JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 55, 220–246 (1984)

Transformation de Fourier des distributions de type positif sur un groupe de Lie unimodulaire

PIERRE BONNET

Université de Saint-Etienne, Département de Mathématiques, 23, rue du Docteur Paul Michelon, 42023 Saint-Etienne Cedex, France

Communicated by A. Connes

Received May 5, 1983

On utilise la théorie des vecteurs C^∞ et des vecteurs distributions pour définir la transformée de Fourier des distributions de type poitif sur un groupe de Lie unimodulaire de type I. Pour cela, on définit des mesures à valeurs opérateurs à croissance lente sur le dual $\hat{G}$ de G, et on démontre un théorème de Bochner–Schwartz. L'examen des cas particuliers central et sphérique permet ensuite d'introduire deux notions de croissance lente pour les mesures scalaires sur $\hat{G}$. Lorsque G est semi-simple on retrouve ainsi des résultats antérieurs sur l'analyse sphérique.

INTRODUCTION

L'extension aux groupes non commutatifs des résultats classiques de l'analyse harmonique sur $\mathbb{R}^n$ (et plus généralement sur un groupe localement compact commutatif) est déjà entreprise depuis longtemps. La principale différence avec le cas commutatif réside dans le fait que, lorsque dans le cas commutatif l'objet "transformée de Fourier" est une fonction sur le dual $\hat{G}$ du groupe G, ce même objet est, dans le cas non commutatif, un champ d'opérateurs. Cette différence est due à la dimension des représentations irréductibles, égale à 1 dans le cas commutatif, quelconque dans le cas non commutatif. Ainsi pour une fonction f, intégrable sur G, la transformée de Fourier est le champ d'opérateurs:

$$\chi \to \pi_\chi(f) = \int_G f(g)\, \pi_\chi(g)\, dg,$$

dg étant une mesure de Haar sur G, et χ un point de $\hat{G}$ classe de la représentation π_χ.

La situation se complique lorsque, dans le cas commutatif, la transformée de Fourier est une mesure bornée; en effet, dans le cas non commutatif, la transformée de Fourier devient alors une "mesure-opérateurs" m, que l'on

0022-1236/84 $3.00

peut définir au moyen d'une mesure scalaire positive μ et d'un champ d'opérateurs

$$U: \chi \mapsto U_\chi$$

jouant le rôle de densité de m par rapport à μ. Si l'on suppose l'opérateur U_χ positif et traçable μ-pp et la fonction $\chi \to \mathrm{tr}(|U_\chi|)$ μ-intégrable, on définit la transformée de Fourier inverse de m comme la fonction continue de type positif

$$\varphi: g \to \varphi(g) = \int_{\hat{G}} \mathrm{tr}(\pi_\chi(g^{-1})\, U_\chi)\, d\mu(\chi)$$

ce qui généralise le cas commutatif, et permet d'obtenir un théorème de Bochner.

Le but de ce travail est de généraliser au cas d'un groupe de Lie non commutatif le théorème de Bochner–Schwartz. On sait que dans le cas de $\mathbb{R}^n$, ce théorème caractérise les transformées de Fourier des distributions de type positif comme étant les mesures positives à croissance lente, c'est-à-dire les mesures positives sur $\mathbb{R}^n$ pour lesquelles il existe un entier k tel que la fonction $\xi \to (1 + \|\xi\|^2)^{-k}$ soit intégrable. Dans le cas non commutatif, au moins lorsque G est unimodulaire, il est raisonnable de vouloir définir la transformée de Fourier d'une distribution de type positif T comme une mesure-opérateurs vérifiant:

$$\forall \theta \in \mathscr{D}(G), \qquad \langle \theta, T \rangle = \int_{\hat{G}} \mathrm{tr}(\pi_\chi(\theta)\, U_\chi)\, d\mu(\chi)$$

ce qui généraliserait à la fois le cas commutatif et le cas des fonctions continues de type positif. Un calcul formel réalisé sur des exemples simples (par exemple, lorsque T est la mesure de Haar sur la diagonale de $G \times G$ considérée comme distribution sur $G \times G$) met en évidence le fait que l'opérateur U_χ peut non seulement ne pas être borné (il n'est défini que sur un sous-espace partout dense de l'espace $\mathscr{H}_\chi$ de π_χ) mais aussi aboutir dans un espce plus grand que $\mathscr{H}_\chi$ (l'image de U_χ peut avoir son intersection avec $\mathscr{H}_\chi$ réduite à $\{0\}$). C'est grâce à la théorie des vecteurs C^∞ (différentiables) et des vecteurs-distributions que la situation va s'éclairer. En effet, on verra que l'opérateur U_χ envoie toujours l'espace des vecteurs C^∞ dans l'espace des vecteurs-distributions.

Le paragraphe 1 est consacré au rappel des résultats classiques concernant les vecteurs C^∞ et les vecteurs-distributions. Les paragraphes 2 et 3 sont consacrés à la mise en place du formalisme nécessaire à la définition de la transformée de Fourier; en particulier, on introduit au paragraphe 3 les mesures-opérateurs à croissance lente et on définit la transformée de Fourier inverse d'une telle mesure. Au paragraphe 4 on démontre que toute distribution de type positif T est la transformée de Fourier inverse d'une unique mesure-opérateurs à la croissance lente et on définit ainsi la transformée de Fourier de T. Au paragraphe 5, on introduit l'espace $B(G)^{-\infty}$ engendré par les distributions de type positif, espace auquel on prolonge la transformation de Fourier; on obtient ainsi un isomorphisme de $B(G)^{-\infty}$ sur l'espace $M_1^{\oplus}(\hat{G})^{-\infty}$ des mesures-opérateurs à croissance lente. Enfin, le paragraphe 6 est consacré à 2 cas particuliers pour lesquels la transformée de Fourier est entièrement déterminée par une mesure scalaire sur $\hat{G}$: le cas de l'analyse harmonique centrale et le cas de l'analyse harmonique sphérique par rapport à un sous-groupe compact K: ce deuxième exemple, appliqué à la situation où G est un groupe de Lie semi-simple non compact et K un sous-groupe compact maximal, permet de retrouver les résultats de Barker [4] mais en utilisant des techniques hilbertiennes au lieu des techniques propres aux groupes semi-simples.

Dans cette publication, je m'en tiens au cas des groupes unimodulaires. Le cas non unimodulaire n'est guère plus délicat, mais il nécessite de choisir entre plusieurs définitions possibles des distributions de type positif. Une façon élégante de contourner cette difficulté serait de parler, non pas de distributions, mais de fonctions généralisées, c'est-à-dire de formes linéaires continues sur l'espace des densités C^∞ à support compact. Néanmoins, je préfère utiliser, malgré ses inconvénients, le langage des distributions qui me paraît plus parlant pour les exemples, lesquels se rapportent tous au cas unimodulaire. Le cas non unimodulaire sera envisagé dans une prochaine publication où la transformée de Fourier des distributions de type positif sera utilisée pour retrouver la formule de Plancherel. L'idée d'utiliser les vecteurs C^∞ pour obtenir la formule de Plancherel a déjà été développée par Penney dans [12] mais grâce aux distributions de type positif, on peut se passer complètement des traces, des poids, et des algèbres hilbertiennes. Enfin, lorsque G est unimodulaire, on verra que $B(G)^{-\infty}$ contient les espaces habituels de l'analyse harmonique: non seulement l'algèbre de Fourier $A(G)$ et l'algèbre de Fourier–Stieljes $B(G)$, mais aussi $L_1(G)$, $M_1(G)$, $L_2(G)$, et l'algèbre de Von Neumann $\mathrm{VN}(G)$. Ainsi, la transformée de Fourier des distributions dans $B(G)^{-\infty}$ peut constituer un cadre unificateur pour l'analyse harmonique non commutative.

1. Notations et Rappels

Soient G un groupe de Lie unimodulaire séparable et de type I, $\mathbf{G}$ son algèbre de Lie, $\mathscr{U}(\mathbf{G})$ l'algèbre enveloppante, $\mathscr{D}(G)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact sur G. Soit $A_1, \ldots, A_n$ une base de $\mathbf{G}$. On pose:

$$D = 1 - \sum_{i=1}^{n} A_i^2 \in \mathscr{U}(\mathbf{G}).$$

Dans la suite, une “représentation” de G désigne toujours une représentation unitaire continue π de G dont l'espace sera noté $\mathscr{H}$.

On désigne par $\hat{G}$ le “dual” de G, ensemble des classes de représentations irréductibles de G, muni de la topologie de Fell et de la structure borélienne associée, et on suppose choisi sur $\hat{G}$ un champ $\chi \mapsto \pi_\chi$ de représentations de G, mesurable pour toute mesure positive μ borélienne σ-finie sur $\hat{G}$, et tel que pour χ, π_χ soit de la classe χ (cf. Dixmier [6, 8.6.1, 8.6.2]), et d'espace $\mathscr{H}_\chi$.

Pour tout Hilbert $\mathscr{H}$, l'espace $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ (resp. $\mathscr{L}_1(\mathscr{H})$) est l'espace vectoriel des opérateurs bornés (resp. à trace) sur $\mathscr{H}$.

Soit π une représentation de G. On note $\mathscr{H}^\infty$ l'espace des vecteurs C^∞ (différentiables) pour π, on sait que $\mathscr{H}^\infty$ est muni canoniquement d'une topologie (cf. Cartier [5], Schwartz [14]). On note $d\pi(D)$ l'image de D par la représentation infinitésimale de $\mathscr{U}(\mathbf{G})$ associée à π, on sait que $d\pi(D)$ est un opérateur essentiellement auto-adjoint de $\mathscr{H}$. Soit D_π sa fermeture; cet opérateur est auto-adjoint, positif et majore l'identité. On désigne par Λ_π l'opérateur auto-adjoint $D_\pi^{1/2}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $\mathscr{H}^k$ l'espace des vecteurs ξ k-fois différentiables de l'espace $\mathscr{H}$ de π 'est-à-dire tels que la fonction à valeurs dans $\mathscr{H}$, $s \mapsto \pi(s)\xi$ soit de classe C^r ($\mathscr{H}^0 = \mathscr{H}$); on dira que ξ est de classe C^k. On sait que $\mathscr{H}^k$ coïncide avec le domaine de Λ_π^k (cf. Goodman [9] pour toutes ces questions). Comme Λ_π^k est une bijection de $\mathscr{H}^k$ sur $\mathscr{H}$, on peut munir $\mathscr{H}^k$ d'une structure d'espace de Hilbert faisant de Λ_π^k une isométrie; on note $\not{h}^k$ la norme associée sur $\mathscr{H}^k$: $\not{h}^k(\xi) = \|\Lambda_\pi^k \xi\|$. Les structures d'espace de Hilbert sur $\mathscr{H}^k$ correspondant aux différentes bases de $\mathbf{G}$ sont toutes équivalentes (mais non isométriques) (cf. Goodman [9]).

