HISTORIA MATHEMATICA **16** (1989), 123–136

Pour l'histoire des sept premiers nombres parfaits

Ettore Picutti

Via Europa 34, (20097) S. Donato Milanese, Italia

Jusqu'à la fin du siècle passé, Pietro Cataldi fut considéré comme le premier qui eût calculé les 5^e, 6^e et 7^e nombres parfaits. Mais dans deux mémoires (1895 et 1899), M. Curtze signala que le 5^e se trouvait dans le Codex Latinus Monacensis 14908 daté de 1461, et dans le Codex Vindobonensis 5203 écrit par Régiomontanus (1436–1476) pendant son séjour à l'Université de Vienne (1451–1461). De plus M. Folkerts a montré (1977 et 1980) que le jeune mathématicien avait calculé en propre le 5^e N.P.; et que le 6^e N.P. se trouve dans le commentaire de J. Scheybl à son édition partielle des *Eléments* d'Euclide (1555). Nous allons montrer que le 5^e N.P. a été calculé par l'auteur du Codice Palatino 573 de la Biblioteca Nazionale de Florence, que nous datons de 1458, et que son auteur déclare être une transcription d'un autre traité qu'il avait composé maintes années auparavant; et que le 5^e et le 6^e N.P. aussi se trouvent dans le Codex Ottobonianus Latinus 3307 de la Biblioteca Apostolica Vaticana, composé par le même auteur, "l'Allievo del Vaiaio", en 1460. Nous montrerons aussi les critères suivis par P. Cataldi (1552–1626) en 1603 pour calculer les sept premiers nombres parfaits et, en détail, sa démonstration de la première des trois célèbres propositions sur les nombres parfaits que P. de Fermat communiqua en 1640 au P. Mersenne. © 1989 Academic Press, Inc.

Sino alla fine del secolo scorso Pietro Cataldi fu considerato il primo ad aver calcolato il 5°, il 6° e il 7° numero perfetto. Ma in due memorie (1895 e 1899) M. Curtze segnalò che il 5° si trovava nel Codex Latinus Monacensis 14908 datato 1461 e nel Codex Vindobonensis 5203 scritto da Regiomontano (1436–1476) nel periodo da lui trascorso all'Università di Vienna. Ancora, M. Folkerts ha mostrato (1977 e 1980) che il giovane matematico si era calcolato in proprio il 5° N.P.; e inoltre che il 6° N.P. si trova riportato nei commenti da J. Scheybl nella sua edizione parziale degli *Elementi* di Euclide (1555). Mostreremo che il 5° N.P. è stato calcolato dall'autore del Codice Palatino 573 della Biblioteca Nazionale di Firenze, che datiamo al 1458 e che il suo autore dichiara esser copia di un altro trattato da lui steso diversi anni prima; e che tanto il 5° che il 6° N.P. si trovano nel Codex Ottobonianus Latinus 3307 della Biblioteca Apostolica Vaticana, opera dello stesso autore del Cod. Palatino "l'Allievo del Vaiaio", lì scritti nel 1460. Mostreremo anche i criteri seguiti da P. Cataldi (1552–1626) per calcolare nel 1603 i primi sette numeri perfetti e, in dettaglio, la sua dimostrazione delle prima delle tre celebri proposizioni comunicate da P. de Fermat al P. Mersenne. © 1989 Academic Press, Inc.

Until the end of the last century Pietro Cataldi was considered the first mathematician to calculate the 5th, 6th, and 7th perfect numbers. But in two memoirs (1895 and 1899) M. Curtze pointed out that he had found the 5th in Codex Latinus Monacensis 14908, dated 1461, and in Codex Vindobonensis 5203 written by Regiomontanus (1436–1476) during his stay at the University of Vienna. In recent times (1977 and 1980) M. Folkerts pointed out that the young mathematician had calculated the 5th perfect number and also that the 6th is mentioned in the comments of J. Scheybl in his partial edition of Euclid's *Elements*. We will show that the 5th perfect number was calculated in 1458 by the author of the Codice Palatino 573 of the Biblioteca Nazionale of Florence, which the author himself declares is a copy of a treatise written in his own hand some years before, and that both the 5th and 6th perfect

0315-0860/88 $3.00

numbers can be found in the Codex Ottobonianus Latinus 3307 of the Biblioteca Apostolica Vaticana composed by the same author "l'Allievo del Vaiaio" in 1460. We will also explain the criteria followed by P. Cataldi (1552–1626) in calculating the first seven perfect numbers in 1603 and show, step by step, how he demonstrated the first of the three well-known propositions on perfect numbers communicated in 1640 to P. Mersenne by P. de Fermat.

AMS 1980 subject classifications: 01A40, 10-03.

KEY WORDS: Perfect numbers, Nichomachus, Ibrahim b. Fallus, Regiomontanus, Allievo del Vaiaio, Cataldi.

1. INTRODUCTION

Au début du Livre VII des *Eléments* (Def. XXII) Euclide a ainsi défini [Zamberti 1537, 170] le nombre parfait: "Perfectus numerus est qui suis ipsius partibus est aequalis".

