JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY, Series B **30**, 1–10 (1981)

Quelques problèmes de connexité dans les graphes orientés

YAHYA OULD HAMIDOUNE

Université Pierre et Marie Curie, Paris, France

Communicated by the Editors

Received June 8, 1977

We prove that a minimally strongly h-connected digraph contains $h+1$ vertices of half degree h. We study also the connectivity of transitive digraphs.

1. INTRODUCTION

Nous utilisons la terminologie de [1]. Par graphe nous entendrons un graphe orienté sans boucles ni arcs multiples. Les graphes non orientés seront supposés simples. Rappelons qu'un graphe $G=(X, U)$ est fortement h-connexe ($h \geqslant 0$) s'il vérifie les conditions suivantes:

(i) $|X| \geqslant h+1$,

(ii) Pour tout $A \subset X$ tel que $|A| < h$, G_{X-A} est fortement connexe.

Par définition la *connectivité forte* de G est:

$$\kappa(G) = \operatorname{Max}(h : G \text{ est fortement } h\text{-connexe}).$$

En particulier $\kappa(G) = 0$ si et seulement si G n'est pas fortement connexe. Soit A une partie de X. On pose

$$V^+(A) = \Gamma^+(A) - A,$$
$$V^-(A) = \Gamma^-(A) - A.$$

Rappelons qu'un graphe $G=(X, U)$ est *fortement h-connexe minimal* si

(i) $\kappa(G) = h$,

(ii) Pour tout $u \in U$, $\kappa(X, U-u) = h-1$.

Un graphe $G=(X, U)$ est *sommet-transitif* si: quels que soient x et y appartenant à X, il existe un automorphisme f de G tel que $f(x) = y$.

0095-8956/81/010001-10$02.00/0

Halin a montré dans [3] que tout graphe h-connexe minimal contient un sommet de degré h. Mader a démontré dans [6] que tout graphe h-connexe minimal contient au moins $h+1$ sommets de degré h. Kameda a démontré dans [5] que tout graphe fortement h-connexe minimal contient un sommet de demi-degré h. Nous avons donné dans [4] une courte démonstration du théorème de Kameda. Nous démontrons dans cet article que tout graphe fortement h-connexe minimal contient $h+1$ sommets de demi-degré h.

Watkins a démontré dans [8] que la borne inférieure du rapport $\kappa(G)/d(G)$ G étant un graphe simple connexe sommet-transitif est $\frac{2}{3}$. Nous obtenons des résultats analogues pour les graphes orientés. Nous montrons également que l'arc-connectivité d'un graphe fortement connexe sommet-transitif est le demi-degré de ce graphe. Ceci étend au cas des graphes orientés un théorème de Mader [7].

Nous utilisons dans cet article une extension de la notion d'atome utilisée dans le cas non orienté par Watkins et Mader.

2. Graphes fortement h-connexes minimaux

Soit $G=(X, U)$ un graphe fortement connexe. On dit qu'une partie A de X est un fragment positif (resp. négatif) de G si:

(i) $|V^+(A)| = \kappa(G)$ (resp. $|V^-(A)| = \kappa(G)$),

(ii) $A \cup V^+(A) \neq X$ (resp. $A \cup V^-(A) \neq X$).

Un fragment positif (resp. négatif) de G ne contenant aucun autre fragment positif ou négatif de G est appelé une *terminaison* de G. Un fragment de cardinal minimal est appelé un *atome*.

Nous avons montré dans [4] le théorème suivant:

THÉORÈME 2.1. *Soient G un graphe fortement connexe, A un atome positif (resp. négatif) de G et F un fragment positif (resp. négatif) de G. Alors $A \subset F$ ou $A \cap F = \varnothing$. En particulier deux atomes positifs (resp. négatifs) de G distincts sont disjoints.*

Note. Si A est un fragment (resp. terminaison, atome) positif de G, alors A est un fragment (resp. terminaison, atome) négatif du graphe G^{-1} obtenu en renversant le sens de chaque arc de G.

Remarque. Soient $G=(X, U)$ un graphe fortement h-connexe et A une partie non vide de X. Alors $|V^+(A)| \geqslant \mathrm{Min}(h, |X-A|)$.

