Topology Vol. 8, pp. 99—114. Pergamon Press, 1969. Printed in Great Britain

QUADRATISCHE FORMEN ALS INVARIANTEN VON EINBETTUNGEN DER KODIMENSION 2

DIETER ERLE

(*Eingegangen* 10. *September* 1968)

§ 1. EINLEITUNG

WIR BETRACHTEN Paare (S^{m+2}, M), wo M eine m-dimensionale differenzierbar in S^{m+2} eingebettete Mannigfaltigkeit ist. Wir setzen immer $m \geqslant 1$ und M als kompakt, unberandet, zusammenhängend und orientiert voraus. In [2] war der Fall $m = 1$ behandelt worden; in dieser Arbeit verfeinern wir unsere Methoden und erhalten analoge Resultate in höheren Dimensionen. Wir zeigen in §2, daß Homologie und Kohomologie der unendlich-zyklischen Überlagerung des Komplements einer Tubenumgebung von M modulo Rand sowie die Auszeichnung einer "Fundamentalklasse" nur vom topologischen Typ (Def. 2.5) des Paares (S^{m+2}, M) abhängt. Zur Untersuchung der Homologie dieser Überlagerung benutzen wir eine MAYER–VIETORIS-Sequenz von J. LEVINE [8]. §3 bringt später benötigte algebraische Hilfssätze; einige von diesen wurden bereits in [2] bewiesen und sind ohne Beweise übernommen. Im Fall einer rationalen Homologiesphäre M beweisen wir in §4 eine POINCARE-Dualität für den genannten Überlagerungsraum (Satz 4.2). Koeffizientenbereich ist dabei ein Unterring von $\mathbf{Q}$, in dem gewisse endlich viele Primzahlen Einheiten sind (=kleiner Unterring von $\mathbf{Q}$, Def. 4.1). Für fast alle p liefert dies eine POINCARE-Dualität bei $\mathbf{Z}_p$ als Koeffizienten. Eine derartige POINCARE-Dualität wurde 1966 von J. MILNOR in einem Brief an F. HIRZEBRUCH behauptet, und zwar für Homotopiesphären ungerader Dimension und Koeffizienten in einem Körper. Dort führt MILNOR auch eine Signatur als Knoteninvariante ein. Dieser Idee folgend definieren wir in §5 für jedes $M \subset S^{m+2}$, für das $m = \dim M = 2n - 1$ ist und $\tilde{H}_{n-1}(M; \mathbf{Z})$ und $\tilde{H}_{n-2}(M; \mathbf{Z})$ endlich sind, zwei Bilinearformen B_1 und B_2 über einem kleinen Unterring A von $\mathbf{Q}$. B_1 liefert für gerades n, B_2 für beliebiges n eine quadratische Form über A und damit auch eine Signatur. Diese sind Invarianten des topologischen Typs von (S^{m+2}, M) und können mit Hilfe einer SEIFERT-Matrix berechnet werden (Sätze 5.2 und 5.3). J. LEVINE hat kürzlich SEIFERT-Matrizen benutzt, um Knoten-Kobordismusgruppen zu charakterisieren [9]. Dabei ergab sich als Kobordismusinvariante eine Familie von ganzzahligen quadratischen Formen, deren Signatur mit einer unserer Signaturen übereinstimmt. Die entsprechende quadratische Form bei uns (über einem im allgemeinen größeren Ring als $\mathbf{Z}$ definiert!) ist keine Kobordismusinvariante (vergleiche z.B. [2] 6.4). In §6 bringen wir einige Anwendungen. Erstens haben gewisse Symmetrie-Eigenschaften der Einbettung $M \subset S^{m+2}$, nämlich Invertierbarkeit und Amphicheiralität, Symmetrie-Eigenschaften unserer quadratischen Formen und das Verschwinden einer Signatur zur Folge. Zweitens gibt die Signatur σ_1 für eine Homotopie-$(4k-1)$-Sphäre $\Sigma\,(k \geqslant 2)$ in S^{4k+1} die differenzierbare Struktur von Σ an. Als Folgerungen ergeben sich (6.5): Knoten in S^{4k+1} $(k \geqslant 2)$ vom gleichen topologischen Typ tragen die gleiche differenzierbare Struktur. Ein solcher Knoten mit exotischer Struktur ist topologisch nichttrivial†. Ein invertierbarer Knoten in $S^{4k+1}\,(k \geqslant 2)$ hat stets die Standard-Struktur. Es gibt nicht-invertierbare Knoten in $S^{4k+1}\,(k \geqslant 2)$ mit der Standard-Struktur. (Ein dem letzteren entsprechender Satz für dreidimensionale Knoten wurde von H. F. TROTTER bewiesen [18].) In §7 (Anhang) beweisen wir für die noch fehlenden Fälle den Satz: Die differenzierbare Struktur eines Knotens in S^{m+2} $(m \geqslant 5)$ ist eine Invariante des topologischen Typs.

Auf die Gültigkeit von Lemma 2.2 in dieser Allgemeinheit wies mich K. JÄNICH hin, wofür ich ihm hiermit danken möchte.

§2. DIE UNENDLICH-ZYKLISCHE ÜBERLAGERUNG

2.1 (S, M) sei ein Paar wie in der Einleitung, d.h. M eine kompakte, unberandete, zusammenhängende, orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $m \geqslant 1$, die in $S: = S^{m+2}$ differenzierbar eingebettet ist. S sei mit der Standard-Orientierung versehen. Ist π die Fundamentalgruppe von $S - M$, π' deren Kommutatorgruppe, so gilt wegen der ALEXANDER–Dualität $\pi/\pi' \cong H_1(S - M) \cong \mathbf{Z}$. Für jeden Normalteiler ν von π mit $\pi/\nu \cong \mathbf{Z}$ folgt daher $\nu = \pi'$. $S - M$ hat also genau eine unendlichzyklische Überlagerung.

2.2 Lemma. *M berandet in S^{m+2} eine orientierbare kompakte differenzierbar eingebettete Mannigfaltigkeit F.*

Beweis. M hat triviales Normalenbündel in S^{m+2}; denn einerseits verschwindet die EULER-Klasse dieses Bündels ([10] S.44), andererseits charakterisiert die EULER-Klasse das zugehörige komplexe Geradenbündel ([4] S.64). $f: S - M \to S^1$ repräsentiere ein Erzeugendes von $\pi^1(S - M) \cong H^1(S - M) \cong \mathbf{Z}$. Ist T eine kompakte Tubenumgebung von M, kann man eine Trivialisierung $\theta: M \times S^1 \to \partial T$ finden, so daß $f \circ \theta \circ i: M \to S^1$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist $(i: M \to M \times S^1, i(x) = (x, 1), 1 \in S^1 \subset \mathbf{C})$. Im Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \times I \arrow[r, dotted, "\varphi"] \arrow[d, "id \times \exp"] & \mathbf{R} \arrow[d, "\exp"] \\ M \times S^1 \arrow[r, "f \circ \theta"] & S^1 \end{tikzcd} \qquad \exp(t) = e^{2\pi i t}$$

kann man $f \circ \theta \circ (id \times \exp)$ zu φ liften. Man beachte, daß $\varphi(x, 1) - \varphi(x, 0) = 1$ bei passender Wahl von θ. Ohne $\varphi \mid M \times \partial I$ zu ändern, kann man φ homotop so abändern, daß $\varphi(x, \ldots): I \to \mathbf{R}$ für jedes $x \in M$ affin ist. Durch diese Homotopie wird $f \circ \theta$ so abgeändert, daß für jedes $x \in M$ $f \circ \theta(x, \ldots): S^1 \to S^1$ eine (orthogonale) Drehung ist. Daher darf man

† Dies letztere wurde schon von J. LEVINE [7] Th. (3) bewiesen.

ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß eine Tubenabbildung $\theta': M \times D^2 \to T$ existiert, so daß für alle $x \in M$ gilt:

$$f \circ \theta' \mid \{x\} \times S^1 \text{ ist eine Drehung von } S^1 \text{ und}$$

$$f \circ \theta'(x, y) = f \circ \theta'\left(x, \frac{y}{\|y\|}\right) \text{ für alle } y \in D^2 - \{0\}.$$

f ist homotop zu einer differenzierbaren Abbildung g, die in einer Tubenumgebung von M mit f übereinstimmt und transversal-regulär bezüglich eines Punktes $p \in S^1$ ist. $F = M \cup g^{-1}(p)$ hat dann die verlangten Eigenschaften.

2.3 Zu einer kompakten Tubenumgebung T von M konstruieren wir die unendlich-zyklische Überlagerung $\tilde{X}$ von $S^{m+2} - \mathring{T}$ auf folgende Weise (vergleiche [3], [8] und [2]): F sei eine von M berandete Mannigfaltigkeit wie in Lemma 2.2, die wir als zusammenhängend annehmen dürfen. F schneide ∂T transversal und $F \cap T$ sei ein Kragen von ∂F in F. Sei X der Raum, der aus $S - \mathring{T}$ durch Spalten längs $F' = F \cap (S - \mathring{T})$ entsteht. ∂X enthält zwei Exemplare von F'. F' ist durch M, ∂X durch X orientiert. $\underline{f}: F' \to X$ sei die Inklusion, für die die Orientierung von F' mit der von ∂X verträglich ist; $\bar{f}: F' \to X$ sei die andere Inklusion. Für jedes $i \in \mathbf{Z}$ sei $X_i, \bar{f}_i$ bzw. $\underline{f}_i$ ein Exemplar von $X, \bar{f}$ bzw. $\underline{f}$. In der disjunkten Vereinigung $\bigcup_{i \in \mathbf{Z}} X_i$ wird $\bar{f}_i(F')$ mit $\underline{f}_{i+1}(F')$ durch $\underline{f}_{i+1} \circ \bar{f}_i^{-1}$ identifiziert wir und erhalten $\tilde{X}$. t sei die Deckbewegung, die X_i auf X_{i+1} abbildet.

2.4 Jede der natürlichen Inklusionen $i: F \to \tilde{X}$ liefert ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_{m+1}(\tilde{X}) \arrow[r] & H_{m+1}(\tilde{X}, \partial\tilde{X}) \arrow[r, "\partial"] & H_m(\partial\tilde{X}) \arrow[r] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & H_{m+1}(F, M) \arrow[u, "i_*"] \arrow[r, "\partial"] & H_m(M) \arrow[u, "\cong"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$i(F)$ und $t \circ i(F)$ sind homolog in $(\tilde{X}, \partial\tilde{X})$, daher $t_* i_*[F] = i_*[F]$, d.h. es ist gleichgültig, welche Inklusion i ist. $i_*[F]$ hängt aber auch nicht von der Wahl der Mannigfaltigkeit F mit $\partial F = M$ ab. Denn für eine andere Mannigfaltigkeit G mit $\partial G = M$ gibt es eine Inklusion $j: G \to \tilde{X}$ mit $i(F) \cap j(G) = \emptyset$, und dann sind $i(F)$ und $j(G)$ homolog in $(\tilde{X}, \partial\tilde{X})$. Dies rechtfertigt die Definition:

Definition. $[\tilde{X}] := i_*[F] \in H_{m+1}(\tilde{X}, \partial\tilde{X})$ heiße die *Fundamentalklasse* von $\tilde{X}$.

Bemerkung 1. $t_*[\tilde{X}] = [\tilde{X}]$.

Bemerkung 2. Wählt man eine andere Tubenumgebung zur Konstruktion von $\tilde{X}$, so sind jedenfalls die entsprechenden Homologiemoduln und Kohomologieringe von $\tilde{X}$ und $(\tilde{X}, \partial\tilde{X})$ kanonisch isomorph, und die Isomorphie ist mit dem Operieren von t und der Definition der Fundamentalklasse verträglich.

2.5 *Definition.* Sind M_1 und M_2 differenzierbare Untermannigfaltigkeiten von S^{m+2} wie M in 2.1, so heißen die Paare (S, M_1) und (S, M_2) vom gleichen topologischen Typ, wenn ein orientierungstreuer Homöomorphismus $h: S \to S$ existiert, so daß $h(M_1) = M_2$ und $h \mid M_1 : M_1 \to M_2$ orientierungstreu ist.

Seien (S, M_1) und (S, M_2) vom gleichen topologischen Typ, h wie in der Definition, T_i kompakte Tubenumgebung von M_i, F_i zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit Rand M_i wie in Lemma 2.2 und $\tilde{X}_i$ der entsprechende Überlagerungsraum. $S - M_i$ und $T_i - M_i$ haben unendlich-zyklische Überlagerungen $\tilde{Z}_i$ bzw. $\tilde{T}_i$. h vermittelt Isomorphismen $H_*(\tilde{Z}_1) \to H_*(\tilde{Z}_2)$ und $H_*(\tilde{T}_1) \to H_*(\tilde{T}_2)$, daher auch einen Isomorphismus $H_*(\tilde{Z}_1, \tilde{T}_1) \to H_*(\tilde{Z}_2, \tilde{T}_2)$, und diese sind bis auf eine Potenz von t_* eindeutig bestimmt. $(\tilde{X}_i, \partial\tilde{X}_i) \subset (\tilde{Z}_i, \tilde{T}_i)$ ist Homotopieäquivalenz. h liefert daher Isomorphismen $H_*(\tilde{X}_1) \to H_*(\tilde{X}_2)$ und $H_*(\tilde{X}_1, \partial\tilde{X}_1) \to H_*(\tilde{X}_2, \partial\tilde{X}_2)$, und diese sind mit dem Operieren von t verträglich und bis auf eine Potenz von t_* eindeutig bestimmt. Für die Kohomologie hat man entsprechende Isomorphismen. Unter jedem dieser Isomorphismen geht die Fundamentalklasse $[\tilde{X}_1]$ in $[\tilde{X}_2]$ über. Das kann man folgendermaßen einsehen:

T_1 nehmen wir so klein an, daß $h(T_1) \subset T_2$ ist. $h(F_1)$ ist topologische Untermannigfaltigkeit von S^{m+2} mit Rand M_2 und hat eine (topologische) Verdickung, d.h. eine zu $F_1 \times I$ homöomorphe Nachbarschaft N von $h(F_1) - M_2$. Man kann eine stetige Abbildung $f: S - h(T_1) \to S^1$ finden, so daß f ein Erzeugendes von $\pi^1(S - h(T_1))$ repräsentiert und $f^{-1}(1) \subset h(F_1)$ ist. Diese approximiere man durch eine differenzierbare Abbildung $g: S - h(T_1) \to S^1$, die zu $1 \in S^1$ transversal-regulär ist. Die Approximation kann man so gut wählen, daß $G := g^{-1}(1) \subset N$ ist. Nun fassen wir F_2, $h(F_1)$, G, N, $\tilde{T}_1$ als Teilmengen von $\tilde{Z}_2$ auf.

$$\begin{tikzcd}
 & H_{m+1}(\tilde{Z}_2, \tilde{T}_2) \arrow[r, "\partial"] & H_m(\tilde{T}_2) & \\
H_{m+1}(hF_1, \partial(hF_1)) \arrow[ur] \arrow[r, phantom, "\cong"] & H_{m+1}(N, N \cap \tilde{T}_1) \arrow[u] \arrow[r, "\partial", "\cong"'] & H_m(N \cap \tilde{T}_1) \arrow[u, "\cong"'] \arrow[r, phantom, "\cong"] & H_m(\partial(hF_1)) \arrow[ul] \\
 & H_{m+1}(G, \partial G) \arrow[u, "\cong"'] \arrow[r, "\partial", "\cong"'] & H_m(\partial G) \arrow[u, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

Das Diagram zeight, daß $h(F_1)$ und G die gleiche Klasse von $H_{m+1}(\tilde{Z}_2, \tilde{T}_2)$ repräsentieren. Da G differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $\tilde{Z}_2$, zeigt das Argument von 2.4, daß G und F_2 in $H_{m+1}(\tilde{Z}_2, \tilde{T}_2)$ homolog sind.