Le nombre parfait était donc pour les Grecs un nombre égal à la somme de ses "parties", c'est-à-dire de ses diviseurs à l'exception de lui même; à la somme de ses "parties aliquotes", on aurait dit ensuite.

Euclide enseigna aussi, dans la dernière proposition du Livre IX, comment calculer les nombres parfaits. Bartolomeo Zamberti énonçait ainsi la règle d'Euclide à la Propositio 39 Euclides ex Campano [Zamberti 1537, 241]: "Cum coaptati fuerint numeri ab unitate continue dupli qui coniuncti faciant numerum primum, extremus eorum in aggregatum ex eis ductus producit numerum perfectum".

Si

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & \ldots \\ 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 & 2^6 & 2^7 & \ldots 2^{n-1} \end{array}$$

sont les termes considérés, on doit avant tout les sommer; et si la somme est un nombre premier, alors son produit par le dernier terme sera un nombre parfait.

Euclide avait donné aussi (dans la précédente Propositio 35) la règle pour calculer la somme des termes d'une progression géométrique; la somme des premiers n termes de la progression double indiquée est égale au nombre $(2^n - 1)$ qui précède le terme successif au dernier (2^{n-1}) qui a été sommé.

En appliquant la règle euclidienne, les Grecs trouvèrent donc les quatre premiers nombres parfaits:

$$\begin{array}{llll} (1 + 2) \cdot 2 & = \underline{3} \cdot 2 & = 6 & (1^{\text{er}}\ \text{N.P.}) \\ (1 + 2 + 4) \cdot 4 & = \underline{7} \cdot 4 & = 28 & (2^{\text{e}}\ \text{N.P.}) \\ (1 + 2 + 4 + 8 + 16) \cdot 16 & = \underline{31} \cdot 16 & = 496 & (3^{\text{e}}\ \text{N.P.}) \\ (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64) \cdot 64 & = \underline{127} \cdot 64 & = 8128 & (4^{\text{e}}\ \text{N.P.}) \end{array}$$

Nicomaque de Gérase (II$^{\text{e}}$ siècle), en se référant spécifiquement à ces quatre nombres parfaits, signalait dans son célèbre ouvrage *Introduction à l'arithmétique* [Nicomaque 1952, 821] qu'ils se terminaient alternativement par 6 et par 8, et que le premier était compris entre 1 et 10, le deuxième entre 10 et 100, le troisième entre 100 et 1000, le quatrième entre 1000 et 10000. Mais ses affirmations furent bientôt extrapolées par Jamblique (III^e–IV^e siècle) qui dans son commentaire à Nicomaque [Jamblique 1667, 45] passa à étendre à tous les nombres parfaits l'*ordre* que Nicomaque avait trouvé pour les quatre connus, en affirmant qu'entre chaque puissance de 10 et la suivante se trouvait toujours un nombre parfait, et que tous ceux-ci se terminaient alternativement par 6 et par 8.

Ses affirmations furent acceptées et répétées par philosophes et mathématiciens durant tout le Moyen Age et la Renaissance; et même, notons-le, par des mathématiciens du niveau de Chuquet et de Tartaglia.

Nicolas Chuquet, par exemple, dans le chapitre *De linvention des nombres parfaitz* de son *Triparty* [Marre 1880, 620], composé à Lyon en 1484 et que Marre retrouva dans le Ms. No. 436 Fonds Français de la Bibliothèque Nationale de Paris, vérifie que $(2^n - 1)$ est premier pour les trois premiers nombres parfaitz; puis il se contente de suivre Jamblique, en écrivant les "nombres parfaits" successifs 8128–130816–2096128–33550336. Et ni 130816, ni 2096128 sont tels. Chuquet arriva ainsi à confirmer la conclusion de Jamblique: "Les nombres parfaitz nont que deux terminacions en quant lung se termine en 6. laultre prochain apres en 8".

Nicolò Tartaglia (1506–1569), qui, dans la deuxième partie de son *General trattato di numeri e misure* avait âprement critiqué Luca Pacioli pour avoir introduit beaucoup d'erreurs dans le chapitre sur les nombres parfaits de la *Summa* [Pacioli 1494, 6–8], se montra lui aussi pareillement imprudent en énonçant à son tour la "notabile qualità" [Tartaglia 1556, 146v] que lorsque n, dans $(2^n - 1)$, était impair, le nombre engendré était parfait.

De même Bonghi dans son *Numerorum Mysteria* dresse une liste [Bonghi 1658, 468] de "Perfecti usque ad notas 28", c'est-à-dire jusqu'au terme 2^{28} de la progression double, en excluant des N.P. seulement ceux qui étaient engendrés par $(2^{6n} - 1)$. Mais, ajoutons-le, il *démontra* que les N.P. ne peuvent se terminer que par 6 ou par 28.

2. LES NOMBRES PARFAITS CHEZ LES ARABES

Dans une soigneuse étude sur l'histoire des nombres amiables R. Rashed a signalé, entre autre, que Abu Tahir al-Baghdadi (XI^e–XII^e siècle) dans son traité arithmétique *al-Takmila* a décisément déclaré que se trompaient ceux qui affirmaient qu'entre chaque puissance de dix et la suivante se trouvait un nombre parfait, car il n'y en avait aucun entre dix mille et cent mille [Rashed 1983]. C'était, nous croyons, la première opposition à Jamblique.