1.1. THÉORÈME (Nelson–Jørgenson [10]). *L'espace $\mathscr{H}^\infty$ est l'intersection (décroissante) des $\mathscr{H}^k$ et sa topologie est la limite projective de celles des $\mathscr{H}^k$, c'est-à-dire qu'elle est définie par la suite (croissante) des normes $\not{h}^k$.*

1.2. DÉFINITION. On note $\mathscr{H}^{-\infty}$, et on appelle espace des vecteurs-distributions, l'antidual de $\mathscr{H}^\infty$.

Ainsi, on peut définir, sur $\mathscr{H}^\infty \times \mathscr{H}^{-\infty}$, une forme sesquilinéaire continue notée $(\xi, \eta) \mapsto (\xi \mid \eta)$; lorsque $\eta \in \mathscr{H}$, on retrouve le produit scalaire de $\mathscr{H}$. On note de même $\mathscr{H}^{-k}$ l'espace de Hilbert antidual de $\mathscr{H}^k$, sa norme étant notée $\not{h}^{-k}$. On déduit du théorème 1 que $\mathscr{H}^{-\infty} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathscr{H}^{-k}$. On munit $\mathscr{H}^{-\infty}$ de la topologie forte de dualité $\beta(\mathscr{H}^{-\infty}, \mathscr{H}^\infty)$ qui est aussi la limite inductive des topologies des $\mathscr{H}^{-k}$.

Avec les diverses définitions données ci-dessus, on voit donc que l'on a une chaîne d'inclusions:

$$\mathscr{H}^{\infty} \subset \cdots \subset \mathscr{H}^{k+1} \subset \mathscr{H}^{k} \subset \cdots \subset \mathscr{H}^{1} \subset \mathscr{H}$$
$$= \mathscr{H}^{0} \subset \mathscr{H}^{-1} \subset \cdots \subset \mathscr{H}^{-k} \subset \mathscr{H}^{-(k+1)} \subset \cdots \subset \mathscr{H}^{-\infty}.$$

Ces inclusions sont toutes continues et, pour tous les $k, h \in \mathbb{N}$, avec $k \geqslant h$, Λ_π^k est une isométrie de $\mathscr{H}^k$ sur $\mathscr{H}^{k-h}$. L'adjoint de Λ_π^k est donc une isométrie de $\mathscr{H}^{h-k}$ sur $\mathscr{H}^{-k}$, comme il coïncide sur $\mathscr{H}^\infty$ avec Λ_π^h, on le note encore Λ_π^h. Ainsi, pour tous $h, k \in \mathbb{N}$, Λ_π^h est une isométrie de $\mathscr{H}^k$ sur $\mathscr{H}^{k-h}$. En définissant Λ_π^{-h} comme l'inverse de Λ_π^h, on obtient finalement que, pour tous $h, k \in \mathbb{Z}$, Λ_π^h est une isométrie de $\mathscr{H}^k$ sur $\mathscr{H}^{k-h}$. On utilisera souvent ce fait, ainsi que le fait que $\mathscr{H}^\infty$ est dense dans tous les $\mathscr{H}^k$, $k \in \mathbb{Z}$ (pour toutes ces questions, cf. Goodman [9]).

Vecteurs-distributions et intégrales hilbertiennes

Soit $\mathscr{H} = \int_Z^\oplus \mathscr{H}_z \, d\mu(z)$ et $\pi = \int_Z^\oplus \pi_z \, d\mu(z)$ une désintégration de π, où Z est un espace borélien, μ une mesure positive sur Z, et $z \mapsto \pi_z$ un champ mesurable de représentations (notations de Dixmier [6], appendice B). Les résultats suivants se trouvent démontrés dans [12].

1.3. Proposition. *Pour un vecteur $\xi = \int_Z^\oplus \xi_z \, d\mu(z)$, les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *le vecteur $\xi \in \mathscr{H}^k$.*

(ii) *Pour μ-presque tout z, $\xi_z \in \mathscr{H}_z^k$ et*

$$\int_Z \not{p}^k(\xi_z)^2 \, d\mu(z) < +\infty.$$

Dans ce cas, on a $\not{p}^k(\xi)^2 = \int_Z \not{p}^k(\xi_z)^2 \, d\mu(z)$. La proposition 1.3. exprime donc que $\mathscr{H}^k$ s'identifie canoniquement à:

$$\int_Z^\oplus \mathscr{H}_z^k \, d\mu(z).$$

On en déduit:

1.4. Corollaire. *L'espace $\mathscr{H}^{-k}$ s'identifie canoniquement à*

$$\int_Z^\oplus \mathscr{H}_z^{-k} \, d\mu(z).$$

2. Opérateurs C^∞ et opérateurs-distributions à trace

On note $\mathscr{L}(\mathscr{H})^\infty$ (resp. $\mathscr{L}(\mathscr{H})^k$), et on appelle espace des opérateurs C^∞, l'espace des opérateurs C^∞, l'espace des opérateurs continus de $\mathscr{H}^{-\infty}$ dans

$\mathscr{H}^{\infty}$ (resp. $\mathscr{H}^{-k}$ dans $\mathscr{H}^{k}$). D'après la chaîne d'inclusions continues écrite au §.1, ces différents espaces se plongent canoniquement dans $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. Avec cette identification, $\mathscr{L}(\mathscr{H})^{\infty}$ est l'intersection décroissante des $\mathscr{L}(\mathscr{H})^{k}$. On munit $\mathscr{L}(\mathscr{H})^{k}$ de la norme des opérateurs bornés de $\mathscr{H}^{-k}$ dans $\mathscr{H}^{k}$, notée $\not{h}^{k}_{\infty}$.

On note $\mathscr{L}_1(\mathscr{H})^{-\infty}$ (resp. $\mathscr{L}_1(\mathscr{H})^{-k}$), et on appelle espace des opérateurs-distributions à trace de $\mathscr{H}$, l'espace des opérateurs nucléaires de $\mathscr{H}^{\infty}$ dans $\mathscr{H}^{-\infty}$, (resp. de $\mathscr{H}^{k}$ dans $\mathscr{H}^{-k}$); l'espace $\mathscr{L}_1(\mathscr{H})^{-\infty}$ est la réunion croissante des $\mathscr{L}_1(\mathscr{H})^{-k}$. Comme du fait de la structure hilbertienne, $\mathscr{H}^{-k}$ est isomorphe à $\mathscr{H}^{k}$, l'espace $\mathscr{L}_1(\mathscr{H})^{-k}$ est isomorphe à $\mathscr{L}_1(\mathscr{H}^{k})$; ses propriétés sont donc connues. On notera $\not{h}_1^{-k}$ la norme sur $\mathscr{L}_1(\mathscr{H})^{-k}$ qui correspond à la norme trace sur $\mathscr{L}_1(\mathscr{H}^{k})$. On munit $\mathscr{L}_1(\mathscr{H})^{-\infty}$ de la topologie limite inductive associée à ces normes.

Lorsque $U \in \mathscr{L}_1(\mathscr{H})^{-k}$ et $V \in \mathscr{L}(\mathscr{H})^{k}$, on a $UV \in \mathscr{L}_1(\mathscr{H}^{-k})$ et $VU \in \mathscr{L}_1(\mathscr{H}^{k})$ et le scalaire $\mathrm{tr}(\mathrm{UV}) = \mathrm{tr}(VU)$ est indépendant de k. On identifie ainsi $\mathscr{L}(\mathscr{H})^{k}$ (resp. $\mathscr{L}(\mathscr{H})^{\infty}$) au dual topologique de $\mathscr{L}_1(\mathscr{H})^{-k}$ (resp. $\mathscr{L}_1(\mathscr{H})^{-\infty}$). Enfin, on dit que $U \in \mathscr{L}_1(\mathscr{H})^{-\infty}$ est positif si, pour tout $\xi \in \mathscr{H}^{\infty}$, on a $(\xi \mid U(\xi)) \geqslant 0$.

3. Mesures-opérateurs à croissance lente et transformation de Fourier inverse

Mesures-opérateurs à croissance lente

Soit μ une mesure positive sur $\hat{G}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $L_1^{\oplus}(\hat{G}, \mu)^{-k}$ l'espace de Banach des classes (modulo l'égalité μ-pp) de champs $U: \chi \mapsto U_\chi \in \mathscr{L}_1(\mathscr{H}_\chi)^{-k}$ tels que

$$\not{h}_1^{-k}(U) = \int_{\hat{G}} \not{h}_1^{-k}(U_\chi)\, d\mu(\chi) < +\infty.$$

On note $L_1^{\oplus}(\hat{G}, \mu)^{-\infty}$ la réunion (croissante) des $L_1^{\oplus}(\hat{G}, \mu)^{-k}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Si $\mu = h\nu$ possède une densité h par rapport à ν, l'application $U \mapsto hU$ plonge isométriquement $L_1^{\oplus}(\hat{G}, \mu)^{-k}$ dans $L_1^{\oplus}(\hat{G}, \nu)^{-k}$. Elle plonge aussi $L_1^{\oplus}(\hat{G}, \mu)^{-\infty}$ dans $L_1^{\oplus}(\hat{G}, \nu)^{-\infty}$. On note $M_1^{\oplus}(\hat{G})^{-k}$ l'espace de Banach limite inductive des $L_1^{\oplus}(\hat{G}, \mu)^{-k}$; un élément $m \in M_1^{\oplus}(\hat{G})^{-k}$ sera noté (μ, U) avec $U \in L_1^{\oplus}(\hat{G}, \mu)^{-k}$, et on dira que m est positive si U_χ est positif μ-pp.