Zusammenfassung. $H_*(\tilde{X})$, $H_*(\tilde{X}, \partial\tilde{X})$, $H^*(\tilde{X})$, $H^*(\tilde{X}, \partial\tilde{X})$, das Operieren der Deckbewegung t hierauf und $[\tilde{X}]$ sind Invarianten des topologischen Typs des Paares (S^{m+2}, M).

Bemerkung. Setzt man $H^1(M; \mathbf{Z}) = 0$ voraus, ist die Invarianz der Fundamentalklasse einfacher zu beweisen. Dann zeigt nämlich 4.3, daß $H_{m+1}(\tilde{Z}_2) = 0$, also $\partial: H_{m+1}(\tilde{Z}_2, \tilde{T}_2) \to H_m(\tilde{T}_2)$ bijektiv ist, und es folgt unmittelbar, daß $h(F_1)$ und F_2 das gleiche Element von $H_{m+1}(\tilde{Z}_2, \tilde{T}_2)$ repräsentieren. Übrigens findet man einen Beweis von Lemma 2.2 im Falle $H^1(M; \mathbf{Z}) = 0$ in [7] Lemma (2).

2.6 Einiges aus [8] wird im folgenden wiederholt weitergeführt. Aufgrund der ALEXANDER-Dualität hat man eine nicht-singuläre Verschlingungspaarung ([13])

$$l: B_q(F) \otimes B_{m+1-q}(X) \to \mathbf{Z} \qquad (1 \leqslant q \leqslant m)$$

(B_q ist die q-te Bettigruppe.) Wählt man für jedes q in $B_q(F)$ eine Basis, hat man für jedes q eine bezüglich l duale Basis in $B_{m+1-q}(X)$.

Definition. Die ganzzahlige Matrix V_q von $f_* : B_q(F) \to B_q(X)$ bezüglich dieses Systems von Basen heißt *SEIFERT-Matrix* (in der Dimension q).

Sei A ein unitärer Unterring von $\mathbf{Q}$. Nach geeigneten Identifikationen (siehe auch [2] hat die Triade $(\tilde{X}; \bigcup_{i \in \mathbf{Z}} X_{2i}, \bigcup_{i \in \mathbf{Z}} X_{2i+1})$ eine exakte MAYER–VIETORIS-Sequenz ([1])

$$\cdots \to H_{q+1}(\tilde{X}; A) \to H_q(F; A) \otimes A\mathbf{Z} \xrightarrow{\beta_q} H_q(X; A) \otimes A\mathbf{Z} \xrightarrow{\pi_q} H_q(\tilde{X}; A) \to \cdots$$

Hier ist $A\mathbf{Z}$ der Gruppenring der (unendlich-zyklischen) Deckbewungsgruppe mit Koeffizienten in A; β_q und π_q sind $A\mathbf{Z}$-Homomorphismen, wenn man $H_*(\tilde{X}, A)$ in natürlicher Weise als $A\mathbf{Z}$-Modul auffaßt. Haben $H_q(F; A)$ und $H_{m-q}(F; A)$ keine Torsion, so ist auch $H_q(X; A)$ torsionsfrei und β_q gestattet eine Matrix $tV_q + (-1)^{q(m+1-q)} V'_{m+1-q} \cdot$ $- (V_q + (-1)^{q(m+1-q)} V'_{m+1-q})$ ist Matrix der Schnittpaarung $B_{m+1-q}(F) \otimes B_q(F) \to \mathbf{Z}$. Für $q \neq m + 1 - q$ hat β_q nach einem Basiswechsel in $B_q(F)$ und $B_{m+1-q}(F)$ die Matrix $P_1(tV_q + (-1)^{q(m+1-q)} V'_{m+1-q}) P_2$; falls $q = m + 1 - q$, hat β_q nach einem Basiswechsel in $B_q(F)$ die Matrix $P'(t \bigcirc V_q + (-1)^q V'_q) P$. ($P_1$, P_2, P sind über A unimodulare Matrizen entsprechender Größe.) Wir beweisen noch eine für die Injektivität von β_q hinreichende Bedingung.

LEMMA. *Sind $\tilde{H}_q(M; A)$ und $\tilde{H}_{q-1}(M; A)$ null, so hat die Schnittpaarung $B_{m+1-q}(F)$ $\otimes B_q(F) \to \mathbf{Z}$ in A invertierbare Determinante, insbesondere ist also β_q injektiv.*

Beweis. Daß die Schnittpaarung nicht-entartet ist, zeigen wir ähnlich wie in [11]. Für ein Raumpaar (C, D) bezeichne $B_q(C, D; A)$ den A-Modul $H_q(C, D; A)$/Torsion, entsprechend für Kohomologie. $j : F \to (F, M)$ sei die Inklusion. Dann ist $j_* : B_q(F; A) \to B_q(F, M; A)$ ein Isomorphismus. Für eine Basis (y_i) von $B^{m+1-q}(F, M; A)$ ist $(j_*(y_i \cap [F]))$ eine Basis von $B_q(F, M; A)$ (POINCARE-Dualität [16]), hat also eine Dualbasis (x_i) in $B^q(F, M; A)$. Es gilt $\langle x_i \cup y_k, [F] \rangle = \langle x_i, j_*(y_k \cap [F]) \rangle = \delta_{ik}$. Die Determinante der obigen Schnittpaarung ist daher Einheit in A, β_q hat also (quadratische!) Matrix mit Determinante ungleich null.

Bemerkung 1. Haben $\tilde{H}_q(M; \mathbf{Z})$ und $\tilde{H}_{q-1}(M; \mathbf{Z})$ nur Torsion, so kann A immer so gewählt werden, daß β_q injektiv ist.

Bemerkung 2. Ist β_{q-1} injektiv, so folgt aus der Exaktheit der MAYER–VIETORIS-Sequenz, daß der $A\mathbf{Z}$-Modul $H_q(\tilde{X}; A)$ Relationenmatrix

$$tV_q + (-1)^{q(m+1-q)} V'_{m+1-q}$$

hat. Relationenmatrizen dieser Art beschäftigen uns im nächsten Abschnitt.

§ 3. ALGEBRAISCHE HILFSSÄTZE

3.1 Bei der Behandlung der auftretenden Relationenmatrizen benutzen wir §§3, 4 von [2]. A sei ein unitärer Unterring von $\mathbf{Q}$, $\varepsilon = 1$ oder -1, V quadratische Matrix über A, $\det(V + \varepsilon V')$ eine Einheit in A.

Lemma. *Es existiert eine über A unimodulare Matrix P, so daß $P'VP$ die Form*

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ 0 & \vert & 0 & & 0 & \\ \vdots & \vert & 1 & 0 & & \\ \vdots & \vert & 0 & \vert & \ddots & \\ \vdots & q_1 & \vdots & q_2 & & \\ \vdots & \vert & \vdots & \vert & & \boxed{W} \\ 0 & \vert & 0 & \vert & \cdots & \end{bmatrix}$$

hat, wobei $\det W \neq 0$ *ist.*

Der Beweis in [17] für den Fall $A = \mathbf{Z}$ und $\varepsilon = -1$ läßt sich auch unter unseren Voraussetzungen durchführen.