Sonja Brentjes a récemment publié une étude détaillée sur un manuscrit arabe du XIII^e siècle où se trouve, entre autre, une liste de nombres que l'auteur du traité, Ibrahim ben Fallus, supposait être les dix premiers nombres parfaits, liste que nous allons reconstruire en y ajoutant les n de $(2^n - 1)$ aussi [Brentjes 1987].

En effet, l'auteur a mis au compte de nombres premiers tous les $2^n - 1$ (n jusqu'à 23) dont n était impair, à l'exception de $(2^{15} - 1)$ et de $(2^{21} - 1)$ qui sont divisibles par 7:

n	N.P.
2	6
3	28
5	496
7	8128
9	1130816
11	2096128
13	33550336
(15)	--------
17	8589869056
19	137438691328
(21)	------------
23	35184367894528

Ibrahim ben Fallus considerait donc comme premiers et générateurs de nombres parfaits, $(2^9 - 1)$ qui est multiple de 7, $(2^{11} - 1)$ qui est multiple de 23 et $(2^{23} - 1)$ qui est multiple de 47.

Nous pouvons conclure qu'il n'a trouvé aucun nouveau N.P., car déjà le calcul du cinquième exige de diviser $(2^{13} - 1) = 8191$ par tous les premiers jusqu'à 89; or il n'est pas arrivé à diviser par 23, comme nous l'avons vu. Comme beaucoup de mathématiciens (Chuquet, Pacioli, Tartaglia, etc.) allaient faire après lui, il a supposé au hasard des nouveaux nombres parfaits.

S. Brentjes affirme aussi que les six premiers N.P. ont été rappelés par Qutb ad-Din as-Sirazi dans la partie mathématique de son *Encyclopédie,* composée entre 1292 et 1306, et signale dans la note 35 que Ch. Muzafarova n'a pas transcit le 6^e dans la liste des nombres parfaits qu'elle a dressée dans son mémoire [Muzafarova 1970] sur le traité de l'auteur arabe.

3. LE 5^e ET LE 6^e NOMBRES PARFAITS EN ALLEMAGNE

Jusqu'à la fin du siècle passé Cataldi fut considéré par les historiens des mathématiques comme le premier à avoir calculé, au début du XVII^e siècle, les 5^e, 6^e et 7^e nombres parfaits:

Mais en 1895 Curtze signala que le 5^e N.P. était connu précédemment en Allemagne, car il se trouvait calculé aux folios 32′–34 du Codex Latinus Monacensis 14908 daté de 1461 [Curtze 1895, 40–42].

Dans sa description, l'auteur inconnu du traité indiquait la règle d'Euclide, et donnait ensuite des listes de "duplationes", qui aboutissent aux cinque premiers nombres parfaits. Nous reproduisons ici celle qui concerne le 5^e N.P.

Curtze commentait: "Ob vor ihm die fünfte vollkommene Zahl nachweisbar ist, habe ich nicht verificieren können; er muss aber jedenfalls 511, 1023, 2047, 4095 als zusammengesetzte erkannt haben, was für 1023 und 4095 nicht gerade schwer, für die beiden Andern jedoch nicht ohne Schwierigkeit ist".

Il remarquait en fin de son article, qu'encore au XVIII^e siècle l'historien Heilbronner dans son ouvrage bien connu *Historia matheseos universae* [Heilbronner 1742, 755] avait considéré 511 et 2047 comme nombres premiers et en avait déduit deux faux nombres parfaits.

33550336
16775168
8387584
4193792
2096896
1048448
534224
262112
131056
65528
32764
16382
8191
4096
2048
1024
512
256
128
64
32
16
8
4
2
1

Curtze trouva peu de temps après un autre manuscrit du XV^{e} siècle qui traitait des nombres parfaits [Curtze 1899]. Il s'agissait du Codex Vindobonensis 5203, écrit par Régiomontanus durant la période où il séjourna à l'Université de Vienne (il en partit en 1461). Régiomontanus y avait composé le tableau que nous reproduisons (mais Régiomontanus n'a pas usé, sans doute, un point comme signe de multiplication):

1			
2–	3–primus	–6	–perfectus
4–	7–primus	–28	–perfectus
8–	15–compositus	–3 · 5	
16–	31–primus	–496	–perfectus
32–	63–compositus	–3 · 21	
64–	127–primus	–8128	–perfectus
128–	255–compositus	–5 · 51	
256–	511–compositus	–7 · 73	
512–	1023–compositus	–3 · 341	
1024–	2047–compositus	–23 · 89	

2048– 4095–compositus–5 · 819
4096– 8191–primus –33550336–perfectus
8192– 16383–compositus–3 · 3436
16384– 32767–compositus–7 · 4681
32768– 65535–compositus–5 · 13107
65536–131071

Dans la colonne de gauche se trouvent les (2^{n-1}) et dans la colonne suivante les $(2^n - 1)$ avec l'indication s'ils sont premiers ou composés. Si un $(2^n - 1)$ est indiqué comme "compositus", Régiomontanus en donne dans la colonne de droite la décomposition en deux facteurs (le premier est toujours son plus petit facteur premier); si $(2^n - 1)$ est nombre premier, il écrit "primus" et le fait suivre, dans la colonne de droite, du nombre parfait qu'il engendre.