3.1. Définition. On note $M_1^{\oplus}(\hat{G})^{-\infty}$, et on appelle espace des mesures-opérateurs à croissance lente, la réunion des $M_1^{\oplus}(\hat{G})^{-k}$ qui est aussi limite inductive ensembliste des $L_1^{\oplus}(\hat{G}, \mu)^{-\infty}$.

Indépendance par rapport à la base

Vérifions que la définition de $L_1^{\oplus}(\hat{G},\mu)^{-k}$ est indépendante de la base choisie dans $\mathbf{G}$ pour définir l'opérateur D; ce choix intervient en effet dans la définition des normes $\hbar_1^{-k}$ sur chaque $\mathscr{L}_1(\mathscr{H}_\chi)^{-k}$. Soit donc $A'_1,\dots,A'_n$ une deuxième base de $\mathbf{G}$, soient $D' = 1 - \sum_{i=1}^n A_i'^2$, D'_π, Λ'_π, $\hbar'^k,\dots$, etc, construits au moyen de cette base et de la représentation π de G.

Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, $\Lambda'^{-k}_\pi \circ \Lambda^k_\pi$ est une isométrie de $\mathscr{H}^k$ muni de la norme $\hbar^k$ sur $\mathscr{H}^k$ muni de la norme $\hbar'^k$, et comme ces normes sont équivalentes, c'est aussi un opérateur borné de $\mathscr{H}^k$ muni de $\hbar'^k$ dans lui-même. L'application $U \mapsto \Lambda'^k_\pi \circ \Lambda^{-k}_\pi \circ U \circ \Lambda^{-k}_\pi \circ \Lambda'^k_\pi$ est donc une bijection de $\mathscr{L}_1(\mathscr{H})^{-k}$ sur lui-même telle que:

$$\hbar_1'^{-k}(\Lambda'^k_\pi \circ \Lambda^{-k}_\pi \circ U \circ \Lambda^{-k}_\pi \circ \Lambda'^k_\pi) = \hbar_1^{-k}(U)$$

d'où l'on déduit

$$\hbar_1^{-k}(U) \leqslant \|\Lambda'^k_\pi \Lambda^{-k}_\pi\|'_\infty \, \|\Lambda^{-k}_\pi \Lambda'^k_\pi\|'_\infty \, \hbar_1'^{-k}(U)$$

en notant $\|\cdot\|'_\infty$ la norme d'opérateur borné dans $\mathscr{H}^k$ muni de $\hbar'^{-k}$.

Revenons maintenant à la mesure positive μ sur $\hat{G}$ et soit la représentation:

$$\pi = \int_{\hat{G}}^{\oplus} \pi_\chi \, d\mu(\chi).$$

Alors:

$$\Lambda'^k_\pi \Lambda^{-k}_\pi = \int_{\hat{G}}^{\oplus} \Lambda'^k_{\pi_\chi} \Lambda^{-k}_{\pi_\chi} \, d\mu(\chi) \text{ et } \Lambda^{-k}_\pi \Lambda'^k_\pi = \int_{\hat{G}}^{\oplus} \Lambda^{-k}_{\pi_\chi} \Lambda'^k_{\pi_\chi} \, d\mu(\chi).$$

On en déduit:

$$\text{sup ess } \|\Lambda'^k_{\pi_\chi} \Lambda^{-k}_{\pi_\chi}\|'_\infty = \|\Lambda'^k_\pi \Lambda^{-k}_\pi\|'_\infty < +\infty,$$

et

$$\text{sup ess } \|\Lambda^{-k}_{\pi_x} \Lambda'^k_{\pi_\chi}\|'_\infty = \|\Lambda^{-k}_\pi \Lambda'^k_\pi\|'_\infty < +\infty.$$

D'où, pour tout champ $U\colon \chi \mapsto U_\chi \in \mathscr{L}_1(\mathscr{H}_\chi)^{-k}$,

$$\int_{\hat{G}} \hbar_1^{-k}(U_\chi) \, d\mu(\chi) = \int_{\hat{G}} \hbar_1'^{-k}(\Lambda'^k_{\pi_\chi} \circ \Lambda^{-k}_{\pi_x} \circ U \circ \Lambda^{-k}_{\pi_x} \circ \Lambda'^k_{\pi_\chi}) \, d\mu(\chi)$$

$$\leqslant \|\Lambda'^k_\pi \Lambda^{-k}_\pi\|'_\infty \, \|\Lambda^{-k}_\pi \Lambda'^k_\pi\|_\infty \int_{\hat{G}} \hbar_1'^{-k}(U_\chi) \, d\mu(\chi).$$

Le fait que l'on puisse échanger les rôles de $\hbar_1^{-k}$ et de $\hbar_1'^{-k}$ dans cette égalité montre immédiatement que l'espace $L_1^{\oplus}(\hat{G}, \mu)^{-k}$ ne dépend pas de la base de **G**, et que ces différentes bases définissent des normes équivalentes sur cet espace.

Transformée de Fourier inverse d'une mesure-opérateurs à croissance lente

3.2. LEMME. *Soit $\theta \in \mathscr{D}(G)$. Alors, pour toute représentation π, $\pi(\theta) \in \mathscr{L}(\mathscr{H})^{\infty}$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe des constantes $c_k(\theta)$ indépendantes de π, telles que $\hbar_{\infty}^k(\pi(\theta)) \leqslant c_k(\theta)$.*

Preuve. On sait que $\pi(\theta) \in \mathscr{L}(\mathscr{H})^{\infty}$ (cf. par exemple, Cartier [5]). Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\pi(\theta) \in \mathscr{L}(\mathscr{H})^k$, ce qui signifie que l'opérateur borné $\pi(\theta)$: $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$ reste continu lorsqu'on munit $\mathscr{H}$ de la topologie induite par $\mathscr{H}^{-k}$ et l'image de $\pi(\theta)$ (qui est contenue dans $\mathscr{H}^{\infty}$) de la topologie induite par $\mathscr{H}^k$. D'autre part, puisque Λ_π^k est une isométrie de $\mathscr{H}^k$ sur $\mathscr{H}$ et de $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{H}^{-k}$, on a:

$$\hbar_{\infty}^k(\pi(\theta)) = \hbar_{\infty}^0(\Lambda_\pi^k \pi(\theta) \Lambda_\pi^k).$$

Si $k = 2k'$ est pair, $\Lambda_\pi^k \pi(\theta) \Lambda_\pi^k = D_\pi^{k'} \pi(\theta) D_\pi^{k'} = \pi(Dk' * \theta * D^{k'})$ (dans cette écriture, on considère D comme distribution à support réduit à l'élément neutre). On en déduit que

$$\hbar_{\infty}^k(\pi(\theta)) \leqslant \|D^{k'} * \theta * D^{k'}\|_1$$

il suffit donc de poser $c_k(\theta) = \|D^{k'} * \theta * D^{k'}\|_1$ (norme dans $L_1(G)$). Lorsque k est impair, on remarque que plus généralement, pour tout $U \in \mathscr{L}(\mathscr{H})^k$, on a $\hbar_{\infty}^{k-1}(U) \leqslant \hbar_{\infty}^k(U)$ (c.à.d que la suite des normes $\hbar_{\infty}^k$ est croissante). En effet

$$\begin{aligned}\hbar_{\infty}^{k-1}(U) &= \hbar_{\infty}^0(\Lambda_\pi^{k-1} U \Lambda_\pi^{k-1}) = \hbar_{\infty}^0(\Lambda_\pi^{-1} \Lambda_\pi^k U \Lambda_\pi^k \Lambda_\pi^{-1}) \\ &\leqslant \hbar_{\infty}^0(\Lambda_\pi^k U \Lambda_\pi^k)\end{aligned}$$

car Λ_π^{-1} est continu et $\|\Lambda_\pi^{-1}\| \leqslant 1$.

3.3. PROPOSITION. *Pour toute mesure-opérateurs à croissance lente $m = (\mu, U)$ et toute $\theta \in \mathscr{D}(G)$, l'intégrale*

$$\langle \theta, T \rangle = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr}(\pi_\chi(\theta)\, U_\chi)\, d\mu(\chi)$$

existe et sa valeur ne dépend que de m et de θ; on la notera $\int_{\hat{G}} \operatorname{tr}(\pi_\chi(\theta)\, dm(\chi))$.

De plus, l'application $\theta \mapsto \langle \theta, T \rangle$ est une distribution sur G, qui est de type positif si m est positive.

Preuve. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $m = (\mu, U) \in M_1^{\oplus}(\hat{G})^{-k}$. Ainsi, $U \in L_1^{\oplus}(\hat{G}, \mu)^{-k}$; comme, d'après le lemme (3.2), pour tout $\chi \in \hat{G}$, $\pi_\chi(\theta) \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_\chi)^k$, on a

$$|\mathrm{tr}(\pi_\chi(\theta)\, U_\chi)| \leqslant \hbar_\infty^k(\pi_\chi(\theta))\, \hbar_1^{-k}(U_\chi) \leqslant c_k(\theta)\, \hbar_1^{-k}(U_\chi).$$

Comme, par hypothèse

$$\int_{\hat{G}} \hbar^{-k}(U_\chi)\, d\mu(\chi) < +\infty,$$

ceci assure la convergence de l'intégrale. On obtient de plus la majoration

$$|\langle \theta, T\rangle| \leqslant c_k(\theta)\, \hbar_1^{-k}(U)$$

et, vu la définition de $c_k(\theta)$, ceci prouve que $\theta \mapsto \langle \theta, T\rangle$ qui est évidemment linéaire, est une distribution. L'indépendance par rapport au représentant (μ, U) de m choisi est évidente. Enfin, si m est positive, on a, si $\theta \in \mathscr{D}(G)$ et en posant $\theta^* = \bar{\check{\theta}}$ (où $\check{\theta}(s) = \theta(s^{-1})$):

$$\langle \theta * \theta^*, T\rangle = \int_{\hat{G}} \mathrm{tr}(\pi_\chi(\theta * \theta^*)\, U_\chi)\, d\mu(\chi).$$

Mais dans $\mathscr{L}(\mathscr{H}_\chi)$, $\pi_\chi(\theta * \theta^*) = \pi_\chi(\theta)\, \pi_\chi(\theta)^*$ et cette égalité reste valable en considérant $\pi_\chi(\theta)$ (resp. $\pi_\chi(\theta)^*$) comme application continue de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}^k$ (resp. de $\mathscr{H}^{-k}$ dans $\mathscr{H}$). Ainsi, $\langle \theta * \theta^*, T\rangle = \int_{\hat{G}} \mathrm{tr}(\pi_\chi(\theta)\, \pi_\chi(\theta^*)\, U_\chi)\, d\mu(\chi) = \int_{\hat{G}} \mathrm{tr}(\pi_\chi(\theta)^*\, U_\chi \pi_\chi(\theta))\, d\mu(\chi)$ et l'opérateur $\pi_\chi(\theta)^*\, U_\chi \pi_\chi(\theta) \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ est positif si U_χ l'est (on le voit en utilisant la densité de $\mathscr{H}^\infty$ dans $\mathscr{H}$). On en déduit $\langle \theta * \theta^*, T\rangle \geqslant 0$. c.q.f.d.

