JOURNAL OF ALGEBRA 47, 480–523 (1977)

Endliche einfache Gruppen mit einer zentralisatorgleichen elementar abelschen Untergruppe von der Ordnung 16

GERNOT STROTH

Department of Mathematics, University of Mainz, Mainz, Germany

Communicated by B. Huppert

Received July 15, 1976

In [9] hat Harada die endlichen Gruppen untersucht, die eine Untergruppe von der Ordnung acht enthalten, die eine Sylow 2-Untergruppe ihres Zentralisators enthält. Das Ziel dieser Arbeit ist es, dieses Ergebnis zu verallgemeinern. Es soll der folgende Satz bewiesen werden.

SATZ A. *Sei G eine endliche einfache Gruppe und E eine 2-Untergruppe von G mit $|E| \leqslant 16$. Weiter sei $\mathbf{Z}(E)$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(E)$. Ist $\mathbf{N}_G(E)/E\mathbf{C}_G(E)$ nicht auflösbar, so gilt eine der folgenden Aussagen.*

(i) $r(G) \leqslant 4$.

(ii) *G ist zu $L_4(q)$, $q \equiv 1 \pmod 8$; $U_4(q)$, $q \equiv -1 \pmod 8$; HiS, C_3, He, M_{24}, $L_5(2)$, A_{16} oder A_{17} isomorph.*

(iii) *G hat eine Sylow 2-Untergruppe vom Typ A_{18} oder $L_6(q)$, $q \equiv -1 \pmod 4$.*

Hierbei ist HiS die sporadische Higman–Sims–Gruppe. Mit C_3 bezeichnen wir die dritte Conway–Gruppe. Die Gruppe He ist die in [11] beschriebene sporadische einfache Gruppe. Eine Gruppe hat $r(G) \leqslant 4$, falls sich jede 2-Untergruppe von G mit höchstens vier Elementen erzeugen läßt. Zu den Gruppen mit Sylow 2-Untergruppe vom Typ A_{18} bzw. $L_6(q)$ vergleiche [17].

Die Bezeichnungen folgen denen aus [4] und [17].

In [17] wurden Gruppen untersucht, die eine Untergruppe E mit $|E| \leqslant 16$ besitzten, so daß $\mathbf{O}_2(\mathbf{N}_G(E)/E\mathbf{C}_G(E)) = 1$ ist. Zum Beweis von Satz A genügt es also Gruppen zu untersuchen, in denen $\mathbf{O}_2(\mathbf{N}_G(E)/\mathbf{C}_G(E)E) \neq 1$ ist. Da $\mathbf{N}_G(E)$ nicht auflösbar ist, ist weiter E elementar abelsch von der Ordnung 16. Die Struktur von A_8 liefert dann, daß $\mathbf{N}_G(E)/\mathbf{C}_G(E)$ zu einer zerfallenden Erweiterung von E_8 durch $L_2(7)$ isomorph ist. Somit folgt Satz A aus [17] und dem folgenden Satz.

SATZ B. *Sei G eine endliche einfache Gruppe und E eine elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 16 von G. Es sei E eine Sylow 2-Untergruppe von*

ISSN 0021-8693

$\mathbf{C}_G(E)$ und $\mathbf{N}_G(E)/\mathbf{C}_G(E)$ zu einer zerfallenden Erweiterung einer elemntar abelschen Gruppe von der Ordnung acht durch $L_2(7)$ isomorph. Dann ist G zu M_{24} oder He isomorph.

Die Gruppe A_8 enthält zwei Konjugierten–Klassen von Untergruppen, die zu einer Erweiterung von E_8 durch $L_2(7)$ isomorph sind. In ihrer Operation auf E unterscheiden sie sich dadurch, daß die eine Gruppe der Stabilisator eines Punktes in A_8 ist, die andere der Stabilisator einer Hyperebene ist.

Ist $\mathbf{N}_G(E)/\mathbf{C}_G(E)$ der Stabilisator einer Hyperebene E_0, so bestimmen wir zunächst die Struktur von $\mathbf{C}_G(e)$, wobei e eine Involution in $E - E_0$ ist. Dies liefert dann zusammen mit der Struktur von $\mathbf{N}_G(A)$, wobei A eine abelsche Untergruppe von maximaler Ordnung in $\mathbf{O}_{2',2}(\mathbf{N}_G(E))$ ist, einen Widerspruch zur möglichen Fusion von Involutionen in einfachen Gruppen.

Der Fall, daß $\mathbf{N}_G(E)/\mathbf{C}_G(E)$ der Stabilisator eines Punktes e in E ist, ist wesentlich schwieriger zu behandeln. Er nimmt somit auch den Hauptteil dieser Arbeit ein. In diesem Fall ist eine Sylow 2-Untergruppe F von $\mathbf{O}_{2',2}(\mathbf{N}_G(E))$ stets extraspeziell von der Ordnung 2^7. Nun kann $L_2(7)$ auf $F/\mathbf{Z}(F)$ unzerlegbar oder vollständig reduzibel operieren. Im ersten Fall ist es nicht schwer die Struktur von $\mathbf{C}_G(e)$ zu bestimmen. Dann liefern Fusionsargumente einen Widerspruch.

Im zweiten Fall ist der Schlüssel zum Beweis der, daß es gelingt eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(f)$ für $f \in E - \langle e \rangle$ nach oben abzuschätzen. Mit Methoden, die ähnlich denen in [10] angewandten sind, gelingt es sodann die Ordnung einer Sylow 2-Untergruppe von G nach oben abzuschätzen. Weiter erhält man wie in [10] große elementar abelsche Untergruppen von G. Die Struktur der Normalisatoren dieser Untergruppen liefert dann, daß 2^{11} nicht die Ordnung von G teilt. Hierbei ist die Hauptschwierigkeit, daß wir eine ähnliche Situation wie in [10] erhalten, die in einfachen Gruppen wie A_{16}, A_{17}, A_{18} und A_{19} vorkommt. Dies liegt daran, daß in [10] für die Konstruktion der Sylow 2-Untergruppe von G auch nur Untergruppen benutzt werden, die Erweiterungen von E durch $E_8L_2(7)$ sind. Der wesentliche Unterschied ist aber, daß in unserem Fall die Involution f nicht 2-zentral ist, während sie in [10] 2-zentral ist. Das liefert dann schließlich auch den gewünschten Widerspruch. Ist erst einmal gezeigt, daß eine Sylow 2-Untergruppe von G die Ordnung 2^{10} hat, so ist mit [16] bereits der Satz B bewiesen.

1. Der Stabilisator einer Hyperebene

In diesem Abschnitt wollen wir annehmen, daß $\mathbf{N}_G(E)/\mathbf{C}_G(E)$ zum Stabilisator einer Hyperebene in A_8 isomorph ist. Diese Hyperebene wollen wir mit E_0 bezeichnen. Mit e bezeichnen wir einen Punkt in $E - E_0$. Alle Punkte in $E - E_0$ sind in $\mathbf{N}_G(E)$ konjugiert.

(1.1) LEMMA. *Setze* $M = \mathbf{C}_G(e)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_G(e))$. *Dann gilt eine der folgenden Aussagen.*

(i) $M/\langle e\rangle$ *ist zu einer Erweiterung einer elementar abelschen Gruppe von der Ordnung acht durch* $L_2(7)$ *isomorph.*

(ii) $\mathbf{L}(M/\langle e\rangle)$ *ist zu* $G_2(q)$, $D_4^2(q)$, q *ungerade,* A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, M_{22}, M_{23} *oder* Ly, *der sporadischen Lyons–Gruppe, isomorph. Weiter ist* $r(M/\langle e\rangle) \leqslant 4$.

In beiden Fällen enthält M *keine elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung* 64.

Beweis. Setze $H = \mathbf{N}_G(E)$. Dann ist klar, daß $\mathbf{C}_H(e)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_H(e))$ eine Erweiterung einer elementar abelschen Gruppe von der Ordnung 16 durch $L_2(7)$ ist. Also enthält $M/\langle e\rangle$ eine elementar abelsche Gruppe R von der Ordnung 8, so daß R eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_{M/\langle e\rangle}(R)$ ist. Weiter ist $\mathbf{N}_{M/\langle e\rangle}(R)/\mathbf{C}_{M/\langle e\rangle}(R)$ zu $L_2(7)$ isomorph. Mit [9, Theorem 2] folgt nun $r(M/\langle e\rangle) \leqslant 4$. Also enthält M keine elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 64. Weiter folgt die Behauptung über $\mathbf{L}(M/\langle e\rangle)$ mit [17, Lemma (2.5)].

(1.2) LEMMA. *Sei* F *eine Sylow* 2-*Untergruppe von* $\mathbf{O}_{2',2}(\mathbf{N}_G(E))$. *Dann enthält* F *eine abelsche Untergruppe* A *vom Index zwei. Weiter gilt eine der folgenden Aussagen.*

(i) $F = A\langle e\rangle$. *Es ist* A *zu* $Z_4 \times Z_4 \times Z_4$ *isomorph. Die Involution* e *operiert invertierend auf* A.

(ii) $F = A\langle e\rangle \cong E_8 \wr Z_2$. *Die Gruppe* A *ist elementar abelsch von der Ordnung* 64. *Weiter ist* $E_0 \subseteq A$.

Beweis. Klar ist, daß $E = \mathbf{C}_F(e)$ ist. Sei nun σ ein Element von 7-Potenz-Ordnung in $\mathbf{C}(e)$, das F normalisiert aber nicht zentralisiert. Setze $A = [\sigma, F]$. Dann ist $|A| = 64$. Ist $\Omega_1(A) \neq E_0$, so ist A elementar abelsch. Weiter gilt (ii). Sei also $\Omega_1(A) = E_0$. Nach [13] ist dann A eine Suzuki 2-Gruppe oder zu $Z_4 \times Z_4 \times Z_4$ isomorph. Da die Automorphismengruppe einer Suzuki 2-Gruppe von der Ordnung 64 auflösbar ist, folgt nun $A \cong Z_4 \times Z_4 \times Z_4$. Wegen $E = \mathbf{C}_F(e)$ bewirkt e einen Automorphismus auf A. Da e eine zu $L_2(7)$ isomorphe Gruppe zentralisiert, folgt jetzt, daß e invertierend auf A operiert. Das liefert (i).

(1.3) LEMMA. *Sei* $A \cong Z_4 \times Z_4 \times Z_4$. *Dann gibt es in* G *eine Untergruppe* B, *die zu* $Z_{2^m} \times Z_{2^m} \times Z_{2^m}$, *für geeignetes* $m \geqslant 2$, *isomorph ist. Es ist* B *eine Sylow* 2-*Untergruppe von* $\mathbf{C}_G(B)$. *Die Gruppe* $\mathbf{N}_G(B)$ *enthält eine Sylow* 2-*Untergruppe von* G. *Schließlich ist* $\mathbf{N}_G(B)/\mathbf{C}_G(B)$ *zu* $Z_2 \times L_2(7)$ *isomorph.*

Beweis. Setze $H = \mathbf{N}_G(E)$ und $R = \mathbf{N}_H(A)$. Sei nun B eine Untergruppe von G, die maximal bezüglich der folgenden drei Eigenschaften ist.

(i) $A \subseteq B$.

(ii) B ist homozyklisch vom Rang drei.

(iii) $\mathbf{N}_H(A)$ ist in $\mathbf{N}_G(B)$ enthalten.

Wir zeigen zunächst, daß B eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(B)$ ist. Sei $S \subseteq \mathbf{C}_G(B)$ eine 2-Gruppe, die B enthält. Weiter sei S/B ein irreduzibler $\mathbf{N}_H(A)/\mathbf{C}_H(A)$-Modul. Da e die Gruppe S/B zentralisiert, folgt, daß S/B die Ordnung acht hat. Da $A = \mathbf{N}_S(E)$ ist, folgt $E_0 = \Omega_1(S)$. Insbesondere ist S eine Suzuki 2-Gruppe, da S nicht abelsch ist. Da B aber mindestens die Ordnung 64 hat, folgt nun mit [13] ein Widerspruch. Also ist B eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(B)$.

Wir bestimmen jetzt die Struktur von $\mathbf{N}_G(B)/\mathbf{C}_G(B)$. Sei $S_1 \subseteq B$ eine 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(B)$, so daß S_1/B ein irreduzibler $\mathbf{N}_H(A)/\mathbf{C}_H(A)$-Modul ist. Die Struktur von H liefert dann, daß $| S_1/B | \leqslant 8$ ist. Nun liefert die Struktur von $\mathrm{Aut}(Z_4 \times Z_4 \times Z_4)$, daß A in $\mathbf{Z}(S_1)$ enhalten ist. Setze $X = \mho^2(B)$ und $B_1 = B/X$. Dann ist B_1 in $\mathbf{Z}(S_1/X)$ enthalten. Weiter folgt aus der Struktur von H, daß $\Omega_1(S_1/X) = \mho^1(B)/X$ ist. Nun folgt mit [13], daß S_1/X zu $Z_8 \times Z_8 \times Z_8$ isomorph ist. Das liefert $E_0 = \Omega_1(S_1)$. Mit [13] erhalten wir nun, daß S_1 abelsch ist. Das widerspricht aber der Tatsache, daß B eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(B)$ ist. Also ist $\mathbf{N}_G(B)/\mathbf{C}_G(B)$ zu $Z_2 \times L_2(7)$ isomorph.

Sei jetzt T eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(B)$. Dann sieht man leicht, daß B charakteristisch in T ist. Also ist T eine Sylow 2-Untergruppe von G.

(1.4) Lemma. *Die Gruppe A ist nicht zu $Z_4 \times Z_4 \times Z_4$ isomorph.*

Beweis. Sei $A \cong Z_4 \times Z_4 \times Z_4$ und T eine Sylow 2-Untergruppe von G, die eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(E)$enthält. Dann wird die Struktur von T durch (1.3) beschrieben. Sei T_1 eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(B)'$. Dann ist $| T : T_1 | = 2$. Weiter ist $e \notin T_1$. Sei r eine Involution in T_1, die in G zu e konjugiert ist.

Wir zeigen zunächst, daß r nicht in B enthalten ist. Wäre $r \in B$, so enthielte $C_G(e)$ eine zu B isomorphe Untergruppe. Mit (1.1) erhalten wir dann, daß $\mathbf{L}(M/\langle e\rangle)$ zu $G_2(q)$ oder $D_4^2(q)$ isomorph ist. Weiter erhalten wir, daß eine Sylow 2-Untergruppe von $(M/\langle e\rangle)/\mathbf{L}(M/\langle e\rangle)$ die Ordnung zwei hat. Da $G_2(q)$ bzw. $D_4^2(q)$ keine zu B isomorphe Untergruppen enthalten, folgt nun $A = B$. Das liefert dann, daß eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{L}(M/\langle e\rangle)$ die Ordnung 2^8 hat. Jetzt liefert die Anwendung von [16] einen Widerspruch zur Einfachheit von G. Somit haben wir gezeigt, daß r nicht in B liegt.

Wir zeigen jetzt, daß $\mathbf{L}(M/\langle e\rangle)$ nicht zu $G_2(q)$ oder $D_4^2(q)$ isomorph ist. Sei T obige Sylow 2-Untergruppe von G. Setze $W = \Omega_1(Z_2(T))$. Dann folgt, daß $\mathbf{N}_G(W)/C_G(W)$ zu Σ_3 isomorph ist. Sei jetzt S eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(e)$ und S_1 eine Sylow 2-Untergruppe von G, die S enthält. Dann ist $\Omega_1(\mathbf{Z}_2(S_1)) = \Omega_1(\mathbf{Z}_2(S))$. Weiter ist $\mathbf{N}_{C_G(e)}(\Omega_1(\mathbf{Z}_2(S)))/\mathbf{C}_{C_G(e)}(\Omega_1(\mathbf{Z}_2(S)))$ zu Σ_3

isomorph. Sei jetzt $g \in G$ mit $S_1^g = T$. Dann zentralisiert e^g in B nur $\Omega_1(B)$. Also zentralisiert e in $B^{g^{-1}}$ nur eine elementar abelsche Gruppe von der Ordnung acht. Das liefert, daß $\mathbf{C}_G(e)$ keine zu $Z_8 \times Z_8$ isomorphe Gruppe enthält. Das liefert, daß $q \equiv 3, 5 \pmod 8$ ist. Da wir nach [16] annehmen können, daß 2^{11} die Ordnung von T teilt, folgt, daß $\mathbf{C}_B(r)$ eine zu $Z_8 \times Z_2$ isomorphe Untergruppe enthält. Das widerspricht aber der Struktur von $\mathbf{C}_G(e)$. Somit ist gezeigt, daß $\mathbf{L}(M/\langle e \rangle)$ nicht zu $G_2(q)$ oder $D_4^2(q)$ isomorph ist.

Sei jetzt $\mathbf{L}(M/\langle e \rangle)$ nicht zu Ly isomorph. Wir können nach [16] wieder annehmen, daß 2^{11} die Ordnung von T teilt. Dann enthält $\mathbf{C}_B(r)$ also eine zu $Z_8 \times Z_2$ isomorphe Untergruppe. Da $r(M/\langle e \rangle) \leqslant 4$ ist, ist eine Sylow 2-Untergruppe von $M/\langle e \rangle$ zu einer Untergruppe von $D_8 \wr Z_2$ isomorph. Also enthält $M/\langle e \rangle$ keine zu $Z_8 \times Z_2$ isomorphe Untergruppe.

Somit haben wir gezeigt, daß $M/\langle e \rangle$ zu Ly isomorph ist. Also enthält $\mathbf{C}_G(e)$ elementar abelsche Untergruppen von der Ordnung 32. Ist V eine elementar abelsche Untergruppe von T von der Ordnung 32, so ist $|\mathbf{N}_T(V)/V| \leqslant 8$. Das liefert, daß $\mathbf{N}_G(V) \subseteq \mathbf{C}_G(e)$ für alle elementar abelschen Untergruppen V von der Ordnung 32 aus $\mathbf{C}_G(e)$. Da $\mathbf{C}_G(e)$ nur eine Konjugiertenklasse von elementar abelschen Untergruppen von der Ordnung 32 besitzt, folgt jetzt ein Widerspruch zur Ordnung von T.

Insgesamt haben wir somit gezeigt, daß e zu keiner Involution aus T_1 in G konjugiert ist. Mit [21, Lemma (5.38)] erhalten wir jetzt einen Widerspruch zur Einfachheit von G.

(1.5) LEMMA. *Sei A elementar abelsch. Setze $N = \mathbf{N}_G(A)/\mathbf{C}_G(A)$. Ist 2^5 ein Teiler der Ordnung von N, so gilt eine der folgenden Aussagen.*

(i) *N ist zu $L_2(7) \wr Z_2$ isomorph und $e \notin \mathbf{N}_G(A)'$.*

(ii) *N'' ist zu $SL_3(4)$ isomorph. Eine Sylow 2-Untergruppe von N hat die Ordnung 2^7. Es ist N/N'' zu Z_2 oder Σ_3 isomorph.*

Beweis. Setze wieder $H = \mathbf{N}_G(E)$. Dann ist $\mathbf{N}_H(A)/\mathbf{C}_H(A)$ zu $Z_2 \times L_2(7)$ isomorph. Weiter ist eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_H(A)/\mathbf{C}_H(A)$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_N(\mathbf{Z}(\mathbf{N}_H(A)/\mathbf{C}_H(A)))$. Also enthält N eine zentralisatorgleiche elementar abelsche 2-Untergruppe von der Ordnung acht. Mit [9] folgt, daß N sektionalen 2-Rang vier hat. Mit [5] erhalten wir somit, daß $N/\mathbf{O}(N) \cong L_2(7) \wr Z_2$ oder $N''/\mathbf{O}(N'') \cong L_3(4)$, wobei eine Sylow 2-Untergruppe von N/N'' den Körperautomorphismus auf $L_3(4)$ bewirkt. Da N eine Untergruppe von $L_6(2)$ sein muß, folgt jetzt die Behauptung.

(1.6) LEMMA. *Der Fall $N'' \cong SL_3(4)$ kommt nicht vor.*

Beweis. Sei $N'' \cong SL_3(4)$. Da $\mathbf{O}(N)$ fixpuntfrei auf A operiert, zerfällt $\mathbf{N}_G(A)/\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(A))$ über $A\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(A))/\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(A))$. Das liefert, daß jede Involution aus dem vollen Urbild von N'' in $\mathbf{N}_G(A)$ eine elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 64 zentralisiert. Also ist e nach (1.1) zu keiner Involution aus diesem Urbild in G konjugiert. Das liefert mit [21, Lemma (5.38)], daß $\mathbf{N}_G(A)$ keine Sylow 2-Untergruppe von G enthält. Sei S eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(A)$. Dann enthält S genau eine elementar abelsche Untergruppe W von der Ordnung 2^8.

Wir bestimmen nun $W_1 = \mathbf{N}_G(W)/\mathbf{C}_G(W)$. Es enthält

$$W_2 = \mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(A)}(W)/\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(A)}(W)$$

eine Untergruppe $(A_1 \times A_2)\langle e\rangle$, wobei $A_1\langle e\rangle$ zu Σ_5 und $A_2\langle e\rangle$ zu Σ_4 isomorph ist. Weiter ist eine Sylow 2-Untergruppe S_1 von W_2 zu $V_4 \wr Z_2$ isomorph. Ein 2-Element, das $\mathbf{Z}(S_1)$ und e modulo $\mathbf{C}_G(W)$ zentralisiert, normalisiert E. Das liefert, daß S_1 eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_{W_1}(\mathbf{Z}(S_1))$ ist. Mit [9] erhalten wir so, daß $r(W_1) = 4$ ist. Weiter erhalten wir mit [5], daß $W_1/\mathbf{O}(W_1)$ zu A_9 oder $(W_1/\mathbf{O}(W_1))'$ zu J_2 oder $A_5 \times A_5$ isomorph ist. Da W_1 eine Untergruppe von $L_8(2)$ sein muß, kann $(W_1/\mathbf{O}(W_1))'$ nicht zu J_2 isomorph sein.

Wir bestimmen nun die Struktur von $\mathbf{O}(W_1)$. Sei S eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(A)$ und S_2 eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(W)$, die S enthält. Dann ist $S_2 = S\langle f\rangle$ mit $A^f \neq A$. Sei σ ein Element von der Ordnung drei in $\mathbf{Z}(N'')$. Dann ist $[\sigma, A^f] \cong V_4$. Da es in N'' aber kein Element von der Ordnung drei geben kann, das in A eine Gruppe von der Ordnung 16 zentralisiert, erhalten wir nun $N/N'' \cong \Sigma_3$. Somit wird die einzige elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 16 in S_1 von einem Element von der Ordnung drei zentralisiert. Das liefert, daß drei die Ordnung von $\mathbf{O}(W_1)$ teilt. Die Struktur von $L_8(2)$ liefert nun, daß $(W_1/\mathbf{O}(W_1))'$ zu $A_5 \times A_5$ isomorph ist. Weiter erhalten wir, da e eine Untergruppe von der Ordnung drei in $\mathbf{O}(W_1)$ invertiert, daß

$$(W_1/\mathbf{O}(W_1))/(W_1/\mathbf{O}(W_1))'$$

entweder elementar abelsch von der Ordnung vier ist, oder daß es in $S_2 - S$ ein Element mit Quadrat e gibt.

Sei W_3 eine elementar abelsche Untergruppe von S_2 von der Ordnung 2^8. Nach (1.1) ist dann $| W_3 \cap \mathbf{N}_G(A)'' | \geqslant 2^7$. Das liefert dann, daß $| W_3 \cap W | \geqslant 2^7$ ist. Insbesondere folgt nun, daß, falls W_3 normal in S_2 ist, $W_3 = W$ gilt. Also ist S_2 eine Sylow 2-Untergruppe von G.

Sei nun zunächst $(W_1/\mathbf{O}(W_1))/(W_1/\mathbf{O}(W_1))'$ zyklisch von der Ordnung vier. Sei f eine Element aus S_2 mit $f^2 = e$. Da jede Involution aus $\mathbf{N}_G(A)'$ eine elementar abelsche Gruppe von der Ordnung 64 zentralisiert, ist f zu keinem Element aus S in G konjugiert. Da es aber in $S_2 - S$ keine Involutionen gibt, ist e zu keinem Element aus $S_2 - S$ in G konjugiert. Anwendung von [8, Lemma 16] liefert nun einen Widerspruch zur Einfachheit von G.

Wir haben somit gezeigt, daß $(W_1/\mathbf{O}(W_1))/(W_1/\mathbf{O}(W_1))'$ zu V_4 isomorph ist. Dann gibt es in $W_1/\mathbf{O}(W_1)$ zwei Untergruppen W_4 und W_5, die zu $A_5 \wr Z_2$ isomorph sind. Seien S_4 und S_5 Sylow 2-Untergruppen der vollen Urbilder dieser Gruppen. Dann ist nach [21, Lemma (5.38)] e zu einer Involution aus S_4 und S_5 in G konjugiert. Sei r eine solche Involution in S_4. Dann ist nach (1.1) $r \notin \mathbf{N}_G(A)''$. Weiter ist $|\mathbf{C}_W(r)| = 16$. Das liefert, daß 2^9 die Ordnung von $\mathbf{C}_G(e)$ nicht teilt. Mit (1.1) erhalten wir, daß $\mathbf{L}(M/\langle e\rangle)$ zu A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, M_{22} oder M_{23} isomorph ist. Weiter enthält $\mathbf{C}_G(e)/\langle e\rangle$ eine elementar abelsche Gruppe C von der Ordnung 16, so daß $\mathbf{N}_{\mathbf{C}_G(e)/\langle e\rangle}(C)$ die Gruppe A_5 involviert. Also ist $\mathbf{L}(M/\langle e\rangle)$ zu A_{10}, A_{11}, M_{22} oder M_{23} isomorph. Schließlich enthält $\mathbf{C}_G(e)$ eine Vierergruppe V, die nur zu e konjugierte Involutionen enthält. Das ist aber ein Widerspruch zu der Tatsache, daß e zu keiner Involution aus W in G konjugiert ist. Somit ist das Lemma bewiesen.

(1.7) Lemma. *Die Voraussetzungen seien wie in* (1.5). *Sei S eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(A)$, so ist S zu $S_1 \wr Z_2$ isomorph, wobei S_1 vom Typ A_8 ist. Insbesondere enthält S genau eine elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung* 2^8.