Supposons $|V^+(A)| < |X-A|$. On a donc $X - V^+(A) \neq A$. Ceci entraîne que $G_{X-V^+(A)}$ n'est pas fortement connexe. D'où $|V^+(A)| \geqslant h$.

Remarque. Soit A un fragment positif (resp. négatif) de $G=(X, U)$. Alors $\bar{A}=X-(A \cup V^+(A))$ (resp. $\bar{A}=X-(A \cup V^-(A)))$ est un fragment négatif (resp. positif) de G. En outre on a

$$V^-(\bar{A})=V^+(A) \qquad (\text{resp. } V^+(\bar{A})=V^-(A)).$$

La démonstration de cette remarque est immédiate.

LEMME 2.2. *Soient A et B deux fragments positifs d'un graphe $G=(X, U)$ tels que $|V^+(A \cap B)|>\kappa(G)$, alors $\bar{A} \cap \bar{B}=\varnothing$.*

Démonstration. On vérifie facilement que:

$$V^+(A \cap B) \subset ((A \cup V^+(A)) \cap (B \cup V^+(B)))-(A \cap B)$$

Par suite $V^+(A \cap B) \subset (V^+(A) \cap (B \cup V^+(B))) \cup (A \cap V^-(B))$. De même $V^-(\bar{A} \cap \bar{B}) \subset (V^+(B) \cap (\bar{A} \cup V^+(A))) \cup (\bar{B} \cap V^+(A))$, compte tenu du fait que $V^-(\bar{A})=V^+(A)$ et $V^-(\bar{B})=V^+(B)$.

Il résulte que: $|V^+(A \cap B)|+|V^-(\bar{A} \cap \bar{B})| \leqslant |V^+(A)|+|V^+(B)|=2\kappa(G)$, car $A \cup V^+(A) \cup \bar{A}$ et $B \cup V^+(B) \cup \bar{B}$ sont 2 partitions de X. Les hypothèses du lemme entraînent $|V^-(\bar{A} \cap \bar{B})|<\kappa(G)$. D'autre part on a $V^-(\bar{A} \cap \bar{B}) \neq X-(\bar{A} \cap \bar{B})$, car $A \cap B \cap V^-(\bar{A} \cap \bar{B})=\varnothing$. D'après la première des deux remarques ci-dessus, appliquée au graphe G^{-1}, on a $\bar{A} \cap \bar{B}=\varnothing$.

Considérons un arc $u=(x, y)$ d'un graphe $G=(X, U)$ fortement h-connexe minimal et soit A un fragment positif du graphe $G-u=(X, U-u)$. On a $|V^+_{G-u}(A)|=h-1$. D'après la première des deux remarques ci-dessus, on a $|V^+_G(A)|=h$. Par suite $x \in A$ et $y \notin V^+(A-x)$. De plus si $\bar{A}=X-(A \cup V^+_G(A)) \neq \varnothing$, alors A est un fragment positif de G. On voit facilement que $\bar{A}=\varnothing$ seulement si $d^-(y)=h$. Cette dernière propriété sera utilisée dans la suite de cet article sans référence.

LEMME 2.3. *Soient $G=(X, U)$ un graphe fortement h-connexe minimal, x un sommet de G tel que $d^+(x)>h$, y et z deux sommets distincts de $V^+(x)$, A et B deux fragments positifs de $G-(x, y)$ et $G-(x, z)$, respectivement. Alors $\bar{A} \cap \bar{B}=\varnothing$ et $|\bar{B}| \leqslant |A|-2$.*

Démonstration. On démontre successivement les points suivants:

(1) $|V^+(A \cap B)|>h$. En effet on a $x \in A \cap B$, d'où $|V^+(A \cap B)| \geqslant \operatorname{Min}(h, |X-(A \cap B)|)=h$. Supposons $|V^+(A \cap B)|=h$. On a $A \cap B \neq \{x\}$ puisque $d^+(x)>h$. Ceci entraîne $|V^+(A \cap B-x)| \geqslant h$. D'autre part on a $V^+(A \cap B-x) \subset (V^+(A \cap B) \cup \{x\})-\{y, z\}$, car $y \notin V^+(A-x)$ et $z \notin V^+(B-x)$. D'où $|V^+(A \cap B-x)|<h$, une contradiction.