Pour toute distribution T, définissons $\check{T}$ par la formule suivante:

$$\langle \theta, \check{T}\rangle = \langle \check{\theta}, T\rangle.$$

Alors, si T est une distribution régulière définie par φ, $\check{T}$ est définie par $\check{\varphi}$, et si T est de type positif, $\check{T}$ aussi.

DÉFINITION. Soit m une mesure-opérateurs à croissance lente, on appelle transformée de Fourier inverse de m, la distribution T telle que:

$$\langle \check{\theta}, T\rangle = \int_{\hat{G}} \mathrm{tr}(\pi_\chi(\theta)\, U_\chi)\, d\mu(\chi).$$

La proposition suivante montre que toute distribution transformée de Fourier inverse d'une mesure-opérateurs à croissance lente est combinaison linéaire de quatre distributions de type positif.

3.5. PROPOSITION. *Les espaces* $L_1^{\oplus}(\hat{G},\mu)^{-\infty}$ *et* $M_1^{\oplus}(\hat{G})^{-\infty}$ *sont engendrés algébriquement par leurs éléments positifs.*

Preuve. On note respectivement $L_1^{\oplus}(\hat{G},\mu)$ et $L_\infty^{\oplus}(\hat{G},\mu)$ l'espace des classes (modulo l'égalité μ-pp) de champs d'opérateurs $\chi \mapsto U_\chi$ vérifiant

$$\int_{\hat{G}} \operatorname{tr}(|U_\chi|)\, d\mu(\chi) < +\infty$$

et l'espace des classes de champs d'opérateurs $\chi \mapsto V_\chi$ tels que la fonction: $\chi \mapsto \|V_\chi\|$ soit essentiellement bornée. On sait alors (Arsac [2]) que $L_\infty^{\oplus}(\hat{G},\mu)$ est une algèbre de Von Neumann admettant $L_1^{\oplus}(\hat{G},\mu)$ comme prédual. Il en résulte que l'espace vectoriel $L_1^{\oplus}(\hat{G},\mu)$ est engendré par ses éléments positifs.

Or, l'application:

$$\int_{\hat{G}}^{\oplus} U_\chi\, d\mu(\chi) \mapsto \int_{\hat{G}}^{\oplus} \Lambda_\chi^k U_\chi \Lambda_\chi^k\, d\mu(\chi)$$

réalise un isomorphisme isométrique de $L_1^{\oplus}(\hat{G},\mu)$ sur $L_1^{\oplus}(\hat{G},\mu)^{-k}$ qui préserve la positivité des champs d'opérateurs. Ainsi, $L_1^{\oplus}(\hat{G},\mu)^{-k}$ est positivement engendré et, de façon évidente, il en est de même pour $L_1^{\oplus}(\hat{G},\mu)^{-\infty}$, $M_1^{\oplus}(\hat{G})^{-k}$, et $M_1^{\oplus}(\hat{G})^{-\infty}$.

4. TRANSFORMÉE DE FOURIER D'UNE DISTRIBUTION DE TYPE POSITIF

4.1. THÉORÈME. *Pour toute distribution de type positif T sur G, il existe une unique mesure-opérateurs à croissance lente positive m, telle que pour toute $\theta \in \mathscr{D}(G)$, on ait:*

$$\langle \theta, T\rangle = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr}(\pi_\chi(\theta)\, dm(\chi)).$$

Preuve de l'existence

Nous utiliserons le résultat classique suivant:

4.2. THÉORÈME (Cartier [5], Aarnes [1]). *Si T est une distribution de type positif sur G, il existe une représentation π_T de G, dans un espace $\mathscr{H}_T$, et un vecteur-distribution $\xi_T \in \mathscr{H}_T^{-\infty}$ tels que, pour toute $\theta \in \mathscr{D}(G)$, on ait:*

$$\langle \theta, T\rangle = (\pi_T(\theta)\, \xi_T \mid \xi_T)$$

(*au sens de la forme hermitienne définie sur* $\mathscr{H}^{\infty} \times \mathscr{H}^{-\infty}$), *et tel que l'ensemble des* $\pi_T(\theta)\,\xi_T$ *soit dense dans* $\mathscr{H}_T$.

(En fait, $(\mathscr{H}_T, \pi_T)$ se construit en utilisant la méthode classique de Gelfand–Segal.)

Désintégrons alors la représentation π_T sous la forme:

$$\mathscr{H}_T = \int_{\hat{G}}^{\oplus} n_\chi \mathscr{H}_\chi \, d\mu(\chi) \text{ et } \pi_T = \int_{\hat{G}}^{\oplus} n_\chi \pi_\chi \, d\mu(\chi)$$

(où n_χ est un cardinal). Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\xi_T \in \mathscr{H}_T^{-k}$. D'après (2.2), on a:

$$\xi_T = \int_{\hat{G}}^{\oplus} \xi_\chi \, d\mu(\chi) \qquad \text{où, pour } \mu\text{-presque tout } \chi,$$

$\xi_\chi \in (n_\chi \mathscr{H}_\chi)^{-k}$, c'est-à-dire que:

$$\xi_\chi = (\xi_{\chi i})\ 1 \leqslant i \leqslant n_\chi \qquad \text{avec } \xi_{\chi i} \in \mathscr{H}_\chi^{-k}$$

et

$$\hbar^{-k}(\xi_\chi)^2 = \sum_{i=1}^{n_\chi} \hbar^{-k}(\xi_{\chi i})^2.$$

Définissons alors $U_\chi(\zeta)$, pour $\zeta \in \mathscr{H}_\chi^k$, par

$$U_\chi(\zeta) = \sum_{i=1}^{n_\chi} (\zeta \mid \xi_{\chi i})\, \xi_{\chi i}.$$

L'opérateur U_χ est bien défini (pour μ-presque tout χ) et applique $\mathscr{H}_\chi^k$ dans $\mathscr{H}_\chi^{-k}$; en utilisant l'isomorphisme entre $\mathscr{L}_1(\mathscr{H}_\chi)^{-k}$ et $\mathscr{L}_1(\mathscr{H}_\chi^k)$, on voit immédiatement que $U_\chi \in \mathscr{L}_1(\mathscr{H}_\chi)^{-k}$ et que U_χ est positif. De plus,

$$\hbar_1^{-k}(U_\chi) = \sum_{i=1}^{n_\chi} \hbar^{-k}(\xi_{\chi i})^2 = \hbar^{-k}(\xi_\chi)^2,$$

on en déduit que

$$\int_{\hat{G}} \hbar_1^{-k}(U_\chi)\, d\mu(\chi) = \int_{\hat{G}} \hbar^{-k}(\xi_\chi)^2 \, d\mu(\chi) = \hbar^{-k}(\xi_T)^2 < +\infty.$$

Ainsi le champ $U: \chi \mapsto U_\chi$ appartient à $L_1^{\oplus}(\hat{G}, \mu)^{-k}$ et $\hbar_1^{-k}(U) = \hbar^{-k}(\xi_T)^2$.

On définit donc une mesure-opérateurs à croissance lente m en posant $m = (\mu, U)$. Alors, pour toute $\theta \in \mathscr{D}(G)$,

$$\begin{aligned}\langle \theta, T\rangle &= (\pi_T(\theta)\,\xi_T \mid \xi_T)\\ &= \int_{\hat{G}} (n_\chi \pi_\chi(\theta)\,\xi_\chi \mid \xi_\chi)\,d\mu(\chi)\\ &= \int_{\hat{G}} \sum_{i_\chi=1}^{n_\chi} (\pi_\chi(\theta)\,\xi_{\chi i_\chi} \mid \xi_{\chi i_\chi})\,d\mu(\chi)\\ &= \int_{\hat{G}} \operatorname{tr}(\pi_\chi(\theta)\,U_\chi)\,d\mu(\chi) = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr}(\pi_\chi(\theta)\,dm(\chi)).\end{aligned}$$

Preuve de l'unicité

Désignons toujours par π_T la représentation introduite dans la démonstration d'existence et par $\mathscr{H}_T$, ξ_T, k, m, etc., les objects qui lui ont été associés. Soit m' une mesure-opérateurs à croissance lente telle que, pour toute $\theta \in \mathscr{D}(G)$, on ait

$$\langle \theta, T\rangle = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr}(\pi_\chi(\theta)\,dm'(\chi)).$$

Quitte à augmenter k, on peut supposer $m' \in M_1^{\oplus}(\hat{G})^{-k}$: soit $m' = (\mu', U')$ avec $U' \in L_1^{\oplus}(\hat{G}, \mu')^{-k}$. Pour μ'-presque tout χ, $U'_\chi \in \mathscr{L}_1(\mathscr{H}_\chi)^{-k}$. En utilisant l'isomorphisme $U \mapsto \Lambda_\chi^{-k} U \Lambda_\chi^{-k}$ de $\mathscr{L}_1(\mathscr{H}_\chi)^{-k}$ sur $\mathscr{L}_1(\mathscr{H}_\chi)$, dont la structure est bien connue, on voit qu'on peut trouver une suite $(\xi'_{\chi i})$ dans $\mathscr{H}_\chi^{-k}$ $(0 \leqslant i < n'_\chi)$ vérifiant