Beweis. Nach (1.6) wissen wir, daß $\mathbf{N}_G(A)/\mathbf{C}_G(A)$ zu $L_2(7) \wr Z_2$ isomorph ist. Da $L_6(2)$ nur eine Konjugiertenklasse von solchen Untergruppen besitzt, ist $\mathbf{N}_G(A)/\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(A))$ zu $A_1 \wr Z_2$ isomorph, wobei A_1 eine Erweiterung von E_8 durch $L_2(7)$ ist. Ist diese Erweiterung zerfallend, so ist eine Sylow 2-Untergruppe von A_1 vom Typ A_8.

Wir können also annehmen, daß A_1 eine nicht zerfallende Erweiterung ist. Dann enthält S eine maximale abelsche Untergruppe $B_1 \cong Z_4 \times Z_4 \times Z_4 \times Z_4$. Weiter ist $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(A)}(B_1)/\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(A)}(B_1)$ zu $(Z_2 \times \Sigma_3) \wr Z_2$ isomorph. Sei bun B eine Untergruppe von G, die maximal ist bezüglich

(i) B ist homozyklisch vom Rang vier. Es ist $B_1 \subseteq B$.

(ii) $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(A)}(B_1) \subseteq \mathbf{N}_G(B)$.

Wir zeigen zunächst, daß B eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(B)$ ist.

Sei B_2 eine 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(B)$, die B enthält. Weiter sei B_2/B ein irreduzibler $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(A)}(B_1)/\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(A)}(B_1)$-Modul. Dann ist $|B_2/B| = 2$, 4 oder 16.

Sei $\langle\sigma, \omega\rangle$ eine Sylow 3-Untergruppe von $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(A)}(B_1)/\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(A)}(B_1)$ mit $\sigma^e = \omega$. Die Struktur von $\mathbf{N}_G(A)$ liefert, daß $\mathbf{C}_{B_2/B}(\sigma\omega) = 1$ ist. Also ist $|B_2/B| = 16$. Da $\sigma\omega$ auf dem vollen Urbild von $[B_2/B, \sigma]$ operiert, folgt, daß dieses Urbild abelsch ist. Das gleiche gilt für das Urbild von $[B_2/B, \omega]$. Also sind $[B_2, \sigma]$ und $[B_2, \omega]$ abelsch und normal in B_2. Da $[B_2, \sigma] \cap [B_2, \omega] = 1$ ist, folgt, daß B_2 abelsch ist. Die Struktur von $\mathbf{N}_G(A)$ liefert jetzt $\Omega_1(B_2) = \Omega_1(B_1)$. Also ist B_2 homozyklisch vom Rang vier. Das widerspricht aber der Maximalität von B. Somit ist gezeigt, daß B eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(B)$ ist.

Die Struktur von $\mathbf{N}_G(A)$, liefert, daß es in S eine Vierergruppe $V = \langle i_1, i_2\rangle$ gibt, so daß $B_1 V$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(A)}(\Omega_1(B_1))$ ist. Wir werden jetzt zeigen, daß BV eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(\Omega_1(B))$ ist. Sei V_1 eine 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(\Omega_1(B))$, die BV enthält. Weiter sei V_1/BV ein irreduzibler

$\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(A)}(B)/\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(A)}(\Omega_1(B))$ Modul. Die Struktur von $\mathbf{N}_G(A)$ liefert wieder, daß $\mathbf{C}_{V_1/BV}(\sigma\omega) = 1$ ist. Also hat V_1/BV die Ordnung 16. Da V_1/B auf $\Omega_2(B)$ operiert, folgt, daß V_1/B elementar abelsch von der Ordnung 64 ist. Weiter gibt es in V_1 eine Untergruppe V_2, die B enthält, so daß V_2/B ein irreduzibler $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(A)}(B)/\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(A)}(B)$-Modul ist. Also hat V_2/B die Ordnung 16. Sei B_3 das volle Urbild von $\mathbf{C}_{V_2/B}(\sigma)$. Dann ist $\mathbf{C}_{\mathbf{C}_{B_3}(\sigma)}(\omega) = 1$. Nun ist $B_3 = \mathbf{C}_{B_3}(\sigma)[B_3, \sigma]$. Somit ist $[B_3, \sigma] = [B, \sigma] \lhd B_3$. Weiter ist $\mathbf{C}_{B_3}(\sigma) \cap [B_3, \sigma] = 1$. Andererseits ist $B_3 = \mathbf{C}_{B_3}(\omega)[B_3, \omega]$. Das liefert $\mathbf{C}_{B_3}(\omega) = \mathbf{C}_B(\omega) = [B, \sigma]$. Wegen $\mathbf{C}_{B_3}(\omega) = [B_3, \sigma]$, folgt jetzt $\mathbf{C}_{B_3}(\omega) \lhd B_3$. Also ist $[[B_3, \omega], [B, \sigma]] = 1$. Vertauscht man nun die Rollen von σ und ω, so sieht man, daß $\mathbf{N}_G(B) \cap \mathbf{C}_G(e)$ eine Untergruppe K enthält, so saß $K \cap B$ homozyklisch vom Rang zwei ist. Weiter ist $K \cap B$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_K(K \cap B)$. Schließlich ist

$$\mathbf{N}_K(K \cap B)/\mathbf{C}_K(K \cap B)$$

zu $Z_2 \times \Sigma_4$ isomorph. Nun liefert (1.1), daß $\mathbf{L}(\mathbf{C}_G(e)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_G(e)))$ zu Ly isomorph ist. Weiter erhalten wir $B = B_1$. Schließlich folgt, daß SV_1 eine Sylow 2-Untergruppe von G ist. Nun ist klar, daß e zu keiner Involution aus $\mathbf{C}(\Omega_1(B_1))$ in G konjugiert, da diese Involutionen stets eine abelsche Gruppe von der Ordnung 2^6 zentralisieren. Sei nun T eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(B_1)$. Dann ist $T/\mathbf{C}_T(\Omega_1(B_1)) \cong D_8$. Sei s eine Involution in T, so daß

$$\langle s, \mathbf{C}_T(\Omega_1(B_1))\rangle/\mathbf{C}_T(\Omega_1(B_1)) = \mathbf{Z}(T/\mathbf{C}_T(\Omega_1(B_1)))$$

ist. Dann folgt, daß 2^{10} die Ordnung von $\mathbf{C}_T(s)$ teilt. Also ist e nicht zu s in G konjugiert. Das liefert jetzt, daß SV_1 eine Untergruppe vom Index zwei besitzt, so daß e zu keiner Involution aus dieser Untergruppe in G konjugiert ist. Anwendung von [21, Lemma (5.38)] liefert jetzt einen Widerspruch zur Einfachheit von G. Damit ist gezeigt, daß BV eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(\Omega_1(B))$ ist.

Wir bestimmen nun zuletzt die Struktur von $\mathbf{N}_G(B)/\mathbf{C}_G(\Omega_1(B))$. Diese Gruppe enthält eine zum Sylow 3-Normalisator in A_8 isomorphe Untergruppe. Die Untergruppenstruktur von A_8 liefert dann, daß $\mathbf{N}_G(B)/\mathbf{C}_G(\Omega_1(B))$ zu $\Sigma_3 \wr Z_2$ oder Σ_6 isomorph ist. Ist $\mathbf{N}_G(B)/\mathbf{C}_G(\Omega_1(B)) \cong \Sigma_6$, so enthält $\mathbf{N}_G(B)/\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(B))$ eine Untergruppe, die eine Erweiterung von B mit A_6 ist. Da A_6 eine Untergruppe A_5 enthält, die auf $\Omega_1(B)^{\#}$ transitiv operiert, folgt mit [12, Theorem 8.2] ein Widerspruch zu $B_1 \subseteq B$. Also ist $\mathbf{N}_G(B)/\mathbf{C}_G(\Omega_1(B))$ zu $\Sigma_3 \wr Z_2$ isomorph. Sei T eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(B)$, die S enthält. Dann liefert die Struktur von $\mathbf{C}_T(e)$ zusammen mit (1.1), daß $\mathbf{C}_G(e)$ keine elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 32 enthält. Also ist e zu keiner Involution aus $\mathbf{C}_G(\Omega_1(B))$ in G konjugiert. Sei s eine Involution aus T, so daß

$$\langle s, \mathbf{C}_T(\Omega_1(B))\rangle/\mathbf{C}_T(\Omega_1(B)) = \mathbf{Z}(T/\mathbf{C}_T(\Omega_1(B)))$$

ist. Dann rechnet man leicht nach, daß es Elemente $g \in \mathbf{N}_G(B)$ und $h \in \mathbf{N}_G(A)$ gibt, so daß s^{gh} in $\mathbf{C}_G(\Omega_1(B))$ enthalten ist. Also ist s nicht zu e in G konjugiert. Da B in T charakteristisch ist, ist T eine Sylow 2-Untergruppe von G. Weiter ist $T/\mathbf{C}_T(\Omega_1(B))$ eine Diedergruppe von der Ordnung acht. Also enthält T eine Untergruppe T_1 vom Index zwei, so daß e zu keiner Involution aus T_1 in G konjugiert ist. Anwendung von [21, Lemma (5.38)] liefert jetzt den Widerspruch zur Einfachheit von G. Damit ist das Lemma bewiesen.

(1.8) Lemma. *Die Voraussetzungen seien wie in* (1.5). *Dann teilt* 2^{14} *die Ordnung von* G.

Beweis. Sei 2^{14} kein Teiler der Ordnung von G. Nach (1.7) enthält G eine Untergruppe R, so daß $R/\mathbf{O}(R)$ zu $A_1 \wr Z_2$ isomorph ist, wobei A_1 eine zerfallende Erweiterung von E_8 mit $L_2(7)$ ist. Ist x eine Involution in $A_1 \times A_1{}^e$, so zentralisiert x eine elementar abelsche Gruppe von der Ordnung 2^6. Jetzt liefert (1.1), daß e zu keiner Involution aus $A_1 \times A_1{}^e$ in G konjugiert ist. Anwendung von [21, Lemma (5.38)] liefert einen Widerspruch zur Einfachheit von G.

(1.9) Lemma. *Die Voraussetzungen seien wie in* (1.5). *Sei S eine Sylow 2-Untergruppe von* $\mathbf{N}_G(A)$, *die e enthält. Weiter sei T eine Sylow 2-Untergruppe von G, die S enthält. Dann besitzt T genau eine normale Vierergruppe V. Setze* $T_1 = \mathbf{C}_T(e) \cap \mathbf{C}_T(V)$. *Dann ist* $|T_1| = 2^7$. *Weiter ist $T_1/\mathbf{Z}(T)$ vom Typ A_8.*

Beweis. Setze $V = \mathbf{Z}_2(S)$. Dann ist V die einzige normale Vierergruppe in S. Also ist V die einzige normale Vierergruppe in T. Es ist $\mathbf{C}_S(V) \cap \mathbf{C}_S(e)$ vom Typ A_8. Somit enthält $\mathbf{C}_S(V) \cap \mathbf{C}_S(e)$ eine Untergruppe U, die zu $Q_8 * Q_8$ isomorph ist. Weiter teilt drei die Ordnung von

$$\mathbf{N}_{\mathbf{N}(A)\cap \mathbf{C}(V)\cap \mathbf{C}(e)}(U)/C_{\mathbf{N}(A)\cap \mathbf{C}(V)\mathbf{C}\cap(e)}(U).$$

Wir bestimmen nun die Struktur von $\mathbf{N}_{\mathbf{C}(V)\cap \mathbf{C}(e)}(U)/C_{\mathbf{C}(V)\cap \mathbf{C}(e)}(U)$. Da E_0 in U enthalten ist, ist $\mathbf{Z}(U)$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_{\mathbf{C}(V)\cap \mathbf{C}(e)}(U)$. Also teilt $|\mathbf{N}_{\mathbf{C}(V)\cap \mathbf{C}(e)}(U)/\mathbf{C}_{\mathbf{C}(V)\cap \mathbf{C}(e)}(U)|$ die Zahl $2^7 \cdot 3^2$. Wäre 2^7 ein Teiler dieser Ordnung, so wäre $|\mathbf{N}_{\mathbf{C}(V)\cap \mathbf{C}(e)}(U)/\mathbf{C}_{\mathbf{C}(V)\cap \mathbf{C}(e)}(U)| = 2^7 \cdot 3^2$. Dann sind aber alle elementar abelschen Untergruppen von U von der Ordnung acht konjugiert. Da aber E_0 eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_{\mathbf{C}(V)\cap \mathbf{C}(e)}(E_0)$ ist und $\mathbf{C}_S(V) \cap \mathbf{C}_S(e)$ eine elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 16 enthält, ist dies ein Widerspruch. Da S ein Kranzprodukt ist, sind alle Involutionen aus $\mathbf{C}_S(V)e$ in S zu e konjugiert. Nach (1.8) ist 2^{14} ein Teiler der Ordnung von T. Also ist 2^6 ein Teiler von $|\mathbf{N}_{\mathbf{C}(V)\cap \mathbf{C}(e)}(U)/\mathbf{C}_{\mathbf{C}(V)\cap \mathbf{C}(e)}(U)|$. Weiter ist eine Sylow 2-Untergruppe von dieser Gruppe vom Typ A_8. Also ist U charakteristisch in einer Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_{\mathbf{C}(V)\cap \mathbf{C}(e)}(U)$. Das liefert nun die Behauptung.

(1.10) LEMMA. *Die Voraussetzungen seien wie in* (1.5). *Sei T eine Sylow 2-Untergruppe von G. Dann hat T die Ordnung 2^{14} oder 2^{15}.*

Beweis. Nach (1.8) teilt 2^{14} die Ordnung von G. Sei wieder S eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(A)$, die e enthält. Sei weiter T_1 eine 2-Gruppe mit $| T_1 : S | = 2$. Da S ein Kranzprodukt ist, folgt nun $T_1 = S\mathbf{C}_{T_1}(e)$. Sei nun T_1 keine Sylow 2-Untergruppe von G. Dann gibt es eine 2-Gruppe T_2 mit $| T_2/T_1 | = 2$. Es sei V die normale Vierergruppe in T_2. Dann ist $\mathbf{C}_S(V) = S_1 \times S_1^e$, wobei S_1 vom Typ A_8 ist. Weiter ist $\mathbf{C}_{T_1}(V) = \mathbf{C}_S(V)\langle u\rangle$. Nach dem Satz von Krull–Remark–Schmidt normalisiert u sowohl VS_1 als auch VS_1^e. Beide Gruppen sind zu $Z_2 \times S_1$ isomorph. Da wir nach (1.9) u mit $[u, e] = 1$ wählen können, folgt nun, daß $\langle u, S_1V\rangle/V \cong \langle u, S_1^eV\rangle/V$ vom Typ A_8 sind. Nun ist $\mathbf{C}_{T_1}(V) = \mathbf{C}_S(V)\langle u\rangle$ normal in T_2. Da $\mathbf{C}_S(V)$ von zwei Untergruppen, die zu E_{2^8} bzw. $(Q_8 * Q_8) \times (Q_8 * Q_8)$ isomorph sind, erzeugt wird, und da diese Untergruppen einzig in $\mathbf{C}_{T_1}(V)$ sind, folgt, daß $\mathbf{C}_S(V)$ in T_2 normal ist. Aus Lemma (1.9) folgt jetzt, daß die Nebenklasse $e\mathbf{C}_S(V)$ unter T_2 nicht fest bleibt. Also ist $T_2/\mathbf{C}_S(V)$ eine Diedergruppe von der Ordnung acht.

Wir zeigen jetzt, daß $\mathbf{C}_{T_2}(V)/\mathbf{C}_S(V)$ eine Vierergruppe ist. Wäre $\mathbf{C}_{T_2}(V)/\mathbf{C}_S(V)$ zyklisch, so wäre $\mathbf{C}_{T_2}(V)/S_1V$ eine Erweiterung von E_{16} durch $Z_2 \times Z_4$. Insbesondere kann dann $\mathbf{C}_{T_1}(V)/S_1V$ nicht vom Typ A_8 sein. Also ist $\mathbf{C}_{T_2}(V)/\mathbf{C}_S(V)$ eine Vierergruppe. Insbesondere sind alle Involutionen aus $\mathbf{C}_{T_2}(V)e$ in T_2 zu e konjugiert. Da T_2 eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_T(V) \cap \mathbf{C}_T(e)$ enthält (siehe (1.9)), folgt nun, daß $T = T_2$ eine Sylow 2-Untergruppe von G ist.

(1.11) LEMMA. *Sei A elementar abelsch. Dann ist 2^{11} kein Teiler der Ordnung von $N_G(A)$.*

Beweis. Sei T eine Sylow 2-Untergruppe von G, die S enthält. Sei weiter V die einzige normale Vierergruppe von T. Dann ist $T = \mathbf{C}_T(V)\langle e\rangle$.

Wir zeigen zunächst, daß T die Ordnung 2^{15} hat. Habe T die Ordnung 2^{14}. Dann ist $\mathbf{C}_T(V) = \mathbf{C}_S(V)\langle u\rangle$. Ist x eine Involution aus $\mathbf{C}_S(V)$, so ist x in $\mathbf{N}_G(A)$ zu einer Involution konjugiert, die eine elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 2^7 zentralisiert. Also ist x nach (1.1) nicht zu e in G knojugiert. Also ist x nach (1.1) nicht zu e in G konjugiert. Sei nun e zu u in G konjugiert. Es ist $\mathbf{C}_S(V) = S_1 \times S_2$ mit $S_1^e = S_2$. Weiter ist S_1 vom Typ A_8. Es gilt, daß $\langle S_1, u\rangle/V \cong \langle S_2, u\rangle/V$ vom Typ A_8 sind. Sei W die einzige elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 2^8 in $\mathbf{C}_S(V)$. Da $u \sim e$, folgt $|\mathbf{C}_W(u)| = 2^4$. Also können wir $u \in \mathbf{C}_T(e)$ annehmen. Dann liefert (1.1), daß $\mathbf{C}_G(e)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_G(e))$ zu $\langle e\rangle \times R$ mit $R \cong \Sigma_8, \Sigma_9, A_{10}, A_{11}, M_{22}$ oder M_{23} isomorph ist. Ist R einfach, so ist u zu einer Involution aus W in G konjugiert. Das ist ein Widerspruch. Also ist $R \cong \Sigma_8$ oder Σ_9. Weiter ist $u \notin R'$. Dann zentralisiert u aber in $\mathbf{C}_W(e)$ stets eine elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung acht. Das liefert, daß $\mathbf{C}_W(u)$ mindestens die Ordnung 2^5 hat. Das ist ein Widerspruch. Also ist

e zu keiner Involution aus $\mathbf{C}_T(V)$ in G konjugiert. Anwendung von [21, Lemma (5.38)] liefert jetzt einen Widerspruch zur Einfachheit von G.

Mit (1.10) haben wir jetzt, daß T die Ordnung 2^{15} hat. Wie in (1.10) sieht man nun, daß T einen elementar abelschen Normalteiler von der Ordnung 2^8 besitzt. Sei W dieser Normalteiler. Dann ist T/W eine Erweiterung einer elementar abelschen Gruppe von der Ordnung 16 durch D_8. Wie eben folgt wieder, daß e zu keiner Involution aus $\mathbf{C}_S(V)$ konjugiert ist. Sei u eine Involution in T, so daß $\langle u, \mathbf{C}_S(V)\rangle/\mathbf{C}_S(V) = \mathbf{Z}(T/\mathbf{C}_S(V))$ ist. Sei weiter $e \sim u$ in G. Nach (1.1) zentralisiert u in W keine elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 32. Also können wir wieder $u \in \mathbf{C}_G(e)$ annehmen. Nun teilt aber 2^9 die Ordnung von $\mathbf{C}_T(u)$. Also ist nach (1.1) $\mathbf{C}_G(e)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_G(e))$ zu $\langle e\rangle \times Ly$ isomorph. Dann hat eine Sylow 2-Untergruppe $\mathbf{C}_G(e)$ keinen elementar abelschen Normalteiler von der Ordnung 32. Das widerspricht aber der Struktur von $\mathbf{C}_T(u)$. Somit ist $u \not\sim e$ gezeigt. Dann gibt es aber in T eine Untergruppe L, so daß $| T:L | = 2$ ist. Weiter ist e zu keiner Involution aus L in G konjugiert. Anwendung von [21, Lemma (5.38)] liefert wieder einen Widerspruch zur Einfachheit von G. Damit ist gezeigt, daß 2^{14} die Ordnung von G nicht teilt. Das liefert jetzt mit (1.8), daß 2^{11} die Ordnung von $\mathbf{N}_G(A)$ nicht teilt.

(1.12) LEMMA. *Sei A elementar abelsch. Dann hat eine Sylow 2-Untergruppe von G die Ordnung 2^{10}.*

Beweis. Sei S eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(E)$. Dann ist nach (1.11) S eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(A)$. Sei jetzt T eine 2-Gruppe mit $| T:S | = 2$. Also ist $T = S\langle u\rangle$ mit $A^u \neq A$. Setze $D = AA^u$.

Wir zeigen zunächst, daß A und A^u die beiden einzigen elementar abelschen Untergruppen von der Ordnung 2^6 in D sind. Sei also $B \cong A$, $B \subseteq D$. Dann ist $| D \cap A | \leqslant 32$. Sei x eine Involution in $\mathbf{N}_G(A)$. Dann rechnet man leicht nach, daß $|\mathbf{C}_A(x)| \leqslant 2^4$ oder $x \in A$ gilt. Also ist $| B \cap A | \leqslant 16$. Insbesondere ist $| A \cap A^u | \leqslant 16$. Ist $| B \cap A | = 8$, so enthält B eine zu e konjugierte Involution. Also können wir $e \in B$ annehmen. Nach (1.1) ist dies ein Widerspruch. Somit haben wir $| A \cap A^u | = | A \cap B | = 16$ gezeigt. Da $\mathbf{C}_A(x)$ für eine Involution $x \in \mathbf{N}_G(A) - A$ höchstens die Ordnung 16 hat, folgt nun, daß jede Involution aus AA^u in A oder in A^u liegt. Also sind A und A^u die beiden einzigen elementar abelschen Untergruppen von der Ordnung 2^6 in AA^u.

Sei jetzt B eine elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 2^6 in S. Dann folgt wie oben $| B \cap A | = 16$. Da S symmetrisch in A und A^u ist, folgt $| A^u \cap B | = 16$. Also ist B in $\mathbf{C}_S(A \cap A^u)$ enthalten. Man sieht leicht, daß $AA^u = \mathbf{C}_S(A \cap A^u)$ ist. Also ist $A = B$ oder $A^u = B$.

Sei nun zuletzt B eine elementar abelsche Untergruppe der Ordnung 2^6 von T. Weiter sei $B \not\subseteq S$. Dann können wir $u \in B$ annehmen. Wir betrachten nun T/AA^u. Da e die Gruppe $A^u/A \cap A^u$ zentralisiert, aber $A/A \cap A^u$ nicht zentralisiert, ist T/AA^u eine Diedergruppe von der Ordnung acht. Also ist

$|B \cap AA^u| \geqslant 16$. Dann ist $A \cap A^u \subseteq B$. Da aber $A \cap A^u$ nicht von u zentralisiert werden kann, erhalten wir einen Widerspruch. Somit sind A und A^u die beiden einzigen elementar abelschen Untergruppen von der Ordnung 2^6 in T. Insbesondere folgt mit (1.11), daß T eine Sylow 2-Untergruppe von G ist.

Es liefert (1.1), daß e zu keiner Involution aus AA^u in G konjugiert ist. Sei jetzt t eine Involution in T, so daß $\langle t, AA^u\rangle/AA^u = \mathbf{Z}(T/AA^u)$ ist. Weiter sei $t \sim e$ in G. Dann läßt sich aber t in $\mathbf{N}_G(A)$ zu einer Involution aus A^u konjugieren. Das ist ein Widerspruch. Insgesamt haben wir somit gezeigt, daß T eine Untergruppe T_1 vom Index zwei enthält, so daß e zu keiner Involution aus T_1 in G konjugiert ist. Jetzt liefert [21, Lemma (5.38)] einen Widerspruch zur Einfachheit von G.

(1.13) SATZ. *Sei G eine endliche einfache Gruppe. Sei E eine elementar abelsche Untergruppe von G von der Ordnung* 16. *Weiter sei E eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(E)$. Ist $\mathbf{N}_G(E)/\mathbf{C}_G(E)$ eine Erweiterung einer elementar abelschen Gruppe von der Ordnung acht durch $L_2(7)$, so ist $\mathbf{N}_G(E)/\mathbf{C}_G(E)$ zum Stabilisator eines Punktes in $GL_4(2)$ isomorph. Insbesondere ist eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{O}_{2',2}(\mathbf{N}_G(E))$ extraspeziell von der Ordnung 2^7.*

Beweis. Nach (1.12) ist 2^{11} kein Teiler der Ordnung eines Gegenbeispieles G. Mit [16] erhalten wir jetzt, daß G zu $PSL_2(q)$, $PSL_3(q)$, $PSL_4(q)$, $PSU_3(q)$, $PSU_4(q)$, $PSp_4(q)$, $G_2(q)$, $D_4^2(q)$, $P\Omega_8^-(q)$, q ungerade, $PSL_2(2^{10})$, $PSL_5(2)$, $PSU_5(2)$, $Sz(32)$, A_{14}, A_{15}, M_{24}, C_3 oder He isomorph ist. Keine dieser Gruppen enthält aber eine Involution, deren Zentralisator eine in (1.1) angegebene Struktur hat. Also existiert kein Gegenbeispiel.

2. Der unzerlegbare Fall

In diesem Abschnitt nehmen wir an, daß $\mathbf{N}_G(E)/\mathbf{C}_G(E)$ zum Stabilisator eines Punktes in $GL_4(2)$ isomorph ist. Mit F bezeichnen wir eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{O}_{2',2}(\mathbf{N}_G(E))$. Nach (1.13) wissen wir, daß F extraspeziell von der Ordnung 2^7 ist. Setze $H = \mathbf{N}_G(E)$, so ist $\mathbf{N}_H(F)/\mathbf{O}(\mathbf{N}_H(F))$ eine Erweiterung von F durch $L_2(7)$. Bekanntlich ist $\mathrm{Aut}(F)/\mathrm{Inn}(F)$ zu Σ_8 isomorph. Da es in Σ_8 nur zwei Konjugiertenklassen von Untergruppen gibt, die zu $L_2(7)$ isomorph sind, operiert $L_2(7)$ auf $F/\mathbf{Z}(F)$ entweder unzerlegbar oder vollständig reduzibel. Weiter ist in jedem der beiden Fälle die Operation eindeutig. In diesem Abschnitt wollen wir den Fall behandeln, daß $L_2(7)$ auf $F/\mathbf{Z}(F)$ unzerlegbar operiert.