(2) $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$. Supposons $\bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$. En particulier $\bar{A} \neq \emptyset$ et $\bar{B} \neq \emptyset$, donc A et B sont 2 fragments positifs de G. Puisque $|V^+(A \cap B)| > h$, on a d'après le lemme 2.2 $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$, ce qui est absurde.

(3) $|\bar{B} \cap V^+(A)| < |A \cap V^+(B)|$. En effet on a clairement

$$V^+(A \cap B) \subset (V^+(A) - \bar{B}) \cup (A \cap V^+(B)).$$

D'après (1)

$$h = |V^+(A)| < |V^+(A \cap B)| \leqslant |V^+(A) - \bar{B}| + |A \cap V^+(B)|$$

et par suite $|\bar{B} \cap V^+(A)| < |A \cap V^+(B)|$.

(4) Compte tenu de (2) et (3), et puisque $A \cup V^+(A) \cup \bar{A}$ et $B \cup V^+(B) \cup \bar{B}$ sont 2 partitions de X, il vient:

$$|\bar{B}| = |\bar{B} \cap V^+(A)| + |\bar{B} \cap A| < |A \cap V^+(B)| + |A \cap \bar{B}| = |A - B| < |A|.$$

D'où $|\bar{B}| \leqslant |A| - 2$.

PROPOSITION 2.4. *Soit $G = (X, U)$ un graphe fortement h-connexe minimal et H un sous graphe de G tel que $d_H^+(x) \geqslant 2$ et $d_H^-(x) \geqslant 2$ pour tout sommet x de H. Alors H contient un sommet de demi-degré dans G égal à h.*

Démonstration. Supposons contrairement à la proposition que $d_G^+(x) > h$ et $d_G^-(x) > h$ pour tout sommet x de H.

Soit A un fragment de $G - (x, y)$, (x, y) arc de H, choisi tel que $|A|$ soit le cardinal minimal d'un fragment positif ou négatif de $G - u$ pour u parcourant l'ensemble des arcs de H. On peut supposer que A est un fragment positif de $G - (x, y)$, le cas où A est un fragment négatif se ramenant à celui-ci en renversant le sens de chaque arc de G.

Par hypothèse $d_H^+(x) \geqslant 2$, soient $z \in V_H^+(x) - y$ et B un fragment positif de $G - (x, z)$. On a $d^+(x) > h$, donc d'après le lemme 2.2 $|\bar{B} \cup \{z\}| < |A|$, ce qui contredit la définition de A, car $\bar{B} \cup \{z\}$ est un fragment négatif de $G - (x, z)$.

La proposition est donc démontrée.

COROLLAIRE 2.5 (Mader [6]). *Soit G un graphe non orienté h-connexe minimal et C un cycle de G. Alors C contient un sommet de degré h.*

Démonstration. Soit G^* le graphe obtenu en orientant chaque arête de G dans les 2 sens. On vérifie facilement que G^* est un graphe fortement h-connexe minimal et que G_C^* vérifie les conditions de la proposition 2.4. D'oùla conclusion du corollaire.

THÉORÈME 2.6. *Soit $G=(X, U)$ un graphe fortement h-connexe minimal. Alors toute terminaison de G est de cardinal 1. En particulier tout fragment de G contient un sommet de demi-degré h.*

Démonstration. Supposons contrairement au théorème que B est une terminaison de cardinal spérieur à 1. Nous pouvons nous limiter au cas où B est positive, l'autre cas se ramenant à celui-ci en renversant le sens de chaque arc de G.