On voit qu'il a identifié le 5e N.P. 4096.8191 = 33550336.

À la dernière ligne il écrit seulement les (2^{16}) et $(2^{17} - 1)$ et puis s'arrête, renonçant à vérifier si 131071 est "primus" ou "compositus". Et c'est tout.

Pour arriver au but, il lui aurait fallu dresser la liste des nombres premiers jusqu'à $\sqrt{131071} = 362 \ldots$, entreprise qui n'était ni trop longue ni difficile; mais il aurait du effectuer aussi 70 divisions environ. Il renonça donc.

M. Folkerts dans une étude vaste et détaillée sur la mathématique de Régiomontanus mentionne [Folkerts 1977, 218] J. Scheybl comme le premier qui ait écrit en Allemagne, à ce que l' on sait, le sixième nombre parfait 8589869056 dans sa traduction partielle des *Eléments* d'Euclide [Scheybl 1555].

Folkerts a ensuite [1980, 179–180] signalé un détail qu'il considère comme décisif, et tel doit être considéré, pour conclure que Régiomontanus avait calculé lui-même les éléments de son tableau: s'étant trompé deux fois en considérant premiers deux nombres qui étaient composés, il a corrigé les deux erreurs.

4. LE 5e ET LE 6e NOMBRE PARFAIT EN ITALIE AU XVe SIECLE

Après avoir vu quelle était la situation en Allemagne (et dans le reste de l'Europe, pouvons-nous ajouter), il nous faut maintenant montrer que le 5e N.P. était connu en Italie avant 1458, et le 6e en 1460.

En effet, le cinquième nombre parfait se trouve au folio 28r du Codice Palatino 573 de la Biblioteca Nazionale de Florence; ce *Trattato di pratica d'arismetricha* a été écrit par l'un des plus importants maîtres du XVe siècle, dont le nom est inconnu mais qui disait être né et avoir vécu à Florence et avoir été un élève de Domenico d'Agostino vaiaio ("pelletier").

Au folio 491v, à la fin du traité, on lit que, "a dì XXII d'aprile MCCCCLX", le possesseur du traité était "Girolamo di Piero di Cardinale Rucellaj cittadino fiorentino" de sorte que, compte tenu du temps nécessaire pour copier 820 folios, on peut bien affirmer que le folio 28r a été écrit en 1458. Ajoutons que l'auteur précisait au commencement, qu'il s'agissait là d'une copie d'un autre traité qu'il avait composé maintes années auparavant ("el trattato fatto già è più tempo a B.

Guardi trascriverrò"), de sorte que nous croyons de pouvoir conclure, que les maîtres italiens du Moyen Age connaissaient, ou mieux avaient calculé, le cinquième nombre parfait maintes années avant 1458, en 1453 disons.

Aussi bien le cinquième que le sixième nombre parfait se trouvent au folio 24r du Codex Ottobonianus Latinus 3307 de la Biblioteca Apostolica Vaticana; ce traité a été écrit par le même auteur, "l'Allievo del Vaiaio", sans doute à commencer de 1460, puisqu'il l'avait préannoncé dans le Codice Palatino 573; nous pouvons donc conclure que le sixième nombre parfait était connu en Italie en 1460.

Au folio 28r du Codice Palatino 573 on lit:

> Alchuno numero è detto perfetto; e questo è quel numero che lle sue parte aliquote fanno il detto numero; chome è .6., inperò che lle parte aliquote di .6. sono il $\frac{1}{2}$, l' $\frac{1}{6}$, cioè .3.2.1., che fanno agunte insieme .6.
>
> A trovare numerj habundanti e diminuiti non si dà certa reghola, inperò che quanti ne vuoj se ne truova; ma a trovare numeri perfetti si dà modo e ordine e reghola, cioè di ragugnere e' numeri doppi l'uno choll'altro inchominciando a .1., cioè agugnendo .1.2.4.8.16.32.64. etc.
>
> E tale modo si tiene che s'agungha .1. chon .2., fanno .3., el quale è sanza ripiegho; e però lo multiplicha per .2., che è lo extremo agunto; fanno .6., il quale è il primo numero perfetto, cioè il minore numero.
>
> E dipoj al secondo diraj: .1.2.4. fanno .7., che è *il* primo, cioè sanza ripiegho; e però lo multiplicha per .4. che fu lo extremo numero agunto; fanno .28. che è il sechondo numero perfetto.
>
> Per lo terzo diraj: .1.2.4.8. fanno .15. E perché à ripiegho, lo lascia e piglia il seguente, che è .16., fanno .31.; e perché è sanza ripiegho, multiplicha per .16., fanno .496. E .496. è il terzo numero perfetto.
>
> E per lo quarto diraj: .31. e il seguente fanno .63., che à ripiegho e però lo lascia. E seguita a ragugnere diciendo: e .64. fanno .127., che è sanza ripiegho; e però lo multiplicha per .64., fanno .8128. E questo è il quarto numero perfetto. E dipoj seguendo, agugneraj al .127. el .128., fanno .255., che à ripiegho. E però agugneraj al .255. el .256.; fanno .511., che à ripiegho per .7. e però non è buono a multiplichare. E agugneraj a .511. lo .512. che segue; fanno .1023. che à ripiegho. Adunque agugneraj a .1023. el seguente .1024.; fanno .2047., che à ripiegho per .23. e però non è da multiplichare. Che agugneraj il seguente, che è .4096.; fanno .8191. che non à ripiegho; e però lo multiplicha per .4086. che fu l'utimo numero. fanno .33550336. E questo è il quinto. E chosì molti ne troverresti tenendo questo modo, ma questi bastino.
>
> E nota che senpre il numero perfetto arà per la fighura del primo grado .6. overo .8.
>
> E acciò che più aperto si dimostrino, qui disotto alchuno ne disegnierò cholla sua inventione:

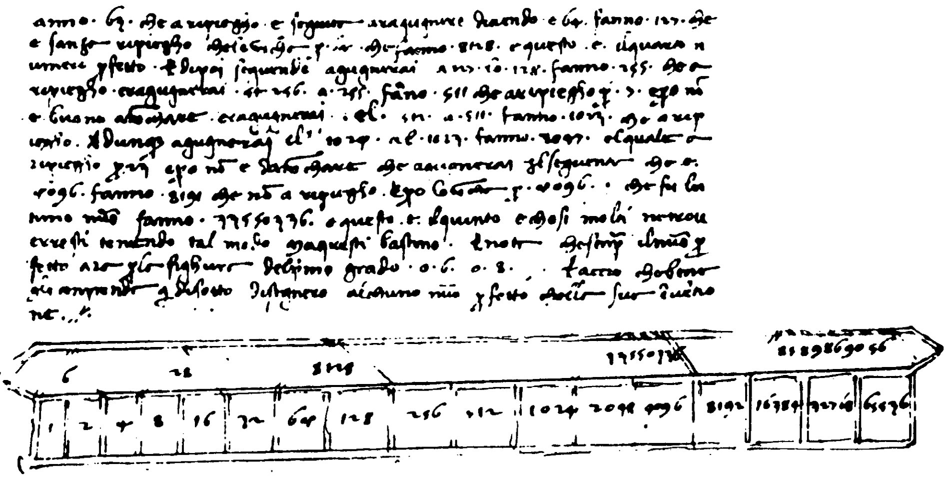
<table>
<tr><td colspan="2" align="right">6</td><td align="right">28</td><td colspan="2" align="right">496</td><td colspan="2" align="right">8128</td><td colspan="6" align="right">33550336</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td><td>16</td><td>32</td><td>64</td><td>128</td><td>256</td><td>512</td><td>1024</td><td>2048</td><td>4096</td></tr>
</table>

Le procédé suivi par l'auteur est, passage par passage, le suivant:

$1 + 2 = 3$	Nombre premier	$3 \cdot 2$	$=$	6 (1er N.P.)
$3 + 4 = 7$	Nombre premier	$7 \cdot 4$	$=$	28 (2e N.P.)
$7 + 8 = 15$	Nombre non premier			
$15 + 16 = 31$	Nombre premier	$31 \cdot 16$	$=$	496 (3e N.P.)
$31 + 32 = 63$	Nombre non premier			

63 + 64 = 127	Nombre premier	127 · 64 =	8128 (4[e] N.P.)
127 + 128 = 255	Nombre non premier		
255 + 256 = 511	Nombre non premier Multiple de 7		
511 + 512 = 1023	Nombre non premier		
1023 + 1024 = 2047	Nombre non premier Multiple de 23		
2047 + 2048 = 4095	Nombre non premier		
4095 + 4096 = 8191	Nombre premier	8191 · 4096 =	33550336 (5[e] N.P.)

TABLEAU I
LE FOLIO 24R DU CODEX OTTOBONIANUS 3307



Dans cette description il y a une erreur et une omission (que nous avons soulignées): (a) *il* (primo) devait être omis et (b) 2047 + 2048 = 4095 ne devait pas être omis. Cette même description se trouve répétée mot par mot dans le Codex Ottobonianus 3307, à partir de la ligne 24 du folio 23v, jusqu'à la ligne 13 du folio 24r; la multiplication a été encore omise mais l'article *il* a été éliminé.

Toutefois dans le petit tableau final, comme on peut bien le voir dans la reproduction ci-jointe, on trouve ajouté (sans calculs) le sixième nombre parfait (tableau I):

			8589869056	
4096	8192	16384	32768	65536

5. CATALDI ET SON *TRATTATO DE' NUMERI PERFETTI*

Le permier qui signala l'importance de Pietro Antonio Cataldi (1552–1626), "lettore di matematica all'Università di Bologna" de 1584 jusqu'à sa mort, fut Guillaume Libri, qui s'exprimait ainsi en 1841 [Libri 1841, 97]: "Cataldi mérite une place distinguée parmi les géomètres italiens de son siècle; nous venons de voir qu'en plusieurs circonstances il a devancé des mathématiciens qui jouissent d'une grande réputation, et qu'il doit être cité particulièrement pour l'emploi des suites infinies dans l'analyse. Nous ne prétendons pas le comparer aux grands géomètres du dix-septième siècle, mais il y aurait eu injustice à ne pas s'arrêter à des travaux dignes d'intérêt et que l'on a trop négligés . . . il fit distribuer gratis ses ouvrages . . . pour l'instruction des ouvriers et des pauvres''.