(2.1) LEMMA. *Sei 2^{11} ein Teiler der Ordnung von G. Dann ist $\mathbf{N}_G(F)/\mathbf{C}_G(F)$ eine Erweiterung von $F/\mathbf{Z}(F)$ durch Σ_7. Es bewirkt Σ_7 auf $F/\mathbf{Z}(F)$ den* 6-dim. *irreduziblen Teil des Permutationsmoduls.*

Beweis. Sei S eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(E)$, die F enthält. Dann sieht man leicht, daß $F/\mathbf{Z}(F)$ die einzige elementar abelsche Untergruppe von der

Ordnung 64 in $S/\mathbf{Z}(F)$ ist. Also teilt 2^{11} die Ordnung von $\mathbf{N}_G(F)$. Da $E \subseteq F$, ist $\mathbf{Z}(F)$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(F)$. Weiter enthält F 30 elementar abelsche Untergruppen von der Ordnung 16. Also ist $|\mathbf{N}_G(F): \mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(E)}(F)| \leqslant 30$. Das liefert, daß $\mathbf{N}_G(F)/F\mathbf{C}_G(F)$ zu $PGL_2(7)$, Σ_7 oder $E_8L_2(7)$ isomorph ist. Da $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(E)}(F)$ genau eine elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 16 in F fest läßt, folgt nun, daß $\mathbf{N}_G(F)/F\mathbf{C}_G(F)$ zu Σ_7 isomorph ist. Da Σ_8 nur eine Konjugiertenklasse von Untergruppen, die zu Σ_7 isomorph sind, enthält, ist die Operation auf $F/\mathbf{Z}(F)$ eindeutig.

(2.2) Lemma. *Sei 2^{11} ein Teiler der Ordnung von G. Sei $x \in F$. Es habe x genau 14 Konjugierte in $\mathbf{N}_G(F)$. Dann ist $o(x) = 4$. Weiter ist $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(F)}(x)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(F)}(x))\langle x\rangle$ eine nicht zerfallende Erweiterung einer elementar abelschen Gruppe X von der Ordnung 16 durch Σ_6. Schließlich ist $|\mathbf{N}_G(\langle x\rangle): \mathbf{C}_G(x)| = 2$. Die Gruppe $\mathbf{N}_G(F)/\mathbf{C}_G(F)$ zerfällt über $F/\mathbf{Z}(F)$.*

Beweis. Die Gruppe $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(F)}(x)$ involviert eine A_6. Da A_6 nicht auf einer extraspeziellen Gruppe der Ordnung 32 operieren kann, folgt $o(x) = 4$. Dann ist die Gruppe $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(F)}(\langle x\rangle)/\mathbf{O}(\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(F)}(\langle x\rangle))\langle x\rangle$ zu $\mathrm{Aut}(Z_4 * D_8 * D_8)$ isomorph. Zur Struktur dieser Gruppe vergleiche [20, Lemma 1]. Diese Struktur liefert zunächst die Aussagen über $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(F)}(x)$. Weiter erhalten wir, daß es in $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(F)}(\langle x\rangle)/\mathbf{O}(\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(F)}(\langle x\rangle))\langle x^2\rangle$ eine Untergruppe Σ_8 gibt. Mit [1] erhalten wir dann, daß $\mathbf{N}_G(F)/\mathbf{C}_G(F)$ über $F/\mathbf{Z}(F)$ zerfällt.

(2.3) Lemma. *Sei 2^{11} ein Teiler der Ordnung von G. Weiter sei x wie in (2.2) gewählt. Ist $\mathbf{C}_G(x)$ nicht 2-constrained, so ist $\mathbf{L}(\mathbf{C}_G(x)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_G(x)))$ zu $SL_4(q)$, $q \equiv 1 \pmod 4$, oder $SU_4(q)$, $q \equiv -1 \pmod 4$ isomorph.*

Beweis. Setze $R = \mathbf{C}_G(x)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_G(x))\langle x\rangle$. Dann ist X eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_R(X)$. Weiter ist $\mathbf{N}_R(X)/\mathbf{C}_R(X)$ zu Σ_6 isomorph.

Setze jetzt $M = \mathbf{L}(R)$. Dann ist $X \subseteq M$. Ist $\mathbf{N}_M(X)/\mathbf{C}_M(X)$ zu A_6 isomorph, so ist $r(M)$ nach [9] höchstens vier. Die Struktur des Schurmultiplikators von M liefert nun mit [5] und [7] die Behauptung. Ist $\mathbf{N}_M(X)/\mathbf{C}_M(X) \cong \Sigma_6$, so folgt die Behauptung mit [18] und [22].

(2.4) Lemma. *Die Voraussetzungen seien wie in (2.2). Enthält $\mathbf{N}_G(F)$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(\langle x\rangle)$, so enthält $\mathbf{N}_G(F)$ eine Sylow 2-Untergruppe von G.*

Beweis. Sei S eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(F)$ und $S_1 = S/\mathbf{Z}(F)$. Setze $F/\mathbf{Z}(F) = \langle \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6\rangle$. $\mathbf{N}_G(F)/F$ operiert dann auf $F/\mathbf{Z}(F)$, indem es auf den Indices operiert. Wir erhalten somit $S_1 = (F/\mathbf{Z}(F))\langle a, b, c, d\rangle$, wobei $a \mathrel{\hat{=}} (56)$, $b \mathrel{\hat{=}} (12)(34)$, $c \mathrel{\hat{=}} (13)(24)$ und $d \mathrel{\hat{=}} (12)(56)$ sei. Also ist $\mathbf{Z}(S_1) = \langle \pi_5\pi_6, \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4\rangle$. Hierbei entspricht $\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4\pi_5\pi_6$ dem Element x. In S_1 gibt es genau vier normale elementar abelsche Untergruppen von der Ordnung 64.

Sei nun T eine 2-Gruppe mit $|T/S| = 2$. Dann operiert T auf diesen elementar abelschen Untergruppen. Man sieht nun leicht, daß dabei stets das Element $\pi_5\pi_6$ fest bleibt. Wegen $S'' \cap \mathbf{Z}(S_1) = \langle \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4 \rangle$ bleibt also auch das Element x fest. Das ist ein Widerspruch. Damit ist gezeigt, daß S eine Sylow 2-Untergruppe von G ist.

(2.5) Lemma. *Die Voraussetzungen seien wie in* (2.3). *Dann enthält* $\mathbf{N}_G(\langle x \rangle)$ *eine Sylow* 2-*Untergruppe von* G.

Beweis. Sei S eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(\langle x \rangle)$. Dann wird die Struktur einer Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(x)/\langle x \rangle$ durch [19, Lemma (2.7), Lemma (2.8), Lemma (2.13) oder Lemma (2.15)] beschrieben. Insbesondere erhalten wir, daß S stets eine charakteristische abelsche Untergruppe W enthält, die zu $Z_{2n} \times Z_{2n} \times Z_{2n}$, $Z_{2n+1} \times Z_{2n} \times Z_{2n}$ oder $Z_{2n+2} \times Z_{2n} \times Z_{2n}$ isomorph ist. Setze $Y = \mathbf{C}_S(\langle \Omega_1(W), x \rangle)$. Liegt $\langle x \rangle$ charakteristisch in Y, so ist S eine Sylow 2-Untergruppe von G. Also können wir annehmen, daß $\langle x \rangle$ nicht charakteristisch in Y ist. Dann erhalten wir, daß $\mathbf{C}_S(x) = \langle w, a, b \rangle \langle uv, t, u \rangle$ mit $o(w) = 2^n = o(a) = o(b)$ und $w^{uv} = w^{-3}a^{-4}b^{-4}$, $w^t = wa^4$, $w^u = w$, $a^{uv} = wab^2$, $b^{uv} = wba^2$, $a^t = a^{-1}$, $b^t = w^{-1}a^{-2}b^{-1}$, $a^u = b$, $(uv)^2 = t^2 = u^2 = 1$ und $t^u = uvt$ oder $o(w) = 2^{n+1}$, $o(a) = o(b) = 2^n$ und $w^{uv} = w^{-3}a^{-2}b^{-2}$, $w^t = wa^2$, $w^u = w$, $a^{uv} = w^2ab^2$, $b^{uv} = w^2ba^2$, $a^t = a^{-1}$, $b^t = w^{-2}a^{-2}b^{-1}$, $a^u = b$, $(uv)^2 = t^2 = u^2 = 1$ und $t^u = uvt$ ist. Hierbei ist $x = w^{2^{n-2}}$ bzw. $w^{2^{n-1}}$. Wir erhalten dann, daß $S = \mathbf{C}_S(x)\langle y \rangle$ ist, wobei $x^y = x^{-1}$ ist. Aus [19] wissen wir weiter, daß es ein Element ρ von der Ordnung drei gibt, daß auf W operiert, wobei w von ρ zentralisiert wird. Sei nun S keine Sylow 2-Untergruppe von G. Dann gibt es eine 2-Untergruppe T von G mit $|T : S| = 4$. Weiter folgt, daß $\langle y, uv, t, W \rangle / W$ normal in T/W ist. Also gibt es ein Element r in $T - S$ mit $uv^t = uvk$ mit $k \in W$. Somit operiert r auf $\mathbf{C}_W(uv) = \langle x, w(ab)^2 \rangle$ oder $\langle x, wab \rangle$. Nach (2.4) ist $n \geqslant 3$. Also ist $\mho^{n-2}(\mathbf{C}_W(uv))$ bzw. $\mho^{n-1}(\mathbf{C}_W(uv))$ stets $\langle x(ab)^{2^{n-1}} \rangle$. Da wir annehmen können, daß $(ab)^{2^{n-1}}$ von r zentralisiert wird, folgt nun $r \in \mathbf{N}_G(\langle x \rangle)$. Das ist aber ein Widerspruch. Somit ist gezeigt, daß S eine Sylow 2-Untergruppe von G ist.

(2.6) Lemma. *Die Bezeichnungen seien wie in* (2.2). *Dann ist* $\mathbf{C}_G(x)$ 2-*constrained. Weiter enthält* $\mathbf{N}_G(F)$ *eine Sylow* 2-*Untergruppe von* G.

Beweis. Wir nehmen an, daß $\mathbf{C}_G(x)$ nicht 2-constrained ist. Setze $z = x^2$. Weiter sei s eine Involution aus dem Urbild von $\mathbf{L}(\mathbf{C}_G(x)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_G(x)))$. Sei weiter S eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(\langle x \rangle)$. Dann folgt wieder mit [19], daß S einen maximalen abelschen Normaltailer W vom Typ $Z_{2n} \times Z_{2n} \times Z_{2n}$, $Z_{2n+1} \times Z_{2n} \times Z_{2n}$ oder $Z_{2n+2} \times Z_{2n} \times Z_{2n}$ enthält. Die Struktur von $\mathbf{L}(\mathbf{C}_G(x)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_G(x)))$ liefert, daß wir $s \in \Omega_1(W)$ annehmen können. Ist $s \sim z$ in G, so folgt, daß $s \sim z$ in $\mathbf{N}_G(W)$ gilt. Insbesondere ist $W \cong Z_{2n} \times Z_{2n} \times Z_{2n}$. Weiter haben wir, daß $\mathbf{N}_G(W)$ die Gruppe $L_2(7)$ involviert. Da $\langle z \rangle$ nicht in

$\mathbf{C}(\Omega_1(W))$ charakteristisch sein kann, folgt nun mit [19, Lemma (2.15)], daß $W\langle y\rangle = \mathbf{C}_S(\Omega_1(W))$ ist. Hierbei gilt $x^y = x^{-1}$. Also ist $\mathbf{N}_G(W)/\mathbf{C}_G(W)$ zu $Z_2 \times L_2(7)$ isomorph. Die Struktur von $\mathbf{N}_G(F)$ liefert, daß wir $\Omega_1(W) \subseteq E$ annehmen können. Also können wir annehmen, daß ein Element von der Ordnung sieben auf E operiert, wobei dieses Element z nicht fest läßt. Das widerspricht aber der Struktur von $\mathbf{N}_G(E)$. Somit haben wir gezeigt, daß $\langle z\rangle$ im vollen Urbild von $\mathbf{L}(\mathbf{C}_G(x)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_G(x)))$ stark abgeschlossen bezüglich G ist.

Sei T eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{L}(\mathbf{C}_G(x)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_G(x)))$. Wir können $T \subseteq S$ annehmen. Dann liefert die Struktur von $\mathrm{Aut}(SL_4(q))$ bzw. $\mathrm{Aut}(SU_4(q))$ zusammen mit der Struktur von $\mathbf{N}_G(F)$, daß $|S:T| \leqslant 8$ gilt. Sei jetzt r eine Involution aus $S - T$, die in G zu z konjugiert ist. Wir nehmen zunächst $[x, r] = 1$ an. Dann ist z ein Quadrat in $\mathbf{C}_S(r)$. Also ist auch r ein Quadrat in S. Also gibt es ein l in $\mathbf{C}_S(r)$ mit $l^2 = r$. Weiter gibt es ein $g \in G$ mit $\mathbf{C}_S(r)^g \subseteq S$ und $l^g = x$. Insbesondere ist $\langle l\rangle \lhd \mathbf{C}_S(r)$.

Somit ist $\mathbf{C}_W(r) = \mathbf{C}_W(l)$. Das liefert zunächst $[r, \Omega_1(W)] = 1$. Sei nun m so gewählt, daß $[r, \Omega_m(W)] = 1$ aber $[r, \Omega_{m+1}(W)] \neq 1$ ist. Sei $k \in \Omega_{m+1}(W)$ mit $k^l \neq k$. Dann ist $k^l = kp$ mit $p \in \Omega_1(W)$. Also ist $k^r = k^{l^2} = k$. Dies ist ein Widerspruch. Das liefert $[r, W] = 1$. Anwendung von [18] liefert jetzt aber einen Widerspruch. Insgesamt haben wir so gezeigt, daß $\langle z\rangle$ in $\mathbf{C}_S(x)$ bezüglich G stark abgeschlossen ist.

Sei nun zuletzt r eine Involution aus S, $r \sim z$ in G und $x^r = x^{-1}$. Da r in S kein Quadrat ist, zentralisiert r kein Element h mit $h^2 = z$. Wir nehmen zunächst an, daß es in $\Omega_1(W)$ keine Vierergruppe V gibt, so daß alle Involutionen in Vr zu r konjugiert sind. Insbesondere zentralisiert r die Gruppe $\Omega_1(W)$. Man sieht nun leicht, daß weder $SL_4(q)$ noch $SU_4(q)$ einen solchen Automorphismus besitzen. Also gibt es in $\Omega_1(W)$ eine Untergruppe V, so daß alle Involutionen aus Vr zu r konjugiert sind. Sei jetzt $g \in G$ mit $r^g = z$ und $\mathbf{C}_S(r)^g \subseteq S$. Dann ist $|V^g \cap \mathbf{C}_S(x)| \neq 1$. Also gibt es in $\mathbf{C}_S(x)$ eine Involution $z_1 \neq z$, die in G zu z konjugiert ist. Das ist aber, wie oben bewiesen, ein Widerspruch. Somit haben wir gezeigt, daß $\langle z\rangle$ in S bezüglich G stark abgeschlossen ist. Anwendung von [2] liefert jetzt einen Widerspruch zur Einfachheit von G. Also ist $\mathbf{C}_G(x)$ 2-constrained.

Mit (2.2) folgt nun, daß $\mathbf{C}_G(x)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_G(x))\langle x\rangle$ eine 2-lokale Untergruppe besitzt, die eine Erweiterung von $X \simeq E_{16}$ durch Σ_6 ist. Also ist

$$X = \mathbf{O}_2(\mathbf{C}_G(x)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_G(x))\langle x\rangle).$$

Damit ist eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(\langle x\rangle)$ in $\mathbf{N}_G(F)$ enthalten. Jetzt liefert (2.4) die Behauptung.

(2.7) Lemma. *Sei 2^{11} ein Teiler der Ordnung von G. Dann ist 2^{12} kein Teiler der Ordnung von G. Ist z eine 2-zentrale Inolution, so gilt eine der folgenden Aussagen.*

(i) $\mathbf{C}_G(z)$ *ist 2-constrained.*

(ii) $\mathbf{C}_G(z)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_G(z))$ *ist zu* $\hat{A}_{14}$ *oder* $\hat{A}_{15}$ *isomorph.*

Beweis. Nach (2.6) wissen wir, daß 2^{12} die Ordnung von G nicht teilt. Sei $\mathbf{C}_G(z)$ nicht 2-constrained. Es enhält $\mathbf{C}_G(z)/\langle z\rangle$ eine 2-lokale Untergruppe N mit $\mathbf{O}_2(N) \cong E_{64}$ und $N/\mathbf{O}_{2',2}(N) \cong \Sigma_7$. Nun folgt die Behauptung mit [16] und der Tatsache, daß $\mathbf{C}_{\mathbf{C}_G(z)}(x)$ 2-constrained ist.

(2.8) LEMMA. *Die Ordnung von G wird nicht durch* 2^{11} *geteilt.*

Beweis. Sei 2^{11} ein Teiler der Ordnung von G. Sei S eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(F)$ und $\langle z\rangle = \mathbf{Z}(F)$. Nach (2.7) ist S eine Sylow 2-Untergruppe von G. Wir nehmen zunächst an, daß $\mathbf{C}_G(z)$ 2-constrained ist. Dann ist $\mathbf{C}_G(z)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_G(z))$ zu $\mathbf{N}_G(F)/\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(F))$ isomorph.

Sei s eine Involution aus F, die in G zu z konjugiert ist. Weiter sei $s \neq z$. Unter $\mathbf{N}_G(F)$ sind alle Involutionen in $F - \mathbf{Z}(F)$ konjugiert. Also ist

$$\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(F)}(s)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(F)}(s)) = Z$$

zu einer Erweiterung von $\mathbf{C}_F(s)$ durch $\Sigma_3 \times \Sigma_4$ isomorph. Somit gibt es ein Element ρ von der Ordnung drei, das diese Gruppe normalisiert und transitiv auf $\langle z, s\rangle^{\#}$ operiert. Setze wieder $F/\mathbf{Z}(F) = \langle \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6\rangle$, wobei $\mathbf{N}_G(F)/F$ auf F wie auf den Indices operiert. Setze weiter

$$S/\mathbf{Z}(F) = (F/\mathbf{Z}(F))\langle a, b, c, d\rangle$$

wobei $a \mathrel{\hat{=}} (56)$, $b \mathrel{\hat{=}} (12)(34)$, $c \mathrel{\hat{=}} (13)(24)$ und $d \mathrel{\hat{=}} (12)(56)$. Dann entspricht s dem Element $\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4$ und $\mathbf{C}_F(s)$ der Gruppe $\langle \pi_1\pi_2, \pi_3\pi_4, \pi_1\pi_3, \pi_5, \pi_6\rangle$. Ist a in $\mathbf{C}_S(s)$ enthalten, so zentralisiert ρ die Gruppe $[\mathbf{O}_2(\mathbf{Z}/\langle s, z\rangle), a]$. Das volle Urbild in S dieser Gruppe enthält aber ein Element mit Quadrat z. Es enthält kein Element mit Quadrat s. Das ist ein Widerspruch. Also haben wir $a \notin \mathbf{C}_S(s)$ und damit $\pi_4 a \in \mathbf{C}_S(s)$. Jetzt gilt $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_S(s)/\langle s, z\rangle) = \langle \pi_1\pi_2, \pi_1\pi_3\rangle$. Wieder enthält das volle Urbild Elemente mit Quadrat z aber keine mit Quadrat s. Somit haben wir gezeigt, daß $\langle z\rangle$ in F bezüglich G stark abgeschlossen ist.

Sei jetzt $s \in \mathbf{C}_G(z)'$, $s \sim z$ und $s \neq z$. Dann ist $|\mathbf{C}_F(s)| \geqslant 2^4$ und $|\mathbf{C}_S(s)| \geqslant 2^8$. Das liefert, daß z in $\mathbf{C}_S(s)'$ ein Quadrat ist. Ist also $g \in G$ mit $s^g = z$ und $\mathbf{C}_S(s)^g \subseteq S$, so ist z^g in F enthalten. Das ist ein Widerspruch. Also ist $\langle z\rangle$ in $\mathbf{C}_G(z)'$ stark abgeschlossen bezüglich G.

Sei nun $s \in \mathbf{C}_G(z) - \mathbf{C}_G(z)'$ mit $s \sim z$. Dann ist z kein Quadrat in $\mathbf{C}_S(s)$. Also ist $\mathbf{C}_F(s)$ elementar abelsch von der Ordnung acht. Weiter sind alle Involutionen in $\mathbf{C}_F(s)s$ zu s konjugiert. Sei jetzt $g \in G$ mit $s^g = z$ und $\mathbf{C}_S(s)^g \subseteq S$. Dann ist $|\mathbf{C}_F(s)^g \cap \mathbf{C}_G(z)'| \geqslant 4$. Insbesondere gibt es in $\mathbf{C}_G(z)'$ eine Involution $r \neq z$, die in G zu z konjugiert ist. Das ist aber ein Widerspruch.

Insgesamt haben wir gezeigt, daß $\langle z\rangle$ in S bezüglich G stark abgeschlossen ist. Anwendung von [2] liefert nun einen Widerspruch zur Einfachheit von G.

Also ist $\mathbf{C}_G(z)$ nicht 2-constrained. Nach (2.7) ist dann $\mathbf{C}_G(z)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_G(z))$ zu $\hat{A}_{14}$ oder $\hat{A}_{15}$ isomorph. Nach [2] können wir annehmen, daß $\langle z \rangle$ nicht stark abgeschlossen in $\mathbf{C}_G(z)$ bezüglich G ist. Also hat G genau eine Klasse von Involutionen. Dann liefert aber [14] einen Widerspruch. Somit ist das Lemma bewiesen.

(2.9) SATZ. *Sei G eine endliche einfache Gruppe und E eine elementar abelsche Untergruppe von G von der Ordnung 16. Ist E eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(E)$ und $H = \mathbf{N}_G(E)/\mathbf{C}_G(E)$ zu einer Erweiterung von E_8 durch $L_2(7)$ isomorph, so gelten die folgenden Aussagen.*

(i) *Sei F eine Sylow 2-Untergruppe des vollen Urbildes von $\mathbf{O}_2(H)$. Dann ist F extraspeziell von der Ordnung 2^7.*

(ii) *Es operiert $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(E)}(F)$ vollständig reduzibel auf $F/\mathbf{Z}(F)$.*

Beweis. Die Behauptung (i) steht bereits in (1.13). Wir nehmen an, daß $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(E)}(F)$ unzerlegbar auf $F/\mathbf{Z}(F)$ operiert. Nach (2.8) wissen wir dann, daß $\mathbf{N}_G(E)$ eine Sylow 2-Untergruppe von G enthält. Die Liste in [16] liefert, daß $\mathbf{C}_G(\mathbf{Z}(F))$ nicht 2-constrained ist. Da $\mathbf{C}_G(\mathbf{Z}(F))/\mathbf{Z}(F)$ eine elementar abelsche Gruppe von der Ordnung 2^6 enthält, liefert [16], daß

$$\mathbf{L}(\mathbf{C}_G(\mathbf{Z}(F))/\mathbf{Z}(F)\,\mathbf{O}(\mathbf{C}_G(\mathbf{Z}(F))))$$

zu A_{12}, A_{13}, $Sp_6(2)$ oder $\Omega_7(q)$, $q \equiv 3, 5 \pmod 8$, isomorph ist. Das liefert nun, daß G zu C_3 isomorph ist. Die Gruppe C_3 enthält aber nur eine Konjugiertenklasse von elementar abelschen Untergruppen von der Ordnung 16, die einen nicht auflösbaren Normalisator haben. Dieser Normalisator involviert aber A_8. Das ist ein Widerspruch.

3. DER VOLLSTÄNDIG REDUZIBLE FALL

In diesem Abschnitt wollen wir den Fall behandeln, daß $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(E)}(F)$ auf $F/\mathbf{Z}(F)$ vollständig reduzibel operiert. Hierbei ist F wieder eine Sylow 2-Untergruppe des vollen Urbildes von $\mathbf{O}_2(\mathbf{N}_G(E)/\mathbf{C}_G(E))$ in $\mathbf{N}_G(E)$. Wir wissen, daß F extraspeziell ist. Weiter ist die Operation von $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(E)}(F)$ auf $F/\mathbf{Z}(F)$ eindeutig. Das Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis, daß 2^{12} die Ordnung von $\mathbf{N}_G(F)$ nicht teilt. Das liefert dann, daß auch 2^{12} die Ordnung von G nicht teilt.

(3.1) LEMMA. *Sei $M = \mathbf{N}_G(F)/F\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(F))$. Dann ist M zu $L_2(7)$, $PGL_2(7)$ oder einer Erweiterung von E_8 durch $L_2(7)$ isomorph.*

Beweis. Da E in F enthalten ist, ist M zu einer Untergruppe von Σ_8 isomorph. Also ist M zu $L_2(7)$, $PGL_2(7)$, A_7, Σ_7, $E_8L_2(7)$, A_8 oder Σ_8 isomorph. Da F genau 30 elementar abelsche Gruppen von der Ordnung 16 enthält, ist $|M| \leqslant$

$30 \cdot |L_2(7)|$. Also ist M zu $L_2(7)$, $PGL_2(7)$, A_7, Σ_7 oder $E_8L_2(7)$ isomorph. Da $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(E)}(F)$ vollständig reduzibel auf $F/\mathbf{Z}(F)$ operiert, ist $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(E)}(F)/F\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(F))$ in $PGL_2(7)$ einbettbar. Insbesondere ist diese Gruppe nicht in A_7 einbettbar, da sie als Untergruppe von Σ_8 treu auf acht Punkten operiert. Damit ist das Lemma bewiesen.

Für den Rest dieses Abschnittes nehmen wir an, daß die folgende Annahme erfüllt ist.

