\}.$$

Nun gilt für alle  $g$  aus  $S_0$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|f_\lambda - g\| &\leq \|f_\lambda - f\| + \|f - g\| < \lambda \cdot \|f - v_{n+1}\| + E(f; V) \\ &= (1 + \lambda) \cdot E(f; V). \end{aligned}$$

Folglich gilt die Inklusion  $S_0 \subset S_\lambda$  für alle  $\lambda \geq 0$ .

Da eine Kolmogoroffsche Menge 1. Art nach Satz 1 eine  $\alpha$ -Sonne ist, ist  $v_{n+1}$  auch eine Minimallösung für  $f_\lambda$  bezüglich  $V$ , wobei

$$\|f_\lambda - v_{n+1}\| = (1 + \lambda) \cdot \|f - v_{n+1}\| = (1 + \lambda) \cdot E(f; V)$$

gilt. Nun gilt für  $\nu = 1, 2, \dots, n$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|f_\lambda - v_\nu\| &\leq \|f_\lambda - f\| + \|f - v_\nu\| = \lambda \cdot \|f - v_{n+1}\| + E(f; V) \\ &= (1 + \lambda) \cdot E(f; V). \end{aligned}$$

Folglich sind auch  $v_1, v_2, \dots, v_n$  Minimallösungen für  $f_\lambda$  bezüglich  $V$ . Nach Induktionsvoraussetzung gibt es für die Elemente  $v_1, v_2, \dots, v_n$  und für das Element  $f_\lambda$  zu dem Element  $v$  aus  $V$  ein Funktional  $L$  aus  $R$  mit den folgenden Eigenschaften:

$$\|L\| = 1; \quad (8^*)$$

$$L(f_\lambda - v_\nu) = (1 + \lambda) \cdot E(f; V), \quad \nu = 1, 2, \dots, n; \quad (9^*)$$

$$\operatorname{Re} L(v - v_\nu) \leq 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (10^*)$$

Wir zeigen nun, daß für  $\lambda > 0$  dieses Funktional  $L$  den Bedingungen (8), (9) und (10) genügt. Dazu haben wir gemäß der Bemerkung nach den Ungleichungen (10) nur noch zu zeigen, daß

$$L(f - v_\nu) = E(f; V)$$

für  $\nu = n + 1$  gilt. Die Hyperebene

$$H := \{g \in R : \operatorname{Re} L(g) = \operatorname{Re} L(v_1)\}$$

ist eine Stützhyperebene an die Menge  $S_\lambda$  mit dem Stützpunkt  $v_1$ . Es gilt nämlich für jedes  $g$  aus  $S_\lambda$  wegen

$$\operatorname{Re} L(f - g) \leq \|f_\lambda - g\| < (1 + \lambda) \cdot E(f; V) = \operatorname{Re} L(f_\lambda - v_1)$$

die Ungleichung

$$\operatorname{Re} L(g) > \operatorname{Re} L(v_1).$$

Ferner ist  $v_1$  aus  $\partial S_\lambda \cap H$ . Wegen  $S_0 \subset S_\lambda$  und  $v_1$  aus  $\partial S_0$  ist  $H$  auch eine Stützhyperebene an  $S_0$  mit dem Stützpunkt  $v_1$ . Folglich gilt  $L(f - v_1) = \|f - v_1\| = E(f; V)$ . Wegen Bedingung (9\*) folgt dann

$$L(f - v_\nu) = E(f; V)$$

auch für  $\nu = 2, 3, \dots, n$ . Wäre nun  $L(f - v_{n+1}) \neq E(f; V)$ , so folgt

$$\operatorname{Re} L(f_\lambda - v_{n+1}) < (1 + \lambda) \cdot E(f; V)$$

und somit auch

$$\operatorname{Re} L(f - v_{n+1}) < E(f; V)$$

und

$$\operatorname{Re} L(f_\lambda - f) < \lambda \cdot E(f; V).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} (1 + \lambda) \cdot E(f; V) &= L(f_\lambda - v_1) \\ &= \operatorname{Re} L(f_\lambda - f) + \operatorname{Re} L(f - v_1) < \lambda \cdot \|f - v_1\| \\ &\quad + \|f - v_1\| = (1 + \lambda) \cdot E(f; V). \end{aligned}$$

Dieser Widerspruch zeigt uns, daß auch

$$L(f - v_{n+1}) = E(f; V)$$

ist. Damit ist die Behauptung (1) bewiesen.