3.2 Lemma. *Ist* $\det W$ *Einheit in A, so existiert eine unimodulare Matrix P, für die $P'VP$ die Form*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & 0 & \\ 0 & \vert & \ddots & & 0 \\ \vdots & ? & & 0 & \\ 0 & \vert & \cdots & 1 \quad 0 & \\ \hline & & 0 & & W \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} Y & 0 \\ \hline 0 & W \end{array}\right]$$

hat.

Beweis. Wie in [2] 4.2.

3.3 Sei $tV + \varepsilon V'$ Relationenmatrix des $A\mathbf{Z}$-Moduls N, d.h.

$$C' \xrightarrow{\beta} D' \to N \to 0$$

exakte Sequenz über $A\mathbf{Z}$, C' und D' freie $A\mathbf{Z}$-Moduln endlichen Ranges und β habe $tV + \varepsilon V'$ als Matrix bezüglich Basen. Als Erzeugendes eines Elementarideals ([20]) von N ist $\det(tV + \varepsilon V')$ bis auf Einheiten in $A\mathbf{Z}$ durch N eindeutig bestimmt. Daher ist $\det W$ bis auf Vorzeichen gleich dem ersten und dem letzten Koeffizienten des nach Potenzen von t geordneten Polynoms $\det(tV + \varepsilon V')$, also bis auf Enheiten in A durch N bestimmt. Sei nun $\det W$ Einheit in A. Dann zeigen Lemma 3.2 sowie [2] 3.2, 3.3 und 4.3:

Lemma. *Es gibt ein kommutatives Diagram über $A\mathbf{Z}$ mit exakten Zeilen*

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[r, "P'(tV+\varepsilon V')P"] \arrow[d, "{[0E]}"'] & D' \arrow[r] \arrow[d, "{[0E]}"] & N \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\ C \arrow[r, "tW+\varepsilon W'"] & D \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

wo C und D freie AZ-Moduln endlichen Ranges sind, und Basen in C′, D′, C, D, bezüglich deren die Homomorphismen die angegebenen Matrizen haben. (0 *und E sind Null- bzw. Einheitsmatrizen entsprechender Größe.) Das Bild der AZ-Basis in D ist A-Basis für N, und t hat bezüglich dieser Basis die Matrix* $-\varepsilon W' W^{-1}$.

3.4 Seien nun U und W quadratische Matrizen über A von gleicher Reihenzahl, und $U + W$ sei unimodular über A.

LEMMA. *Es existieren über A unimodulare Matrizen* P_1 *und* P_2, *so daß* $P_1 U P_2$ *die Form*

$$(*)\quad P_1 U P_2 = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & ? & & & ? \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & 0 & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \\ \hline & & & 0 & & & U_0 \end{array}\right],$$

$P_1 W P_2$ *die Form*

$$(**)\quad P_1 W P_2 = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & ? & & & ? \\ & & 0 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & 0 & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \\ \hline & & & 0 & & & W_0 \end{array}\right]$$

und $P_1(U + W)P_2$ *die Gestalt*

$$P_1(U + W)P_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & ? & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & U_0 + W_0 \end{array}\right]$$

hat, wo det U_0 *und* det W_0 *ungleich null sind.*

Beweis. Haben U and W beide nicht-verschwindende Determinante, so ist nichts zu beweisen ($U_0 = U$, $W_0 = W$). Sei z.B. det $W = 0$. Dann bewirkt eine Spaltenoperation (d.i. Rechtsmultiplikation mit unimodularer Matrix), daß W in der ersten Spalte nur Nullen hat. Mit U nehmen wir die gleiche Spaltenoperation vor. Da $U + W$ unimodular, erreicht man durch eine Zeilenoperation (d.i. Linksmultiplikation mit unimodularer Matrix), daß U

in der ersten Spalte $(1, 0 \ldots 0)'$ hat, ohne die erste Spalte von W zu ändern. U bzw. W haben nun die Gestalt:

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & ? \\ \hline 0 & \\ \vdots & U_1 \\ 0 & \end{array}\right] \text{ bzw. } \left[\begin{array}{c|c} 0 & ? \\ \hline \vdots & W_1 \\ 0 & \end{array}\right]$$

$U_1 + W_1$ ist unimodular. Ist eine der Matrizen U_1 und W_1 singulär, fährt man nach der gleichen Methode fort. Man erreicht schließlich, daß U bzw. W in K bzw. L transformiert sind, wobei K und L folgende Eigenschaften haben:

1) $$K = \left[\begin{array}{ccc|c} k_1 & & & \\ & \ddots & & ? \\ & & k_r & \\ \hline & 0 & & U_0 \end{array}\right]; \quad L = \left[\begin{array}{ccc|c} l_1 & & & \\ & \ddots & & ? \\ & & l_r & \\ \hline & 0 & & W_0 \end{array}\right]$$

2) $\det U_0 \neq 0$; $\det W_0 \neq 0$

3) Für jedes $i = 1, \ldots r$ ist genau eins der Elemente k_i und l_i 1, das andere 0.

Durch geeignetes Zeilen- und Spaltenvertauschen und passende weitere Zeilen- und Spaltenoperationen erhalten K bzw. L die im Lemma behauptete Form (*) bzw. (**). $K + L$ sieht so aus:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & ? & ? \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & U_0 + W_0 \end{array}\right]$$

Da $U_0 + W_0$ unimodular, kann man hier durch eine Zeilenoperation Nullen in die rechte obere Ecke bringen.

3.5 $$C' \xrightarrow{\beta} D' \to N \to 0$$

sei exakte Sequenz über AZ, C' und D' freie AZ-Moduln endlichen Ranges und β habe $tU + W$ als Matrix bezüglich Basen. Wie in 3.3 gilt: $\det U_0$ und $\det W_0$ sind bis auf Einheiten in A durch N bestimmt. Wir setzen voraus, daß $\det U_0$ und $\det W_0$ Einheiten in A sind. Aus Lemma 3.4 und [2] 3.2 und 3.3 folgt:

LEMMMA. *Es gibt ein kommutatives Diagramm über AZ mit exakten Zeilen*

$$\begin{array}{ccccc} C' & \xrightarrow{P_1(tU+W)P_2} & D' & \longrightarrow & N \to 0 \\ {\scriptstyle [OE]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [OE]} & & \downarrow{\scriptstyle id} \\ C & \xrightarrow{tU_0 + W_0} & D & \longrightarrow & N \to 0 \end{array}$$

wo C und D freie $A\mathbf{Z}$-Moduln endlichen Ranges sind, und Basen in C', D', C, D, bezüglich deren die Homomorphismen die angegebenen Matrizen haben. Das Bild der $A\mathbf{Z}$-Basis in D ist A-Basis für N, und t hat bezüglich dieser Basis die Matrix $-W_0 U_0^{-1}$.

ZUSATZ. *Hat unter den gleichen Voraussetzungen über U und W β die Matrix $tW' + U'$, existiert entsprechend*

$$\begin{tikzcd}
C' \arrow[r, "P_2'(tW'+U')P_1'"] \arrow[d, "{[0E]}"'] & D' \arrow[r] \arrow[d, "{['E]}"] & N \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
C \arrow[r, "tW_0'+U_0'"] & D \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

mit den angegebenen Matrizen der Homomorphismen.

§ 4. EINE POINCARE-DUALITÄT

4.1 In diesem Abschnitt beweisen wir eine Art POINCARE-Dualitätssatz für den Raum $\tilde{X}$, wo M eine rationale Homologiesphäre ist (Bezeichnungen wie in §2).