(3.2) ANNAHME. *Es ist 2^{12} ein Teiler der Ordnung von $\mathbf{N}_G(F)$.*

(3.3) LEMMA. *Setze $N = \mathbf{N}_G(F)$. Dann enthält N eine elementar abelsche Untergruppe W von der Ordnung 2^7. Es ist $|W \cap E| = 2$ und $\mathbf{N}_N(W)/\mathbf{C}_N(W)$ zu einer Erweiterung von E_8 durch $L_2(7)$ isomorph. Ist $R = \mathbf{N}_N(W)/(W \cap E)\mathbf{O}(\mathbf{N}_N(W))$, so zerfällt R uber $W\mathbf{O}(\mathbf{N}_N(W))/(W \cap E)\mathbf{O}(\mathbf{N}_N(W))$.*

Beweis. Nach (3.1) ist $N/F\mathbf{O}(N)$ zu einer Erweiterung von E_8 durch $L_2(7)$ isomorph. Also gibt es in F eine elementar abelsche Untergruppe E_1 von der Ordnung 16, die in N normal ist. Setze $W_1 = \mathbf{C}_N(E_1)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_N(E_1))\mathbf{Z}(F)$ und $E_2 = E_1\mathbf{O}(\mathbf{C}_N(E_1))/\mathbf{O}(\mathbf{C}_N(E_1))\mathbf{Z}(F)$. Wir wissen, daß ein Element σ von der Ordnung 7 fixpuktfrei auf W_1 operiert. Enthalte zunächst W_1 keine elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 16. Dann ist $E_2 = \Omega_1(W_1)$. Mit [13] erhalten wir jetzt, daß W_1 eine Suzuki 2-Gruppe oder zu $Z_4 \times Z_4 \times Z_4$ isomorph ist. Auf W_1 operiert eine Gruppe $E_8L_2(7)$ treu. Das liefert aber einen Widerspruch zu der Struktur der Automorphismengruppe einer Suzuki 2-Gruppe oder von $Z_4 \times Z_4 \times Z_4$.

Also enthält W_1 elementar abelsche Untergruppen von der Ordnung 16. Da σ transitiv auf den von Eins verschiedenen Nebenklassen von E_2 in W_1 operiert, folgt nun, daß W_1 elementar abelsch ist. Sei jetzt W das volle Urbild von W_1 in $\mathbf{C}_N(E_1)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_N(E_1))$. Dann ist E_1 in $\mathbf{Z}(W)$ enthalten. Weiter gibt es in W eine σ-invariante Untergruppe E_3 von der Ordnung 16 mit $E_3 \cap E_1 = \mathbf{Z}(F)$. Das liefert jetzt, daß W elementar abelsch ist.

Klar ist, daß $W \cap E = \mathbf{Z}(F)$ ist. Weiter ist $\mathbf{N}_N(W)/\mathbf{C}_N(W) \cong E_8L_2(7)$. Nun wissen wir weiter, daß $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(F)}(E)/\mathbf{O}(\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(F)}(E))$ eine Untergruppe K enthält, die zu einer Erweiterung von E durch $L_2(7)$ isomorph ist. Diese Gruppe ist natürlich auch in $\mathbf{N}_N(W)$ enthalten. Also zerfällt R über $W\mathbf{O}(\mathbf{N}_N(W))/\mathbf{O}(\mathbf{N}_N(W))\mathbf{Z}(F)$.

(3.4) LEMMA. *Es enthalte $\mathbf{N}_G(F)$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(W)$. Dann gilt*

(i) *$\mathbf{N}_G(W)/\mathbf{C}_G(W)$ ist zu $E_8L_2(7)$ oder A_8 isomorph.*

(ii) *Setze $F_1 = \mathbf{N}_G(F)/\mathbf{O}_{2',2}(\mathbf{N}_G(F))$. Dann besitzt W eine F_1-Kompositionsreihe $W > W_1 > W_2 > 1$ mit $|W/W_1| = |W_1/W_2| = 8$. Es bewirkt F_1 auf W/W_1 die zu der Darstellung auf W_1/W_2 duale Darstellung.*

(iii) *Ist* $\mathbf{N}_G(W)/\mathbf{C}_G(W)$ *zu* A_8 *isomorph, so ist* $W/(W \cap E)$ *der* 6-dim *Teil der Permutationsdarstellung.*

(iv) $W \cap E$ *liegt in* $\mathbf{Z}(\mathbf{N}_G(W))$.

(v) $\mathbf{N}_G(W)/(W \cap E)\,\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(W))$ *zerfällt über* $W/(W \cap E)$.

(vi) *In einer Sylow* 2-*Untergruppe* T *von* $\mathbf{N}_G(W)$ *gibt es höchstens zwei elementar abelsche Untergruppen von der Ordnung* 2^7.

Beweis. Setze $R = \mathbf{N}_G(W)/\mathbf{C}_G(W)$. Dann liefert [9], daß $R/\mathbf{O}(R)$ zu $E_8L_2(7)$, A_8, A_9, $G_2(q)$ oder $D_4{}^2(q)$ isomorph ist. Die Ordnung von $L_7(2)$ liefert, daß $R/\mathbf{O}(R)$ zu $E_8L_2(7)$, A_8 oder A_9 isomorph ist. Da A_9 nach [10, Lemma (2.8)] keine treue Darstellung vom Grad 7 über $GF(2)$ besitzt, ist $R/\mathbf{O}(R)$ zu $E_8L_2(7)$ oder A_8 isomorph. Setze $K = \mathbf{O}(R)$. Dann zentralisiert K die Gruppe WF/W. Ist $e \in E - (W \cap E)$, so ist $|\mathbf{C}_W(e)| = 16$. Weiter gibt es ein $f \in E$ mit $|\mathbf{C}_{\mathbf{C}_W(e)}(f)| = 4$. Also können wir annehmen, daß K in E eine Hyperebene zentralisiert. Da E eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(E)$ ist, können wir dann sogar $[E, K] = 1$ annehmen. Dann stabilisiert K aber in W eine Kette $W = W_1 > W_2 > W_3 > W_4 > W_5 > W_6 > W_7 > W_8 = 1$ mit $|W_i/W_{i-1}| = 2$. Das liefert $K = 1$. Damit ist (i) bewiesen.

Es folgen nun leicht (iii) und (iv). Die Behauptung in (v) folgt sofort mit (3.3).

Klar ist, daß F_1 in W eine Kompositionsreihe $W > W_1 > W_2 > 1$ mit $|W/W_1| = |W_1/W_2| = 8$ besitzt. Da F_1 auf F/E die duale Darstellung zu der Darstellung auf $E/\mathbf{Z}(F)$ bewirkt, folgt nun (ii) mit einer leichten Rechnung.

Sei nun $V \neq W$ eine elementar abelsche Untergruppe von T von der Ordnung 2^7. Da eine Hyperebene von E in W höchstens einen Unterraum von der Dimension zwei zentralisiert, folgt $|VW/W \cap EW/W| \leqslant 2$. Sei zunächst

$$|VW/W \cap EW/W| = 1.$$

Dann zentralisiert VW/W in W/W_1 und W_1/W_2 jeweils eine Hyperebene. Das widerspricht aber (ii). Also ist $|VW/W \cap EW/W| = 2$. Dann ist $|V \cap W| = 16$. Das liefert, daß V eindeutig bestimmt ist. Somit erhalten wir (vi).

(3.5) Lemma. *Die Ordnung von* G *wird durch* 2^{14} *geteilt.*

Beweis. Es enthalte $\mathbf{N}_G(F)$ eine Sylow 2-Untergruppe von G. Dann enthält $\mathbf{N}_G(F)$ auch eine Sylow 2-Untergruppe von $N_G(W)$. Insbesondere ist (3.4) anwendbar. Nach (3.4) (iv) und (vi) ist $W \cap E$ stark abgeschlossen in W bezüglich G. Setze $W \cap E = \langle z \rangle$. Sei f eine Involution in WF, die in G zu z konjugiert ist. Weiter sei $f \neq z$. Dann ist $|\mathbf{C}_W(f)| = 16$ und $|[W, f]| = 8$. Sei $g \in G$ mit $f^g = z$ und $\mathbf{C}_T(f) \leqslant T$, wobei T eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(F)$ sei. Dann ist $|\mathbf{C}_W(f)^g \cap W| \leqslant 2$. Nun ist $\mathbf{C}_W(f)$ normal in $\mathbf{C}_T(f)$. Also ist $\mathbf{C}_W(f)^g$ normal in $\mathbf{C}_T(f)^g$. Das liefert $\mathbf{C}_W(f)^g \cap W = 1$. Nach (3.4) (iii) involviert die Gruppe $\mathbf{N}_{\mathbf{C}_T(f)}(\mathbf{C}_W(f))/\mathbf{C}_{\mathbf{C}_T(f)}(\mathbf{C}_W(f))$ eine zu D_8 isomorphe Gruppe. Das ist aber nicht möglich. Also ist $W \cap E$ in FW bezüglich G stark abgeschlossen.

Sei nun f eine Involution aus $T - WF$, die in G zu z konjugiert ist. Dann folgt $|[W, f]| = 4$. Insbesondere ist f nicht zu fz in T konjugiert. Nun operiert f auch auf F. Da $f \not\sim fz$ in T, folgt $|\mathbf{C}_F(f)| \geqslant 2^5$. Sei nun $g \in G$ mit $f^g = z$ und $\mathbf{C}_T(f)^g \subseteq T$. Dann ist $|\mathbf{C}_F(f)^g \cap WF| \geqslant 4$. Weiter ist $\mathbf{C}_F(f)^g \cap WF$ normal in $\mathbf{C}_F(f)^g$. Das liefert $z^g \in WF$. Das ist aber ein Widerspruch. Insgesamt haben wir somit gezeigt, daß $W \cap E$ in T bezüglich G stark abgeschlossen ist. Anwendung von [2] liefert jetzt einen Widerspruch zur Einfachheit von G.

(3.6) LEMMA. *Die Ordnung von* $\mathbf{N}_G(W)$ *wird durch* 2^{14} *geteilt.*

Beweis. Sei 2^{13} der genaue Anteil der Ordnung von $\mathbf{N}_G(W)$. Dann enthält $\mathbf{N}_G(F)$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(W)$. Insbesondere wird die Struktur von $\mathbf{N}_G(W)$ durch (3.4) beschrieben. Sei T eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(W) \cap \mathbf{N}_G(F)$. Nach (3.5) ist T keine Sylow 2-Untergruppe von G. Also gibt es eine 2-Untergruppe S von G mit $|S : T| = 2$. Sei $S = T\langle a\rangle$. Dann ist $W^a \neq W$. Nach (3.4) (vi) ist W^a eindeutig bestimmt. Es ist $|W \cap W^a| = 16$ und $S/WW^a = D_8 \times Z_2$. Man rechnet nun leicht nach, daß $W \cap W^a = \Omega_1(\mathbf{Z}(\mathbf{Z}_4(S)))$ ist. Also ist $W \cap W^a$ charakteristisch in S. Nun sind aber alle elementar abelschen Gruppen von der Ordnung 2^6 in $S/(W \cap W^a)$ in $T/(W \cap W^a)$ enthalten. Nach (3.4) (vi) erhalten wir, daß WW^a charakteristisch in S ist. Da WW^a aber genau 2 elementar abelsche Untergruppen von der Ordnung 2^7 enthält, folgt, daß S eine Sylow 2-Untergruppe von G ist.

Sei W_1 eine elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 2^7 von S. Weiter sei $W \neq W_1 \neq W^a$. Nach (3.4) (vi) können wir $a \in W_1$ annehmen. Es ist $\mathbf{C}_{WW^a/W \cap W^a}(a) \simeq E_8$. Weiter liegen alle Involutionen aus dem vollen Urbild von $\mathbf{Z}(S/(W \cap W^a))$ in $W \cap W^a$. Also ist $|W_1 \cap (W \cap W^a)| \geqslant 8$.

Sei zunächst $W \cap W^a \subseteq W_1$. Dann gibt es Elemente $w_1, w_2 \in W$, so daß $W_1 = \langle W \cap W^a, w_1 w_1{}^a, w_2 w_2{}^a, a\rangle$ ist. Setze nun $W_2 = \langle W \cap W^a, w_1, w_2\rangle$. Dann gibt es ein Element $w_3 \in W - W_2$. Weiter gilt $[w_1, w_3{}^a] = [w_1{}^a, w_3]$ und $[w_2, w_3{}^a] = [w_2{}^a, w_3]$. Also zentralisiert $w_3 w_3{}^a$ die Gruppe W_1. Insbesondere ist W_1 nicht zu W in G konjugiert.

Sei jetzt $|W \cap W^a \cap W_1| = 8$. Dann erhalten wir

$$|W_1(W \cap W^a)/(W \cap W^a) \cap WW^a/(W \cap W^a)| = 2.$$

Weiter existiert ein $e \in E - (WW^a \cap E)$, so daß $W_1 \cap WW^a e \neq \varnothing$ ist. Da aber $|\mathbf{C}_{(W \cap W^a)}(e)| = 4$ ist, erhalten wir so einen Widerspruch.

Insgesamt haben wir gezeigt, daß $\langle z\rangle = W \cap E$ in W und W^a bezüglich G stark abgeschlossen ist.

Sei nun $s \in S - T$ mit $s \sim z$ in G. Dann enthält $[WW^a, s]$ eine Untergruppe V von der Ordnung vier, so daß alle Elemente aus Vs zu s konjugiert sind. Somit folgt, daß es ein $t \neq z$ in T gibt, so daß $t \sim z$ in G gilt.

Sei zunächst t nicht in $\mathbf{N}_G(W)$ zu einer Involution aus WW^a konjugiert. Dann können wir $t \in WW^a e$ wählen, wobei $e \in E - (WW^a \cap E)$ ist. Insbesondere ist

$|[t, W \cap W^a]| = 4$. Das liefert $|\mathbf{C}_{WW^a}(t)| = 64$ und $(\mathbf{C}_{WW^a}(t))' = [t, W \cap W^a]$. Sei nun $g \in G$ mit $t^g = z$ und $\mathbf{C}_S(t)^g \subseteq S$. Dann ist $[W \cap W^a, t]^g \cap WW^a \neq 1$. Also gibt es ein $r \neq z$ in WW^a, das zu z in G konjugiert ist. Sei $r = ww_1$ mit $w \in W$ und $w_1 \in W^a$. Ist $w_1 \in WW^a \cap E$, so folgt $w \in W \cap W^a$. Das widerspricht aber der Tatsache, daß $\langle z \rangle$ in W^a bezüglich G stark abgeschlossen ist. Da auf $WW^a/(W \cap W^a)$ eine zu Σ_4 isomorphe Gruppe operiert, ist die Nebenklasse $(W \cap W^a)w_1$ eindeutig bestimmt. Weiter ist $w \in \mathbf{C}_W(w_1)$. Da $\mathbf{C}_W(w_1)$ die Ordnung 2^r hat, ist auch die Nebenklasse $(W \cap W^a)w$ und damit $(W \cap W^a)ww_1$ eindeutig bestimmt. Wir bestimmen nun $\mathbf{C}_{WW^a}(r) = Y$. Wir wissen, daß Y die elementar abelsche Gruppe $\langle W \cap W^a, w, w_1 \rangle$ enthält. Weiter ist $|\mathbf{C}_{W^a}(w_1)| = 32$. Wir können schließlich annehmen, daß $[r, a]$ in $W \cap W^a$ enthalten ist. Wir wissen, daß z weder in $[W, w_1]$ noch in $[W^a, w]$ enthalten ist. Da aber r zu rs mit $s \in \mathbf{Z}(S/(W \cap W^a))$ konjugiert ist, folgt, daß r zu rz konjugiert ist. Also ist $|\mathbf{C}_{WW^a}(r)| \leqslant 2^7$. Sei nun $|\mathbf{C}_{WW^a}(r)| = 2^7$. Dann gibt es eine Involution in T/WW^a, die $WW^a/(W \cap W^a)$ zentralisiert. Das ist aber ein Widerspruch. Also ist $|\mathbf{C}_{WW^a}(r)| = 2^6$. Weiter sind alle Involutionen aus $(W \cap W^a)r$ zu r konjugiert. Sei nun $g \in G$ mit $r^g = z$ und $\mathbf{C}_S(r)^g \subseteq S$. Dann ist $(W \cap W^a)^g \cap WW^a \neq 1$. Da $\langle z \rangle$ in W und W^a bezüglich G stark abgeschlossen ist, folgt $|(W \cap W^a)^g \cap WW^a| = 2$. Also ist $\mathbf{C}_S(r)/\mathbf{C}_{WW^a}(r)$ elementar abelsch von der Ordnung acht. Weiter ist $W \cap W^a$ normal in $\mathbf{C}_S(r)$. Also ist $(W \cap W^a)^g$ normal in $\mathbf{C}_S(r)^g$. Das liefert $|[(W \cap W^a), \mathbf{C}_S(r)]| \leqslant 2$. Nun ist aber $\mathbf{C}_S(r) \cap WW^aE \nsubseteq WW^a$. Also gibt es ein $f \in \mathbf{C}_S(r)$ mit $|[f, W \cap W^a]| = 4$. Das ist ein Widerspruch. Somit ist $r \not\sim z$. Dann ist $\langle z \rangle$ in S bezüglich G stark abgeschlossen. Anwendung von [2] liefert nun einen Widerspruch zur Einfachheit von G.

(3.7) Lemma. *Sei X eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(W)$. Ist $X \neq W$, so ist X abelsch von der Ordnung 2^8. Weiter ist $\mathbb{D}(X) \subseteq W \cap E$.*

Beweis. Sei X_1 eine 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(W)$ mit $W \subsetneq X_1$. Weiter sei $[E, X_1] \subseteq W$. Ist $|X_1/W| \geqslant 4$, so gibt es in $X_1 - W$ ein Element f, das ein Element $e \in E - (E \cap X_1)$ zentralisiert. Also ist $|\mathbf{C}_{W\langle f \rangle}(e)| = 2^5$. Das liefert aber, daß es in $\mathbf{C}_G(E)$ eine Vierergruppe V gibt, so daß $V \nsubseteq E$ gilt. Das ist ein Widerspruch zur Struktur von $\mathbf{N}_G(E)$. Also ist $|X_1/W| = 2$. Nun operiert $(\mathbf{N}_G(F) \cap \mathbf{N}_G(W))\,\mathbf{C}_G(W)/\mathbf{C}_G(W)$ auf X_1 und X_1/W. Somit gibt es ein $f \in X_1 - W$ mit $f^2 \in E \cap W$ und $e^f \neq e$. Dann erhalten wir $e^f = es$ mit $s \in W - F$. Da wir weiter annehmen können, daß f von einem Element von der Ordnung 7 in $(\mathbf{N}_G(F) \cap \mathbf{N}_G(W))\,\mathbf{C}_G(W)/\mathbf{C}_G(W)$ zentralisiert wird, folgt, daß X_1 abelsch ist. Weiter sind jetzt alle elementar abelschen Gruppen X_2 von der Ordnung 16 mit $X_1X_2 = X_1E$ in X_1E konjugiert. Also ist X_1 eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(W)$.

(3.8) Lemma. *Die Voraussetzungen seien wie in* (3.7). *Setze $R = \mathbf{N}_G(X)/\mathbf{C}_G(X)$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(i) *R ist zu* $E_8L_2(7)$, A_8, A_9, Σ_8, Σ_9 *oder* A_{10} *isomorph.*

(ii) *Ist R zu* $E_8L_2(7)$, A_8 *oder* Σ_8 *isomorph, so ist* $E \cap X$ *in* $\mathbf{Z}(\mathbf{N}_G(X))$ *enthalten.*

(iii) *Ist R zu* A_9, Σ_9 *oder* A_{10} *isomorph, so ist X elementar abelsch. Weiter ist X der* 8-dim *irreduzible Teil des entsprechenden Permutationsmoduls.*

(iv) *Ist R zu* A_8 *oder* Σ_8 *isomorph, so enthält* $X/(X \cap E)$ *einen* 6-dim *Teilmodul Y, der zu dem* 6-dim *irreduziblen Teil des Permutationsmoduls isomorph ist.*

(v) *Ist R zu* $E_8L_2(7)$, A_8 *oder* A_9 *isomorph und T eine Sylow* 2-*Untergruppe von* $\mathbf{N}_G(X)$, *so ist X die einzige Untergruppe ihrer Art in T.*

Beweis. Wir wissen, daß R eine 2-lokale Untergruppe $E_8L_2(7)$ enthält. Mit [9] erhalten wir so, daß $\mathbf{L}(R/\mathbf{O}(R))$ zu A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, M_{22}, M_{23} oder Ly isomorph ist, oder daß $R/\mathbf{O}(R)$ zu $E_8L_2(7)$ isomorph ist. Da R eine Untergruppe von $L_8(2)$ sein muß, folgt, daß entweder $R/\mathbf{O}(R)$ zu $E_8L_2(7)$ isomorph ist, oder daß $\mathbf{L}(R/\mathbf{O}(R))$ zu A_8, A_9 oder A_{10} isomorph ist. Die Struktur von $\mathbf{N}_G(E)$ liefert, daß $\mathbf{O}(R) = 1$ ist. Da $r(R) = 4$ ist, folgt nun (i).

Es ist $\mathbf{N}_G(F)$ in $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(X)}(E \cap X)$ enthalten. Sei nun $(E \cap X)$ nicht in $\mathbf{Z}(\mathbf{N}_G(X))$ enthalten und $R \cong A_8$. Dann hat z genau 15 Konjugierte unter $\mathbf{N}_G(X)$. Hierbei sei $\langle z \rangle = E \cap X$. Weiter ist X elementar abelsch. Da alle Konjugiertenklassen von Elementen aus $X - W$ unter $\mathbf{N}_G(F) \cap \mathbf{N}_G(X)$ eine durch acht teilbare Länge haben, folgt, daß die z-Konjugierten eine elementar abelsche Gruppe von der Ordnung 16 erzeugen. Also gibt es in X eine Untergruppe X_1 von der Ordnung 16, so daß X_1 und X/X_1 irreduzible A_8-Moduln sind. Die Struktur von $\mathbf{N}_G(E)$ liefert, daß X ein unzerlegbarer A_8-Modul ist. Nun wissen wir aber, daß $\mathbf{N}_G(F) \cap \mathbf{N}_G(X)$ eine Involution r enthält, so daß $\mathbf{C}_X(r)$ die Ordnung 32 oder 64 hat. Da r der Involution (12) (34) entspricht, erhalten wir nun einen Widerspruch. Damit haben wir (ii) gezeigt.

Nach [10, Lemma (2.8)] hat A_9 keine treue Darstellung vom Grad 7 über $GF(2)$. Ist also R zu A_9, Σ_9 oder A_{10} isomorph, so ist X ein irreduzibler R-Modul von der Dimension acht. Ist R zu Σ_9 oder A_{10} isomorph, so ist $\mathbf{C}_R(z) \cong \Sigma_8$. Das liefert (iii). Sei jetzt $R \cong A_9$ und X nicht der 8-dim irreduzible Teil des Permutationsmoduls. Dann hat z genau 135 Konjugierte unter $\mathbf{N}_G(X)$. Sei nun $y \in \mathbf{N}_G(F) \cap \mathbf{N}_G(X)$ mit $|\mathbf{C}_X(\omega)| = 32$ oder 64. Dann entspricht y der Involution (12) (34). Weiter folgt, daß es eine Involution $x \in X$ gibt, deren zentralisator in R eine durch $2^5 \cdot 3 \cdot 5$ teilbare Ordnung hat. Sei T eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(X)$. Dann ist $x \in \mathbf{Z}_2(T)$. Nun wissen wir, daß $\langle z, x \rangle = \mathbf{Z}_2(T)$ ist. Weiter wissen wir, daß die Länge einer $(\mathbf{N}_G(F) \cap \mathbf{N}_G(X))$-Konjugiertenklasse von Elementen aus X, die nicht zu Elementen aus $\mathbf{Z}_2(T) - \mathbf{Z}(T)$ konjugiert sind, stets durch vier teilbar ist. Da 134 aber nicht durch vier teilbar ist, erhalten wir so einen Widerspruch. Das beweist (iii).

Sei nun R zu A_8 oder Σ_8 isomorph. Nach (ii) wissen wir, daß $E \cap X$ in

$\mathbf{Z}(\mathbf{N}_G(X))$ enthalten ist. Die Bahnen, die $\mathbf{N}_G(F) \cap \mathbf{N}_G(X)$ auf $X/(E \cap X)$ bewirkt, haben die Längen 7, 28, 28, 56 und 8. Man sieht nun leicht, daß $X/(E \cap X)$ kein irreduzibler A_8-Modul ist. Das liefert jetzt (iv).

Sei jetzt 2^7 kein Teiler der Ordnung von R. Weiter sei T eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(X)$ und $X_1 \neq X$ eine zu X isomorphe Untergruppe von T. Sei zunächst $X_1 \cap XE \nsubseteq X$. Dann ist $| X_1 \cap X | = 16$ und X_1X/X die einzige elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 2^4 in T/X. Insbesondere ist $| EX/X \cap X_1X/X | = 4$. Das widerspricht aber der Struktur von $\mathbf{N}_G(E)$. Also ist $| X_1 \cap X | \geqslant 2^6$. Sei $U = (\mathbf{N}_G(F) \cap \mathbf{N}_G(X))\,\mathbf{C}_G(X)/\mathbf{C}_G(X)E$. Dann hat X eine Reihe $X = Y_1 > Y_2 > Y_3 > Y_4 > Y_5 = 1$, die U-invarient ist. Hierbei ist $| Y_1/Y_2 | = | Y_4 | = 2$ und $| Y_2/Y_3 | = | Y_3/Y_4 | = 8$. Auf Y_2/Y_3 bewirkt U die zu der Darstellung auf Y_3/Y_4 duale Darstellung. Also zentralisiert eine Vierergruppe in U keine Untergruppe von der Ordnung 2^6 in X. Weiter zentralisiert eine Involution in U keine Untergruppe von der Ordnung 2^7 in X. Das liefert nun aber einen Widerspruch zu $| X \cap X_1 | \geqslant 2^6$. Damit ist (v) bewiesen.

Das folgende Lemma ist entscheidend für den weiteren Beweis.

(3.9) Lemma. (i) *Sei W eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(W)$. Es enthalte $\mathbf{N}_G(W)$ eine Untergruppe B, die $\mathbf{N}_G(F) \cap \mathbf{N}_G(W)$ enthält, so daß $B/\mathbf{O}(B)W$ zu A_8 isomorph ist. Dann ist $E \cap W$ in $\mathbf{Z}(B)$ enthalten. Es bewirkt $B/\mathbf{O}(B)W$ auf $W/(E \cap W)$ den sechsdimensionalen irreduziblen Teil des Permutationsmoduls. Auf W bewirkt $B/\mathbf{O}(B)W$ den siebendimensionalen Teil des Permutationsmoduls. Insbesondere ist W ein unzerlegbarer Modul.*

(ii) *Ist W keine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(W)$, so sei R_1 eine Untergruppe von $C_{\mathbf{N}_G(X)}(z)$, so daß $R_1/\mathbf{O}(R_1)X$ zu A_8 isomorph ist. Ist W eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(W)$, so setze $R_1 = B/\mathbf{O}(B)$. Sei e eine Involution aus $E - (E \cap W)$. Zerfällt R_1 über X bzw. W, so teilt 2^{12} die Ordnung von $\mathbf{C}_G(e)$ nicht.*

Beweis. Klar ist, daß $(E \cap W)$ in $B \cap \mathbf{N}_G(F)$ zentral ist. Wäre $E \cap W$ nicht in B zentral, so hätte z mit $\langle z \rangle = E \cap W$ genau 15 Konjugierte unter B. Betrachtung der Bahnen, die $\mathbf{N}_G(F)$ auf W induziert, liefert nun, daß das Erzeugnis der B-Konjugierten von z eine elementar abelsche Gruppe von der Ordnung 16 ist. Sei W_1 diese Gruppe. Dann sind W_1 und W/W_1 B-invariant. Also zentralisiert B die Gruppe W/W_1. Das widerspricht aber der Struktur von $\mathbf{N}_G(F)$. Somit ist $E \cap W \subseteq \mathbf{Z}(B)$. Weiter ist klar, daß B auf $W/(W \cap E)$ den 6-dim Teil des Permutationsmoduls induziert. Da $\mathbf{N}_G(F)$ in B enthalten ist, folgt nun, daß W ein unzerlegbarer A_8-Modul ist. Eine längere aber unkomplizierte Rechnung mit den Erzeugern von A_8 liefert nun die Behauptung unter (i).