(2) Für alle  $f$  aus  $R$  gilt: Ist  $T \subset V$  eine Menge von Minimallösungen für  $f$  bezüglich  $V$ , so ist

$$\Gamma := \bigcap_{v \in T} \Sigma_{f-v}$$

extremal für jedes Element  $v$  aus  $T$ .

Wir beweisen indirekt und nehmen an, es gebe ein  $v_0$  aus  $T$  und ein  $\hat{v}$  aus  $V$  mit

$$\operatorname{Re} L(\hat{v} - v_0) > 0$$

für alle  $L$  aus  $\Gamma$ . Dann gilt

$$\Gamma \cap \{L \in S_{R^*} : \operatorname{Re} L(\hat{v} - v_0) \leq 0\} = \emptyset.$$

Wegen der  $\sigma(R^*, R)$ -Kompaktheit der Menge

$$\Sigma_{f-v_0} \cap \{L \in S_{R^*} : \operatorname{Re} L(\hat{v} - v_0) \leq 0\}$$

gibt es dann endlich viele Elemente  $v_1, v_2, \dots, v_n$  aus  $T$ , so daß

$$\bigcap_{v=0}^n (\Sigma_{f-v} \cap \{L \in S_{R^*} : \operatorname{Re} L(\hat{v} - v_0) \leq 0\}) = \emptyset$$

gilt, was jedoch wegen (1) nicht möglich ist.

(3) *Beweis von Satz 12.* Nach dem unter (2) Bewiesenen ist  $\Gamma$  extremal für jedes Element aus  $T$ . Daher ist nach [10], Lemma 2, wegen

$$\begin{aligned} \text{Ep} \left( \bigcap_{v \in T} \Sigma_{f-v} \right) &= \text{Ep}(S_{R^*}) \cap \bigcap_{v \in T} \Sigma_{f-v} \\ &= \bigcap_{v \in T} (\text{Ep}(S_{R^*}) \cap \Sigma_{f-v}) \\ &= \bigcap_{v \in T} \mathcal{E}_{f-v} \end{aligned}$$

auch  $\Delta$  extremal für alle  $v$  aus  $T$ .

### 7. EINIGE FOLGERUNGEN AUS DEM DURCHSCHNITSSATZ

Wir bezeichnen mit  $\text{con } A$  die konvexe Hülle einer Teilmenge  $A$  eines linearen Raumes und setzen für jedes Element  $f$  eines normierten Vektorraumes  $R$  und für jede reelle Zahl  $\alpha \geq 0$

$$K[f; \alpha] := \{g \in R : \|f - g\| \leq \alpha\}.$$

Ferner setzen wir

$$P_V(f) := \{v \in V : \|f - v\| = E(f; V)\}.$$

Wir beweisen den

**SATZ 13.** *Es sei  $V$  eine Kolmogoroff-Menge 1. Art im normierten Vektorraum  $R$ . Dann gilt für alle  $f$  aus  $R$  die Inklusion*

$$\text{con } P_V(f) \subset \partial K[f; E(f; V)].$$

*Beweis.* Gegeben seien die Elemente  $v_1, v_2, \dots, v_k$  aus  $P_V(f)$ . Dann gilt für alle nichtnegativen reellen Zahlen  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$  mit  $\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_k = 1$  die Abschätzung

$$\left\| f - \sum_{x=1}^k \rho_x v_x \right\| \leq \sum_{x=1}^k \rho_x \|f - v_x\| = E(f; V). \quad (11)$$

Nach dem Durchschnittssatz gibt es ein Funktional

$$L \in \bigcap_{x=1}^k \mathcal{E}_{f-v_x}$$

mit  $L(f - v_x) = E(f; V)$  für  $\kappa = 1, 2, \dots, k$ . Dann gilt für alle nichtnegativen reellen Zahlen  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$  mit  $\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_k = 1$  die Gleichung

$$L \left( f - \sum_{x=1}^k \rho_x v_x \right) = \sum_{x=1}^k L(f - v_x) = E(f; V),$$

aus der die Abschätzung

$$\left\| f - \sum_{x=1}^k \rho_x v_x \right\| \geq E(f; V)$$

folgt. Zusammen mit der Abschätzung (11) gilt also

$$\left\| f - \sum_{x=1}^k \rho_x v_x \right\| = E(f; V).$$

Folglich gilt  $P_V(f) \subset \partial K[f; E(f; V)]$ .