Definition. Ein Unterring A von $\mathbf{Q}$ heißt *klein*, wenn es endlich viele Primzahlen gibt, so daß A der kleinste Unterring von $\mathbf{Q}$ ist, der $\mathbf{Z}$ enthält und in dem diese Primzahlen Einheiten sind.

4.2 SATZ. *M sei eine orientierte m-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit von S^{m+2} mit der rationalen Homologie von S^m. Dann gibt es einen kleinen Unterring A von $\mathbf{Q}$, so daß Homologie und Kohomologie von $\tilde{X}$ und $(\tilde{X}, \partial\tilde{X})$ mit Koeffizienten in A zueinander duale freie endlich erzeugte A-Moduln sind und die durch das cap-Produkt mit der Fundamentalklasse $[\tilde{X}]$ gegebenen Homomorphismen $H^{m+1-q}(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A) \to H_q(\tilde{X}; A)$ und $H^{m+1-q}(\tilde{X}; A) \to H_q(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A)$ Isomorphismen sind.*

Bemerkung. Ist p Primzahl und Nicht-Einheit in A, so gilt die genannte POINCARE-Dualität auch für Koeffizienten in $\mathbf{Z}_p$.

4.3 *Beweis.* Wir denken uns $\tilde{X}$ wie in §2 konstruiert, insbesondere sei F eine von M berandete Untermannigfaltigkeit von S^{m+2}. A sei ein kleiner Unterring von $\mathbf{Q}$ mit folgenden drei Eigenschaften:

(i) $H_*(M; A) \cong H_*(S^m; A)$

(ii) $H_*(F; A)$ torsionsfreier A-Modul

Wegen der beiden ersten Bedingungen hat $H_q(\tilde{X}; A)$ als $A\mathbf{Z}$-Modul eine quadratische Relationenmatrix $tV_q + (-1)^{q(m+1-q)} V'_{m+1-q}$ (2.6).

(iii) Das Polynom $\det(tV_q + (-1)^{q(m+1-q)} V'_{m+1-q})$ habe bei der höchsten und der niedrigsten vorkommenden Potenz von t Einheiten als Koeffizienten.

Bedingung (i) hängt nur von M ab. (ii) hängt von der Einbettung $M \subset S^{m+2}$ ab und davon, welches F man zufällig gewählt hat; in [21] wird nämlich eine Einbettung $S^2 \subset F \subset S^4$ mit F homöomorph zu einem gelochten Linsenraum angegeben. Sind (i) und (ii) erfüllt, hängt (iii) nur noch vom $A\mathbf{Z}$-Modul $H_q(\tilde{X}; A)$, also von der Einbettung $M \subset S^{m+2}$ ab.

Genügt A den drei Bedingungen, ist $H_q(\tilde{X}; A)$ frei und endlich erzeugt für $q \neq m+1$ wegen 3.3 und 3.5. $H_{m+1}(\tilde{X}; A) = 0$ wegen der MAYER–VIETORIS-Sequenz in 2.6 und $H_{m+1}(X; A) \cong H^1(M; A) = 0$. $H_{m+1}(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A) \cong H_m(M; A) \cong A$ nach 2.4. $H_q(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A) \cong \tilde{H}_q(\tilde{X}; A)$ für $q \neq m+1$. Aus der KÜNNETH-Sequenz für Kohomologie ([16]) folgt der Rest der ersten Behauptung. Die zweite Behauptung des Satzes ist wegen $\langle x \cup y, [\tilde{X}]\rangle = \langle x, y \cap [\tilde{X}]\rangle$ klar für $q \leqslant 0$ und $q \geqslant m+1$, für die übrigen Fälle folgt sie aus dem Lemma:

4.4 Lemma. *Die Paarung*

$$\begin{array}{lcl} H^q(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A) \otimes H^{m+1-q}(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A) & \to & A \\ \qquad\qquad x \otimes y & \to & \langle x \cup y, [\tilde{X}]\rangle \end{array}$$

ist für $0 < q < m+1$ *nicht-singulär.*

Beweis. $f\colon F \to \tilde{X}$ sei durch die Zusammensetzung $F \xrightarrow{f} X \xrightarrow{\approx} X_0 \xrightarrow{\subset} \tilde{X}$ gegeben.

1) $q \neq m+1-q$

In dem kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen (Koeffizienten in A)

$$\begin{tikzcd}
 & H_q(X) \arrow[d, "id\otimes 1"] & H_q(F) \arrow[l, "\underline{f}_q"'] \arrow[d, "f_q"] & \\
0 \arrow[r] & H_q(F)\otimes A\mathbf{Z} \arrow[r, "\beta_q"] \arrow[d] & H_q(X)\otimes A\mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_q"] & H_q(\tilde{X}) \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_q \arrow[r] & D_q \arrow[r] & H_q(\tilde{X}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

sei die untere Zeile durch Anwendung von Lemma 3.5 definiert. $\underline{f}_q$ hat Matrix V_q, β_q $tV_q + (-1)^{q(m+1-q)}V'_{m+1-q}$ (2.6). Nach einem Basiswechsel gemäß 3.4 und 3.5 haben $\underline{f}_q$ bzw. β_q Matrizen $P_1 V_q P_2$ bzw. $P_1(tV_q + (-1)^{q(m+1-q)}V'_{m+1-q})P_2$; α_q hat die Matrix $[0, E]$; daher hat f_q die Matrix

$$[0, E]P_1 V_q P_2 = [0, U_0] = : \tilde{U}'.$$

Entsprechend haben $\underline{f}_{m+1-q}$ und β_{m+1-q} ursprünglich Matrizen V_{m+1-q} bzw. $tV_{m+1-q} + (-1)^{q(m+1-q)}V_q{}'$, nach einer Basistransformation $P_2{}'V_{m+1-q}P_1{}'$ bzw.

$$P_2{}'(tV_{m+1-q} + (-1)^{q(m+1-q)}V_q{}')P_1{}'.$$

Da α_{m+1-q} Matrix $[?\, E]$ hat (3.5 Zusatz), ergibt sich für f_{m+1-q} die Matrix

$$[?E]P_2{}'V_{m+1-q}P_1' = (-1)^{q(m+1-q)}[?W_0{}'] = : \tilde{W}'.$$

Die damit in $H_q(\tilde{X}, \partial\tilde{X})$, $H_{m+1-q}(\tilde{X}, \partial\tilde{X})$, $H_q(F, M)$, $H_{m+1-q}(F, M)$ gewählten Basen seien mit (x_i), (ξ_j), (y_l), (η_r), die zugehörigen Dualbasen in der Kohomologie mit oberem Index bezeichnet. Man beachte, daß (η_r) mit (y_l) die Schnittmatrix

$$-P_1(V_q + (-1)^{q(m+1-q)}V'_{m+1-q})P_2 = -\left[\begin{array}{c|c} L & 0 \\ \hline 0 & U_0 + W_0 \end{array}\right]$$

hat (2.6). Wir müssen die Matrix $\langle x^i \cup \xi^j, f_*[F]\rangle$ berechnen.

$$\langle x^i \cup \xi^j, f_*[F]\rangle = \langle f^*x^i \cup f^*\xi^j, [F]\rangle = \sum_l \sum_r \tilde{u}_{li}\tilde{w}_{rj}\langle y^l \cup \eta^r, [F]\rangle = (\tilde{U}'K\tilde{W})_{ij},$$

wo wir $(K)_{lr} = \langle y^l \cup \eta^r, [F]\rangle$ gesetzt haben. Seien $g^i \in H^{m+1-q}(F, M)$ und $\gamma^l \in H^q(F,M)$ mit $\langle y^j \cup g^i, [F]\rangle = \delta_{ij}$ und $\langle \eta^r \cup \gamma^l, [F]\rangle = \delta_{rl}$. Dann $y^l = \sum_i \gamma_{il}\gamma^i$ und $\eta^r = \sum_j g_{jr} g^j$. (y^j) ist dual zu $(g^j \cap [F])$ und (η^r) zu $(\gamma^r \cap [F])$. Daher $g^j \cap [F] = y_j$ und $\gamma^r \cap [F] = \eta_r$.