Sei nun W keine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(W)$. Dann können wir nach (3.8) annehmen, daß $\mathbf{N}_G(F) \cap \mathbf{N}_G(X)$ in R_1 enthalten ist. Eine leichte Rechnung zeigt nun, daß $\mathbf{N}_G(F)$ auf $X/(X \cap E) - W/(X \cap E)$ eine Bahn von der Länge 8 und eine von der Länge 56 induziert. Das liefert nun, daß R_1 auf X eine Bahn von der Länge acht induziert. Also können wir $X = \langle \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8 \rangle$ annehmen, wobei $R_1/\mathbf{O}(R_1)X$ auf X wie auf den Indices operiert. Insbesondere ist in beiden Fällen die Operation von $R_1/\mathbf{O}(R_1)$ auf X bzw. W eindeutig.

Setze nun $Y = X$, falls W keine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(W)$ ist. Sonst setze $Y = W$. Sei T_1 eine Sylow 2-Untergruppe von R_1. Sei V_1 eine elementar abelsche Untergruppe von T_1 von der Ordnung 16, so daß V_1Y/Y die einzige elementar abelsche Untergruppe der Ordnung 16 in T_1/Y ist. Dann ist $V = V_1\mathbf{C}_Y(V_1)$ elementar abelsch von der Ordnung 64.

Es ist $\mathbf{N}_{R_1}(V)/\mathbf{C}_{R_1}(V)$ zu $(H_1 \times H_2)\langle r, f\rangle$, mit $H_1 \cong H_2 \cong A_4$, $H_1\langle r\rangle \cong H_2\langle r\rangle \cong \Sigma_4$ und $H_1^f = H_2$, isomorph. Hierbei können wir $f \in E$ wählen. Sei V_2 die einzige elementar abelsche Untergruppe der Ordnung 16 in $\mathbf{N}_{R_1}(V)/\mathbf{C}_{R_1}(V)$. Sei h ein Element aus $\mathbf{N}_G(V)/\mathbf{C}_G(V)$, das f modulo V_2 zentralisiert. Dann gibt es ein Element $h_1 \in h\mathbf{N}_{R_1}(V)$, das f modulo V zentraliziert. Wegen $\mathbf{C}_V(f) = V \cap E$, folgt dann $h_1 \in \mathbf{N}_G(E)$. Also ist $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(V)/\mathbf{C}_G(V)}(f)$ in $\mathbf{N}_{R_1}(V)\mathbf{C}_G(V)/\mathbf{C}_G(V)$ enthalten. Weiter ist eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(V)/\mathbf{C}_G(V)}(V_2)$ eine Erweiterung von V_2 durch eine Diedergruppe der Ordnung vier oder acht.

Die Untergruppenstruktur von A_8 liefert jetzt, daß

$$\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(V)/\mathbf{C}_G(V)}(V_2)/\mathbf{O}(\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(V)/\mathbf{C}_G(V)}(V_2))$$

zu $\mathbf{N}_{R_2}(V)/\mathbf{C}_{R_2}(V)$, $\Sigma_4 \wr Z_2$ oder einer Erweiterung von V_2 durch eine Gruppe $(B \times C)\langle f\rangle$, mit $B\langle f\rangle \cong \Sigma_5$ und $C\langle f\rangle \cong \Sigma_3$, isomorph ist. Die Struktur von $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(V)/\mathbf{C}_G(V)}(f)$ liefert nun, daß $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(V)/\mathbf{C}_G(V)}(V_2)$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(V)/\mathbf{C}_G(V)$ enthält. Wir setzen nun $N = (\mathbf{N}_G(V)/\mathbf{C}_G(V))/\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(V)/\mathbf{C}_G(V))$. Sei $\mathbf{L}(N) \neq 1$. Dann liefert [5], daß $\mathbf{L}(N)$ zu A_5, A_6, A_7, $L_2(7)$, $L_2(8)$, $L_2(7) \times L_2(7)$, $U_3(3)$, $PSp_4(3)$, $PSL_3(4)$, A_8 oder A_9 isomorph ist. Wegen der Struktur von $\mathbf{C}_N(f)$ bewirkt f auf $\mathbf{L}(N)$ und $\mathbf{C}(\mathbf{L}(N))$ einen Automorphismus. Das liefert, daß $\mathbf{L}(N)$ zu A_5 isomorph ist. Dann hat eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}(\mathbf{L}(N))$ die Ordnung 2^3 oder 2^4. Da eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_{\mathbf{L}(N)\mathbf{C}(\mathbf{L}(N))}(f)$ eine Diedergruppe von der Ordnung acht ist, erhalten wir nun einen Widerspruch. Also ist V_2 normal in N. Insbesondere erhalten wir, daß eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(V)}(e)$ die Ordnung 2^{10} oder 2^{11} hat. Sei h eine Involution in V, die in A_8 dem Element (12) (34) entspricht. Dann ist $|\mathbf{C}_{VV_2}(h)| = 2^{11}$. Also ist $\mathbf{N}_G(V)/\mathbf{C}_G(V)$ auflösbar. Da nun auf VV_2 eine Gruppe von der Ordnung $3^2 \cdot 4$ oder $3^2 \cdot 8$ operiert, läßt sich die Struktur einer Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(V)$ und einer Sylow 2-Untergruppe T_2 von $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(V)}(e)$ berechnen. Man sieht dann leicht, daß V in T_2 charakteristisch ist. Also ist T_2 eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(e)$.

(3.10) Lemma. *Die Voraussetzungen seien wie in* (3.7). *Ist* 2^7 *kein Teiler der Ordnung von* R, *so ist* R *zu* A_9 *isomorph.*

Beweis. Sei $R \not\cong A_9$. Nach (3.8) (i) ist dann R zu $E_8L_2(7)$ oder A_8 isomorph. Nach (3.8) (ii) ist $\langle z \rangle = E \cap X$ in $\mathbf{Z}(\mathbf{N}_G(X))$ enthalten. Nach (3.8) (v) ist eine Sylow 2-Untergruppe T von $\mathbf{N}_G(X)$ eine Sylow 2-Untergruppe von G.

Sei nun $r \in T$ eine Involution mit $r \sim z$ in G. Ist $r \in X$, so folgt $r = z$. Sei also $r \in T - X$. Sei zunächst $Z = [r, X]$ von der Ordnung 16. Dann sind alle Involutionen in Zr zu r konjugiert. Sei nun $g \in G$ mit $r^g = z$ und $\mathbf{C}_T(r)^g \subseteq T$. Dann ist $Z^g \cap X = 1$. Somit ist XZ^g/X die einzige elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 16 in T/X. Weiter ist $|\mathbf{C}_T(r)| \geqslant 2^9$. Also gibt es in $\mathbf{C}_T(r)$ eine Untergruppe U von der Ordnung 16 mit $U \cap X = 1$ und $U^g \subseteq X$. Da Z in $\mathbf{C}_T(r)$ normal ist, folgt nun $[U, Z] = 1$. Das ist aber ein Widerspruch.

Somit haben wir, daß $\langle x \mid x \in X, r \sim xr \text{ in } G \rangle$ eine Vierergruppe ist. Wir erhalten $|\mathbf{C}_T(r)| = 2^{11}$ und $Z^g \cap XE = 1$. Wieder ist Z normal in $\mathbf{C}_T(r)$. Das liefert, daß Z^g in XE eine Gruppe von der Ordnung 2^8 zentralisiert. Das widerspricht aber der Struktur von $\mathbf{N}_G(F)$. Insgesamt haben wir somit gezeigt, daß $E \cap X$ stark abgeschlossen in T bezüglich G ist. Anwendung von [2] liefert jetzt einen Widerspruch zur Einfachheit von G.

(3.11) Lemma. *Die Voraussetzungen seien wie in* (3.10). *Dann zerfällt* $\mathbf{N}_G(X)/\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(X))$ *über* $X\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(X))/\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(X))$.

Beweis. Sei T eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(X)$. Dann wissen wir, daß $T/(E \cap X)$ über $X/(E \cap X)$ zerfällt. Weiter wissen wir nach (3.8) (iii), daß $\mathbf{C}_R(E \cap X)$ zu A_8 isomorph ist. Zerfällt $\mathbf{N}_G(X)$ nicht, so ist eine minimale Untergruppe von $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(X)}(E \cap X)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(X)}(E \cap X))$, die A_8 involviert, zu $\hat{A}_8$ isomorph. Insbesondere gibt es in der Nebenklasse Xy, wobei y dem Element (12) (34) aus A_8 entspricht, keine Involutionen. Also sind alle Involutionen aus $T - X$ in $\mathbf{N}_G(X)$ zu einer Involution $e \in E - (E \cap X)$ konjugiert.

Nach (3.8) (v) wissen wir, daß T eine Sylow 2-Untergruppe von G ist. Nach [3] ist e zu einer Involution aus X in G konjugiert. Setze wieder $Z = [e, X]$. Dann hat Z die Ordnung 16. Weiter sind alle Involutionen aus Ze zu e konjugiert. Sei nun $g \in G$ mit $e^g \in X$ und $\mathbf{C}_T(e)^g \subseteq T$. Dann ist $Z^g \cap X \neq 1$, da $\mathbf{N}_G(X)$ nicht zerfällt. Weiter sind alle Involutionen in $XZ^g - X$ in G konjugiert. Da zwei Involutionen aus Z in G genau dann konjugiert sind, wenn sie in $\mathbf{N}_G(X)$ konjugiert sind, und Z alle $\mathbf{N}_G(X)$-Konjugiertenklassen in X anscheidet, folgt nun $Z^g \subseteq X$. Also ist e zu einer Involution aus X in $\mathbf{N}_G(Z)$ konjugiert. Nun ist eine Sylow 2-Untergruppe T_1 von $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(X)}(Z)/Z$ elementar abelsch von der Ordnung 2^7. Somit ist e zu einer Involution aus X im Normalisator des vollen Urbildes von T_1 konjugiert. Hierin ist aber nach (3.8) (v) X charakteristisch. Dies ist ein Widerspruch. Somit haben wir gezeigt, daß $\mathbf{N}_G(X)/\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(X))$ zerfällt.

(3.12) Lemma. *Die Voraussetzungen seien wie in* (3.7). *Dann ist R zu Σ_8, Σ_9 oder A_{10} isomorph.*

Beweis. Sei 2^7 kein Teiler der Ordnung von R. Nach (3.11) wissen wir, daß $\mathbf{N}_G(X)/\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(X))$ eine zerfallende Erweiterung von $X\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(X))/\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(X))$ durch A_9 ist. Weiter ist eine Sylow 2-Untergruppe T von $\mathbf{N}_G(X)$ nach (3.8) (v) eine Sylow 2-Untergruppe von G. Nach [3] wissen wir, daß es in $T - X$ eine Involution r gibt, die zu einer Involution aus X in G konjugiert ist. Nach (3.9) teilt 2^{12} die Ordnung von $\mathbf{C}_G(e)$ nicht. Also ist e zu keiner Involution aus X in G konjugiert. Somit ist X in XE bezüglich G stark abgeschlossen. Wir können r so wählen, daß $\mathbf{C}_T(r)$ eine Involution e aus $E - (E \cap X)$ enthält. Sei nun $g \in G$ mit $r^g \in X$ und $\mathbf{C}_T(r)^g \subseteq T$. Dann ist $e^g \in T - X$. Sei zunächst e^g nicht zu e in $\mathbf{N}_G(X)$ konjugiert. Da es in $T - X$ nur vier $\mathbf{N}_G(X)$-Konjugiertenklassen gibt, folgt nun, daß es in X zwei G-Konjugiertenklassen gibt, deren Schnitt mit T in X enthalten ist. Setze nun $Z = \mathbf{C}_X(r)$. Dann hat Z die Ordnung 64. Weiter enthält Z Vertreter aller vier G-Konjugiertenklassen, die in X liegen. Da drei der vier Konjugiertenklassen ein Erzeugendensystem von Z enthalten, folgt nun $Z^g \subseteq X$. Also wird r zu einer Involution aus X in $\mathbf{N}_G(Z)$ konjugiert. Es ist $T_1 = X\langle r\rangle$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(Z)$. Da T_1/Z elementar abelsch ist, folgt, daß r zu einer Involution aus X in $\mathbf{N}_G(T_1)$ konjugiert wird. Das ist aber nicht möglich.

Somit gibt es ein $h \in G$ mit $r^h \in X$ und $e^h = e$. Also ist e zu er konjugiert. Nun rechnet man leicht nach, daß er in $\mathbf{N}_G(X)$ stets zu einer Involution $s \in Xy$, wobei y der Involution (12) (34) entspricht, konjugiert ist, deren zentralisator in T die Ordnung 2^{11} hat. Da $\mathbf{C}_G(e)$ die Gruppe E enthält, hat das Zentrum einer Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(e)$ die Ordnung vier. Da $|\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(s))| = 8$ ist, folgt nun ein Widerspruch.

(3.13) Lemma. *Die Voraussetzungen seien wie in* (3.7). *Setze* $\langle z\rangle = (E \cap X)$. *Es enthalte* $\mathbf{N}_G(X)$ *eine Sylow 2-Untergruppe von G. Ist* $R \simeq \Sigma_8$, *so ist* $\langle z\rangle$ *stark abgeschlossen in X bezüglich G.*

Beweis. Nach (3.8) (ii) wissen wir, daß $E \cap X$ in X bezüglich $\mathbf{N}_G(X)$ stark abgeschlossen ist. Sei T eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(X)$. Ist $x \neq z$ eine Involution in X, die zu z in G konjugiert ist, so gibt es ein $X_1 \neq X$ in T und ein $g \in G$ mit $X^g = X_1$ und $x^g = z$. Enthält X_1 ein Element aus Xe, wobei $e \in E - (E \cap X)$ ist, so ist $\mathbf{C}_X(e)$ in X_1 enthalten. Man sieht nun leicht, daß X_1 in T normal ist. Weiter ist X_1 eindeutig bestimmt. Dann wäre aber X zu X_1 in $\mathbf{N}_G(T)$ konjugiert. Das ist ein Widerspruch. Also ist $|X_1X/X| \leqslant 8$. Somit können wir annehmen, daß X_1X/X der Gruppe $\langle(12), (34), (56)\rangle$, $\langle(12), (34)\rangle$ oder $\langle(12)\rangle$ entspricht.

Sei zuerst $X_1X/X = \langle(12), (34)\rangle$. Sei T_1 eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(X)}(X_1)$. Dann ist T_1/X_1 zu $D_8 \times D_8$ isomorph. Da X_1 zu X in G konjugiert ist, ist eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(X_1)/X_1$ zu $D_8 \wr Z_2$ isomorph. Sei T_2 eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(X_1)$, die T_1 enthält. Es sei weiter $\mathbf{Z}(T_1/X_1) = \langle r_1, r_2\rangle$ und $\mathbf{Z}(T_2/X_1) = \langle r_1r_2\rangle$. Dann rechnet man leicht $z \notin [r_1, X_1] \neq [r_2, X_1] \not\ni z$ nach. Also ist $z \in \mathbf{Z}(T_2)$. Damit ist $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{N}_G(X_1))$.

Setze $T_3 = \mathbf{C}_T(\mathbf{Z}_2(T))$. Dann ist $|T_3| = 2^{14}$. Ist Y eine Untergruppe von T, die in G zu X konjugiert ist, so daß $|\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(X)}(Y)|$ durch 2^{14} geteilt wird, so ist YX/X in $\mathbf{N}_G(X)/\mathbf{C}_G(X)$ zu $\langle(12), (34)\rangle$ konjugiert. Also ist $\langle z\rangle$ in $\mathbf{Z}_2(T)$ bezüglich G stark abgeschlossen.

Sei jetzt $X_1X/X = \langle(12)\rangle$. Sei wieder T_1 eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(X)}(X_1)$. Dann ist $|T_1/X_1| = 32$. Weiter ist $|\mathbf{Z}(T_1/X_1)| = 8$. Sei nun T_2 eine 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(X_1)$ mit $|T_2 : T_1| = 2$. Ist $t \in T_2 - T_1$, so ist $X^t \neq X$. Nun ist aber X^t im vollen Urbild von $\mathbf{Z}(T_1/X_1)$ enthalten. Eine leichte Rechnung zeigt jetzt $|X^t \cap X| = 2^6$. Also ist X^tX/X in $\mathbf{N}_G(X)/\mathbf{C}_G(X)$ zu $\langle(12), (34)\rangle$ konjugiert. Wie oben gezeigt, folgt hieraus $z \in \mathbf{Z}(T_2)$. Ist T_3 eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(X_1)$, die T_2 enthält, so ist $\mathbf{Z}(T_2) \subseteq \mathbf{Z}_2(T_3)$. Da $\langle z\rangle$ in $\mathbf{Z}_2(T)$ und damit auch in $\mathbf{Z}_2(T_3)$ bezüglich G stark abgeschlossen ist, folgt jetzt $z \in \mathbf{Z}(T_3)$. Also ist $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{N}_G(X_1))$. Genauso sieht man auch, daß X_1X/X nicht der Gruppe $\langle(12, (34), (56)\rangle$ entspricht. Somit ist das Lemma bewiesen.

(3.14) Lemma. *Die Voraussetzungen seien wie in* (3.13). *Dann ist X elementar abelsch und R zu Σ_9 oder A_{10} isomorph.*

Beweis. Setze wieder $\langle z\rangle = E \cap X$. Nach (3.13) ist $E \cap X$ in X bezüglich G stark angeschlossen. Sei T eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(X)$ und r eine Involution aus $T - X$, die in G zu z konjugiert ist. Sei zunächst $r \in XF$. Dann ist $Z = [r, X]$ elementar abelsch von der Ordnung 16. Weiter sind alle Involutionen aus Zz zu r konjugiert. Sei nun $g \in G$ mit $r^g = z$ und $\mathbf{C}_T(r)^g \subseteq T$. Dann ist $Z^g \cap X = 1$. Somit existiert in $T - X$ eine abelsche Gruppe Y von der Ordnung 16 mit $Y \cap X = 1$ und $Y^g \subseteq X$. Da Z in $\mathbf{C}_T(r)$ normal ist, folgt $[Z, Y] = 1$. Also ist Y eindeutig bestimmt. Es entspricht YX/X der Gruppe $\langle(12), (34), (56), (78)\rangle$. Nun folgt aber mit (3.9) ein Widerspruch. Somit ist gezeigt, daß $E \cap X$ in XF bezüglich G stark abgeschlossen ist.

Es entspreche nun Xr dem Element (12) (34). Die Operation von $\mathbf{N}_G(F)$ auf X liefert, daß es in X ein Element π_1 gibt, dessen zentralisator in R' zu A_7 isomorph ist. Also ist $X = \langle\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8\rangle$, wobei R' auf X wie auf den Indices operiert. Weiter ist $(\pi_1)^2 \in E \cap X$. Es folgt, daß $\mathbf{C}_X(r) = \langle\pi_1\pi_2, \pi_3\pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8\rangle$ ist. Da $(\mathbf{N}_G(F) \cap \mathbf{N}_G(X))\, X\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(X))/\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(X))(E \cap X)$ über $X/(E \cap X)$ zerfällt, enhält $\mathbf{N}_G(X)/\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(X))$ eine Untergruppe B, die zu A_8 oder $\hat{A}_8$ isomorph ist. Wir wählen nun einen Vertreter $y \in B$ für Xr. Dann können wir annehmen, daß $r = y$, $\pi_7 y$, $\pi_5\pi_6 y$, $\pi_5\pi_6\pi_7 y$ oder $\pi_5\pi_6\pi_7\pi_8 y$ ist. Sei zunächst $y^2 = z$. Dann entspricht r der Involution $\pi_7 y$ oder $\pi_5\pi_6\pi_7 y$. Weiter ist $(\pi_1)^2 = z$. Dann enthält X aber eine Untergruppe Z von der Ordnung 16, so daß alle Elemente in Zr zu r konjugiert sind. Sei nun $g \in G$ mit $r^g = z$ und $\mathbf{C}_T(r)^g \subseteq T$ Dann ist $Z^g \cap X = 1$. Das liefert aber $Z^g \cap XF \neq 1$. Das ist ein Widerspruch. Also ist $y^2 = 1$. Insbesondere ist B zu A_8 isomorph. Sei $x \in X$ eine Involution. Ist die Ordnung von $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(X)}(x)$ nicht durch 2^{12} teilbar, so folgt, daß das Zentrum einer Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(X)}(x)$ mindestens die Ordnung acht hat.

Da $E \subseteq \mathbf{C}_G(e)$ für $e \in E - (E \cap X)$, folgt, daß das Zentrum einer Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(e)$ die Ordnung vier hat. Mit (3.9) erhalten wir jetzt, daß e zu keiner Involution aus X in G konjugiert ist.

Sei nun r zunächst so gewählt, daß es eine Involution e in $\mathbf{C}_T(r)$ gibt, wobei Xe dem Element (12) (34) (56) (78) entspricht. Sei weiter $e \in \mathbf{C}_T(r)'$.

Sei jetzt $g \in G$ mit $r^g = z$ und $\mathbf{C}_T(r)^g \subseteq T$. Dann können wir annehmen, daß Xe^g dem Element (12) (34) oder Xe entspricht. Es entspreche zunächst Xe^g dem Element (12) (34). Indem wir g abändern, können wir $r^g = z$ und $e^g = \pi_7 y$, $\pi_5\pi_6 y$ oder $\pi_5\pi_6\pi_7 y$ erreichen. Da das Zentrum einer Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(e)$ nach (3.9) die Ordnung vier hat, ist e nicht zu er in G konjugiert. Also ist e^g nicht zu $e^g z$ konjugiert. Das liefert $e^g = \pi_7 y$ oder $\pi_5\pi_6\pi_7 y$. Insbesondere ist X elementar abelsch. Da nun $\pi_7 y$ nicht zu $\pi_5\pi_6\pi_7 y$ konjugiert ist, folgt, daß $\mathbf{C}_T(e^g)$ die Ordnung 2^{10} hat. Sei nun T_1 eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(e^g)$, die $\mathbf{C}_T(e^g)$ enthält. Weiter sei $h \in G$ mit $T_1{}^h = \mathbf{C}_T(e)$. Sei E_1 eine Untergruppe von T_1 mit $E_1{}^h = E$. Dann ist $|\mathbf{C}_{T_1}(E_1) \cap \mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(e^g))| \geqslant 4$. Also gibt es in $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(e^g))$ eine Vierergruppe V mit $V^h \subseteq E$. Nun ist aber $|V \cap X| = 2$. Das liefert $V = \langle z, e^g \rangle$. Dann ist aber e^g zu $e^g z$ konjugiert, da $V \subseteq E_1$ ist. Also ist $\pi_7 y$ zu $\pi_5\pi_6\pi_7 y$ in G konjugiert. Das ist aber ein Widerspruch. Also können wir annehmen daß es ein $g \in G$ gibt, so daß $r^g = z$ und $e^g = e$ ist. Dann ist aber e zu er in G konjugiert. Das widerspricht $|\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(e))| = 4$.

Somit haben wir gezeigt, daß $r = \pi_7 y$, $\pi_5\pi_6 y$ oder $\pi_5\pi_6\pi_7 y$ gilt. Insbesondere gibt es in X eine Untergruppe Z von der Ordnung acht, so daß alle Elemente aus Zr zu r konjugiert sind. Da $E \cap X$ in XF stark abgeschlossen ist, gibt es in X keine Untergruppe U von der Ordnung 16, so daß alle Elemente in Ur zu r konjugiert sind. Das liefert $|\mathbf{C}_T(\pi_5\pi_6 y)| = 2^{11}$ und

$$|\mathbf{C}_T(\pi_7 y)| = |\mathbf{C}_T(\pi_5\pi_6\pi_7 y)| = 2^{10}.$$

Sei zuerst $r = \pi_5\pi_6 y$. Dann ist $z \in \mathbf{C}_T(r)'$. Sei $g \in G$ mit $r^g = z$. Dann können wir $z^g = r$ annehmen. Also ist z zu r in $\mathbf{N}_G(\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r)))$ konjugiert. Nun rechnet man leicht nach, daß ein Element $w \in \mathbf{N}_G(X)$, das dem Element (12) entrspricht, in X die Gruppe $\langle \pi_1\pi_2, \pi_3\pi_4, \pi_3\pi_5, \pi_3\pi_6, \pi_3\pi_7, \pi_3\pi_8 \rangle$ zentralisiert. Weiter gilt $[\pi_8, w] = 1$ oder z. Somit ist $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r)) = \langle \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4, \pi_5\pi_6, \pi_7\pi_8, r \rangle$. Insbesondere gibt es genau fünf Elemente in $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r))$, die in G zu z konjugiert sind. Also operiert ein Element von der Ordnung 5 nicht trivial auf $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r))$. Da aber das Erzeugnis der in G zu z konjugierten Elemente aus $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r))$ eine elementar abelsche Gruppe von der Ordnung acht ist, erhalten wir jetzt einen Widerspruch.