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant n'_\chi} \hbar^{-k}(\xi'_{\chi i})^2 = \hbar_1^{-k}(U')$$

et, pour tout $\xi \in \mathscr{H}_\chi^k$,

$$U'_\chi(\xi) = \sum_i (\xi \mid \xi'_{\chi i})\,\xi'_{\chi i}.$$

Soit π' la représentation définie par

$$\mathscr{H}' = \int_{\hat{G}}^{\oplus} n'_\chi \mathscr{H}_\chi\,d\mu'(\chi) \qquad \text{et} \qquad \pi' = \int_{\hat{G}}^{\oplus} n'_\chi \pi_\chi\,d\mu'(\chi).$$

Posons encore $\xi'_\chi = (\xi'_{\chi i}) \in (n'_\chi \mathscr{H}_\chi)^{-k}$ et soit

$$\xi' = \int_{\hat{G}}^{\oplus} \xi'_\chi\,d\mu'(\chi) \in \mathscr{H}'^{-k}.$$

Alors, pour toute $\theta \in \mathscr{D}(G)$, il vient:

$$\begin{aligned}(\pi'(\theta)\,\xi' \mid \xi') &= \int_{\hat{G}} (n'_\chi \pi_\chi(\theta)\,\xi'_\chi \mid \xi'_\chi)\, d\mu'(\chi) \\ &= \int_{\hat{G}} \sum_i (\pi_\chi(\theta)\,\xi'_{\chi i} \mid \xi'_{\chi i})\, d\mu'(\chi) \\ &= \int_{\hat{G}} \operatorname{tr}(\pi_\chi(\theta)\, U'_\chi)\, d\mu'(\chi) = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr}(\pi_\chi(\theta)\, dm'(\chi)) \\ &= \langle \theta, T\rangle = (\pi_T(\theta)\,\xi_T \mid \xi_T).\end{aligned}$$

Nous allons utiliser les deux lemmes suivants:

4.3. LEMME. *Soient $(\pi, \mathscr{H})$ et $(\pi', \mathscr{H}')$ deux représentations de G et Φ un entrelacement isométrique de π et π'. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, Φ se prolonge en une isométrie de $\mathscr{H}^{-2k}$ dans $\mathscr{H}'^{-2k}$.*

4.4. LEMME. *Soient $(\pi, \mathscr{H})$ et $(\pi', \mathscr{H}')$ deux représentations de G, soient ξ et ξ' des vecteurs-distributions relatifs respectivement à π et π' tels que, pour toute $\theta \in \mathscr{D}(G)$ on ait*:

$$(\pi(\theta)\xi \mid \xi) = (\pi'(\theta)\xi' \mid \xi').$$

Si ξ est tel que l'ensemble des $\pi(\theta)\xi$, pour $\theta \in \mathscr{D}(G)$, soit dense dans $\mathscr{H}$, il existe un entrelacement isométrique Φ de π et π' tel que $\Phi(\xi) = \xi'$ ($\Phi(\xi)$ est défini, d'après le lemme 4.3.).

Preuve du lemme 4.3. L'adjoint Φ^* de Φ entrelace π' et π donc, pour tout $g \in G$ et tout $\xi \in \mathscr{H}^{2k}$, on a

$$\pi(g)(\Phi^*\xi) = \Phi^*(\pi'(g)\xi),$$

ce qui prouve que $\Phi^*\xi \in \mathscr{H}^{2k}$, donc que Φ^* définit une application de $\mathscr{H}'^{2k}$ dans $\mathscr{H}^{2k}$.

D'autre part, si $A \in \mathbf{G}$ et $\xi \in \mathscr{H}^\infty$,

$$\begin{aligned}d\pi(A)(\Phi^*\xi) &= \lim_{t\to\infty} t^{-1}\pi(\operatorname{expt} A)[\Phi^*\xi] \\ &= \lim_{t\to 0} t^{-1}\Phi^*(\pi'(\operatorname{expt} A(\xi)) \\ &= \Phi^*(\lim_{t\to\infty} (t^{-1}\pi'(\operatorname{expt} A)(\xi))) = \Phi^*(d\pi'(A)(\xi)).\end{aligned}$$

Ainsi Φ^* entrelace $d\pi'$ et $d\pi$; en particulier:

$$D^k_{\pi'}(\Phi^*\xi) = \Phi^*(D^k_{\pi'}\xi)$$

d'où

$$\not{h}^{2k}(\Phi^*\xi) \leqslant \not{h}^{2k}(\xi),$$

ce qui montre que Φ^* définit une application linéaire continue de $\mathscr{H}'^{\infty}$, muni de la norme induite par $\mathscr{H}'^{2k}$, dans $\mathscr{H}^{2k}$. Par densité, Φ^* se prolonge donc en une application linéaire continue unique Ψ de $\mathscr{H}'^{2k}$ dans $\mathscr{H}^{2k}$. A fortiori, Ψ est, comme Φ^*, continue de $\mathscr{H}'^{2k}$ dans $\mathscr{H}$, donc coïncide avec Φ^*.

Finalement Φ^* définit une application continue de $\mathscr{H}'^{2k}$ dans $\mathscr{H}^{2k}$. On définit alors le prolongement Φ_1 de Φ à $\mathscr{H}^{-2k}$ par:

$$(\xi \mid \Phi_1 \eta) = (\Phi^*\xi \mid \eta), \qquad \xi \in \mathscr{H}'^{2k} \text{ et } \eta \in \mathscr{H}^{-2k}.$$

Pour $\xi_1 \in \mathscr{H}'^{2k}$ et $\zeta \in \mathscr{H}$, il vient alors:

$$\begin{aligned}(\xi_1 \mid \Phi_1 D^k_\pi \zeta) &= (\Phi^*\xi_1 \mid D^k_\pi \zeta) = (D^k_\pi \Phi^* \xi_1 \mid \zeta)\\ &= (\Phi^* D^k_{\pi'} \xi_1 \mid \zeta)\\ &= (D^k_{\pi'} \xi_1 \mid \Phi\zeta)\\ &= (\xi_1 \mid D^k_{\pi'} \Phi\zeta).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\Phi_1 D^k_\pi \zeta = D^k_{\pi'} \Phi \zeta,$$

et pour $\eta \in \mathscr{H}^{-2k}$

$$\begin{aligned}\not{h}'^{-2k}(\Phi_1 \eta) &= \| D^{-k}_{\pi'} \Phi_1 \eta \| = \| \Phi D^{-k}_\pi \eta \|\\ &= \| D^{-k}_\pi \eta \| = \not{h}^{-2k}(\eta).\end{aligned}$$

Donc Φ_1 est une isométrie de $\mathscr{H}^{-2k}$ dans $\mathscr{H}'^{-2k}$. c.q.f.d.

Remarque. La démonstration montre que les divers prolongements Φ_1 de Φ coïncident lorsqu'ils sont simultanément définis. Dans la suite, on les note tous Φ. En fait, Φ est donc une application de $\mathscr{H}^{-\infty}$ dans $\mathscr{H}'^{-\infty}$.

Preuve du Lemme 4.4. Pour toute $\theta \in \mathscr{D}(G)$, on a:

$$\begin{aligned}\| \pi'(\theta)\xi' \|^2 &= (\pi'(\theta)\,\xi' \mid \pi'(\theta)\,\xi') = (\pi'(\theta^* * \theta)\,\xi' \mid \xi')\\ &= (\pi(\theta^* * \theta)\xi \mid \xi) = \| \pi(\theta)\xi \|^2.\end{aligned}$$

Comme les $\pi(\theta)\xi$ sont denses dans $\mathscr{H}$, ceci permet de définir un entrelacement isométrique Φ de π et π' tel que

$$\Phi(\pi(\theta)\xi) = \pi'(\theta)\,\xi'.$$

Soit k tel que $\xi \in \mathscr{H}^{-2k}$ et $\xi' \in \mathscr{H}'^{-2k}$. Montrons que $\Phi(\xi) = \xi'$, où $\Phi(\xi)$ est défini grâce au lemme 4.3. Pour cela, soient $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une unité approchée de $L^1(G)$ formée de fonctions de $\mathscr{D}(G)$ vérifiant $\theta_n^* = \theta_n$ et π une représentation de G. Alors, pour tout $\eta \in \mathscr{H}^{2k}$, on a dans $\mathscr{H}^{2k}$, $\lim \pi(\theta_n)\eta = \eta$, car π est continue en tant que représentation de G dans $\mathscr{H}^{2k}$ (cf. Goodman [9]). Ainsi, la suite d'opérateurs $\pi(\theta_n)$ tend fortement, donc faiblement, vers l'identité et, par passage à l'adjoint, $\pi(\theta_n)$ tend aussi faiblement vers l'identité dans $\mathscr{H}^{-2k}$.

On a donc faiblement:

$$\lim \pi(\theta_n)\xi = \xi \qquad \text{d'où } \lim \Phi(\pi(\theta_n)\xi) = \Phi(\xi)$$

i.e., $\Phi(\xi) = \lim \pi'(\theta_n)\,\xi' = \xi'$.

Suite de la preuve d'unicité

On peut appliquer le lemme 4.4 aux représentations $(\pi_T, \mathscr{H}_T)$ et $(\pi', \mathscr{H}')$ introduites au début de cette preuve. Il existe donc un entrelacement isométrique Φ de π_T et π' tel que $\Phi(\xi_T) = \xi'$.