Soit x un sommet de B. Pour tout $y \in V^+(x)$, soit F_y un fragment positif de $G-(x, y)$. Soient y et z 2 sommets distincts de $V^+(x)$. D'après le lemme 2.3 $\bar{F}_y \cap \bar{F}_z = \varnothing (d^+(x) > h$, car $x \in B)$. D'autre part, on voit facilement que $y \notin \bar{F}_z$ et $z \notin \bar{F}_y$. On a donc $(\bar{F}_y \cup \{y\}) \cap (\bar{F}_z \cup \{z\}) = \varnothing$. La famille $(\bar{F}_y \cup \{y\})_{y \in V^+(x)}$ est une famille d'au moins $h+1$ ensembles deux à deux disjoints, il existe donc $y' \in V^+(x)$ tel que $V^+(B) \cap (\bar{F}_{y'} \cup \{y'\}) = \varnothing$. On voit facilement que y' est un sommet de B. Supposons $\bar{F}_{y'} \cap \bar{B} \neq \varnothing$. Ceci entraîne que $F_{y'}$ est un fragment positif de G. On a donc $|V^+(F_{y'} \cap B)| > h$, d'où une contradiction d'après le lemme 2.2. Par suite $\bar{F}_{y'} \cup \{y'\} \subset B$, ce qui contredit le fait que B est une terminaison.

Le théorème est donc démontré.

THÉORÈME 2.7. *Le nombre de sommets de demi-degré h dans un graphe G fortement h-connexe minimal est supérieur ou égal au demi-degré maximal de G.*

Démonstration. Le théorème est évident si le demi-degré maximal est h. Nous pouvons supposer le demi-degré maximal positif, l'autre cas se ramenant à celui-ci en renversant le sens de chaque arc de G. Soit x un sommet de demi-degré positif maximal et supposons $d^+(x) > h$. Pour tout $y \in V^+(x)$, soit F_y un fragment positif de $G-(x, y)$. D'après la démonstration précédente, la famille $(\bar{F}_y \cup \{y\})_{y \in V^+(x)}$ est une famille de fragments négatifs de G deux à deux disjoints $(d^+(x) > h)$. D'après le théorème 2.6 chacun de ces fragments contient un sommet de demi-degré h.

Le théorème est donc démontré.

COROLLAIRE 2.8. *Tout graphe fortement h-connexe minimal contient au moins $h+1$ sommets de demi-degré h.*

Démonstration. Ce corollaire est une conséquence du théorème 2.7.

COROLLAIRE 2.9 (Mader [6]). *Soit G un graphe non orienté h-connexe minimal. Alors G contient $h+1$ sommets de degré h. En outre le nombre de sommets de G de degré h est supérieur ou égal au degré maximal de G.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 2.7 et le corollaire 2.8 au graphe obtenu en orientant dans les 2 sens chaque arête de G.

3. Graphes sommet-transitifs

Nous commençons par établir un lemme d'ordre général cité dans [4].

Soient $G = (X, U)$ et $G' = (X', U')$ deux graphes. Posons

$$U \otimes U' = \{((x, x'), (y, y')) : (x, y) \in U \text{ ou } x = y \text{ et } (x', y') \in U'\}.$$

Le graphe $G \otimes G' = (X \times X', U \otimes U')$ est appelé le produit *lexicographique* de G par G'.

Soit $G = (X, U)$ un graphe fortement connexe et T une partie de X. On dit que T est un *ensemble de séparation* de G si G_{X-T} n'est pas fortement connexe.

Lemme 3.1. *Soient $G = (X, U)$ et $G' = (X', U')$ deux graphes. Si G n'est pas symétrique-complet, alors $\kappa(G \otimes G') = \kappa(G)\,|X'|$.*

Démonstration. Le lemme est trivial si $\kappa(G) = 0$. Prenons $\kappa(G) > 0$. Soit T une partie de $X \times X'$ telle que $\kappa(G \otimes G') = |T|$. Nous montrons successivement les points suivants:

(1) si L est une partie de $X \times X'$ non fortement connexe, alors $p_1(L)$ n'est pas fortement connexe ou $|p_1(L)| < 2$ (p_1 désigne la première projection).

Ceci est facile à vérifier.

(2) $|T| \leqslant \kappa(G)\,|X'|$. Soit S un ensemble de séparation de G de cardinal $\kappa(G)$. On voit facilement que $S \times X'$ sépare $G \otimes G'$. On a donc

$$|T| = \kappa(G \otimes G') \leqslant |S \times X'| = \kappa(G)\,|X'|.$$

(3) $|p_1(X \times X' - T)| \geqslant 2$. En effet le contraire entraîne

$$|T| \geqslant (|X| - 1)\,|X'| > \kappa(G)\,|X'|.$$

(4) Compte tenu de (1), (2), et (3), le sous graphe de G engeendré par $p_1(X \times X' - T)$ n'est pas fortement connexe. Par suite $|p_1(X \times X' - T)| \leqslant |X| - \kappa(G)$. On a donc $|T| \geqslant |X - p_1(X \times X' - T)|\,|X'| \geqslant \kappa(G)\,|X'|$.