Sei nun $r = \pi_7 y$ oder $\pi_5\pi_6\pi_7 y$. Dann ist X elementar abelsch. Weiter ist $\pi_7 y$ nicht zu $\pi_5\pi_6\pi_7 y$ in G konjugiert. Somit ist $\langle \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4, \pi_5\pi_6, \pi_7\pi_8, r \rangle = P \subseteq \mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r))$. Ist $[\pi_8, w] = 1$, so gilt $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r)) = \langle P, \pi_7 \rangle$. Somit ist $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r)) = \langle \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4, \pi_5\pi_6, \pi_7, \pi_8, r \rangle$. Sei nun 2^{11} kein Teiler der Ordnung von $\mathbf{C}_{\mathbf{C}_G(z)}(r)$. Dann ist r zu z in $\mathbf{N}_G(\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r)))$ konjugiert. Das liefert, daß ein Element von der Ordnung fünf nicht trivial auf $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r))$ opereiert. Dann gilt aber

$$4 \leqslant |\mathbf{C}_T(r)' \cap \mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r))| \leqslant 8.$$

Das ist ein Widerspruch. Somit haben wir gezeigt, daß r in $\mathbf{C}_G(z)$ zu einer Involution aus Xw konjugiert ist. Wir bezeichnen diese Involution mit w. Dann ist $2^{11} \leqslant |\mathbf{C}_T(w)| \leqslant 2^{12}$ und $2^4 \leqslant |\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(w))| \leqslant 2^5$.

Sei zunächst $|\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(w))| = 32$. Dann ist $[\pi_8, w] = 1$. Sei $h \in \mathbf{C}_G(z)$ mit $r^h = w$ und $\mathbf{C}_T(r)^h \subseteq \mathbf{C}_T(w)$. Dann folgt $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r))^h = \mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(w))$. Da wir nun annehmen können, daß 2^{12} die Ordnung von $\mathbf{C}_{\mathbf{C}_G(z)}(w)$ nicht teilt, folgt, daß w zu z in $\mathbf{N}_G(\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(w)))$ konjugiert ist. Also ist z zu r in $\mathbf{N}_G(\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r)))$ konjugiert. Sei L das Erzeugnis aller Involutionen aus $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r))$, die in G zu z konjugiert sind. Dann ist $|L| = 16$. Es ist w nicht in $\mathbf{C}_T(w)'$ enthalten. Somit gibt es in L eine echte Untergruppe $L_1 \neq 1$, die in $\mathbf{N}_G(\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r)))$ normal ist. Da aber z genau fünf Konjugierte unter $\mathbf{N}_G(\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r)))$ hat, erhalten wir nun einen Widerspruch.

Somit haben wir $K = \mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(w)) = \langle \pi_1\pi_2, \pi_3\pi_4\pi_5\pi_6, \pi_7\pi_8, w \rangle$. Weiter ist z zu w in $\mathbf{N}_G(K)$ konjugiert. Wäre $|\mathbf{C}_T(w)' \cap K| = 8$, so wäre $z \in \mathbf{C}_T(w)' \cap K$. Dann ist aber $w \not\sim z$ in $\mathbf{N}_G(K)$. Also ist $|\mathbf{C}_T(w)' \cap K| = 4$. Sei nun T_2 eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_{\mathbf{C}_G(z)}(r)$, die $\mathbf{C}_T(r)$ enthält. Dann gibt es ein $h \in \mathbf{C}_G(z)$ mit $T_2^h = \mathbf{C}_T(w)$. Sei zunächst $|\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r)) \cap \mathbf{C}_T(r)'| = 4$. Dann ist $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r)) \cap \mathbf{C}_T(r)' = \langle \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4, \pi_5\pi_6 \rangle$. Da r zu $\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4 r$ aber nicht zu $\pi_5\pi_6 r$ oder $\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4\pi_5\pi_6 r$ konjugiert ist, folgt nun, daß $\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4 \in \mathbf{Z}(T_2) \cap T_2'$ gilt. Somit gibt es in $K \cap \mathbf{C}_T(w)'$ eine Involution s, so daß w zu ws in G konjugiert ist. Da z zu w in $\mathbf{N}_G(K)$ konjugiert ist, folgt, daß es in $\mathbf{C}_T(w)' \cap K$ eine Involution t gibt, so daß z zu zt konjugiert ist. Da X die Gruppe $\langle \mathbf{C}_T(w)' \cap K, z \rangle$ enthält, ist das nicht möglich.

Somit haben wir $|\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r)) \cap \mathbf{C}_T(r)'| = 8$ gezeigt. Insbesondere folgt, daß $|\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r)) \cap \mathbf{C}_T(r)' \cap \mathbf{Z}(T_2)| = 4$ ist. Weiter ist $\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4$ nicht in dieser Gruppe enthalten. Somit gibt es ein $a \in T_2 - \mathbf{C}_T(r)$, so daß

$$\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4 \neq (\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4)^a \in \mathbf{C}_T(r)' \cap \mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r))$$

ist. Nun ist $\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4 r$ zu r in G konjugiert. Also ist

$$(\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4)^a = \pi_7\pi_8, \ \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4\pi_7\pi_8 \ \text{oder} \ zr.$$

Wegen der Struktur von $\mathbf{C}_T(w)$ ist r nicht zu $\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4(\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4)^a r$ konjugiert. Das liefert nun $(\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4)^a = zr$. Also ist $\pi_5\pi_6\pi_7\pi_8 r$ in $\mathbf{Z}(T_2) \cap T_2'$ enthalten. Nun ist aber $\pi_5\pi_6\pi_7\pi_8 rz$ zu z in G konjugiert. Da r zu w in $\mathbf{C}_G(z)$ konjugiert ist, folgt, daß es in $K \cap \mathbf{C}_T(w)'$ eine Involution t gibt, so daß z zu zt in G konjugiert ist. Da $\langle z \rangle$ in X stark abgeschlossen ist, erhalten wir nun einen Widerspruch. Wir haben insegesamt gezeigt, daß $E \cap X$ im vollen Urbild von R' bezüglich G stark angeschlossen ist.

Somit entspricht die Nebenklasse Xr entweder der Involution (12) oder der Involution (12) (34) (56). Sei $V \subseteq X$ eine Vierergruppe, so daß alle Elemente aus Vr zu r in G konjugiert sind, $g \in G$ mit $r^g = z$ und $\mathbf{C}_T(r)^g \subseteq T$ und schließlich T_1 eine Sylow 2-Untergruppe des vollen Urbildes von R', die in T enthalten ist. Dann ist $V^g \cap T_1 \neq 1$. Insbesondere ist $\langle z \rangle$ in T_1 nicht stark abgeschlossen.

Das ist aber ein Widerspruch. Also ist $|\mathbf{C}_T(r)| = 2^{12}$. Weiter entspricht rX dem Element (12). Schließlich haben wir noch, daß z kein Quadrat in $\mathbf{C}_T(r)$ ist. Also ist X elementar abelsch. Wir erhalten nun $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r)) = \langle \pi_1\pi_2, \pi_3\pi_4\pi_5\pi_6, \pi_7\pi_8, r\rangle$. Die Elemente in $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r))$, die in G zu z konjugiert sind, sind z, r und $\pi_1\pi_2 r$. Weiter ist r zu z in $\mathbf{N}_G(\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r)))$ konjugiert. Das liefert, daß

$$\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r)) \cap \langle \mathbb{D}(\mathbf{C}_T(r)), \mathbf{C}_T(r)'\rangle = \langle \pi_3\pi_4\pi_5\pi_6, \pi_7\pi_8\rangle$$

ist. Insbesondere zentralisiert r eine Involution f, so daß Xf dem Element (56) (78) entspricht. Das liefert, daß $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(X)}(z)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(X)}(z))$ eine zu A_8 isomorphe Untergruppe enthält. Somit gibt es in T eine elementar abelsche Untergruppe J von der Ordnung acht, so daß JX/X der Gruppe $\langle(12)(34), (12)(56), (12)(78)\rangle$ entspricht. Weiter ist $[J, r]$ in X enthalten. Sei $J_1 = \mathbf{C}_J(r)$. Dann ist $|J : J_1| \leqslant 2$. Sei $d \in J$ mit $[d, r] = \pi_1\pi_2$. Dann ist $\pi_1 d$ in $\mathbf{C}_T(r)$ enthalten. Weiter ist $(\pi_1 d)^2 = 1$. Also entspricht dX dem Element (56)(78), (34)(56) oder (34)(78). Sei nun d_1 ein Element aus J, so daß Xd_1 dem Element (12) (34) entspricht. Dann ist $[d_1, r] = 1$. Aber $[d_1, d] = \pi_1\pi_2$. Das widerspricht aber der Struktur von $\mathbf{C}_T(r)'$. Also ist $[r, J] = 1$. Das liefert, daß die Gruppe $Y = \langle \pi_1\pi_2, \pi_3\pi_4, \pi_5\pi_6, \pi_7\pi_8, J, r\rangle$ elementar abelsch von der Ordnung 256 ist.

Wir bestimmen nun die Struktur von $\mathbf{N}_G(Y)$. Da Y ein Element $e \in E - (E \cap X)$ enthält, so daß $Xe \in \mathbf{Z}(T/X)$ ist, folgt nun, daß Y in T normal ist. Sei $g \in G$ mit $r^g = z$ und $\mathbf{C}_T(r)^g \subseteq T$. Es liefert (3.9) zusammen mit $|\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(e))| = 4$, daß $Y^g \neq X$ ist. Ist $|Y^g \cap X| \geqslant 32$, so liefert eine leichte Rechnung, daß z in Y^g höchstens 7 G-Konjugierte hat. Da aber in Y genau 9 G-Konjugierte von z liegen, erhalten wir einen Widerspruch. Also ist $|Y^g \cap X| = 16$. Dann folgt, daß $Y^g = Y$ ist. Also ist z zu r in $\mathbf{N}_G(Y)$ konjugiert. Da z nun genau 9 Konjugierte unter $\mathbf{N}_G(Y)$ hat, erhalten wir, daß $\mathbf{N}_G(Y)/\mathbf{C}_G(Y)$ zu einer Untergruppe von Σ_9 isomorph ist. Es hat $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(X)}(Y)/\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(X)}(Y)$ die Ordnung $2^7 \cdot 3^3$ Also teilt $2^7 \cdot 3^3$ die Ordnung von $\mathbf{N}_G(Y)/\mathbf{C}_G(Y)$. Die Untergruppenstruktur von A_9 liefert jetzt, daß $\mathbf{N}_G(Y)/\mathbf{C}_G(Y)$ zu Σ_9 isomorph ist. Weiter ist Y zum 8-dim irreduziblen Teil des Permutationsmoduls isomorph. Also haben die Bahnen, die $\mathbf{N}_G(Y)/\mathbf{C}_G(Y)$ auf Y bewirkt, die Längen 9, 36, 84 und 126. Insbesondere ist 2^{12} ein Teiler der Ordnung von $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(Y)}(y)$ für jedes $y \in Y$. Das widerspricht aber (3.9).

Insgesamt haben wir somit gezeigt, daß $E \cap X$ in T bezüglich G stark abgeschlossen ist. Anwendung von [2] liefert nun einen Widerspruch zur Einfachheit von G.

(3.15) Lemma. *Die Voraussetzungen seien wie in* (3.7). *Es enthalte* $\mathbf{N}_G(X)$ *eine Sylow* 2-*Untergruppe von* G. *Ist* R *zu* Σ_9 *isomorph, so kontrolliert* $\mathbf{N}_G(X)$ *die Fusion in* X.

Beweis. Sei T eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(X)$. Sei weiter Y eine elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 2^8 in T mit $Y \neq X$. Setze wieder $X = \langle \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8 \rangle$. Hierbei operiere R wieder auf den Indices. Es wird dabei das Element π_9 mit $\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4\pi_5\pi_6\pi_7\pi_8$ identifiziert. Jetzt rechnet man leicht nach, daß Y in $\mathbf{N}_G(X)$ zu einer der folgenden vier Gruppen konjugiert ist.

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \langle \pi_1\pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8, r_1 \rangle, \\
Y_2 &= \langle \pi_1\pi_2, \pi_3\pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8, r_1, r_2 \rangle, \\
Y_3 &= \langle \pi_1\pi_2, \pi_3\pi_4, \pi_5\pi_6, \pi_7, \pi_8, r_1, r_2, r_3 \rangle, \\
Y_4 &= \langle \pi_1\pi_2, \pi_3\pi_4, \pi_5\pi_6, \pi_7\pi_8, r_1, r_2, r_3, r_4 \rangle.
\end{aligned}$$

Hierbei gilt $Xr_1 \mathrel{\hat{=}} (12)$, $Xr_2 \mathrel{\hat{=}} (34)$, $Xr_3 \mathrel{\hat{=}} (56)$ und $Xr_4 \mathrel{\hat{=}} (78)$.

Man rechnet nach, daß Y_4 in T normal ist. Da X und Y_4 die beiden einzigen normalen elementar abelschen Untergruppen von der Ordnung 2^8 in T sind, folgt nun $Y \neq Y_4$.

Sei nun $Y = Y_2$. Da $r_1 r_2$ eine Involution ist, folgt nun, daß $\mathbf{N}_G(X)/\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(X))$ eine zu A_9 isomorphe Untergruppe enthält. Sei $T_1 = \mathbf{N}_T(Y_2)$. Dann ist T_1/Y_2 zu $D_8 \times D_8$ isomorph. Das Urbild von $\mathbf{Z}(T_1/Y_2)$ ist $\langle Y_2, \pi_1\pi_3, r_5 \rangle$, wobei Xx_5 dem Element (56) (78) entspricht. Weiter sind $Y_2\pi_1\pi_3$ und $Y_2 r_5$ das Quadrat von jeweils 10 Elementen in T_1/Y_2. Sei jetzt T_2 eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(Y_2)$ mit $|T_2 : T_1| = 2$. Dann ist $\langle Y_2, \pi_1\pi_3 \rangle$ zu $\langle Y_2, r_5 \rangle$ in T_2 konjugiert. Es liegen alle Involutionen aus $Y_2\pi_1\pi_3$ in X. In $Y_2 r_5$ gibt es eine Involution e, die in $\mathbf{N}_G(X)$ zu einer Involution aus $E - (E \cap X)$ konjugiert ist. Da 2^{12} die Ordnung des Zentralisators einer jeden Involution aus X teilt, erhalten wir jetzt mit (3.9) einen Widerspruch.

Sei jetzt $Y = Y_1$. Dann ist $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(X)}(Y)/\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(X)}(Y)$ zu $Z_2 \times \Sigma_7$ isomorph. Sei T_1 eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(X)}(Y)$. Dann ist $|T_1/Y| = 32$ und $|\mathbf{Z}(T_1/Y)| = 8$. Sei jetzt T_2 eine 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(Y)$ mit $|T_2 : T_1| = 2$. Ist $t \in T_2 - T_1$, so ist $X^t \neq X$. Nun ist $|XY/Y \cap \mathbf{Z}(T_1/Y)| = 2$. Also ist $|X^tY/Y \cap \mathbf{Z}(T_1/Y)| = 2$. Insbesondere ist $|X^t \cap Y| = 2^7$. Das liefert jetzt aber $|X^t \cap X| = 2^6$. Dann ist X^t in $\mathbf{N}_G(X)$ zu Y_2 konjugiert. Wie wir eben gezeigt haben ist das nicht möglich. Also ist T_1 eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(Y)$. Insbesondere ist Y_1 nicht zu X in G konjugiert.

Sei nun zuletzt $Y = Y_3$. Dann ist $T_1 = Y\langle \pi_1, \pi_3, \pi_5, r_4, r_6 \rangle$, wobei Xr_6 dem Element (13) (24) entspricht, eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(X)}(Y)$. Jetzt liefert die Struktur von $\mathbf{N}_G(X)$, daß es in $\mathbf{N}_G(Y_3)$ ein 2-Element gibt, das $Y_3X\langle r_4 \rangle$ normalisiert, aber nicht X. Nun sieht man sofort, daß X zu Y_1 oder Y_2 in G konjugiert ist. Das ist aber ein Widerspruch. Damit ist das Lemma bewiesen.

(3.16) Lemma. *Die Voraussetzungen seien wie in* (3.7). *Weiter enthalte* $\mathbf{N}_G(X)$ *eine Sylow* 2-*Untergruppe von* G. *Dann ist* R *zu* A_{10} *isomorph.*

Beweis. Sei e eine Involution aus $E - (E \cap X)$. Weiter sei e zu einer Involution $r \in X$ in G konjugiert. Setze $Z = [X, e]$. Dann hat Z die Ordnung 16.

Weiter sind alle Elemente aus Ze zu e konjugiert. Sei nun T_1 eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(e)$, die $\mathbf{C}_T(e)$ enthält, wobei T eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(X)$ ist, so daß Xe in $\mathbf{Z}(T/X)$ enthalten ist. Sei weiter $g \in G$ mit $e^g = r$ und $T_1^g \subseteq T$. Dann gibt es in T_1 eine elementar abelsche Untergruppe X_1 mit $X_1^g = X$. Nach (3.9) wissen wir, daß $\mathbf{N}_G(X)/\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(X))$ keine zu A_8 isomorphe Untergruppe enthält. Also gilt $|X_1 \cap \mathbf{C}_T(e)| \leqslant 32$. Sei zunächst $|X_1 \cap \mathbf{C}_T(e)| = 32$. Dann ist $Z \subseteq X_1$ und $Z^g \subseteq X$. Das liefert, daß $r \in \mathbf{Z}_2(T) - \mathbf{Z}(T)$ ist. Sei S eine Sylow 2-Untergruppe von Σ_9, so ist T_1/X_1 zu $S/\mathbf{Z}(S)$ isomorph. Aber $\mathbf{C}_T(r)/X$ ist zu $D_8 \times D_8$ isomorph. Das ist ein Widerspruch. Also ist $|X_1 \cap \mathbf{C}_T(e)| = 16$. Dann ist $e \sim z$, wobei $\langle z \rangle = E \cap X$ ist. Nun ist $|Z^g \cap X| \geqslant 8$. Das würde aber liefern, daß alle in $\mathbf{N}_G(X)$ zu z konjugierte Involutionen eine elementar abelsche Gruppe von der Ordnung höchstens 32 erzeugen. Das ist ein Widerspruch. Somit haben wir gezeigt, daß X in XF bezüglich G stark abgeschlossen ist.

Sei nun s eine Involution aus T, die in G zu einer Involution $r \in X$ konjugiert ist. Es entspreche zunächst Xs dem Element (12) (34). Insbesondere enthält $\mathbf{N}_G(X)/\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(X))$ eine zu A_9 isomorphe Untergruppe. Indem wir einen Vertreter y aus dieser Untergruppe für die Nebenklasse Xs wählen, können wir $s = y$, $\pi_5\pi_6\pi_7\pi_8 y$ oder $\pi_5\pi_6 y$ annehmen. Hierbei ist wieder $X = \langle \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8 \rangle$ mit der üblichen Operation. Insbesondere gibt es in $\mathbf{C}_T(s)$ stets eine Involution e, die zu einer Involution aus $E - (E \cap X)$ in G konjugiert ist. Nach (3.9) wissen wir, daß 2^{12} die Ordnung von $\mathbf{C}_G(e)$ nicht teilt. Weiter ist das Zentrum einer Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(e)$ elementar abelsch von der Ordnung vier. Sei nun $g \in G$ mit $s^g = r$ und $\mathbf{C}_T(s)^g \subseteq T$. Dann ist $e^g \in T$.

Sei zuerst $e^g \in \mathbf{N}_G(X)'$. Dann folgt, daß e^g in $\mathbf{N}_G(X)$ zu e konjugiert ist. Also ist es in G zu e konjugiert, da alle Involutionen in Xe zu e konjugiert sind. Nun entspricht aber Xes stets dem Element (56) (78). Da stets 2^{11} die Ordnung einer Sylow 2-Untergruppe des Zentralisators eines solchen Elementes teilt, erhalten wir jetzt einen Widerspruch durch Vergleich der Zentren.

Sei nun $e^g \notin \mathbf{N}_G(X)'$. Dann ist $s = \pi_5\pi_6 y$. Insbesondere ist weder y noch $\pi_5\pi_6\pi_7\pi_8 y$ zu einem Element aus X konjugiert. Ist w eine Involution in T, so daß Xw dem Element (12) entspricht, so teilt 2^{12} die Ordnung von $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(X)}(w)$. Also entspricht Xe^g dem Element (12) (34) (56). Weiter können wir e^g so wählen, daß $2^9 \leqslant |\mathbf{C}_T(e^g)| \leqslant 2^{10}$ gilt.

Sei zunächst $|\mathbf{C}_T(e^g)| = 2^{10}$. Dann ist $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(e^g)) = \langle \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4, \pi_5\pi_6, \pi_7\pi_8, e^g \rangle$. Weiter ist $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(e^g)) \cap \mathbf{C}_T(e^g)' = \langle \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4, \pi_7\pi_8 \rangle$. Aber kein Element aus dieser Gruppe ist zu z in G konjugiert. Das ist ein Widerspruch.

Sei nun $|\mathbf{C}_T(e^g)| = 2^9$. Dann sind alle Involutionen in Xe^g in G konjugiert. Insbesondere ist es zu e in G konjugiert. Das ist aber wie oben ein Widerspruch. Somit haben wir gezeigt, daß X in $\mathbf{N}_G(X)' \cap T$ bezüglich G stark abgeschlossen ist.

Entspreche nun Xs dem Element (12). Setze $Y = \mathbf{C}_X(s)\langle s \rangle$. Dann ist Y elementar abelsch von der Ordnung 2^8. Weiter ist $|\mathbf{C}_T(s)| = 2^{12}$. Es ist

$\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(s)) = \langle \pi_1\pi_2, \pi_3\pi_4\pi_5\pi_6, \pi_7\pi_8, s\rangle$. Da $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(s))$ Vertreter für alle $\mathbf{N}_G(X)$-Konjugiertenklassen aus Xs enthält, folgt, daß alle Involutionen aus $Y - (Y \cap X)$ in G zu Involutionen aus X konjugiert sind.

Wir erhalten somit eine Involution t in $Y - (Y \cap X)$, so daß t genau zwei G-Konjugierte in $Y - (X \cap Y)$ besitzt. Also ist xt mit $x \in X$ genau dann in G zu t konjugiert, falls $x \in \langle \pi_1\pi_2\rangle$ ist. Wir betrachten jetzt $\mathbf{C}_T(t)$. Es ist $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(t)) = \langle \pi_1\pi_2, \pi_3\pi_4\pi_5\pi_6, \pi_7\pi_8, t\rangle$. Weiter ist $\langle \pi_3\pi_4\pi_5\pi_6, \pi_7\pi_8\rangle$ in $\mathbf{C}_T(t)'$ enthalten. Sei $\pi_1\pi_2 \in \mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(t)) \cap \langle \mathbf{C}_T(t)', \mathbb{D}(\mathbf{C}_T(t))\rangle$. Sei nun T_1 eine Untergruppe von $\mathbf{C}_G(t)$ mit $| T_1 : \mathbf{C}_T(t)| = 2$. Da t und $\pi_1\pi_2 t$ alle G-Konjugierte von t in $t(\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(t)) \cap \langle \mathbf{C}_T(t)', \mathbb{D}(\mathbf{C}_T(t))\rangle)$ sind, folgt, daß $\langle t, \pi_1\pi_2\rangle$ in $\mathbf{Z}(T_1)$ enthalten ist. Nach (3.15) kontrolliert $\mathbf{N}_G(X)$ die Fusion in X. Also sind auch $\pi_7\pi_8$ und z in $\mathbf{Z}(T_1)$ enthalten. Das liefert $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(t)) \subseteq \mathbf{Z}(T_1)$. Sei nun $g \in G$ mit $T_1{}^g \subseteq T$. Dann ist $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(t))^g \subseteq X$. Da $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(t))$ Verterter aller vier G-Klassen, die X anschneiden, enthält, folgt, daß T_1 zu einer Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(X)}(\pi_1\pi_2)$ konjugiert ist. Das Zentrum einer solchen Sylow 2-Untergruppe hat aber die Ordnung acht. Das ist ein Widerspruch. Somit haben wir gezeigt, daß

$$\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(t)) \cap \langle \mathbf{C}_T(t)', \mathbb{D}(\mathbf{C}_T(t))\rangle = \langle \pi_3\pi_4\pi_5\pi_6, \pi_7\pi_8\rangle$$

ist. Wie im Beweis von (3.14) erhalten wir jetzt, daß T eine elementar abelsche Untergruppe U besitzt, mit $t \in U$, $| U | = 2^8$ und $| U \cap X | = 16$. Es entspricht dann UX/X der Gruppe $\langle (12), (34), (56), (78)\rangle$. Da U ein Element aus $E - (E \cap X)$ enthält, ist U weder zu X noch zu Y in G konjugiert. Weiter wissen wir, daß $\mathbf{N}_G(X)'/\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(X)')$ über X zerfällt. Nun liefert (3.9), daß kein Element aus $E - (E \cap X)$ zu einem Element v, so daß Xv dem Element (12) (34) entspricht, in G konjugiert ist. Ist V eine elementar abelsche Untergruppe von T, so daß VX/X einer Gruppe der Form $\langle (12), (34)\rangle$ entspricht, so ist U nicht zu V in G konjugiert. Sei nun V eine Untergruppe von T, die zu U konjugiert ist. Es entspreche VX/X der Gruppe $\langle (12), (34), (56)\rangle$. Dann gibt es in V mindestens 127 Involutionen, die in G zu Involutionen aus X konjugiert sind. Also muß es auch in U mindestens 127 Involutionen dieser Art geben. Das ist aber nur dann möglich, falls jede Involution $w \in T$, so daß Xw in $\mathbf{N}_G(X)/\mathbf{C}_G(X)$ zu der Involution (12) (34) (56) konjugiert ist, in G zu einer Involution aus X konjugiert ist. Dann enthält aber V keine Involution, die in G zu einer Involution aus $E - (E \cap X)$ konjugiert ist. Das ist ein Widerspruch.

Wir haben somit gezeigt, daß zwei Involutionen aus U in G genau dann konjugiert sind, wenn sie in $\mathbf{N}_G(U)$ konjugiert sind. Es induziert $\mathbf{N}_G(X)$ auf $U - (U \cap \mathbf{N}_G(X)')$ Bahnen von der Länge 8, 8, 24, 24, 32 und 32. Also hat z unter $\mathbf{N}_G(U)$ genau 9 oder 25 Konjugierte.

Habe zunächst z genau 9 Konjugierte. Dann folgt leicht, daß $\mathbf{N}_G(U)/\mathbf{C}_G(U)$ zu Σ_9 isomorph ist. Weiter ist U der 8-dim Teil des Permutationsmoduls. Dann teilt aber für alle $u \in U$ stets 2^{12} die Ordnung von $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(U)}(u)$. Das widerspricht (3.9).