P. Riccardi, dans sa célèbre *Biblioteca Matematica Italiana,* catalogua trente ouvrages de Cataldi et souhaita [Riccardi 1952, 310]: ''la tardive reconnaissance de la postérité lui soit de compensation pour un si long oubli''.

Mais, écrivait Moritz Cantor [1900, 771]: ''Wenn Cataldi 1603 über vollkommene Zahlen schrieb und eine Divisorentabelle der Zahlen bis 1000 beigab, so ist darin nichts Neues zu finden. Die Schrift hätte mehrere Jahrhunderte früher genau ebenso verfasst werden können''. En fait le tableau de Cataldi était complètement nouveau, pour la simple raison que personne avant lui n'en avait dressé un; et le rôle de l'histoire est, en ce cas, d'expliquer pourquoi cela n'avait pas été fait, non de dire si cela aurait pu être fait auparavant.

Après voir rappelé qu'on doit à Cataldi la découverte du critère de divisibilité par 11 [Picutti 1984, 78–79] et celle aussi des fractions continues [Bortolotti 1947, 87–91; Maracchia 1979, 59–60], nous exprimerons notre opinion sur son ouvrage *Trattato de' numeri perfetti* (1603).

Cataldi, minutieux algorithmiste, a par cet ouvrage mis définitivement fin à des siècles de confusion sur les nombres parfaits, en démontrant beaucoup de propositions avec une précision extrême et en ouvrant la route aux grandes propositions de Fermat sur les nombres parfaits.

Renvoyant à [Wertheim 1902; Picutti 1984] pour l'examen détaillé de l'ouvrage, nous signalons notamment, puisque personne ne l'a fait, qu'on doit à Cataldi la première des trois propositions sur les nombres parfaits que Fermat communiqua en 1640 à Mersenne [Henry 1879, 497; Fermat 1894, 198–199] et qu'il jugeait ainsi: ''Voilà trois fort belles propositions que j'ai trouvées et prouvées non sans peine: je les puis appeler les fondements de l'invention des nombres parfaits''.

Fermat écrivait donc à Mersenne:

> Voici trois propositions, que j'ai trouvées, sur lequelles j'espère de faire un grand bâtiment: Les nombres moindres de l'unité que ce qui procèdent de la progression double, comme

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191	etc.

> soient appelés les radicaux des nombres parfaits, pource que, toutes les fois qu'ils sont premiers, ils les produisent. Mettez, au-dessus de ces nombres, autant en progression naturelle: 1, 2, 3, 4, 5, etc. qui soient appelés leur exposants. Cela supposé, je dis que:
>
> 1° Lorsque l'exposant d'un nombre radical est composé, son radical est aussi composé. Comme parce que 6, exposant de 63, est composé, je dis que 63 est aussi composé.
> 2° . . . 3° . . . etc.
>
> De ces abrégés j'en vois déjà naître un grand nombre d'autres et *mi par di vedere un gran lume*.

Or, à la page 5, lignes 21–26 de son ouvrage, Cataldi énonça ainsi la première proposition de Fermat: "[i numeri perfetti] resta solo a cercarli dalli numeri di termini che sono di numero primo . . . Avertendo che ne anco tutti questi gli formano, come abbiamo veduto avvenire delli 11. primi termini . . . nonostante che l'11. numero de' termini sommati sia numero primo".

Ce qui est à dire qu'un nombre parfait peut être engendré par la somme $(2^n - 1)$ des premiers n termes de la progression double considérée, seulement lorsque n, "exposant" pour Fermat, "numero delli termini" pour Cataldi, est nombre premier; ou encore lorsque n en Me_n, "nombre de Mersenne" c'est à dire $2^n - 1$ premier, est premier. Et cette condition est nécessaire mais (comme dans le cas $n = 11$) non suffisante.

Cataldi démontre aussi que:

Les $2^{2k} - 1$ sont multiples de	3 puisque	$3 = 2^2 - 1$
Les $2^{3k} - 1$ sont multiples de	7 puisque	$7 = 2^3 - 1$
Les $2^{5k} - 1$ sont multiples de	31 puisque	$31 = 2^5 - 1$
Les $2^{7k} - 1$ sont multiples de	127 puisque	$127 = 2^7 - 1$
Les $2^{11k} - 1$ sont multiples de	$23 \cdot 89$ puisque	$23 \cdot 89 = 2^{11} - 1$
Les $2^{13k} - 1$ sont multiples de	8191 puisque	$8191 = 2^{13} - 1$.

La démonstration est effectuée par exemples successifs en ces termes (nous présentons le seul cas $n = 3k$).