$$\langle y^l \cup \eta^r, [F]\rangle = \sum_i \sum_j \gamma_{il} g_{jr} \langle \gamma^i \cup g^j, [F]\rangle$$

$$\langle y^l \cup \eta^r, [F]\rangle = \sum_j g_{jr} \langle y^l \cup g^j, [F]\rangle = g_{lr}$$

$$\langle y^l \cup \eta^r, [F]\rangle = \sum_i \gamma_{il} \langle \gamma^i \cup \eta^r, [F]\rangle = (-1)^{q(m+1-q)}\gamma_{rl}$$

$$\Rightarrow K = -\Gamma' P_1(V_q + (-1)^{q(m+1-q)}V'_{m+1-q})P_2\, G = G = (-1)^{q(m+1-q)}\Gamma'$$

$$\Rightarrow K = (-1)^{q(m+1-q)+1} K P_1(V_q + (-1)^{q(m+1-q)}V'_{m+1-q})P_2\, K$$

$$\Rightarrow K^{-1} = (-1)^{q(m+1-q)+1} P_1(V_q + (-1)^{q(m+1-q)}V'_{m+1-q})P_2$$

$$\Rightarrow \tilde{U}'K\tilde{W} = -[0 \;\; U_0]\begin{bmatrix} L^{-1} & 0 \\ 0 & (U_0 + W_0)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ? \\ W_0 \end{bmatrix} = -U_0(U_0 + W_0)^{-1}W_0 \text{ nicht-singulär.}$$

2) $q = m + 1 - q$

Der Beweis verläuft im wesentlichen wie in [2] 4.4. f_q hat Matrix V_q, $\beta_q\; tV_q + (-1)^q V_q'$, nach einem Basiswechsel gemäß 3.2

$$\begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} \text{ bzw. } \begin{bmatrix} tY + (-1)^q Y' & 0 \\ 0 & tW + (-1)^q W' \end{bmatrix}.$$

Für f_q ergibt sich die Matrix $[0 \;\; W]$. Unsere Paarung $x \otimes y \to \langle x \cup y, [\tilde{X}]\rangle$ hat dann die Matrix $-W(W' + (-1)^q W)^{-1} W'$, ist also nicht-singulär.

§ 5. DIE EINBETTUNGSINVARIANTEN

5.1 Sei M wieder eine orientierte m-Mannigfaltigkeit wie in 2.1, die differenzierbare Untermannigfaltigkeit von S^{m+2} sei. m sei ungerade, $m = 2n - 1$. Darüberhinaus setzen wir über M in diesem Paragraphen nur voraus:

(*) $\tilde{H}_{n-1}(M; \mathbf{Z})$ und $\tilde{H}_{n-2}(M; \mathbf{Z})$ endlich

A_0 sei ein kleiner Unterring von $\mathbf{Q}$ (4.1), so daß $\tilde{H}_{n-1}(M; A_0) = \tilde{H}_{n-2}(M; A_0) = 0$. Durch POINCARE-Dualität folgt dann auch $\tilde{H}_n(M; A_0) = 0$. F sei eine orientierbare differenzierbare $2n$-Mannigfaltigkeit in S^{2n+1} mit Rand M (2.2). Aufgrund von 2.6 haben wir dann für jeden Oberring A von A_0 eine kurze exakte Sequenz über $A\mathbf{Z}$

$$0 \to H_n(F; A) \otimes A\mathbf{Z} \xrightarrow{\beta_n} H_n(X; A) \otimes A\mathbf{Z} \to H_n(\tilde{X}; A) \to 0.$$

$A \supset A_0$ sei nun ein kleiner Unterring von $\mathbf{Q}$, so daß erstens $H_n(F; A)$ und $H_{n-1}(F; A)$ torsionsfreie A-Moduln sind. Dann hat β_n Matrix $tV_n + (-1)^n V_n'$ (V_n SEIFERT-Matrix in der Dimension n). Zweitens sei der Koeffizient bei der höchsten vorkommenden Potenz des Polynoms $\det(tV_n + (-1)^n V_n')$ Einheit in A. Unter diesen Voraussetzungen gilt wie in 4.3: $H_n(\tilde{X}; A) \cong H_n(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A)$ ist freier und endlich erzeugter A-Modul.

5.2 Auf $H^n(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A) \otimes H^n(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A)$ definieren wir zwei Bilinearformen B_1' und B_2' mit Werten in A:

$$B_1'(x \otimes y) = \langle x \cup y, [\tilde{X}]\rangle$$
$$B_2'(x \otimes y) = \langle x \cup t^*y + y \cup t^*x, [\tilde{X}]\rangle$$

Liegt x oder y in dem Untermodul $\operatorname{Ext}(H_{n-1}(\tilde{X}, \partial\tilde{X}), A)$ von $H^n(\tilde{X}, \partial\tilde{X})$, der durch die KÜNNETH-Sequenz ([16]) gegeben wird, verschwindet $B_i'(x \otimes y)$. B_i' definiert also eine Bilinearform

$$B_i\colon H \otimes H \to A \; (i = 1, 2),$$

wo H der freie endlich erzeugte A-Modul $\operatorname{Hom}_A(H_n(\tilde{X}, \partial\tilde{X}; A), A)$ ist.

B_1 ist symmetrisch oder schiefsymmetrisch, je nach Parität von n. B_2 ist symmetrisch. B_1 liefert also für gerades n, B_2 für jedes n eine quadratische Form über A auf H. σ_i sei die Signatur von B_i (falls definiert). Wegen 2.5 gilt:

SATZ. *Die durch die B_i definierten quadratischen Formen über A und die Signaturen σ sind Invarienten de topologischen Typs des Paares (S, M).*

5.3 Wir zeigen jetzt, daß die B_i mit Hilfe der SEIFERT-Matrix V_n berechnet werden können.

SATZ. *V_n sei SEIFERT-Matrix in der Dimension n, und W sei eine nach Lemma* 3.1 *aus V_n gewonnene Matrix. (Man beachte, daß die Elemente von W in A_0 liegen,* $\det(W + (-1)^n W')$ *Einheit in A_0 und* $\det W$ *Einheit in A ist.) Dann gilt:*
B_1 gestattet die Matrix $-(W + (-1)^n W')$.
Für n ungerade gestattet B_2 die Matrix $W + W'$.
Für n gerade gestattet B_2 die Matrix $W(W + W')^{-1}W + W'(W + W')^{-1}W'$.

Beweis. Am Schluß von 4.4 hatten wir für B_1 die Matrix $-W(W' + (-1)^n W)^{-1}W'$ gefunden, diese ist aber über A kongruent zu $-(W + (-1)^n W')$. B_2 hat dann wegen 3.3 und 4.4 Matrix

$$W(W + (-1)^n W')^{-1}W + W'(W' + (-1)^n W)^{-1}W'.$$

Für ungerades n ist dies gleich $W + W'$ ([2]).

KOROLLAR. *Für n gerade ist σ_1 gleich der Signatur einer Mannigfaltigkeit F in S, die von M berandet wird.*

Beweis. 2.6 und 3.1.

5.4 SATZ. *B_1 ist nicht-singulär (d.h. gestattet eine über A unimodulare Matrix). Wenn* 2 *nicht Einheit in A_0 ist, ist B_2 nicht-entartet (d.h. hat nicht-verschwindende Determinante).*

Beweis. Nicht trivial ist nur die Behauptung über B_2. $W + W' \equiv W - W'$ (mod 2), für ungerades n hat B_2 also ungerade Determinante. $W(W + W')^{-1}W + W'(W + W')^{-1}W' = W + W' - 2\,W(W + W')^{-1}W'$ hat für gerades n ebenfalls ungerade Determinante.