Mit Hilfe von Satz 13 verallgemeinern wir nun ein Ergebnis von I. Singer [27] aus der Theorie der linearen Approximation auf die Approximation durch Elemente aus Kolmogoroff-Mengen 1. Art. Zunächst einige Vorbereitungen:

Wir bezeichnen mit  $I(A)$  die lineare Mannigfaltigkeit, die von einer Teilmenge  $A$  eines normierten Vektorraumes  $R$  aufgespannt wird, d.h. die Menge

$$I(A) := \{\lambda x + (1 - \lambda) y \in R : y, x \in \text{con } A \text{ und } -\infty < \lambda < +\infty\}.$$

Für  $0 \leq \dim I(A) < \infty$  erklären wir die Dimension einer Menge  $A$  aus  $R$  durch

$$\dim A := \dim I(A).$$

Nach Singer [27] definieren wir:

**DEFINITION 4.** Ein normierter Vektorraum  $R$  ist genau dann  $k$ -strikt konvex, wenn für je  $k + 1$  Elemente  $x_0, x_1, \dots, x_k$  aus  $R$  die Gleichung

$$\|x_0 + x_1 + \dots + x_k\| = \|x_0\| + \|x_1\| + \dots + \|x_k\|$$

die lineare Abhängigkeit der Elemente  $x_0, x_1, \dots, x_k$  impliziert.

Im Falle  $k = 1$  fällt die  $k$ -strikte Konvexität mit der üblichen strikten Konvexität eines normierten Vektorraumes zusammen. Wir benötigen das folgende

**LEMMA 3 (I. Singer [27]).** *Ein normierter Vektorraum  $R$  ist genau dann  $k$ -strikt konvex, wenn jede konvexe Teilmenge der Sphäre*

$$\{x \in R : \|x\| = 1\}$$

*höchstens die Dimension  $k - 1$  hat.*

Nun ergeben sich aus Satz 13 mit Hilfe des Singerschen Lemma die beiden Folgerungen.

*Folgerung 1.* In einem  $k$ -strikt konvexen Raum ist für jede Kolmogoroff-Menge 1. Art die Menge der Minimallösungen höchstens  $(k - 1)$ -dimensional.

*Folgerung 2.* In einem strikt konvexen Raum ist jede Kolmogoroff-Menge 1. Art eine Tschebyscheff-Menge.

Dabei heißt eine Teilmenge  $V$  von  $R$  genau dann eine Tschebyscheff-Menge, wenn es zu jedem  $f$  aus  $R$  höchstens eine Minimallösung für  $f$  bezüglich  $V$  gibt.

Folgerung 1 enthält als Spezialfall den von Singer [27] behandelten Fall linearer Räume.

Mit Hilfe des Durchschnittssatzes beweisen wir nun für Kolmogoroff-Mengen 1. Art ein hinreichendes Eindeutigkeitskriterium, das wir in der folgenden Form aufschreiben:

**SATZ 14.** *Es sei  $V$  eine Kolmogoroff-Menge 1. Art in einem normierten Vektorraum  $R$ .*

*Ist  $V$  keine Tschebyscheff-Menge, so gibt es Elemente  $v, v_0$  aus  $V$  und eine Extremsignatur  $E$  für  $v_0$  bezüglich  $V$  mit  $L(v - v_0) = 0$  für alle  $L$  aus  $E$ .*

*Beweis.* Ist  $V$  keine Tschebyscheff-Menge, so gibt es ein  $f$  aus  $R$  mit mindestens zwei Minimallösungen  $v_0$  und  $v$  bezüglich  $V$ . Dann ist nach dem Durchschnittssatz die Signatur  $\mathcal{E}_{f-v_0} \cap \mathcal{E}_{f-v}$  extremal für  $v_0$  bezüglich  $V$  und es gilt  $L(v - v_0) = 0$  für alle  $L$  aus  $\mathcal{E}_{f-v_0} \cap \mathcal{E}_{f-v}$ .