On a: $2^{3k} - 1 = (1 + 2 + 4) + (8 + 16 + 32) + (64 + 128 + 256) + \ldots$ Mais 8 divisé par 7 donne 1 pour reste; et 16 double de 8 divisé par 7 donne $2 \cdot 1 = 2$ pour reste; et 32 quadruple de 8 donne $4 \cdot 1 = 4$ pour reste; de sorte que $(8 + 16 + 32)$, leur somme donne pour reste $(1 + 2 + 4) = 7$, ce qui revient à dire qu'il est multiple de 7. Il en est de même pour $(64 + 128 + 256) + \ldots$ et de même encore pour leur somme $2^{3k} - 1$.

En termes un peu plus modernes, on pourrait écrire: $(1 + 2 + 4) + (8 + 16 + 32) + (64 + 128 + 256) + \ldots = (1 + 2 + 4) + 8(1 + 2 + 4) + 64(1 + 2 + 4) + \ldots = 7(1 + 8 + 8^2 + \ldots) =$ etc.

Pour arriver à calculer le 7ᵉ N.P. $2^{18}(2^{19} - 1) = 262144.524287 = 137438691328$, Cataldi devait vérifier que 524287 était premier; or puisque $\sqrt{524287} = 724\ldots$, il devait dresser la liste de tous les nombres premiers inférieurs à 724. De fait, il composa (pp. 28–40) des tableaux indiquant les diviseurs de tous les nombres jusqu'à 750 et, pour terminer, une liste (p. 40) des nombres premiers tirés des tableaux précédents. Il y ajouta enfin (p. 48 et dernière) une *Continuazione della Tavola* dans laquelle il écrit tous les nombres premiers et composés (avec leur décomposition en facteurs premiers) de 750 à 800.

Au début de son traité, Cataldi disait avoir écrit en 1588 un ouvrage bien plus complet, où de nombres parfaits il avait réussi "a trovarne molti"; mais, comme le manuscrit avait été placé avec ce qu'il possédait de plus précieux, dans une cassette qu'on lui avait volée "nel tempo delle Rogationi del mese di maggio 1594", il se trouvait contraint d'en présenter une édition réduite. Avait-il donc calculé aussi le 8ᵉ N.P.?

Dickson a écrit [1952, 11] que "Cataldi stated that $2^n - 1$ is a prime for $n = 2, 3, 5, 7, 13, 19, 23, 31, 37$". Mais il s'agit là d'un malentendu de notre historien, compte tenu que pour $n = 23, 29, 37$, le $(2^n - 1)$ est un nombre composé.

Pour $n = 31$, Cataldi porte dans le tableau (que nous reproduisons partiellement) les deux nombres 1073741824 et 2147483647 dont le produit donne le 8ᵉ N.P., mais il ne les multiple pas entr'eux car il n'a pas vérifié que 1073741824 est premier. C'est ce qu'avait fait Régiomontanus pour le 6ᵉ N.P.

11.	Se bene è nu.pri.	1024		
	no.da nu.pfetto	2048		
13.		4096	8191	33550336
		8192		
		16384		
		32768		
17.		65536	131071	8589869056
		131072		
19.		262144	524287	137438691328
		. . . . . .		
23.		4194304	8388607	
		. . . .		
29.		268435456	536870911	
		. . . .		
31.		1073741824	2147483647	
		. . . .		
37.		68719476736	137438953471	

Sans doute lui eût-il été facile de montrer que $(2^{23} - 1)$ est multiple de 47, et que $(2^{29} - 1)$ est multiple de 233, et que $(2^{37} - 1)$ est multiple de 223; mais il était quasiment impossible pour lui de prouver que 2147483447 était un nombre premier. Il lui aurait fallu pour cela préparer la liste des nombres premiers jusqu'à $\sqrt{2147483647} = 46340 \ldots$ et diviser 2147483647 par tous ces nombres. Nous pouvons donc conclure avec assez d'assurance, que le 8ᵉ N.P. ne se trouvait pas dans la "cassetta" de Cataldi.

Dans l'*Aggiunta al trattato* (pp. 41–47) Cataldi passe à examiner la partie mathématique d'un ouvrage d'un auteur français, Charles de Bouvelles (1470–1533). Il critique âprement l'ouvrage [Bouvelles 1510, 41–47] et son auteur, car il avait écrit "alcune cose che interamente ripugnano al vero". Mais Bovilio, comme l'appelle Cataldi, n'était pas un mathématicien, et nous pouvons pourtant l'excuser s'il a considéré de conditions suffisantes celle qui étaient seulement des conditions nécessaires.

De son traité on peut d'autre part inférer qu'on connaissait de son temps ces deux propositions sur les nombres parfaits:

(a) L'exposant n lorsque $(2^n - 1)$ est premier, est un nombre impair.

(b) Tout nombre parfait (et Cataldi précise: à l'exception de 6), divisé par 9 donne 1 pour reste.

Cataldi dut admettre l'exactitude des propositions de Bovilio et, puisqu'il avait déjà devancé la première en démontrant que n devait être nombre premier, il passa à démontrer la seconde. Wertheim [1902, 81] jugea à son tour la démonstration de Cataldi "einen richtigen aber sehr schwerfällig abgefassten Beweiss", mais elle est très simple, en vérité, si nous sommes capables de nous contraindre à "raisonner par nombres", c'est-à-dire à raisonner comme Cataldi.