5.5 *Bemerkung.* Die quadratischen Formen und damit auch die Signaturen σ_i verhalten sich additiv bezüglich der zusammenhängenden Summe von Paaren (S^{2n+1}, M). Denn für zwei solche Paare (S, M_1), $S, M_2)$ mit den entsprechenden SEIFERT-Matrizen $V_{n,1}$, $V_{n,2}$ ist

$$\begin{bmatrix} V_{n,1} & 0 \\ 0 & V_{n,2} \end{bmatrix}$$

SEIFERT-Matrix von $(S, M_1 \# M_2)$; das folgt aus [8] 2.7.

5.6 Der folgende Satz impliziert, daß im wesentlichen alle in 5.3 genannten quadratischen Formen vorkommen.

SATZ. *Sei V eine ganzzahlige (r, r)-Matrix, so daß* $\det(V + (-1)^n V') \neq 0$ *ist. Dann existiert eine kompakte orientierte $2n$-Mannigfaltigkeit F in S^{2n+1} mit nicht-leerem Rand M, so daß gilt:*

(i) F hat den Homotopietyp eines Bouquets von n-Sphären.

(ii) M ist $(n-2)$-zusammenhängende rationale Homologiesphäre und hat SEIFERT-Matrix V in der Dimension n.

Dies wurde im wesentlichen schon in [5] II.6 bewiesen. Wir geben einen etwas elementareren Beweis:

Sei $(S_i)_{i=1,\dots,r}$ ein System von paarweise disjunkten $(n-1)$-Sphären in $S^{2n-1} \subset \mathbf{R}^{2n}$, so daß die Verschlingungszahl $l(S_i, S_j) = -(v_{ij} + (-1)^n v_{ji})$ ist und jedes S_i in S^{2n-1} eine n-Scheibe D_i berandet. Das Innere der D_i denken wir uns ins Komplement von D^{2n} in $\mathbf{R}^{2n}$ gezogen, so daß sich in jedem Punkt von $\mathbf{R}^{2n} - D^{2n}$ höchstens zwei der D_i schneiden, und zwar transversal. Außerdem sollen D_i und D_j wenigstens $|v_{ij}| + |v_{ji}|$ gemeinsame Punkte mit der lokalen Schnittzahl $+1$ und ebensoviele mit -1 haben. Nun versehen wir noch jedes D_i mit $-v_{ii}$ Selbstschnitten à la WHITNEY ([19]) und [14]). (D_i ist jetzt also nur noch immersiert.) Damit haben wir die Vereinigung N der Normalenbündel der D_i mit D^{2n} (einen Henkelkörper) in $\mathbf{R}^{2n}$ immersiert. N hat Schnittmatrix $-(V + (-1)^n V')$. Wir erhalten eine Einbettung von N in $\mathbf{R}^{2n+1}$, indem wir in der Nähe eines Doppelpunktes p von $\bigcup_{i=1}^{r} D_i$ einen Teil von N in den oberen Halbraum von $\mathbf{R}^{2n+1}$ ziehen. Haben D_i und D_j in p Schnittzahl ± 1 und ziehen wir N in einer Teilmenge einer Umgebung von D_j nach oben, so liefert dies den Beitrag ∓ 1 an der (i, j)-ten Stelle der SEIFERT-Matrix. Dies zeigt man wie in der klassischen Knotentheorie durch Errichten eines Kegels auf D_i nach unten. Da man die Schnittmatrix von N kennt, überlegt man sich mit Hilfe von 2.6, daß man durch passende Wahl von Über- und Unterkreuzungen die gewünschte SEIFERT-Matrix erhält. Über die weiteren Eigenschaften von M siehe z.B. [2] §15. Insbesondere ist M ganzzahlige Homologiesphäre, wenn $\det(V + (-1)^n V') = \pm 1$ ist.

5.7 Aus 5.3 und 5.6 folgt, daß σ_1 und σ_2 nicht immer null sind. Für $n > 3$ gerade liefern die SEIFERT-Matrizen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & 1 & 1 & & & \\ & & & & 1 & 1 & & 1 \\ & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Beispiele für $(2n-1)$-Sphären in S^{2n+1} mit $\sigma_1 = 0$ und $\sigma_2 \neq 0$ bzw. $\sigma_1 \neq 0$ und $\sigma_2 = 0$.

§ 6. ANWENDUNGEN

6.1 Die folgenden Begriffe stammen aus der Knotentheorie.

Definition. Für eine orientierte Mannigfaltigkeit N sei $-N$ die gleiche Mannigfaltigkeit, aber mit umgekehrter Orientierung. (S, M) sei ein Paar wie in 2.1. (S, M) heißt *invertierbar*, wenn (S, M) und $(S, -M)$ vom gleichen topologischen Typ sind. (S, M) heißt *amphicheiral*, wenn (S, M) vom gleichen topologischen Typ ist wie $(-S, M)$ oder $(-S, -M)$.

6.2 Für das folgende setzen wir voraus, daß M Bedingung 5.1 (*) genügt. Das ist z.B. der Fall, wenn M eine Homotopiesphäre, (S, M) also ein Knoten im üblichen Sinne ist. Wenn M ungerade Dimension hat, sind (S, M) Bilinearformen B_1 und B_2 über einem kleinen Unterring A von $\mathbf{Q}$ zugeordnet.

SATZ. *Sei* $\dim M = 4k - 1$, (S, M) *invertierbar. Dann sind* B_i *und* $-B_i$ *zueinander äquivalent* $(i = 1, 2)$, *insbesondere also* σ_1 *und* σ_2 *gleich null.*

Beweis. Ändert man die Orientierung von M, gehen $[\tilde{X}]$ in $-[\tilde{X}]$ und t in t^{-1} über.

6.3 SATZ. *Sei* $\dim M = 4k - 3$, (S, M) *amphicheiral. Dann ist* B_2 *zu* $-B_2$ *äquivalent, insbesondere verschwindet* σ_2.

Beweis. Bei Änderung der Orientierung von M ändert sich B_2 nicht. Kehrt man die Orientierung von S um, so geht t in t^{-1} über.

Bemerkung. Der obige Satz ist ein wichtiges Kriterium in der dreidimensionalen Knotentheorie, da ja B_2 und σ_2 an Hand einer SEIFERT-Matrix berechnet werden können (siehe [2]).

6.4 SATZ. *Sei* $(S^{4k+1}, \Sigma^{4k-1})$ *ein Knoten, d.h. ein Paar, wo* Σ *eine* $(4k-1)$*-Homotopiesphäre ist. Ist* $k \geqslant 2$, *so gibt* σ_1 *die differenzierbare Struktur von* Σ *an.* Σ *ist nämlich in* bP_{4k} *und in* bP_{4k} *gilt:*

$$\Sigma = \frac{\sigma_1}{8} \cdot \textit{Standard-Erzeugendes von } bP_{4k}$$

Beweis. Eine in S differenzierbar eingebettete kompakte Mannigfaltigkeit F mit Rand M ist parallelisierbar. Die Behauptung folgt dann aus [6] 7.5, dem h-Kobordismus-Theorem (z.B. [12]) und Korollar 5.3.

6.5 KOROLLAR 1. *Knoten in* S^{4k+1} $(k \geqslant 2)$ *vom gleichen topologischen Typ haben die gleiche differenzierbare Struktur. Insbesondere ist ein solcher Knoten mit exotischer differenzierbarer Struktur stets nicht-trivial (d.h. hat nicht den topologischen Typ des Standardpaares* (S^{4k+1}, S^{4k-1})), *cf.* [7].