Mit Hilfe von Satz 14 und der Darstellung der Extremalfunktionale der Einheitskugel im Dualraum von  $R$  kann man die Hinlänglichkeit verschiedener Eindeutigkeitskriterien in konkreten Funktionenräumen neu herleiten bzw. verallgemeinern. Wir erläutern diese Herleitung an einem sehr einfachen Beispiel der linearen Tschebyscheff-Approximation im Raume  $C[Q]$  der stetigen komplexwertigen Funktionen auf einem kompakten Hausdorff-Raum  $Q$ .

**BEISPIEL 5.** Es sei  $V$  ein linearer Teilraum der Dimension  $n$  von  $C[Q]$ , der der Haarschen Bedingung genügt, d.h. für alle  $v, v_0$  aus  $V$  mit  $v \neq v_0$  hat die Differenz  $v - v_0$  höchstens  $n - 1$  Nullstellen in  $Q$ . Man überlegt sich ferner leicht, daß jede Extremsignatur für  $v_0$  aus  $V$  bezüglich  $V$  mindestens  $n + 1$  Elemente enthält. Wegen der Darstellung der Extremalfunktionale von  $S_{C[Q]}$  durch

$$f \rightarrow \epsilon \cdot f(x)$$

mit  $x$  aus  $Q$  und  $\epsilon \in \mathbb{C}$ ,  $|\epsilon| = 1$ , folgt aus der Haarschen Bedingung, daß für alle  $v, v_0$  aus  $V$  und jede Extremsignatur  $E$  für  $v_0$  bezüglich  $V$  mindestens ein  $L$  aus  $E$  existiert mit  $L(v - v_0) \neq 0$ . Dann ist nach Satz 14  $V$  eine Tschebyscheff-Menge.

Es sei bemerkt, daß in diesem Fall die Bedingung von Satz 14 auch notwendig ist. Man kann sogar zeigen, daß diese Bedingung auch für Kolmogoroff-Mengen 1. Art im Raume  $C[Q, H]$  notwendig und hinreichend für die eindeutige Lösbarkeit des Approximationsproblems ist (vgl. Brosowski [9]). Jedoch ist im allgemeinen diese Bedingung keine notwendige Bedingung. Das zeigen die Untersuchungen von Brosowski [6, 11], Brosowski und Loeb [15], Brosowski und Stoer [16] und Müller [25] über die Tschebyscheff-Approximation differenzierbarer oder analytischer Funktionen.