Nous avons démontré dans [4] la proposition suivante:

Proposition 3.2. *Soit $G = (X, U)$ un graphe connexe sommet-transitif possédant des atomes positifs (resp. négatifs). Les atomes positifs (resp. négatifs) de G sont des graphes sommet-transitifs isomorphes et forment une partition de X.*

Nous dirons qu'un graphe est bi-régulier si tous ses sommets ont le même demi-degré extérieur et le même demi-degré intérieur. En particulier tout graphe sommet-transitif est bi-régulier.

LEMME 3.3. *Soit $G=(X,U)$ un graphe fortement connexe sommet-transitif et A un atome de G. Alors $|A|\leqslant \kappa(G)$.*

Démonstration. Nous allons raisonner dans le cas d'un atome positif. Posons $T=V^+(A)$. D'après la proposition 3.2, G_A est un graphe bi-régulier. Soit $M=\{(x,y):(x,y)\in U$ et $x\in A$ et $y\in T\}$. On a $|M|=|A|\,(d^+(G)-d^+(G_A))=\sum_{x\in T}|V^-(x)\cap A|$.

Par suite il existe un sommet $y\in T$ tel que

$$|T|\,|A\cap V^-(y)|\geqslant |A|\,(d^+(G)-d^+(G_A)).$$

D'après la proposition 3.2, il existe un atome positif A' isomorphe à A at contenant y.On a donc

$$|V^-(y)\cap A|\leqslant d^-(G)-d^-(G_{A'})=d^+(G)-d^+(G_{A'})=d^+(G)-d^+(G_A).$$

Ceci entraîne $|A|\leqslant |T|=\kappa(G)$.

Nous désignerons le circuit de longueur p et le graphe symétrique-complet d'ordre n par $\mathbf{C}_p$ et K_n^*, et K_n^*, respectivement.

PROPOSITION 3.4. *Soit G un graphe fortement connexe sommet-transitif, alors $\kappa(G)>\frac{1}{2}d^+(G)$. La borne inférieure du rapport $\kappa(G)/d^+(G)$ G étant un graphe fortement connexe sommet-transitif est $\frac{1}{2}$.*

Démonstration. Nous montrons successivement les points suivants:

(1) $\kappa(G)>\frac{1}{2}d^+(G)$. Ceci est évident si G est symétrique-complet. Supposons le contraire et soit A un atome de G. Nous allons raisonner dans le cas où A est positif.

On a clairement $d^+(G)=d^+(x)\leqslant |A-x|+|V^+(A)|<|A|+\kappa(G)\leqslant 2\kappa(G)$, d'après le lemme 3.3. On a donc $\kappa(G)>\frac{1}{2}d^+(G)$.

(2) Il existe une suite (G_p) de graphes fortement connexes sommet-transitifs tels que $\inf(\kappa(G_p)/d^+(G_p);p\in N)=\frac{1}{2}$.

Prenons $G_p=\mathbf{C}_3\otimes K_p^*$. On vérifie facilement que G_p est sommet-transitif et $d^+(G_p)=2p-1$. D'après le lemme 3.1, $\kappa(G_p)=p$. On a donc $\inf(\kappa(G_p)/d^+(G_p);\, p\in N)=\frac{1}{2}$.

Remarque. On peut remplacer dans les hypothèses de la proposition 3.4 la forte connexité par la connexité simple. En effet, nous avons montré dans [4] qu'un graphe sommet-transitif connexe est fortement connexe.

Note. D'après la proposition 3.4, $\kappa(G)\geqslant [\frac{1}{2}d^+(G)]+1$, pour tout graphe fortement connexe sommet-transitif. Cette borne est la meilleure possible. On voit qu'elle est attainte pour toute valeur de $d^+(G)$ par des graphes de la forme $\mathbf{C}_3\otimes K^*$, où K^* est un graphe symétrique-complet ou un graphe obtenu du graphe symétrique-complet par la suppression des arcs d'un circuit hamiltonien.