Bemerkung. Es ist selbstverständlich, daß man einen entsprechenden Satz für alle die $(4k-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten M hat, für die die differenzierbare Struktur durch die Signatur einer parallelisierbaren Mannigfaltigkeit mit Rand M gegeben ist. Mir ist nicht bekannt, ob das nur für Homotopiesphären in bP_{4k} gilt.

KORROLAR 2. *Ein invertierbarer Knoten in* S^{4k+1} $(k \geqslant 2)$ *hat stets die gewöhnliche differenzierbare Struktur.*

Nach 6.2 verschwindet nämlich σ_1.

Aus 2.6 und 5.6 folgt mittels der verallgemeinerten POINCARE-Vermutung ([15]), daß jede durch 8 teilbare ganze Zahl als σ_1 eines Knotens in S^{4k+1} ($k \geqslant 2$) vorkommt. Deshalb:

KOROLLAR 3. *In jeder Dimension* $4k+1 \geqslant 9$ *gibt es nicht-invertierbare Knoten, und zwar solche mit Standard- und solche mit exotischer differenzierbarer Struktur. In* S^5 *gibt es nicht-invertierbare ganzzahlige Homologie-3-Sphären.*

Zur Existenz nicht-invertierbarer dreidimensionaler Knoten siehe [18].

§ 7. ANHANG

7.1 Unter Benutzung von LEVINEs Arbeiten wollen wir zeigen, daß die differenzierbare Struktur eines Knotens Σ in S^{4k+3} durch die ARF-Invariante des Knotens (gleichbedeutend: durch seine Determinante mod 8) angegeben wird. Daraus erhalten wir einen zu Korollar 1 in 6.5 analogen Satz für Knoten in S^{4k+3}. F sei kompakte differenzierbare Untermannigfaltigkeit von S^{4k+3} mit $\partial F = \Sigma$. In [8] 3.2 definiert LEVINE eine quadratische Form mod 2, für deren ARF-Invariante a er in [8] Prop. 3.4

$$(*) \qquad \pm\Delta(-1) \equiv 1 + 4a \bmod 8$$

nachweist. Hier ist Δ das ALEXANDER-Polynom des Knotens Σ. Ist V SEIFERT-Matrix von F in der Dimension $2k+1$, gilt $\Delta = \det(tV - V')$, also ist $\pm\Delta(-1) = \det(V + V')$, der Determinante von Σ. Aus (*) folgt:

$$\Delta(-1) \equiv \pm 1 \bmod 8 \Leftrightarrow a = 0$$

$$\Delta(-1) \equiv \pm 3 \bmod 8 \Leftrightarrow a = 1$$

Da Δ eine Invariante des topologischen Typs des Paares (S^{4k+3}, Σ) ist, trifft dies auch für a zu. a nennen wir daher die ARF-Invariante des Knotens Σ und schreiben dafür $a(\Sigma)$.

7.2 LEMMA. *Kobordante Knoten haben gleiche ARF-Invariante.*

Beweis. Sind V_1 und V_2 SEIFERT-Matrizen der betreffenden Knoten, ist nach [9] $V_0 = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & -V_2 \end{bmatrix}$ kongruent zu einer Matrix der Form $\begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & ? \end{bmatrix}$ (X, Y quadratisch von der gleichen Größe). Daher $\det(V_0 + V_0') = \pm[\det(X' + Y)]^2 \equiv \pm 1 \bmod 8$, andererseits $\det(V + V_0') = \pm \det(V_1 + V_1')\det(V_2 + V_2')$.

7.3 SATZ. *Die ARF-Invariante gibt die differenzierbare Struktur des Knotens* Σ *an:*

$$a(\Sigma) = 0 \Rightarrow \Sigma \textit{ diffeomorph zur Standard-Sphäre}$$

$$a(\Sigma) = 1 \Rightarrow \Sigma \textit{ diffeomorph zur KERVAIRE-Sphäre}$$

Beweis. Σ ist kobordant zu einem Knoten Σ_0, der in S^{4k+3} eine $(2k)$-zusammenhängende Mannigfaltigkeit berandet ([9] Lemma 4). Σ and Σ_0 haben per definitionem die gleiche differenzierbare Struktur, nach Lemma 7.2 die gleiche ARF-Invariante. Für Σ_0 aber folgt der Satz aus [8] Prop. 3.3, [7a] 4.3 und [6].

7.4 SATZ. *Knoten in* S^{m+2} ($m \geqslant 5$) *vom gleichen topologischen Typ tragen die gleiche differenzierbare Struktur.*

Bemerkung. Für eine feinere Äquivalenzrelation wurde von M. HIRSCH und L. NEUWIRTH ([3]) ein entsprechendes Resultat bewiesen.

Beweis. Für m gerade ist der Knoten diffeomorph zu S^m, da dann bP_{m+1} verschwindet ([6]). Für $m = 4k - 1$ siehe 6.5 Korollar 1. $m = 4k + 1$: Die ARF-Invariante ist nach 7.1 eine Invariante des topologischen Typs und gibt nach Satz 7.3 die differenzierbare Struktur an.

LITERATUR

1. S. Eilenberg und N. Steenrod: *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton, 1952.
2. D. Erle: Die quadratische Form eines Knotens und ein Satz über Knotenmannigfaltigkeiten. Dissertation Bonn 1968. Erscheint in *J. reine angew. Math.*
3. M. W. Hirsch und L. P. Neuwirth: On piecewise regular n-knots, *Ann. Math.* **80** (1964), 594–612.
4. F. Hirzebruch: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. Erg. d. Math. u. ihrer Grenzgeb. N.F. Heft 9 Berlin 1962.
5. M. A. Kervaire: Les noeuds de dimensions supérieures. *Bull. Soc. math. Fr.* **93** (1965), 225–271.
6. M. A. Kervaire und J. W. Milnor: Groups of homotopy spheres I, *Ann. Math.* **77** (1963), 504–537.
7. J. Levine: Unknotting spheres in codimension two, *Topology* **4** (1965), 9–16.

7a. J. Levine: A classification of differentiable knots, *Ann. Math.* **82** (1965), 15–50.

8. J. Levine: Polynomial invariants of knots of codimension two, *Ann. Math.* **84** (1966), 537–554.
9. J. Levine: Knot cobordism groups in codimension two. Mimeographed notes, Brandeis University, 1968.
10. J. W. Milnor: Lectures on characteristic classes. Mimeographed notes by J. Stasheff, Princeton, 1957.
11. J. W. Milnor: On simply connected 4-manifolds. Symp. Intern. de Top. Alg. Mexico 1958, 122–128.
12. J. W. Milnor: Lectures on the h-cobordism theorem. Princeton Math. Notes by L. Siebemann and J. Sondow, Princeton, 1965.
13. H. Seifert und W. Threlfall: *Lehrbuch der Topologie*, New York, 1945.
14. S. Smale: The classification of immersions of spheres in euklidean spaces, *Ann. Math.* **69** (1959), 327–344.
15. S. Smale: Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four, *Ann. Math.* **74** (1961), 391–406.
16. E. H. Spanier: *Algebraic Topology*, New York, 1966.
17. H. F. Trotter: Homology of group systems with applications to knot theory, *Ann. Math.* **76** (1962), 464–498.
18. H. F. Trotter: Noninvertible knots exist, *Topology* **2** (1964), 245–280.
19. H. Whitney: The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space, *Ann. Math.* **45** (1944), 220–246.
20. H. Zassenhaus: *The Theory of Groups*, Göttingen, 1958.
21. E. C. Zeeman: Twisting spun knots, *Trans. Am. math. Soc.* **115** (1965), 471–495.

Mathematisches Institut der Universität Bonn