Habe nun z genau 25 Konjugierte. Die Struktur von $GL_8(2)$ liefert dann, daß die Länge jeder Bahn, die $\mathbf{N}_G(U)$ auf U induziert, durch fünf teilbar ist. Also hat ein Element $e \in E - (E \cap X)$, das in U liegt genau 80 Konjugierte unter $N_G(U)$. Sei nun v ein Element aus U, so daß Xv in $N_G(X)/C_G(X)$ zu dem Element (12) (34) konjugiert ist. Dann wissen wir, daß v zu keinem Element aus X oder Xt, wobei Xt zu dem Element (21) in $N_G(X)/C_G(X)$ konjugiert ist, konjugiert ist. Weiter ist v auch nicht zu e konjugiert. Da nun e zu allen Elementen w, deren Nebenklasse Xw in $N_G(X)/C_G(X)$ zu (12) (34) (56) konjugiert ist, in G konjugiert ist, folgt, daß alle G-Konjugierte von v, die in U liegen, in $U \cap N_G(X)'$ liegen. Somit hat v genau 24, 48, 72 oder 96 Konjugierte unter $N_G(U)$. Insbesondere ist die Anzahl, der unter $N_G(U)$ zu v konjugierten Involutionen nicht durch fünf teilbar. Das ist aber ein Widerspruch. Somit haben wir gezeigt, daß die Nebenklasse Xs nicht in $N_G(X)/C_G(X)$ zu (12) konjugiert ist, falls s zu einer Involution r aus X in G konjugiert ist.

Entspreche nun zuletzt Xs dem Element (12) (34) (56). Dann ist $Z = \mathbf{C}_X(s) = \langle \pi_1\pi_2, \pi_3\pi_4, \pi_5\pi_6, \pi_7, \pi_8 \rangle$. Sei nun $g \in G$ mit $s^g \in X$ und $\mathbf{C}_T(s)^g \subseteq T$. Da es in der Nebenklasse Xs höchstens zwei G-Klassen von Involutionen gibt, folgt, daß es in X mindestens zwei Klassen von Involutionen gibt, die zu keinem Element aus $T - X$ in G konjugiert sind. Da es drei Klassen von Involutionen gibt, die ein Erzeugendensystem von Z enthalten, folgt nun $Z^g \subseteq X$. Also können wir $Z^g = Z$ annehmen. Es ist XK, wobei XK/X der Gruppe $\langle(12), (34), (56)\rangle$ entspricht, eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(Z)$. Weiter ist XK/Z elementar abelsch. Ist also s zu einem Element aus X in G konjugiert, so ist s in $\mathbf{N}_G(XK)$ zu einem Element aus X konjugiert. Das ist aber nicht möglich.

Wir haben somit insgesamt gezeigt, daß X in T bezüglich G stark abgeschlossen ist. Jetzt liefert [3] einen Widerspruch zur Einfachheit von G.

(3.17) LEMMA. *Es ist W eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(W)$.*

Beweis. Sei W keine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(W)$. Dann ist eine Sylow 2-Untergruppe X von $\mathbf{C}_G(W)$ nach (3.7) abelsch von der Ordnung 2^8. Nach (3.12) ist $\mathbf{N}_G(X)/\mathbf{C}_G(X)$ zu Σ_8, Σ_9 oder A_{10} isomorph.

Wir zeigen zunächst, daß $\mathbf{N}_G(X)$ eine Sylow 2-Untergruppe von G enthält. Sei T eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(X)$ und T_1 eine 2-Untergruppe von G mit $| T_1 : T | = 2$. Sei weiter t eine Element aus $T_1 - T$. Dann ist $X^t \neq X$. Es ist $\mathbf{Z}(T/X) \cap X_1X/X \neq 1$. Also gibt es in X_1 ein Element h, so daß Xh in $\mathbf{N}_G(X)/\mathbf{C}_G(X)$ zu (12) (34) (56) (78) konjugiert ist. Insbesondere ist $| \mathbf{C}_X(h)| = 16$. Das liefert nun, daß X_1X/X in T/X der Gruppe $\langle(12), (34), (56), (78)\rangle$ entspricht.

Sei zunächst X elementar abelsch. Dann folgt, daß es in einer Nebenklasse, die dem Element (12) (34) entspricht, Involutionen gibt. Das kann aber nur dann der Fall sein, wenn es in $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(X)}(E \cap X)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(X)}(E \cap X))$ eine zu A_8 isomorphe Untergruppe gibt. Da ein Element aus $E - (E \cap X)$ in T_1 zu einem Element aus X konjugiert ist, erhalten wir jetzt mit (3.9) und der Tatsache, daß $| \mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(e))| = 4$ ist, einen Widerspruch.

Sei nun X nicht elementar abelsch. Dann folgt mit (3.8), daß $\mathbf{N}_G(X)/\mathbf{C}_G(X)$ zu Σ_8 isomorph ist. Setze wieder $X = \langle \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8 \rangle$, wobei $o(\pi_i) = 4$ ist. In $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(X)}(E \cap X)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(X)}(E \cap X))$ gibt es eine Untergruppe B, die zu A_8 oder $\hat{A}_8$ isomorph ist. Wähle aus B Elemente y_1 und y_2, so daß $Xy_1 \triangleq (12)(34)$ und $Xy_2 \triangleq (12)(56)$. Sei zunächst B zu $\hat{A}_8$ isomorph. Dann ist $[y_1, y_2] = z$, wobei $\langle z \rangle = E \cap X$ ist. Nun gibt es aber Elemente s_1 und s_2 in X, so daß $s_1 y_1$ und $s_2 y_2$ in X^h liegen. Eine leichte Rechnung liefert nun $[s_1 y_1, s_2 y_2] \neq 1$. Das ist ein Widerspruch. Also ist B zu A_8 isomorph. Dann ist $[y_1, y_2] = 1$. Wähle nun $y_3 \in B$, so daß Xy_3 dem Element (12) (34) (56) (78) entspricht. Nach (3.9) ist y_3 zu keinem Element aus X in G konjugiert. Also liegt $\pi_1\pi_3\pi_5\pi_7 y_3 = x_3$ in X^h. Wegen $[y_1, y_3] = 1$ und $[y_1, x_3] = \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4$, folgt, daß $\pi_1\pi_3 y_1$ in X^h liegt. Da $(\pi_1\pi_3 y_1)^2 \neq z$ ist, erhalten wir nun einen Widerspruch zur Struktur von X. Damit ist gezeigt, daß $\mathbf{N}_G(X)$ eine Sylow 2-Untergruppe von G enthält. Nun folgt mit (3.16), daß $\mathbf{N}_G(X)/\mathbf{C}_G(X)$ zu A_{10} isomorph ist.

Sei T eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(X)$. Sei $Y \neq X$ eine elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 2^8 in T. Man rechnet leicht nach, daß dann YX/X der Gruppe $\langle(12)(9\ 10), (12)(34), (12)(56), (12)(78)\rangle$ entspricht. Insbesondere ist Y normal in T. Da T eine Sylow 2-Untergruppe von G ist, ist Y nicht zu X in G konjugiert. Also kontrolliert $\mathbf{N}_G(X)$ die Fusion in X.

Sei S eine 5-Sylow Untergruppe von $\mathbf{N}_G(X)/\mathbf{C}_G(X)$. Dann wird S von einem Element y normalisiert, wobei Xy in $\mathbf{N}_G(X)/\mathbf{C}_G(X)$ zu (12) (34) konjugiert ist. Da $\mathbf{C}_X(S) = 1$ ist, folgt, daß Xy Involutionen enthält. Also enthält

$$\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(X)}(E \cap X)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(X)}(E \cap X))$$

eine zu A_8 isomorphe Untergruppe. Mit (3.9) folgt nun, daß kein Element aus $E - (E \cap X)$ zu einem Element aus X in G konjugiert ist.

Sei nun y eine Involution aus T, so daß Xy zu (12) (34) in $\mathbf{N}_G(X)/\mathbf{C}_G(X)$ konjugiert ist. Weiter sei y zu einem Element aus X in G konjugiert. In der Nebenklasse Xy gibt es genau zwei $\mathbf{N}_G(X)$-Klassen von Involutionen. Die Ordnung des Zentralisators einer jeden dieser Involutionen wird durch 2^{12} geteilt. Das liefert, daß kein Element aus $E - (E \cap X)$ zu einem Element aus Xy in G konjugiert ist. Da $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(X)}(E \cap X)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(X)}(E \cap X))$ eine zu A_8 isomorphe Untergruppe besitzt, gibt es in $\mathbf{C}_T(y)$, bei geeigneter Wahl von y, ein Element e, so daß Xe dem Element (12) (34) (56) (78) entspricht und ye zu einem Element aus Xy in $\mathbf{N}_G(X)$ konjugiert ist. Sei nun $g \in G$ mit $y^g \in X$ und $\mathbf{C}_T(y)^g \subseteq \mathbf{N}_G(X)$. Dann können wir annehmen, daß $Xx^g = Xe$ ist. Da aber alle Involutionen aus Xe zu e konjugiert sind, folgt nun der Widerspruch $ye \sim e$. Damit ist gezeigt, daß X in T bezüglich G stark abgeschlossen ist. Anwendung von [3] liefert nun einen Widerspruch zur Einfachheit von G.

(3.18) Lemma. *Es ist* $\mathbf{N}_G(W)/\mathbf{C}_G(W)$ *zu* Σ_8 *isomorph. Weiter induziert* $\mathbf{N}_G(W)'/\mathbf{C}_G(W)$ *auf* W *den unzerlegbaren* 7-dim. *Teil des Permutationsmoduls, wobei ein ein*-dim. *Untermodul fest bleibt.*

Beweis. Setze $R = (\mathbf{N}_G(F) \cap \mathbf{N}_G(W))\,\mathbf{C}_G(W)/\mathbf{C}_G(W)$. Dann ist R die Erweiterung einer elementar abelschen Gruppe V von der Ordnung acht durch $L_2(7)$. Setze $U = \mathbf{N}_G(W)/\mathbf{C}_G(W)$. Sei zunächst $\mathbf{N}_U(V) \neq R$. Dann ist $\mathbf{C}_U(V) \neq V$. Es ist WF eine Sylow 2-Untergruppe des vollen Urbildes von V. Also gibt es ein Untergruppe S von $\mathbf{N}_G(W)$ mit $|\, S : WF \,| = 2$ und $[E, S] \subseteq W$. Da es in WF nur zwei $\mathbf{N}_G(F)$-Klassen von elementar abelschen Gruppen E_1 von der Ordnung 16 gibt, so daß $WE_1 = WF$ ist, folgt nun, daß es in S nur eine Klasse von solchen Untergruppen gibt. Das liefert, daß $\mathbf{C}_U(V) = J$ elementar abelsch von der Ordnung 16 ist. Somit gibt es in $J - V$ ein Element j, das von einem Element σ von der Ordnung 7 aus R zentralisiert wird. Das liefert, daß j die Gruppe $\mathbf{Z}(WF/(E \cap W))$ zentralisiert. Sei nun j_1 ein Urbild von j und e ein Element aus E, so daß We im Zentrum einer Sylow 2-Untergruppe von R enthalten ist. Dann ist $[j_1, e] \not\subseteq \mathbf{Z}(WF/(E \cap W))$. Also gibt es in $W/(E \cap W)$ Elemente, die nicht in $\mathbf{Z}(WF/(E \cap W))$ liegen und von j zentralisiert werden. Die Operation von σ liefert nun, daß $[W, j_1] \subseteq E \cap W$ ist. Dann ist aber $[W, j_1] = 1$. Dies widerspricht (3.17).

Somit ist R eine 2-lokale Untergruppe von U. Jetzt liefert die Ordnung von $L_7(2)$ zusammen mit [9], [5] und [10, Lemma (2.8)], daß $\mathbf{L}(U/O(U))$ zu A_8 isomorph ist. Nach (3.6) teilt 2^{11} die Ordnung von $\mathbf{N}_G(U)$. Also ist $U/\mathbf{O}(U)$ zu Σ_8 isomorph. Da es in WE nur zwei Konjugiertenklassen von elementar abelschen Gruppen E_1 von der Ordnung 16 gibt, so daß $WE = WE_1$ ist, folgt nun mit der Struktur von $\mathbf{N}_G(F)$, daß $\mathbf{C}_{O(U)}(EW/W) = 1$ ist. Das liefert dann aber $\mathbf{O}(U) = 1$.

Da $E \cap W$ in $\mathbf{N}_G(F)$ zentral ist, folgt nun, daß $W \cap E$ in $\mathbf{N}_G(W)$ zentral ist, da $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(W)}(W \cap E)$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(W)$ enthält. Die restlichen Behauptungen stehen bereits in (3.9)(i).

(3.19) LEMMA. (i) *Die Operation von* $\mathbf{N}_G(W)/\mathbf{C}_G(W)$ *auf* W *ist eindeutig bestimmt. Es ist* W *der* 7-dim. *Untermodul des Permutationsmoduls.*

(ii) *Enthält* $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(W)}(E \cap W)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(W)}(E \cap W))$ *eine zu* A_8 *isomorphe Untergruppe, so ist kein Element aus* $E - (E \cap W)$ *in* G *zu einer Involution aus* W *konjugiert.*

Beweis. Setze $R = \mathbf{N}_G(W)/\mathbf{C}_G(W)$. Dann ist nach (3.18) R' zu A_8 isomorph. Sei $Y = \langle \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8 \rangle$ der 8-dim Permutationsmodul. Dann können wir W mit $\langle \pi_1\pi_2, \pi_1\pi_3, \pi_1\pi_4, \pi_1\pi_5, \pi_1\pi_6, \pi_1\pi_7, \pi_1\pi_8 \rangle$ identifizieren. Hierbei operiert R' auf W, indem R' auf den Indices operiert. Sei nun s ein Element aus $R - R'$, das dem Element (12) entspricht. Da s in R' eine zu A_6 isomorphe Gruppe zentralisiert, ist $|\,\mathbf{C}_W(s)| = 2^6$. Weiter ist die Operation auf $W/(E \cap W)$ eindeutig. Das liefert $\mathbf{C}_W(s) = \langle \pi_1\pi_2, \pi_3\pi_4, \pi_3\pi_5, \pi_3\pi_6, \pi_3\pi_7, \pi_3\pi_8 \rangle$. Nun invertiert s eine Element ρ, das dem Element (123) entspricht. Also operiert s auf $[W, \rho] = \langle \pi_1\pi_2, \pi_1\pi_3 \rangle$. Das liefert $(\pi_1\pi_3)^s = \pi_2\pi_3$. Also ist die Operation eindeutig bestimmt. Damit ist (i) bewiesen.

Es gibt in W die $\mathbf{N}_G(W)$-Konjugiertenklassen mit den Vertretern z, $\pi_1\pi_2$, $\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4$ und $\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4\pi_5\pi_6$. Das liefert, daß für alle $w \in W$ stets 2^{12} die Ordnung von $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(W)}(w)$ teilt. Jetzt liefert (3.9) die Behauptung unter (ii).

(3.20) Lemma. *Es enthalte $\mathbf{N}_G(W)$ eine Sylow 2-Untergruppe von G. Weiter enthalte $\mathbf{N}_G(W)$ keine elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 2^8. Dann ist $\langle z\rangle = E \cap W$ stark abgeschlossen in W bezüglich G.*

Beweis. Sei T eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(W)$ und V eine elementar abelsche Untergruppe von T von der Ordnung 2^7 mit $V \neq W$. Sei weiter $V \sim W$ in G. Dann ist $|V \cap W| \leqslant 2^6$. Sei $|V \cap W| = 2^6$, so ist VW/W in $\mathbf{N}_G(W)/\mathbf{C}_G(W)$ zu $V_1 = \langle(12)\rangle$ konjugiert. Ist $|V \cap W| = 2^5$, so ist VW/W in $\mathbf{N}_G(W)/\mathbf{C}_G(W)$ zu $V_2 = \langle(12), (34)\rangle$ konjugiert. Sei nun $|V \cap W| = 2^4$. Dann enthält $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(W)}(E \cap W)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(W)}(E \cap W))$ eine zu A_8 isomorphe Untergruppe. Nach (3.19) enthält dann V kein Element v, so daß Wv in $\mathbf{N}_G(W)/\mathbf{C}_G(W)$ zu $(12)(34)(56)(78)$ konjugiert ist. Also ist VW/W in $\mathbf{N}_G(W)/\mathbf{C}_G(W)$ zu $V_3 = \langle(21), (34), (56)\rangle$ oder $V_4 = \langle(12)(34), (12)(56), (78)\rangle$ konjugiert. Sei zuletzt $|V \cap W| = 2^3$. Dann ist VW/W in $\mathbf{N}_G(W)/\mathbf{C}_G(W)$ zu $V_5 = \langle(12), (34), (56), (78)\rangle$ oder $V_6 = \langle(12)(34), (13)(24), (56), (78)\rangle$ konjugiert.

Sei zuerst $VW/W = V_5$. Dann ist $|\mathbf{C}_W(V_5)| = 2^4$. Das ist ein Widerspruch. Sei nun $VW/W = V_6$. Sei T_1 eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(W)}$. Dann ist T_1/V zu $D_8 \times D_8$ isomorph. Nun ist eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(W)/\mathbf{C}_G(W)$ zu $D_8 \wr Z_2$ isomorph. Seien s_1 und s_2 die beiden Involutionen aus $\mathbf{Z}(T_1/V)$, die Quadrate von 10 Elementen in T_1/V sind. Dann werden diese beiden Elemente in einer Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(V)/V$ vertauscht. Nun ist aber $\langle z\rangle \neq [V, s_1] \cap \mathbf{Z}(T_1) \neq [V, s_2] \cap \mathbf{Z}(T_1) \neq \langle z\rangle$. Also ist z im Zentrum einer Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(V)$ enthalten. Da V zu W konjugiert ist, folgt nun $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{N}_G(V))$. Genauso sieht man, daß, falls $VW/W = V_2$ ist, $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{N}_G(V))$ ist.

Sei nun $VW/W = V_1$. Sei wieder T_1 eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(W)}(V)$. Dann ist WV/V in $\mathbf{Z}(T_1/V)$ enthalten. Sei nun T_2 eine 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(V)$ mit $|T_2 : T_1| = 2$. Ist $t \in T_2 - T_1$, so ist $W^t \neq W$. Also ist $|W^t \cap W| = 2^5$. Wie oben gezeigt, liefert das $z \in \mathbf{Z}(T_2)$. Sei nun T_3 eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(V)$ mit $T_2 \subseteq T_3$. Ist $z \notin \mathbf{Z}(T_3)$, so sind alle Involutionen aus $\mathbf{Z}_2(T)$ in G konjugiert. Also gibt es eine Untergruppe K in $\mathbf{C}_T(\mathbf{Z}_2(T))$ und ein Element $g \in \mathbf{N}_G(\mathbf{C}_T(\mathbf{Z}_2(T)))$ mit $W^g = K$. Insbesondere hat eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(W)}(K)$ mindestens die Ordnung 2^{12}. Wie oben gezeigt, ist dann aber stets $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{N}_G(K))$. Das ist ein Widerspruch.

Wir haben somit gezeigt, daß, falls $E \cap W$ in W bezüglich G nicht stark abgeschlossen ist, es in T eine Untergruppe V mit $V \sim W$ in G und $|V \cap W| = 2^4$ gibt. Also ist VW/W zu V_3 oder V_4 in $\mathbf{N}_G(W)/\mathbf{C}_G(W)$ konjugiert. Weiter ist $E \cap W$ in $\mathbf{Z}_2(T)$ bezüglich G stark abgeschlossen.

Sei jetzt $VW/W = V_3$. Sei weiter T_1 eine Sylow 2-Untergruppe von

$\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(W)}(V)$. Dann ist $|T_1/V| = 2^5$. Weiter enthält T_1/V genau zwei elementar abelsche Untergruppen der Ordnung 2^4. Also gibt es in $\mathbf{N}_G(V)$ eine Untergruppe T_2, die T_1 mit dem Index zwei enhält, so daß beide elementar abelschen Untergruppen von der Ordnung 2^4 aus T_1/V in T_2/V normal sind. Sei nun $t \in T_2 - T_1$ dann ist $W^t \neq W$ und $|W^tV/V \cap WV/V| \geqslant 4$. Das liefert $|W^t \cap W| \geqslant 2^5$. Also ist, da wie oben gezeigt $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{N}_G(W^t))$ ist, $z \in \mathbf{Z}(T_2)$. Sei nun T_3 eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(V)$, die T_2 enthält. Dann ist $\mathbf{Z}(T_2) = \mathbf{Z}_2(T_3)$. Da $E \cap W$ in $\mathbf{Z}_2(T_3)$ bezüglich G stark abgeschlossen ist, folgt nun $z \in \mathbf{Z}(T_3)$. Das liefert $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{N}_G(V))$. Genauso sieht man, daß, falls $VW/W = V_4$ ist, $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{N}_G(V))$ ist. Also haben wir gezeigt, daß $E \cap W$ in W bezüglich G stark abgeschlossen ist.

(3.21) Lemma. *Es enthalte $\mathbf{N}_G(W)$ eine Sylow 2-Untergruppe von G. Dann enthält eine Sylow 2-Untergruppe T von $\mathbf{N}_G(W)$ genau eine elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 2^8.*

Beweis. Sei $\langle \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8 \rangle$ der Permutationsmodul von Σ_8. Nach (3.19) entspricht dann W dem Modul $\langle \pi_1\pi_2, \pi_1\pi_3, \pi_1\pi_4, \pi_1\pi_5, \pi_1\pi_6, \pi_1\pi_7, \pi_1\pi_8 \rangle$. Wir wählen nun T so, daß T/W in $\mathbf{N}_G(W)/\mathbf{C}_G(W)$ der Gruppe $\langle (12)(34), (13)(24), (12), (56)(78), (57)(68), (56), (15)(26)(37)(48) \rangle$ entspricht. Es enthalte T keine E_{256}.

Sei nun $r \in T - W$ eine Involution, die in G zu z konjugiert ist. Hierbei ist wieder $\langle z \rangle = E \cap W$. Es sei zunächst $Wr \triangleq (12)(34)(56)(78)$. Setze $Z = \mathbf{C}_W(r)$. Dann hat Z die Ordnung 16. Sei $g \in G$ mit $r^g = z$ und $\mathbf{C}_T(r)^g \subseteq T$. Nach (3.20) ist dann $|Z^g \cap W| \leqslant 2$. Sei zunächst $|Z^g \cap W| = 2$. Es ist Z normal in $\mathbf{C}_T(r)$. Also ist $Z^g \cap W$ normal in $\mathbf{C}_T(r)^g$. Somit gibt es eine Untergruppe U von Z von der Ordnung zwei, die in $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r))$ liegt und $U^g \subseteq W$ erfüllt. Das liefert $U = \langle z \rangle$. Das ist aber ein Widerspruch. Somit gilt $Z^g \cap W = 1$. Dann gibt es in $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(W)}(E \cap W)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(W)}(E \cap W))$ eine zu A_8 isomorphe Untergruppe. Nach (3.19) gibt es dann in Wr genau zwei Klassen von Involutionen. Also ist $|\mathbf{C}_T(r)| = 2^{11}$. Somit gibt es in $\mathbf{C}_T(r)$ eine Untergruppe Z_1 von der Ordnung 16 mit $Z_1{}^g \subseteq W$. Da Z in $\mathbf{C}_T(r)$ normal ist, liefert das nun $[Z, Z_1] = 1$. Dann enthält T eine elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 2^8. Das ist ein Widerspruch. Also ist $E \cap W$ in WF bezüglich G stark abgeschlossen.

Entspreche nun Wr dem Element (12) (34). Dann enthält

$$\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(W)}(E \cap W)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(W)}(E \cap W))$$

eine zu A_8 isomorphe Untergruppe B. Wähle für die Nebenklasse Wr einen Vertreter y aus B. Dann ist r zu y, $\pi_5\pi_6 y$ oder $\pi_5\pi_6\pi_7\pi_8 y$ in $\mathbf{N}_G(W)$ konjugiert. Sei zunächst $r = y$ oder $\pi_5\pi_6\pi_7\pi_8 y$. Dann folgt, daß für alle $t \in T'W - W$, die in G zu z konjugiert sind, stets $|\mathbf{C}_T(t)| \leqslant |\mathbf{C}_T(r)|$ ist. Also ist z zu r in $\mathbf{N}_G(\mathbf{C}_T(r))$ konjugiert. Da $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r)) = \langle \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4, \pi_5\pi_6\pi_7\pi_8, r \rangle$ ist, folgt nun, daß r nicht zu zr konjugiert ist. Das liefert, daß $\mathbf{C}_T(r)$ die Ordnung 2^{11} hat. Nun gibt es in B ein Element x, das y zentralisiert, so daß $Wx \triangleq (12)(34)(56)(78)$ ist.

Das liefert, daß $\mathbf{C}_T(r)'$ eine Involution $e \in E - (E \cap W)$ enthält. Nach (3.9) ist 2^{12} kein Teiler der Ordnung von $\mathbf{C}_G(e)$. Da das Zentrum einer Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(e)$ stets die Ordnung vier hat ist e weder zu y noch zu $\pi_5\pi_6\pi_7\pi_8 y$ in G konjugiert. Sei nun $g \in G$ mit $r^g = z$ und $\mathbf{C}_T(r)^g \subseteq \mathbf{N}_G(W)$. Dann können wir $e^g = e$ oder $e^g = \pi_5\pi_6 y$ annehmen. Insbesondere ist e^g zu $e^g z$ konjugiert. Also ist e zu er konjugiert. Nun ist aber er stets zu y in $\mathbf{N}_G(W)$ konjugiert. Das ist ein Widerspruch.

Sei nun $r = \pi_5\pi_6 y$. Dann ist $z \in \mathbf{C}_T(r)'$. Sei $g \in G$ mit $r^g = z$ und $\mathbf{C}_T(r)^g \subseteq \mathbf{N}_G(W)$. Dann können wir $z^g = r$ annehmen. Also ist z zu r in $\mathbf{N}_G(\mathbf{C}_T(r))$ konjugiert. Nun ist $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r)) = \langle \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4, \pi_5\pi_6, \pi_7\pi_8, r\rangle$. Sei $Z_1 = \langle t \mid t \in \mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r))$ und $z \sim t$ in $G\rangle$. Dann ist $Z_1 = \langle \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4, \pi_5\pi_6\pi_7\pi_8, r\rangle$. Sei $Z_2 = \langle t \mid t \in Z_1$ und $z \not\sim t$ in $G\rangle$. Dann ist $Z_2 = \langle \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4, \pi_5\pi_6\pi_7\pi_8\rangle$. Dann ist aber $z \in Z_2$ und $r \notin Z_2$. Das ist ein Widerspruch. Somit ist gezeigt, daß $E \cap W$ in $\mathbf{N}_G(W)'$ bezüglich G stark abgeschlossen ist.