#### LITERATUR

1. I. AROLD, "Zur Charakterisierung von Minimallösungen in der  $L_1$ -Approximation," Zulassungsarbeit, München 1968.
2. W. BRECKNER UND J. KOLUMBAN, Théorèmes de caractérisation des éléments de la meilleure approximation, *C. R. Acad. Sci. Paris* **266** (1968), 206–208.
3. W. BRECKNER UND J. KOLUMBAN, Über die Charakterisierung von Minimallösungen in linearen normierten Räumen, *Mathematica (Cluj)* **10** (1968), 33–46.
4. B. BROSOWSKI, Über Tschebyscheffsche Approximationen mit verallgemeinerten rationalen Funktionen, *Math. Z.* **90** (1965), 140–151.
5. B. BROSOWSKI, Über Tschebyscheffsche Approximationen durch asymptotisch konvexe Funktionenfamilien. *Computing* **1** (1966), 215–223.
6. B. BROSOWSKI, Tschebyscheffsche Approximationen an differenzierbare Funktionen, *Z. Angew. Math. Mech.* **46** (1966), 39–40.
7. B. BROSOWSKI, Fixed point theorems in approximation theory, Theory and Applications of Monotone Operators. Proc. NATO Advanced Study Institute Venice, 1968.
8. B. BROSOWSKI, Einige Bemerkungen zum verallgemeinerten Kolmogoroffschen Kriterium, Funktionalanalytische Methoden der numerischen Mathematik, *ISNM* **12**, S. 25–34, Birkhäuser-Verlag (1969).
9. B. BROSOWSKI, "Nicht-lineare Tschebyscheff-Approximation," B. I. Hochschulschriften, Bd. 808/808a, Bibliographisches Institut Mannheim, 1968.
10. B. BROSOWSKI, "Nichtlineare Approximation in normierten Vektorräumen," Abstract Spaces and Approximation, *ISNM* **10**, S. 140–159, Birkhäuser-Verlag (1969).
11. B. BROSOWSKI, Rationale Tschebyscheff-Approximation differenzierbarer Funktionen, in "Numerische Mathematik, Differentialgleichungen, Approximationstheorie," pp. 229–250, Birkhäuser-Verlag Basel und Stuttgart 1968.
12. B. BROSOWSKI, "Zur nichtlinearen Tschebyscheff-Approximation an Funktionen mit Werten in einem unitären Raum," *Mathematica II* (34) (1969), 53–60.
13. B. BROSOWSKI, Fixpunktsätze in der Approximationstheorie, *Mathematica II* (34) (1969), 195–220.
14. B. BROSOWSKI, On the necessity of the generalized Kolmogorov criterion, *Notices Amer. Math. Soc.* **16** (1969), 643.

15. B. BROSOWSKI UND H. L. LOEB, Zur Eindeutigkeit der rationalen Tschebyscheff-Approximationen an stetig differenzierbare Funktionen, *Numer. Math.* **10** (1967), 51–55.
16. B. BROSOWSKI UND J. STOER, Zur rationalen Tschebyscheff-Approximation differenzierbarer und analytischer Funktionen, *Numer. Math.* **12** (1968), 57–65.
17. B. BROSOWSKI UND H. WEBER, Zum Begriff der Regularität in normierten Vektorräumen, Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München, *MPI-PAE/Astro* **10/68** (1969).
18. B. BROSOWSKI, K. H. HOFFMANN, E. SCHÄFER, UND H. WEBER, Wann ist das Kolmogoroff-Kriterium notwendig?, Erscheint in der ZAMM.
19. B. BROSOWSKI, K. H. HOFFMANN, E. SCHÄFER, UND H. WEBER, Stetigkeitssätze für metrische Projektionen. III. Eine Fixpunkteigenschaft der metrischen Projektion, Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München, *MPI-PAE/Astro* **12** (1969).
20. K. H. HOFFMANN, Persönliche Mitteilung 1969.
21. S. KARLIN UND W. STUDDEN, "Tchebycheff Systems: With Applications in Analysis and Statistics," Interscience Publishers, New York/London/Sydney (1966).
22. W. KRABS, Über die Reichweite des lokalen Kolmogoroff-Kriteriums bei der nicht-linearen gleichmäßigen Approximation, *J. Approximation Theory* **2** (1969), 258–264.
23. M. C. LOBRY, "Étude géométrique des problèmes d'optimisation en présence de contraintes," Thèse, Grenoble, 1967.
24. G. MEINARDUS UND D. SCHWEDT, Nicht-lineare Approximationen, *Arch. Rational Mech. Anal.* **17** (1964), 297–326.
25. A. MÜLLER, Tschebyscheff-Approximation an differenzierbare Funktionen mehrerer Veränderlicher, Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München, *MPI-PAE/Astro* **21/69** (1969).
26. T. J. RIVLIN UND H. S. SHAPIRO, A unified approach to certain problems of approximation and minimization, *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **9** (1961), 670–699.
27. I. SINGER, On the set of the best approximations of an element in a normed linear space, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **5** (1960), 383–402.
28. I. SINGER, Choquet spaces and best approximation, *Math. Ann.* **148** (1962), 330–340.
29. I. SINGER, Cea mai buna aproximare in spatii vectoriale normate prin elemente din subspatii vectoriale, Bukarest: Academiei Republicii socialiste Romania, 1967.
30. H. WERNER, "Vorlesung über Approximationstheorie," Lectures Notes in Mathematics 14, Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York, 1966.