Comme l'existence de Φ prouve que π_T est équivalente à une sous-représentation de π', on supposera dans la suite (quitte à remplacer μ par une mesure équivalente et à modifier le champ U de façon à ne pas modifier $m = (\mu, U)$ que $\mu = 1_B\mu'$ où B est une partie borélienne de $\hat{G}$. Alors, l'entrelacement Φ est nécessairement de la forme:

$$\Phi = \int_{\hat{G}}^{\oplus} \Phi_\chi \, d\mu(\chi)$$

où le champ $\chi \mapsto \Phi_\chi$ est défini μ'-pp, Φ_χ étant μ'-pp un entrelacement de $n_\chi\pi_\chi$ et de $n'_\chi\pi_\chi$. En particulier, on a, μ'-pp, $n_\chi \leqslant n'_\chi$ et, pour $\chi \notin B$, $n_\chi = 0$ et $\Phi_\chi = 0$.

Soit $\chi \in B$, l'opérateur Φ_χ entrelaçant isométriquement $n_\chi\pi_\chi$ et $n'_\chi\pi_\chi$, du fait de l'irréductibilité de π_χ, on peut trouver une suite double $(\lambda^p_{\chi i})_{0 \leqslant p < n_\chi, 0 \leqslant i < n'\chi}$ ayant les propriétés suivantes:

(i) pour tout p, $\sum_i |\lambda^p_{\chi i}|^2 < +\infty$,

(ii) pour tous p, q avec $0 \leqslant p, q < n_\chi$, on a:

$$\sum_i \lambda^p_{\chi i} \overline{\lambda^q_{\chi i}} = \delta_{pq},$$

(iii) pour tout vecteur $\eta = (\eta_p)_{0 \leqslant p < n_\chi}$ de $n_\chi \mathscr{H}_\chi$ le vecteur $\Phi_\chi(\eta)$ s'écrit:

$$\Phi_\chi(\eta) = (\eta'_i)_{0 \leqslant i < n'_\chi}$$

avec, dans $\mathscr{H}_\chi$, $\eta'_i = \sum_p \lambda^p_{\chi i} \eta_p$.

Pour tout $h \in \mathbb{N}$, le prolongement de Φ_χ à $(n_\chi \mathscr{H}_\chi)^{-2h}$ est encore défini par la même formule c'est-à-dire que, si $\xi = (\xi_p) \in (n_\chi \mathscr{H}_\chi)^{-2h} = n_\chi \mathscr{H}_\chi^{-2h}$ alors $\Phi_\chi(\xi) = (\xi'_i) \in (n'_\chi \mathscr{H}_\chi)^{-2h} = n'_\chi \mathscr{H}_\chi^{-2h}$ avec:

$$\xi'_i = \sum_p \lambda^p_{\chi i} \xi_p.$$

En effet, la preuve du lemme 4.3 montre que la "matrice infinie" définissant le prolongement s'obtient à partir de celle des $(\lambda^p_{\chi i})$ qui définit Φ_χ par un double passage à l'adjointe. On a alors:

$$\begin{aligned} U'_\chi(\xi) &= \sum_i (\xi \mid \xi'_{\chi i})\, \xi'_{\chi i} = \sum_i \left(\xi \,\middle|\, \sum_p \lambda^p_{\chi i} \xi_{\chi p}\right) \sum_q \lambda^q_{\chi i} \xi_{\chi q} \\ &= \sum_{p,q} \left(\sum_i \lambda^p_{\chi i} \overline{\lambda^q_{\chi i}}\right) (\xi \mid \xi_{\chi p})\, \xi_{\chi q} = \sum_{p,q} \delta_{pq} (\xi \mid \xi_{\chi p})\, \xi_{\chi q} \\ &= \sum_p (\xi \mid \xi_{\chi p})\, \xi_{\chi p} = U_\chi(\xi). \end{aligned}$$

Ceci est valable si $\chi \in B$ et sinon, on a μ-pp $\xi'_\chi = 0$ donc $U'_\chi = 0$. De là, il résulte que:

$$m' = (\mu', U') = (\mu', 1_B U) = (1_B \mu', U) = (\mu, U) = m. \qquad \text{c.q.f.d.}$$

4.5. Corollaire. La transformation de Fourier inverse induit une bijection du cône des distributions de type positif sur G sur le cône des mesures-opérateurs à croissance lente positives.

4.6. Définition. La transformée de Fourier (Directe). Pour toute distribution de type positif T sur G, on appelle transformée de Fourier de T, et on note $\mathscr{F}T$ l'unique mesure-opérateurs à croissance lente m telle que

$$\langle \theta, \check{T} \rangle = \langle \check{\theta}, T \rangle = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr}(\pi_\chi(\theta)\, dm(\chi)).$$

5. Extension à des distributions non de type positif

On a vu à la section 3 que toute mesure-opérateurs à croissance lente possède une transformée de Fourier inverse qui est combinaison linéaire de distributions de type positif. Pour compléter l'analogue du théorème de

Bochner–Schwartz nous allons donner une caractérisation de l'ensemble de ces distributions.

DÉFINITION DE $B(G)^{-\infty}$. Nous notons $C^*(G)$ la C^*-algèbre enveloppante de $L^1(G)$ et $\|\cdot\|_{C^*(G)}$ la norme correspondante. Munissons $\mathscr{D}(G)$ de la suite croissante $\hbar_*^{2k}$ des normes définies par

$$\hbar_*^{2k}(\theta) = \|D^k * \theta * D^k\|_{C^*(G)}$$

(ici D^k est considéré comme distribution sur G, à support réduit à l'élément neutre).

Nous noterons $B(G)^{-\infty}$ l'espace des distributions sur G continues pour la topologie définie sur $\mathscr{D}(G)$ par les normes $\hbar_*^{2k}$ et $B(G)^{-2k}$ l'espace de celles qui sont continues pour la seule norme $\hbar_*^{2k}$. L'espace $B(G)^{-\infty}$ est réunion croissante des $B(G)^{-2k}$ et on sait que $B(G)^0$, noté $B(G)$, qui est le dual de $C^*(G)$, est l'espace vectoriel engendré algébriquement par les fonctions continues de type positif sur G (cf. Eymard [8]).

5.1. PROPOSITION. *Pour une distribution T sur G, les deux conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *T appartient à $B(G)^{-2k}$*,

(ii) *T est de la forme $\sum_{j=0}^{k} (D^j * \varphi_j * D^j)$ où les $\varphi_j \in B(G)$.*

Preuve. (ii) entraîne (i): évident.

(i) entraîne (ii). Soit E le sous-espace vectoriel de l'espace produit $C^*(G)^{k+1}$ formé par les éléments de la forme:

$$\Delta(\theta) = (\theta, D * \theta * D, \ldots, D^k * \theta * D^k);$$

posons pour un tel élément

$$U(\Delta(\theta)) = \langle \theta, T \rangle.$$

Ainsi, U définit une forme linéaire sur E, continue pour la topologie induite par $C^*(G)^{k+1}$, donc d'après le théorème de Hahn–Banach, se prolonge en une forme linéaire continue sur $C^*(G)^{k+1}$. Il existe donc une suite $(\varphi_0, \ldots, \varphi_k)$ dans $B(G)$ telle que, pour toute $\theta \in \mathscr{D}(G)$:

$$\langle \theta, T \rangle = \sum_{j=0}^{k} \langle D^j * \theta * D^j, \varphi_j \rangle = \sum_{j=0}^{k} \langle \theta, D^j * \varphi_j * D^j \rangle$$

d'où:

$$T = \sum_{j=0}^{k} D^j * \varphi_j * D^j$$

5.2. COROLLAIRE. *Pour une distribution T sur G, les deux conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) $T \in B(G)^{-\infty}$,

(ii) *T est combinaison linéaire de distributions de type positif.*

Preuve. (i) entraîne (ii): d'après la proposition, on a, pour un certain entier k,

$$T = \sum_{j=0}^{k} D^j * \varphi_j * D^j.$$

Chaque φ_j s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions de type positif:

$$\varphi_j = \varphi_{j1} - \varphi_{j2} + i(\varphi_{j3} - \varphi_{j4}).$$

Or, chaque $D^j * \varphi_{ji} * D^j$ est une distribution de type positif.

(ii) entraîne (i): il suffit de prouver que toute distribution de type positif appartient à $B(G)^{-\infty}$. Or ceci est vrai puisqu'une telle distribution peut s'écrire $D^k * \varphi * D^k$ où φ est une fonction de type positif (cf. Aarnes [1]).

5.3. THÉORÈME. *La transformation de Fourier inverse définit un isomorphisme d'espaces vectoriels de $M_1^{\oplus}(\hat{G})^{-\infty}$ sur $B(G)^{-\infty}$.*

Preuve. Il n'y a à démontrer que l'injectivité mais celle-ci se déduit classiquement de l'injectivité déjà démontrée pour le cône positif de $M_1^{\oplus}(\hat{G})^{-\infty}$, qui engendre $M_1^{\oplus}(\hat{G})^{-\infty}$.

Transformation de Fourier sur $B(G)^{-\infty}$

Soit $T \in B(G)^{-\infty}$. Alors $\mathscr{F}T$ peut se définir par linéarité à partir de la transformation de Fourier des distributions de type positif (définition 4.6) ou bien, directement, comme l'unique mesure-opérateurs à croissance lente dont la transformée de Fourier inverse est T.

6. APPLICATIONS ET EXEMPLES: ANALYSE HARMONIQUE CENTRALE ET SPHÉRIQUE

Application aux distributions centrales

Nous supposons toujours le groupe G unimodulaire. Pour toute distribution T sur G et tout $g \in G$, soit respectivement $\delta_g * T$ et $T * \delta_g$ les translatées de T à gauche et à droite. Lorsque $T \in B(G)^{-\infty}$, soit $U_\chi\, d\mu(\chi)$ la mesure-opérateurs transformée de Fourier de T, alors les translatées appartiennent encore à $B(G)^{-\infty}$ et admettent respectivement comme transformées de Fourier les mesures $\pi_\chi(g)\, U_\chi\, d\mu(\chi)$ et $U_\chi \pi_\chi(g)\, d\mu(\chi)$.