Proposition 3.5. *Soit G un graphe fortement connexe sommet-transitif anti-symétrque, alors $\kappa(G) > \frac{2}{3}d^+(G)$. La borne inférieure du rapport $\kappa(G)/d^+(G)$ G étant un graphe fortement connexe sommet-transitif anti-symétrique est $\frac{2}{3}$.*

Démonstration. Nous allons raisonner dans le cas où G possède un atome positif A. Soit x un sommet de A. On a $d^+(G) = d^+(x) \leqslant d^+(G_A) + |V^+(A)|$, car G_A est un graphe bi-régulier. Par suite $d^+(G) \leqslant \frac{1}{2}(|A| - 1) + \kappa(G) < \frac{3}{2}\kappa(G)$, compte tenu du lemme 3.3. On a donc $\kappa(G) > \frac{2}{3}d^+(G)$.

Nous allons montrer qu'il existe une suite (G_p) de graphes fortement connexes sommet-transitifs anti-symétriques tels que $\inf(\kappa(G_p)/d^+(G_p); p \in N) = \frac{2}{3}$.

Posons $G_p = \mathbf{C}_3 \otimes (\cdots))$ p fois. On vérifie facilement que G_p est un graphe sommet-transitif et que $d^+(G_{p)} = \frac{1}{2}(3^p - 1)$. D'après le lemme 3.1, on a $\kappa(G_p) = 3^{p-1.}$ Ceci entraîne que $\inf(\kappa(G_p)/d^+(G_p); p \in N) = \frac{2}{3}$.

Soient n et k 2 entiers naturels non nuls tels que $k < [n/2]^*$. Posons $U_{n,k} = \{(x, y): x, y \in Z_n \text{ et } y - x \in \{1,..., k\}\}$, où Z_n désigne le groupe des entiers modulo n. Soit $G_{n,k} = (Z_n, U_{n,k})$. On voit facilement que $G_{n,k}$ est un graphe sommet-transitif anti-symétrique et que $d^+(G_{n,k}) = k$.

Note. D'après la proposition 3.5, $\kappa(G) \geqslant [\frac{2}{3}d^+(G)] + 1$, pour tout graphe G fortement connexe anti-symétrique sommet-transitif. Cette borne est la meilleure possible. En effet, pour tout entier non nul n, il existe un graphe G smmet-transitif anti-symétrique tel que $d^+(G) = n$ et $\kappa(G) = [\frac{2}{3}n] + 1$.

Soit $2n = 3p + r$, p, $r \in N$ et $r \leqslant 2$. Prenons $G = \mathbf{C}_3 \otimes G_{p+1,(p+r-2)/2}$.On voit facilement que $d^+(G) = n$ *et* $\kappa(G) = p + 1$.

4. Arc-connectivité d'un graphe sommet-transitif

Soient $G = (X, U)$ un graphe et A une partie de X. Posons

$$\omega^+(A) = \{(x, y) \in U: x \in A \text{ et } y \notin A\};$$

$$\omega^-(A) = \omega^+(X - A);$$

$$U_A = \{(x, y) \in U: x \in A \text{ et } y \in A\}.$$

L'*arc connectivité* de G est par définition:

$$\lambda(G) = \mathrm{Min}(|\omega^+(A)|: A \text{ est une partie propre de } X).$$

On dit que A est un *a-fragment positif* (resp. négatif) de G si

$$\lambda(G) = |\omega^+(A)| \qquad (\text{resp. } \lambda(G) = |\omega^-(A)|).$$

Remarque. Soient G un graphe non orienté, $\lambda^0(G)$ son arête-connectivité et G^* le graphe obtenu en orientant chaque arête de G dans les deux sens. Alors $\lambda^0(G) = \lambda(G^*)$.