Sei nun $r \in T - (T \cap \mathbf{N}_G(W)')$. Sei weiter V eine Vierergruppe in W, so daß alle Elemente aus Vr in G zu r konjugiert sind. Ist $g \in G$ mit $r^g = z$ und $\mathbf{C}_T(r) \subseteq T$, so ist $V^g \cap \mathbf{N}_G(W)' \neq 1$. Also ist $E \cap W$ nicht stark abgeschlossen in $\mathbf{N}_G(W)'$ bezüglich G. Das ist ein Widerspruch. Somit haben wir, daß Wr dem Element (12) entspricht. Ist weiter sr mit $s \in W$ in G zu s konjugiert, so folgt $s \in \langle \pi_1\pi_2\rangle$. Das liefert $|\mathbf{C}_T(r)| = 2^{11}$. Weiter ist r zu z in $\mathbf{N}_G(\mathbf{C}_T(r))$ konjugiert. Es ist $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r)) = \langle \pi_1\pi_2, \pi_3\pi_4\pi_5\pi_6, \pi_7\pi_8, r\rangle$. Weiter ist $\langle \pi_3\pi_4\pi_5\pi_6, \pi_7\pi_8\rangle$ in $\mathbf{C}_T(r)'$ enthalten. Das liefert $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_T(r)) \cap \langle \mathbf{C}_T(r)', \mathbb{D}(\mathbf{C}_T(r))\rangle = \langle \pi_3\pi_4\pi_5\pi_6, \pi_7\pi_8\rangle$. Sei nun $f \in T$, $Wf \triangleq (56)\,(78)$. Dann ist $[r, f] \in \langle \pi_1\pi_2\rangle$. Also ist f oder $\pi_1\pi_3 f$ in $\mathbf{C}_T(r)$ enthalten. Da $z \notin \mathbb{D}(\mathbf{C}_T(r))$ ist, folgt nun, daß

$$\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(W)}(E \cap W)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(W)}(E \cap W))$$

eine zu A_8 isomorphe Untergruppe B besitzt. Diese enthält eine elementar abelsche Untergruppe J von der Ordnung acht, so daß $WJ/W = \langle (12)\,(34), (12)\,(56), (12)\,(78)\rangle$ ist. Es ist $[r, J] \subseteq W$. Also ist $[r, J] \subseteq \langle \pi_1\pi_2\rangle$. Da $\pi_1\pi_2$ nicht in $\mathbb{D}(\mathbf{C}_T(r))$ enthalten ist, folgt nun $[J, r] = 1$. Nun ist aber $|\mathbf{C}_W(J\langle r\rangle)| = 16$. Also enthält T eine elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 2^8. Das ist ein Widerspruch.

Somit haben wir gezeigt, daß $E \cap W$ in T bezüglich G stark abgeschlossen ist. Anwendung von [3] liefert jetzt einen Widerspruch zur Einfachheit von G.

(3.22) Lemma. *Die Annahme* (3.2) *ist nicht erfüllt.*

Beweis. Sei die Annahme (3.2) erfüllt. Nach (3.18) ist $\mathbf{N}_G(W)/\mathbf{C}_G(W)$ zu Σ_8 isomorph. Es enthalte zunächst $\mathbf{N}_G(W)$ eine Sylow 2-Untergruppe T von G. Nach (3.21) enthält T eine elementar abelsche Untergruppe Y von der Ordnung 2^8. Man sieht leicht, daß bei geeigneter Wahl von T die Gruppe YW/W der Gruppe $\langle (12), (34), (56), (78)\rangle$ entspricht. Weiter rechnet man leicht nach, daß jede Involution aus $\mathbf{N}_G(W)$ zu einer Involution aus Y in $\mathbf{N}_G(W)$ konjugiert ist.

Wir werden nun zeigen, daß $(E \cap W)$ in $\mathbf{Z}(\mathbf{N}_G(Y))$ enthalten ist. Dann liefert [2] einen Widerspruch zur Einfachheit von G. Setze $N = \mathbf{N}_G(Y)/\mathbf{C}_G(Y)$. Dann hat N eine Sylow 2-Untergruppe vom Typ A_8. Weiter besitzt N eine Untergruppe L, die zu A_4 isomorph ist, wobei YE eine Sylow 2-Untergruppe des vollen Urbildes K von $\mathbf{O}_2(L)$ in $\mathbf{N}_G(V)$ ist. Sei x ein Element ungerader Ordnung in $\mathbf{N}_G(Y)$ mit $[E, x] \subseteq Y$. Sei $\langle e_1, e_2\rangle$ eine Untergruppe von E mit $YE = Y\langle e_1, e_2\rangle$. Dann ist $[x, e_1] \in Y$. Wegen $|\mathbf{C}_Y(e_1)| = 16$, kann man x durch Elemente aus Y abändern, so daß $[x, e_1] = 1$ gilt. Dann ist $[x, e_2]$ in $\mathbf{C}_Y(e_1)$ enthalten. Da $|\mathbf{C}_{\mathbf{C}_Y(e_1)}(e_2)| = 4$ ist, können wir wieder x so abändern, daß $[x, e_2] = 1$ gilt. Also ist x in $\mathbf{N}_G(E)$ und damit in $\mathbf{C}_G(E)$ enthalten. Das liefert dann aber $x \in \mathbf{C}_G(Y)$. Sei S eine Sylow p-Untergruppe von $\mathbf{O}(N)$. Dann operiert L auf S. Also liefert die Brauersche Fixpunktformel, daß S die Ordnung 3^3 oder eins hat.

Es habe S die Ordnung 3^3. Da $GL_3(3)$ keine 2-Untergruppe vom Typ A_8 enthält, folgt, daß $\mathbf{Z}(T/Y)$ die Gruppe S zentralisiert. Nun zentralisiert $\mathbf{Z}(T/Y)$ in Y nur die Gruppe $W \cap Y$. Also operiert S auf $W \cap Y$. Insbesondere ist $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(Y)}(W \cap Y)/\mathbf{C}_G(Y) \cap S \neq 1$. Da S ein irreduzibler L-Modul ist, folgt nun, daß S in $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(Y)}(W \cap Y)/\mathbf{C}_G(Y)$ enthalten ist. Das liefert dann aber einen Widerspruch. Also ist $\mathbf{O}(N) = 1$.

Sei jetzt V die einzige elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 16 in T/Y. Dann rechnet man nach, daß es in V genau neun Involutionen i gibt, so daß $\mathbf{C}_Y(t)$ die Ordnung 2^4 hat. Ist nun x eine Involution aus T, so daß Yx in $\mathbf{Z}(T/Y)$ liegt, so sieht man, daß alle Involutionen in Yx in W liegen. Nach (3.19) ist keine Involution aus $E - (E \cap W)$ zu einer Involution aus W in G konjugiert. Da es eine Involution $e \in E - (E \cap Y)$ gibt, so daß Ye in V liegt, folgt, daß 9 die Ordnung von $\mathbf{N}_N(V)$ nicht teilt. Das liefert, daß $\mathbf{L}(N)$ nicht das direkte Produkt zweier einfacher Gruppen sein kann.

Sei nun I die Untergruppe von T/Y, die zu $Q_8 * Q_8$ isomorph ist. Dann enthält $I - \mathbf{Z}(I)$ sowohl Involutionen, deren Zentralisator in Y die Ordnung 2^6 hat, als auch Involutionen, deren Zentralisator in Y die Ordnung 2^6 hat. Also teilt 9 nicht die Ordnung von $\mathbf{N}_N(I)$.

Mit [5] und [6, Proposition (3.1) und (3.9)] erhalten wir jetzt, daß N entweder zu $E_8L_2(7)$ oder zu $(\mathbf{N}_G(Y) \cap \mathbf{N}_G(W))\mathbf{C}_G(Y)/\mathbf{C}_G(Y)$ isomorph ist.

Sei zunächst N zu $E_8L_2(7)$ isomorph. Dann ist $\mathbf{C}_Y(\mathbf{O}_2(N)) \subseteq W \cap Y$. Sei weiter $E \cap W$ nicht in $\mathbf{Z}(\mathbf{N}_G(Y))$ enthalten. Dann hat z genau sieben Konjugierte in Y. Also ist $\mathbf{C}_Y(\mathbf{O}_2(N)) = \langle \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4, \pi_1\pi_2\pi_5\pi_6, \pi_1\pi_2\pi_7\pi_8\rangle$. Dann ist $YW = \mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(Y)/\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(Y))}(\mathbf{C}_Y(\mathbf{O}_2(N)))$. Da hierin aber W die einzige elementar abelsche Untergruppe W_1 von der Ordnung 2^7 mit $YW_1 = YW$ ist, folgt nun ein Widerspruch zur Struktur von $\mathbf{N}_G(W)$.

Also ist $\mathbf{N}_G(Y)/\mathbf{C}_G(Y) = (\mathbf{N}_G(Y) \cap \mathbf{N}_G(W))\mathbf{C}_G(Y)/\mathbf{C}_G(Y)$. Insbesondere ist $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{N}_G(Y))$. Damit haben wir gezeigt, daß $\mathbf{N}_G(W)$ keine Sylow 2-Untergruppe von G enthält.

Sei T eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(W)$ und T_1 eine 2-Untergruppe von

G mit $|T_1 : T| = 2$. Sei weiter $t \in T_1 - T$. Dann ist $W^t \neq W$. Weiter ist W^t normal in T. Das liefert $|W^t \cap W| \leqslant 16$. Sei $|W^t \cap W| = 16$. Dann enthält W^t eine Involution e, die in G zu einer Involution aus $E - (E \cap W)$ konjugiert ist. Weiter enthält W^t eine Involution f, so daß Wf in $\mathbf{N}_G(W)/\mathbf{C}_G(W)$ zu (12) (34) konjugiert ist. Also enthält $\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(W)}(E \cap W)/\mathbf{O}(\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(W)}(E \cap W))$ eine zu A_8 isomorphe Untergruppe. Dann liefert aber (3.19) einen Widerspruch.

Also ist $|W^t \cap W| = 8$. Dann entspricht W^tW/W der Gruppe $\langle(12), (34), (56), (78)\rangle$. Diese Gruppe zentralisiert in W eine Untergruppe von der Ordnung 16. Also ist W^t nicht zentralisatorgleich in T. Das ist ein Widerspruch. Dieser Widerspruch beweist das Lemma.

4. Die Gruppen M_{24} und He

In diesem Abschnitt wird der Beweis von Satz B vollendet. Wir wissen bereits, daß es in $\mathbf{N}_G(E)$ eine extraspezielle Untergruppe F von der Ordnung 2^7 gibt, so daß $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(E)}(F)$ die Gruppe $\mathbf{N}_G(E)/\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(E))$ deckt. Weiter wissen wir, daß $\mathbf{N}_{\mathbf{N}_G(E)}(F)/\mathbf{C}_{\mathbf{N}_G(E)}(F)F$ vollstäbdig reduzibel auf $F/\mathbf{Z}(F)$ operiert. Schließlich wissen wir noch, daß $\mathbf{N}_G(F)/\mathbf{C}_G(F)F$ zu $PGL_2(7)$ oder $L_2(7)$ isomorph ist.

(4.1) Lemma. *Die Gruppe $\mathbf{N}_G(F)$ enthält eine Sylow 2-Untergruppe von G.*

Beweis. Die Gruppe $\mathbf{N}_G(F)/\mathbf{C}_G(F)$ ist eine Erweiterung einer elementar abelschen Gruppe F_1 von der Ordnung 2^6 durch $L_2(7)$ oder $PGL_2(7)$. Nach (2.9) ist $F_1 = F_2 \times F_3$, wobei F_2 und F_3 irreduzible $L_2(7)$-Moduln von der Dimension drei sind. Weiter rechnet man in $\mathrm{Aut}(D_8 * D_8 * D_8)$ leicht nach, daß F_2 dual zu F_3 ist. Also ist F_1 die einzige normale elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 2^6 in einer Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(F)/\mathbf{C}_G(F)$. Damit ist das Lemma bewiesen.

(4.2) Lemma. *Die Gruppe $\mathbf{N}_G(E)$ enthält eine Sylow 2-Untergruppe von G.*

Beweis. Es enthalte $\mathbf{N}_G(E)$ keine Sylow 2-Untergruppe von G. Nach (3.1) und (4.1) ist dann $\mathbf{N}_G(F)/\mathbf{C}_G(F)F$ zu $PGL_2(7)$ isomorph. Setze nun $R = \mathbf{C}_G(\mathbf{Z}(F))$ Dann wird die Ordnung von $R/\mathbf{Z}(F)$ nicht durch 2^{11} geteilt. Setze $R_1 = R/\mathbf{O}(R)\mathbf{Z}(F)$. Dann ist $F\mathbf{O}(R)/\mathbf{O}(R)\mathbf{Z}(F)$ in jedem minimalen Normalteiler von R_1 enthalten. Die Liste in [16] liefert jetzt, daß $F\mathbf{O}(R)/\mathbf{O}(R)\mathbf{Z}(F)$ in R_1 normal ist. Also ist $\mathbf{C}_G(\mathbf{Z}(F))/\mathbf{O}(\mathbf{C}_G(\mathbf{Z}(F)))$ zu $\mathbf{N}_G(F)/\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(F))$ isomorph.

Sei jetzt T eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(E)$ und S eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{N}_G(F)$, die T enthält. Dann gibt es ein Element $x \in S - T$ mit $x^2 \in \mathbf{Z}(F)$. Da x ein Element von der Ordnung sieben in $\mathbf{N}_G(F)/\mathbf{C}_G(F)$ normalisiert, ist $|\mathbf{C}_{F/\mathbf{Z}(F)}(x\mathbf{Z}(F))| = 8$. Weiter normalisiert x ein Element ρ von der Ordnung drei in $\mathbf{N}_G(F)/\mathbf{C}_G(F)$. Es ist $\mathbf{C}_F(\rho) \cong D_8$. Also ist x zu xz konjugiert, wobei $\langle z\rangle = \mathbf{Z}(F)$ sei. Das liefert, daß $\mathbf{C}_F(x)$ elementar abelsch von der Ordnung acht ist. Also ist $|\mathbf{C}_S(x)| = 32$. Weiter enthält $\mathbf{C}_s(x)$ einen abelschen Normalteiler W vom Index zwei. Es ist $|W \cap F| = 8$. Ist $x^2 = z$, so ist $\mathbf{C}_S(x)$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(x)$. Sei nun $x^2 = 1$. Dann ist W elementar abelsch.

Wir bestimmen nun die Struktur von $\mathbf{N}_G(W)/\mathbf{C}_G(W)$. Es ist $\mathbf{N}_G(W) \cap \mathbf{C}_G(z)/\mathbf{C}_G(W)$ eine Erweiterung von E_8 durch Σ_3. Es induziert $\mathbf{N}_G(W) \cap \mathbf{C}_G(z)$ auf W Bahnen von der Länge 1, 6 und 8. Sei $z \notin \mathbf{Z}(\mathbf{N}_G(W))$. Dann hat z in $\mathbf{N}_G(W)$ genau 7, 9 oder 15 Konjugierte. Die Untergruppenstruktur von A_8 liefert, daß z genau 15 Konjugierte hat. Dann ist $\mathbf{N}_G(W)/\mathbf{C}_G(W)$ zu Σ_6 isomorph. Anwendung von [18] liefert dann, daß G zu $\mathbf{L}_4(q)$ oder $U_4(q)$ isomorph ist, oder eine Sylow 2-Untergruppe vom Typ $L_6(q)$, $q \equiv -1 \pmod 4$, besitzt. Es hat $\mathbf{Z}_2(S)$ die Ordnung vier. Also ist S nicht vom Typ $L_6(q)$. Die Struktur von $\mathbf{C}_G(z)$ liefert, daß G auch nicht zu $L_4(q)$ oder $U_4(q)$ isomorph ist. Somit haben wir gezeigt, daß $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{N}_G(W))$ ist.

Sei nun T_1 eine 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(x)$ mit $|T_1 : \mathbf{C}_S(x)| = 2$. Dann gibt es ein $t \in T_1 - \mathbf{C}_S(x)$, so daß $\mathbf{C}_S(x) = WW^t$ ist. Also ist $\mathbf{N}_G(W^t)/\mathbf{C}_G(W^t)$ eine Erweiterung von E_8 durch Σ_3. Das liefert, daß die Anzahl der zu z in $\mathbf{N}_G(W^t)$ konjugierten Involutionen durch drei teilbar ist. Ist u eine Involution in $W^t \cap \mathbf{C}_G(z)'$, so ist x zu xu in $\mathbf{C}_G(z)$ konjugiert. Das liefert, daß 2^8 die Ordnung von $\mathbf{N}_{\mathbf{C}_G(z)}(W^t)$ teilt. Also hat z genau drei Konjugierte unter $\mathbf{N}_G(W^t)$. Da es in W aber keine $\mathbf{N}_G(W)$-Bahn von der Länge drei gibt, erhalten wir so einen Widerspruch. Insgesamt haben wir gezeigt, daß $\mathbf{C}_S(x)$ eine Sylow 2-Untergruppe von $\mathbf{C}_G(x)$ ist.

Sei zunächst $x^2 = 1$. Ist r eine Involution aus T, so ist stets $|\mathbf{C}_{\mathbf{C}_G(z)}(r)|$ durch 2^6 teilbar. Also ist x zu keiner Involution aus T in G konjugiert. Anwendung von [21, Lemma (5.38)] liefert jetzt einen Widerspruch zur Einfachheit von G.

Wir können somit $x^2 = z$ annehmen. Sei nun $r \in T$ mit $r^2 \in F$. Dann teilt 2^5 die Ordnung von $\mathbf{C}_{\mathbf{C}_G(z)}(r)$. Ist r zu x in G konjugiert, so ist $z \in \mathbf{C}_{\mathbf{C}_G(z)}(r)'$. Das liefert dann, daß alle Involutionen in $\mathbf{Z}_2(S)$ in G konjugiert sind. Sei jetzt $r \sim x$, $r \in T$ und $r^2 \notin F$. Dann ist $\mathbf{C}_S(r) = \langle r \rangle \times D_8$ oder $\langle r \rangle \times V_4$. Ist $z \in \mathbf{C}_S(r)'$, so sind wieder alle Involutionen in $\mathbf{Z}_2(S)$ in G konjugiert.

Sei jetzt $\mathbf{C}_S(r) = \langle r \rangle \times W$, wobei W eine elementar abelsche Gruppe von der Ordnung vier ist. Es ist $W \subseteq F$. Sei weiter $g \in G$ mit $\mathbf{C}_S(r)^g \subseteq \mathbf{C}_S(x)$ und $r^g = x$. Dann ist $\mathbf{C}_S(r)^g$ eine der beiden abelschen Untergruppen von der Ordnung 2^4 in $\mathbf{C}_S(x)$. Nun wissen wir, daß r auf E und E^x operiert. Da $\mathbf{C}_F(r)$ die Ordnung vier hat, ist $|\mathbf{C}_E(r)| = 2$ oder $|\mathbf{C}_{E^x}(r)| = 2$. Also sind alle Involutionen in Wr^2 in G zu r^2 und damit zu z konjugiert. Somit hat z in $\Omega_1(\mathbf{C}_S(r))$ genau fünf oder sieben G-Konjugierte. Hat z genau sieben G-Konjugierte, so liefert $r^g = x$, daß wieder alle Involutionen in $\mathbf{Z}_2(S)$ in G konjugiert sind.

Habe nun z genau fünf G-Konjugierte in $\Omega_1(\mathbf{C}_S(r))$. Setze $\mathbf{C}_S(x) = \langle \mathbf{C}_F(x), x \rangle \langle t \rangle$. Ist $\mathbf{C}_S(r)^g = \langle \mathbf{C}_F(x), x \rangle$, so sind alle Involutionen aus $\mathbf{Z}_2(S)$ in G konjugiert, da alle Involutionen aus $\mathbf{C}_F(x)$ in $\mathbf{N}_G(F)$ zu Involutionen aus $\mathbf{Z}_2(S)$ konjugiert sind. Sei also $\mathbf{C}_S(r)^g = \langle t, f_1, x \rangle$. Hierbei ist $t \sim tf_1$, $tx^2 \sim tf_1x^2$ und $f_1 \sim f_1x^2$ in G. Ist z zu f_1 in G konjugiert, so sind alle Involutionen aus $\mathbf{Z}_2(S)$

in G konjugiert. Sei also $z \not\sim f_1$ in G. Setze $W_1 = \langle h \mid h \in \Omega_1(\mathbf{C}_S(r)), h \not\sim z \text{ in } G\rangle$. Dann ist $z \in W_1$. Weiter ist $W_1{}^g = \langle z, f_1\rangle$. Also ist $z^g = z$. Das widerspricht aber $r^g = x$ und $r^2 \neq x^2 = z$.

Insgesamt haben wir gezeigt, daß alle Involutionen aus $\mathbf{Z}_2(S)$ in G konjugiert sind, falls x zu einem Element aus T in G konjugiert ist. Sei f eine Involution in $\mathbf{Z}_2(S) - \mathbf{Z}(S)$. Dann ist $\mathbf{C}_S(f)/\langle f\rangle$ eine Erweiterung von $D_8 * D_8$ durch D_{16}. Insbesondere enthält $\mathbf{C}_S(f)/\langle f\rangle$ keine normale elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 32. Da $|S : \mathbf{C}_S(f)| = 2$ ist und $S/\langle z\rangle$ eine normale elementar abelsche Untergruppe der Ordnung 64 enthält, ist f nicht zu z in G konjugiert. Das liefert jetzt, daß x zu keinem Element aus T in G konjugiert ist. Da es in $S - T$ keine Involutionen gibt, erhalten wir nun mit [8, Lemma 16] einen Widerspruch zur Einfachheit von G. Damit ist das Lemma bewiesen.

(4.3) SATZ. *Die Gruppe G ist zu M_{24} oder He isomorph.*

Beweis. Nach (4.2) wissen wir, daß $\mathbf{N}_G(E)$ eine Sylow 2-Untergruppe von G enthält. Setze $C = \mathbf{C}_G(\mathbf{Z}(F))/\mathbf{Z}(F)$. Sei weiter M ein minimaler Normalteilervon $C/\mathbf{O}(C)$. Dann sieht man leicht, daß $F/\mathbf{Z}(F)$ im vollen Urbild von M in C enthalten ist. Also ist C entweder 2-constrained oder $\mathbf{O}'(C/\mathbf{O}(C))$ einfach.

Sei zunächst $C_1 = \mathbf{O}'(C/\mathbf{O}(C))$ einfach. Da C_1 eine elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 64 enthält, liefert die Liste in [16], daß C_1 zu $P\Omega_7(q)$, $q \equiv 3, 5 \pmod 8$, $PSp_6(2)$, A_{12} oder A_{13} isomorph ist. Alle diese Gruppen haben 2-Sylow Untergruppen vom Typ A_{12}. Anwendung von [15] liefert nun einen Widerspruch zur Struktur von $\mathbf{N}_G(F)$. Also ist C_1 und damit $\mathbf{C}_G(\mathbf{Z}(F))$ 2-constrained.

Da $\mathbf{C}_G(\mathbf{Z}(F))$ 2-constrained ist, folgt, daß $\mathbf{C}_G(\mathbf{Z}(F))/\mathbf{O}(\mathbf{C}_G(\mathbf{Z}(F)))$ zu $\mathbf{N}_G(F)/\mathbf{O}(\mathbf{N}_G(F))$ isomorph ist. Jetzt liefert die Liste in [16], daß G zu $L_5(2)$, M_{24} oder He isomorph ist. Eine leichte Rechnung zeigt, daß es in $\mathbf{C}_G(\mathbf{Z}(F))$ genau zwei normale elementar abelsche Gruppen von der Ordnung 16 gibt. Jetzt liefert, die Anwendung von [11] die Behauptung.

REFERENZEN

1. W. GASCHÜTZ, Zur Erweiterungstheorie der endlichen Gruppen, *J. Reine Angew. Math.* **190** (1952), 93–107.
2. G. GLAUBERMANN, Central elements in core-free groups, *J. Algebra* **4** (1966), 403–421.
3. D. GOLDSCHMIDT, 2-fusion in finite groups, *Ann. Math.* **99** (1974), 70–118.
4. D. GORÖNSTEIN, "Finite groups," Harper & Row, New York, 1968.
5. D. GORENSTEIN AND K. HARADA, Finite groups whose 2-subgroups are generated by at most 4 elements, *Mem. Amer. Math. Soc.* **147** (1974), 1–464.
6. D. GORENSTEIN AND K. HARADA, On finite groups with Sylow 2-subgroups of type A_n, $n = 8, 9, 10, 11$, *Math. Z.* **117** (1970), 207–238.

7. R. Griess, Schur multipliers of the known finite simple groups, Thesis, Chicago, 1971.
8. K. Harada, Finite groups with short chains of subgroups, *J. Math. Soc. Japan* **20** (1968), 655–672.
9. K. Harada, On finite groups having self-centralizing 2-subgroups of small order, *J. Algebra* **33** (1975), 144–160.
10. K. Harada, Finite groups having 2-local subgroups $E_{16} \cdot L_4(2)$, erscheint.
11. D. Held, The simple groups related to M_{24}, *J. Algebra* **13** (1969), 253–296.
12. G. Higman, "Odd characterizations of Finite Simple Groups," University of Michigan Lecture notes, 1968.
13. G. Higman, Suzuki 2-groups, *Illinois J. Math.* **7** (1963), 79–96.
14. R. Solomon, Finite groups with intrinsic 2-components of type $\hat{A}_n$, *J. Algebra* **33** (1975), 498–522.
15. R. Solomon, Finite groups with Sylow 2-subgroups of type A_{12}, *J. Algebra* **24** (1973), 346–378.
16. V. Stingl, Endliche einfache component-type Gruppen, deren Ordnung nicht durch 2^{11} teilbar ist, Dissertation, Mainz, 1976.
17. G. Stroth, Gruppen mit kleinen 2-lokalen Untergruppen, *J. Algebra* **47** (1977), 441–454.
18. G. Stroth, Endliche einfache Gruppen mit einer 2-lokalen Untergruppe $E_{16}\Sigma_6$, *J. Algebra*, **47** (1977), 455–479.
19. G. Stroth, Über Gruppen mit 2-Sylow-Durchschnitten vom Rang $\leqslant 3$, *J. Algebra* **43** (1976), 398–505.
20. G. Stroth, A characterization of .3, *Acta Math. Szeged*, erscheint.
21. J. G. Thompson, Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable, *Bull. Amer. Math. Soc.* **74** (1968), 383–437.
22. D. Wales and J. McKay, The multiplier of the Higman–Sims simple group, *Bull. London Math. Soc.* **3** (1971), 283–285.