Rappelons qu'une distribution T est dite centrale si elle est invariante par automorphismes intérieurs c'est-à-dire si elle vérifie, pour tout $g \in G$,

$$\delta_g * T * \delta_{g-1} = T \qquad \text{ou encore} \qquad \delta_g * T = T * \delta_g.$$

6.1. PROPOSITION. *Etant donné une distribution $T \in B(G)^{-\infty}$ et sa transformée de Fourier $m = (\mu, U)$, les deux conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *T est centrale,*

(ii) *L'opérateur U_χ est scalaire μ-presque-partout.*

Preuve. Le groupe G étant séparable, on démontre, en utilisant une suite (g_n) partout dense, que T est centrale si et seulement si, pour μ presque tout χ, l'opérateur-distribution à trace U_χ commute à tous les $\pi_\chi(g)$. Mais, d'après Cartier [5], tout opérateur faiblement continu de $\mathscr{H}_\chi^\infty$ dans $\mathscr{H}_\chi^{-\infty}$ (c'est le cas pour U_χ), qui commute aux $\pi_\chi(g)$, est scalaire. c.q.f.d.

Soit $m = (\mu, U)$ une mesure-opérateurs à croissance lente, telle que U_χ soit μ-presque partout scalaire:

$$U_\chi = \alpha_\chi id_\chi.$$

Alors m est entièrement déterminée par la mesure complexe

$$d\nu(\chi) = \alpha_\chi \, d\mu(\chi),$$

et la condition de croissance lente se traduit par l'existence d'un entier k tel que la fonction:

$$\chi \longmapsto \operatorname{tr}(\Lambda_\chi^{-2k}) = \operatorname{tr}(D_\chi^{-k}) = \not{h}_1^{-k}(Id_\chi)$$

soit μ-intégrable. Nous dirons qu'une mesure scalaire sur $\hat{G}$ qui vérifie cette propriété est centralement à croissance lente. Si m est la transformée de Fourier de la distribution T, nous dirons que ν est la transformée de Fourier centrale de T. Nous avons pour tout $\theta \in \mathscr{D}(G)$, $\langle \theta, T\rangle = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr}(\pi_\chi(\theta)) \, d\nu(\chi)$. Les résultats précédents se résument dans le

6.2. THÉORÈME. *La transformation de Fourier centrale met en bijection les distributions centrales appartenant à $B(G)^{-\infty}$ et les mesures centralement à croissance lente sur $\hat{G}$.*

Remarque. Si ν est centralement à croissance lente, l'opérateur id_χ est $|\nu|$-presque partout un opérateur-distribution à trace. Il en résulte que ν est portée par l'ensemble des points $\chi \in \hat{G}$ tels que l'espace $\mathscr{H}_\chi^\infty$ soit nucléaire.

Un exemple de distributions centrales nous est fourni par les caractères de G. Rappelons que la représentation irréductible π_χ admet un caractère si et seulement si l'espace $\mathscr{H}_\chi^\infty$ est nucléaire. Dans ces conditions, le caractère de π_χ est la distribution centrale T_χ définie par:

$$\langle \theta, T_\chi \rangle = \operatorname{tr}(\pi_\chi(\theta)).$$

Alors, la distribution $\check{T}_\chi$, qui est également centrale, admet comme transformée de Fourier la mesure-opérateur (δ_χ, Id_χ) et comme transformée de Fourier centrale δ_χ.

Applications aux distributions sphériques

On suppose toujours G unimodulaire et on considère un sous-groupe compact K tel que (G, K) constitue une paire de Gelfand, ce qui signifie que l'algèbre de convolution $L_1(G)^\natural$ des fonctions intégrables biinvariantes par K est commutative (un cas particulier important est celui où G est un groupe semi-simple non compact de centre fini et K un sous-groupe compact maximal). Une distribution sur G sera dite sphérique si elle est biinvariante par K.

On sait que, pour tout $\chi \in \hat{G}$ les éléments de $\mathscr{H}_\chi^{-\infty}$ invariants par K forment un espace vectoriel de dimension $\leqslant 1$ et que tout tel vecteur-distribution K-invariant est en fait un vecteur différentiable. Nous noterons $\hat{G}_1$ l'ensemble des $\chi \in \hat{G}$ pour lesquels il existe un vecteur K-invariant non nul dans $\mathscr{H}_\chi$. Donnons-nous un champ mesurable $\chi \in \hat{G}_1 \mapsto \xi_\chi \in \mathscr{H}_\chi$ de vecteurs K-invariants unitaires et notons P_χ l'opérateur projection orthogonale sur ξ_χ

$$P_\chi(\xi) = (\xi \mid \xi_\chi)\, \xi_\chi.$$

Il s'agit d'un opérateur C^∞.

6.3. Lemme. *Si U est un opérateur faiblement continu de $\mathscr{H}_\chi^\infty$ dans $\mathscr{H}_\chi^{-\infty}$, biinvariant par K, alors U est colinéaire à P_χ.*

Preuve. Nous avons, pour tout $h \in K$:

$$\pi_\chi(h)U = U\pi_\chi(h) = U.$$

Il est résulte que, si $\xi \in \mathscr{H}_\chi^\infty$, le vecteur $U\xi$ est invariant par K et par conséquent colinéaire à ξ_χ. On en déduit l'existence d'un vecteur-distribution ξ_0 vérifiant

$$U\xi = (\xi \mid \xi_0)\, \xi_\chi.$$

Mais ξ_0 est lui aussi invariant par K, il est donc colinéaire à ξ_χ. c.q.f.d.

A tout fonction $\theta \in \mathscr{D}(G)$, nous associerons la fonction biinvariante $\theta^\natural \in \mathscr{D}(G)$ définie par

$$\theta^\natural(g) = \int_{K \times K} \theta(h_1 g h_2)\, dh_1\, dh_2,$$

où dh est la mesure de Haar normalisée de K. La fonction θ est elle-même biinvariante si et seulement si $\theta^\natural = \theta$. Pour tout $\chi \in \hat{G}_1$, on définit la fonction sphérique zônale φ_χ par

$$\varphi_\chi(g) = (\pi_\chi(g)\, \xi_\chi \mid \xi_\chi)$$

et, à tout $\theta \in \mathscr{D}(G)$, on associe une fonction $\hat{\theta}$ sur $\hat{G}_1$ par:

$$\hat{\theta}(\chi) = (\pi_\chi(\theta)\, \xi_\chi \mid \xi_\chi) = \int_G \theta(g)\, \varphi_\chi(g)\, dg.$$

Il résulte du lemme que, si θ est biinvariante,

$$\pi_\chi(\theta) = \hat{\theta}(\chi)\, P_\chi.$$

De même, nous avons la

6.4. Proposition. *Etant donné une distribution $T \in B^{-\infty}(G)$ et $m = (\mu, U)$ sa transformée de Fourier, les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *T est sphérique,*

(ii) *Pour μ-presque tout χ, l'opérateur U_χ est colinéaire à P_χ.*

Ainsi, si nous considérons une distribution sphérique T et sa transformée de Fourier $m = (\mu, U)$ avec $U_\chi = \alpha_\chi P_\chi$, alors m est entièrement déterminée par la mesure complexe

$$dm^\natural(\chi) = \alpha_\chi\, d\mu(\chi),$$

et cette mesure est portée par $\hat{G}_1$.

La condition de croissance lente de m se traduit par l'existence d'un entier k tel que la fonction

$$\chi \mapsto \not{h}_1^{-k}(P_\chi) = \|\Lambda_\chi^{-k} \xi_\chi\|^2$$

soit $|m^\natural|$-intégrable.

Nous dirons qu'une mesure complexe qui vérifie cette propriété est sphériquement à croissance lente.

Plus généralement, à toute mesure-opérateur à croissance lente m, nous associerons la mesure complexe

$$dm^{\natural}(\chi) = (U_\chi \xi_\chi \mid \xi_\chi)\, d\mu(\chi).$$

Si m est la transformée de Fourier de T, nous dirons que $m^{\natural}$ est la transformée de Fourier sphérique de T.

Nous pouvons résumer tous les résultats de ce paragraphe dans le

6.5. THÉORÈME. (a) *Etant donné une distribution $T \in B(G)^{-\infty}$ de transformée de Fourier $m = (\mu, U)$ et une fonction $\theta \in \mathscr{D}(G)$, la relation*

$$\langle \check{\theta}, T \rangle = \int_{\hat{G}} \hat{\theta}_\chi\, dm^{\natural}(\chi)$$

a lieu si l'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite:

(i) *la fonction θ est sphérique,*

(b) *la distribution T est sphérique.*

(b) *La transformation de Fourier sphérique met en bijection les distributions sphériques de $B(G)^{-\infty}$ et les mesures sphériquement à croissance lente sur $\hat{G}_1$.*

Preuve. Seul (a) demande démonstration.

(i) Nous avons vu que, si θ est biinvariante, il vient

$$\pi_\chi(\theta) = \hat{\theta}_\chi P_\chi,$$

d'où

$$\langle \check{\theta}, T \rangle = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr}(\pi_\chi(\theta)\, U_\chi)\, d\mu(\chi)$$

$$= \int_{\hat{G}} \hat{\theta}_\chi \operatorname{tr}(P_\chi U_\chi)\, d\mu(\chi) = \int_{\hat{G}} \hat{\theta}_\chi (U_\chi \xi_\chi \mid \xi_\chi)\, d\mu(\chi)$$

$$= \int_{\hat{G}} \hat{\theta}_\chi\, dm^{\natural}(\chi).$$

(ii) D'après la proposition 6.4., si la distribution T est sphérique, nous avons $U_\chi = \alpha_\chi P_\chi$ et $dm^{\natural}(\chi) = \alpha_\chi\, d\mu(\chi)$ d'où:

$$\langle \check{\theta}, T \rangle = \int_{\hat{G}} \operatorname{tr}(\pi_\chi(\theta)\, U_\chi)\, d\mu(\chi) = \int_{\hat{G}} \alpha_\chi (\pi_\chi(\theta)\, \xi_\chi \mid \xi_\chi)\, d\mu(\chi)$$

$$= \int_{\hat{G}} \hat{\theta}_\chi\, dm^{\natural}(\chi).$$

c.q.f.d.

Application aux groupes semi-simples

Dans ce paragraphe, G est un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini, non compact, et K un sous-groupe compact maximal (donc (G, K) est une paire de Gelfand).