Un a-fragment de G de cardinal minimal est appelé un *a-atome* de G. Soit $G = (X, U)$ un graphe fortement connexe et A un a-fragment positif de G, alors $X - A$ est un a-fragmet négatif de G. Ceci entraîne que le cardinal d'un a-atome de G est inférieur ou égal à $\frac{1}{2}|X|$. Le cardinal d'un a-atome de G est 1 si et seulement si

$$\lambda(G) = \mathrm{Min}(d^+(x), d^-(x); x \in X).$$

LEMME 4.1. *Soient $G = (X, U)$ un graphe fortement connexe, A et B deux a-atomes positifs (resp. négatifs) de G. Alors $A = B$ ou $A \cap B = \varnothing$.*

Démonstration. On peut supposer A et B positifs, le cas où A et B sont négatifs se ramenant à celui-ci en renversant le sens de chaque arc de G. Supposons contrairement au lemme que $A \neq B$ et $A \cap B \neq \varnothing$. On a donc $(X - A) \cap (X - B) \neq \varnothing$, car $|A| = |B| \leqslant \frac{1}{2}|X|$. D'autre part on a

$$\omega^+(A \cap B) \subset ((\omega^+(A) \cap (\omega^+(B) \cup U_B))) \cup (\omega^+(B) \cap U_A);$$

$$\omega^-((X - A) \cap (X - B))$$
$$\subset (\omega^+(A) \cap U_{X-B}) \cup (\omega^+(B) \cap (\omega^+(A) \cup U_{X-A})),$$

compte tenu des relations $\omega^+(A) = \omega^-(X - A)$ et $\omega^+(B) = \omega^-(X - B)$. Par suite $|\omega^+(A \cap B)| + |\omega^-(X - A) \cap (X - B)))\leqslant 2\lambda(G)$. Ceci est absurde, car $|\omega^+(A \cap B)| > \lambda(G)$ et $|\omega^-((X - A) \cap (X - B))| \geqslant \lambda(G)$.

Dalmazzo a trouvé indépendemment ce lemme par d'autres méthodes [3]. Notre méthode de démonstration est nalogue à celles que avons utilisées dans [4].

PROPOSITION 4.2. *Soit $G = (X, U)$ un graphe fortement connexe sommet-transitif. Alors $\lambda(G) = d^+(G)$.*

Démonstration. Supposons, contrairement à la proposition, que $\lambda(G) \neq d^+(G)$ et soit A un a-atome de G. Nous allons raisonner dans le cas où A est positif.

Nous commençons par établir que G_A est sommet-transitif.

Soient x et y deux sommets de A, f un automorphisme de G tel que $f(x) = y$. D'après le lemme 4.1, on a $f(A) = A$. Ceci entraîne que f/A est un automorphisme de G_A. G_A est donc sommet-transitif.

Posons $r = d^+(G) - d^+(G_A)$. On voit facilement que $\lambda(G) = r|A|$. Par suite $r|A| < r + d^+(G_A)$. DD'où $d^+(G_A) > r(|A| - 1) \geqslant |A| - 1$, ce qui est absurde.

COROLLAIRE 4.3 (Mader [7]). *Soit G un graphe non orienté connexe sommet-transitif. Alors* $\lambda^0(G) = d(G)$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que le graphe obtenu en orientant dans les 2 sens chaque arête de G est un graphe fortement connexe sommet-transitif.

RÉFÉRENCES

1. C. BERGE, "Graphes et hypergraphes," 2° éd. Dunod, Paris, 1973.
2. M. DALMAZZO, Thèse de 3ème cycle, Paris, 1978.
3. R. HALIN, A theorem on n-connected graphs, *J. Combinatorial Theory* **7** (1969), 150–154.
4. Y. O. HAMIDOUNE, Sur les atomes d'un graphe orienté, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, *Sér. A* **284**, 1256.
5. T. KAMEDA, Note on Halin's theorem on minimally connected graphs, *J. Combinatorial Theory (B)* **17** (1974), 1–4.
6. W. MADER, Ecken vom grad n in minimale n-fach zusammen hängenden Graphen, *Math. Ann.* **23** (1972) 219–224.
7. W. MADER, Minimale n-fach kantenzusammenhängenden Graphen, *Math. Ann.* **191** (1971), 21–28.
8. M. E. WATKINS, Connectivity of transitive graphs, *J. Combinatorial Theory* **8** (1970), 23–29.