Soit $\mathbf{G} = \mathbf{K} \oplus P$ la décomposition de Cartan de $\mathbf{G}$. Nous nous donnons une base $(A_1, ..., A_r)$ de $\mathbf{K}$ et une base $(A_{r+1}, ..., A_n)$ de P orthogonales pour la forme de Killing Ψ et telles que

$$\Psi(A_i, A_i) = -1 \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant r,$$
$$\Psi(A_i, A_i) = 1 \qquad \text{pour} \quad r+1 \leqslant i \leqslant n.$$

Les opérateurs de Casimir de G et K s'écrivent respectivement:

$$C_G = -\sum_{i=1}^{r} A_i^2 + \sum_{i=r+1}^{n} A_i^2, \qquad C_K = -\sum_{i=1}^{r} A_i^2.$$

Nous avons donc:

$$D = 1 - \sum_{i=1}^{n} A_i^2 = 1 - C_G + 2C_K.$$

Pour tout $\chi \in \hat{G}$, notons γ_χ la valeur correspondante de C_G et de même, pour tout $\sigma \in \hat{K}$, notons γ'_σ la valeur correspondante de C_K et d_σ la dimension de σ. Notons enfin $n(\sigma, \chi)$ la multiplicité de σ dans la restriction de π_χ à K. En particulier, si σ_0 désigne la représentation triviale de K, nous avons:

$$n(\sigma_0, \chi) = 1 \qquad \text{si} \quad \chi \in \hat{G}_1,$$
$$= 0 \qquad \text{si} \quad \chi \notin \hat{G}_1.$$

Pour $\chi \in \hat{G}$, l'espace $\mathscr{H}_\chi$ se décompose suivant

$$\mathscr{H}_\chi = \bigoplus_{\sigma \in \hat{K}} \mathscr{H}_{\sigma\chi}$$

et K opère dans $\mathscr{H}_{\sigma\chi}$ par la représentation $n(\sigma, \chi)\, \pi_\sigma$. Nous avons

$$\dim(\mathscr{H}_{\sigma\chi}) = d_\sigma n(\sigma, \chi),$$

et, pour $\xi \in \mathscr{H}_{\sigma\chi}$,

$$D_\chi \xi = (1 - \gamma_\chi + 2\gamma'_\sigma)\xi.$$

Ainsi, les fonctions servant à définir la croissance lente au sens central et au sens sphérique valent respectivement:

$$\operatorname{tr}(\Lambda_\chi^{-2k}) = \sum_{\sigma\in\hat{K}} [d_\sigma n(\sigma,\chi)(1-\gamma_\chi+2\gamma'_\sigma)]^{-k}$$

et, pour $\chi \in \hat{G}_1$, $\|\Lambda_\chi^k \xi_\chi\|^2 = (1-\gamma_\chi)^{-k}$.

En particulier, la croissance lente au sens sphérique n'est autre que la croissance polynômiale par rapport à γ_χ; on retrouve ainsi, dans un langage différent, les résultats de Barker [4] sur l'analyse sphérique dans le cas semi-simple.

A titre d'exemple, envisageons le cas où G est le groupe $SO_0(1,2)$, composante neutre dans le groupe matrices pseudoorthogonales d'ordre 3. Rappelons que $SO_0(1,2)$ est isomorphe au quotient de $SL(2,\mathbb{R})$ par son centre. L'algèbre de Lie admet pour base les matrices

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec les relations de commutation

$$[J_0, J_1] = J_2, \qquad [J_0, J_2] = -J_1, \qquad [J_1, J_2] = -J_0.$$

Le sous-groupe à un paramètre associé à J_0 a pour image le sous-groupe compact maximal $K = SO(2)$ et (J_1, J_2) est une base orthonormée de P: il vient donc:

$$C_G = -J_0^2 + J_1^2 + J_2^2, \qquad C_K = -J_0^2, \qquad D = 1 - J_0^2 - J_1^2 - J_2^2.$$

Le dual de K est indexé par $\sigma \in \mathbb{Z}$ avec

$$-i\sigma = d\pi_\sigma(J_0) \qquad \text{et} \qquad \gamma'_\sigma = \sigma^2.$$

Pour tout $\chi \in \hat{G}$ et tout $\sigma \in \mathbb{Z}$, la multiplicité $n(\sigma,\chi)$ vaut 0 ou 1. Donc, chaque espace $\mathscr{H}_\chi$ admet une base hilbertienne $(e_{\sigma\chi})$, telle que $e_{\sigma\chi} \in \mathscr{H}_{\sigma\chi}$.

Voici le tableau I des représentations unitaires de G, avec les notations usuelles et, pour chacune les caractéristiques qui nous sont utiles. En particulier, les deux dernières colonnes donnent l'expression des fonctions servant à définir la croissance lente respectivement au sens central et au sens sphérique:

La colonne donnant le spectre de $id\pi_\chi(J_0)$ montre que $\hat{G}_1$ est formé des séries principale et complémentaire ainsi que de la représentation triviale. Alors, d'après la dernière colonne, pour une mesure complexe μ sur $\hat{G}_1$, la croissance lente au sens sphérique signifie que μ est bornée sur la série

TABLEAU I

Famille des représentations	Paramètrage de $\hat{G}$	Spectre de $id\pi_\chi(J_0)$	$d\pi_\chi(C_G)$	$\mathrm{tr}(D_\chi^{-k})$	$\lVert D_\chi(e_{0\chi})\rVert^2$
Série principale	$\chi = -\frac{1}{2} + i\rho$, $\rho \geqslant 0$	$\sigma \in \mathbb{Z}$	$-\frac{1}{4} - \sigma^2$	$\sum_{\sigma \in \mathbb{Z}} (\frac{5}{4} + \rho^2 + 2\sigma^2)^{-k}$	$(\frac{5}{4} + \rho^2)^{-k}$
Série complémentaire	$\chi \in]-\frac{1}{2}, 0[$	$\sigma \in \mathbb{Z}$	$\chi(\chi + 1)$	$\sum_{\sigma \in \mathbb{Z}} (1 - \chi(\chi + 1) + 2\sigma^2)^{-k}$	$[1 - \chi(\chi + 1)]^{-k}$
Représentation triviale	$(0, 0)$	$\sigma = 0$	0	1	1
Série discrète	$\chi = (l, \varepsilon)$ $l \in \mathbb{N}, \varepsilon = \pm$	$\varepsilon\sigma \in l + 1 + \mathbb{N}$	$l(l + 1)$	$\sum_{m \in l+1+\mathbb{N}} (1 - l(l + 1) + 2m^2)^{-k}$	0

complémentaire et à croissance pôlynomiale par rapport à la variable ρ de la série principale. D'après l'avant-dernière colonne, la croissance lente de μ au sens central signifie que les trois conditions suivantes sont vérifiées:

(i) μ est bornée sur la série complémentaire,

(ii) la fonction $\rho \mapsto \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}} (\frac{5}{4} + \rho^2 + 2\sigma^2)^{-k}$ est μ-intégrable sur $]0, +\infty[$ pour k suffisamment grand,

(iii) la série

$$\sum_{l \geqslant 0} |\mu((l, +)) + \mu((l, -))| \sum_{m \geqslant l+1} (1 - l(l+1) + 2m^2)^{-k}$$

est convergente pour k suffisamment grand.

En utilisant la comparaison des séries en σ et m avec des intégrales, on montre que les deux dernières conditions sont respectivement équivalentes à la croissance polynômiale en ρ et à la croissance polynômiale en l.

Ainsi dans le cas du groupe $SO_0(1, 2)$, les conditions de croissance lente au sens central et au sens sphérique sont équivalentes lorsqu'on se restreint au dual sphérique. Un problème intéressant est de savoir s'il en est de même pour beaucoup d'autres groupes et en particulier pour les groupes semi-simples connexes de centre fini.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. F. AARNES, Distributions of positive type and representations of Lie groups, *Math. Ann.* **240** (1979), 141–156.
2. G. ARSAC, Sur l'espace de Banach engendré par les coefficients d'une représentation unitaire, Publications du Dépt. de Math. Lyon, vol. 13.2, pp. 1–101, 1976.
3. W. H. BARKER, Positive definite distributions on unimodular Lie groups, *Duke Math. J.* **43** (1) (1976), 71–79.
4. W. H. BARKER, The spherical Bochner theorem on semi-simple Lie groups, *J. Funct. Anal.* **20** (1975), 179–207.
5. P. CARTIER, Vecteurs différentiables dans les représentations unitaires des groupes de Lie. Séminaire Bourbaki, Exposé No. 454, Lecture Notes, 514, pp. 20–34, Springer, Berlin/New York, 1975.
6. J. DIXMIER, Les C^*-algèbres et leurs représentations, *Cahiers Sci.*, XXIX, Gauthier-Villars, Paris, 1964.
7. N. DUNFORD AND J. T. SCHWARTZ, "Linear Operators. II. Spectral Theory-Self-adjoint Operators in Hilbert Spaces. Intersciences, New York, 1964.
8. P. EYMARD, "L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact." Thèse, Bulletin de la S.M.F., No. 92, 1964, p. 181–236.
9. R. GOODMAN, Elliptic and subelliptic estimates for operators in an enveloping algebras, *Duke Math. J.*, **47** (4) (1980), 819–834.
10. P. JØRGENSEN, Representation of differential operator on a Lie group, *J. Funct. Anal.* **20** (1975), 105–135.

11. J. P. JURZAK, Decomposable operators application to K.M.S. weights in a decomposable Von Neumann algebra, *Rep. Math. Phys.* **8** (1975), 203–228.
12. R. PENNEY, Abstract Plancherel theorem an a Frobenius reciprocity theorem, *J. Funct. Anal.*, **18** (1975), 177–190.
13. N. S. POULSEN, On C^{∞}-vectors and intertwining nonlinear forms for representations of Lie groups, *J. Funct. Anal.* **9** (1972), 87–120.
14. L. SCHWARTZ, Sous-espaces hilbertiens et noyaux associés; applications aux représentations de groupes de Lie, *in* "2-ème Colloque sur l'Analyse Fonctionnelle, Liège," Gauthiers–Villars, Paris, 1964.