Un nombre parfait, disait donc Cataldi, est un terme de position impaire de la progression double qui commence à 1, multiplié par son double diminué de l'unitè. C'est-à-dire que si N est un terme de position impaire n de la progression

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	(N)
(1)		3		5		7		9		11		13	(n)

un nombre parfait est de la forme $N(2N - 1)$.

Or, les trois termes de position (3, 5, 7) de la progression sont (4, 16, 64), lesquels à l'épreuve par 9 donnent pour reste (4, 7, 1); et les restes des $(2N - 1)$ correspondants sont ceux de $(2 \cdot 4 - 1, 2 \cdot 7 - 1, 2 \cdot 1 - 1)$, c'est-à-dire (7, 4, 1); et les restes de $N(2N - 1)$ seront les restes des produits de ces restes, ou bien ils seront toujours 1.

La proposition est ainsi démontrée pour les trois premiers $N(2N - 1)$ de position impaire.

Passons ensuite à considérer les trois termes N (256, 512, 1024) de position impaire (9, 11, 13) de la progression. On les obtient en multipliant par 64 (reste 1) les termes N de position (3, 5, 7), et par conséquent leurs restes seront encore (7, 4, 1); et les restes des $(2N - 1)$ seront encore (4, 7, 1); et les restes des $N(2N - 1)$ seront encore (1, 1, 1). Et ainsi de suite à l'infini. Et la proposition est démontrée.

6. LES TROIS CHIFFRES FINALS D'UN NOMBRE PARFAIT

Nous avons déjà vu que P. Bonghi a démontré [Bonghi 1618, 471] que les N.P. ne peuvent se terminer que par 6 ou par 28. D'après ce que nous savons, ce problème cher aux anciens cessa par la suite d'intéresser les mathématiciens.

Nous avons nous-mêmes repris ce problème en l'appliquant aux nombres de Mersenne $\mathrm{Me}_n = 2^n - 1$ aussi [Picutti 1977, 53–59]; en élargissant la méthode, nous sommes arrivés aux conclusions qui vont suivre.

(1) Les Me_n peuvent se terminer seulement par 7 et par 1. Le 7 est toujours précédé de 0 ou d'un chiffre pair (6 exclu), alors que le 1 est toujours précédé d'un chiffre impair (3 exclu). $\mathrm{Me}_2 = 2^2 - 1 = 3$ fait exception, parce que l'exposant qui le génère est le seul nombre premier pair. $\mathrm{Me}_5 = 2^5 - 1 = 31$ fait exception aussi, parce que l'exposant 5 qui le génère est le seul nombre premier se terminant par 5.

(2) Les Me_n qui se terminent par 7 génèrent des nombres parfaits qui se terminent par 28 précédé d'un chiffre impair; seule exception 28, deuxième nombre parfait.

Les Me_n qui se terminent par 1 génèrent des nombres parfaits qui se terminent par 6 précédé d'un chiffre impair (9 exclu). A cette règle font exception, le premier nombre parfait engendré par Me_2, et le troisième 496 engendré par Me_5.

REFERENCES

Arrighi, G. 1967. Il Codice Palatino 573 della Biblioteca Nazionale di Firenze. *Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti, Classe di Scienze* **101,** 395–437.

——— 1968. Il Codice Ottoboniano Latino 3307 della Biblioteca Apostolica Vaticana. *Physis* **10,** 70–82.

Beiler, A. H. 1964. *Recreations in the theory of numbers*. New York: Dover.

Bonghi, P. 1618. *Numerorum mysteria*. Paris: Reginaldus Chaudière.

Bortolotti, E. 1947. *La storia della Matematica all'Università di Bologna*. Bologna: Zanichelli.

Bouvelles, C. 1510. *Liber de perfectis numeris*. Paris: Henricus Stephanus.

Brentjes, S. 1987. Die ersten sieben vollkommenen Zahlen und drei Arten befreundeter Zahlen in einem Werk zur Elementaren Zahlentheorie von Ismail b. Ibrahim b. Fallus. *Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften Technik und Medizin* **24**(1), 21–30.

Cantor, M. 1900. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* Tome 2. Leipzig: Teubner.

Cataldi, P. 1602. *Prima parte della pratica d'aritmetica data,* Perito Annotio, Bologna: Eredi di Giovanni Rossi.

——— 1603. *Trattato de' numeri perfetti*. Bologna: Eredi di Giovanni Rossi.

——— 1613. *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri* etc. Bologna: Bartolomeo Cochi.

Curtze, M. 1895. Mathematisch-historische Miscellen. 5. Zur Geschichte der vollkommenen Zahlen. *Bibliotheca Mathematica,* Neue Folge **9,** 39–42.

——— 1899. Eine Studienreise. *Centralblatt für Bibliothekswesen* **16,** 288–289.

Dickson, L. E. 1919. *History of the theory of numbers,* Vol. 1. Washington: Carnegie Institute of Washington (on cite la réédition, New York: Chelsea, 1952).

Fermat, P. 1679. *Varia opera mathematica*. Toulouse: Joannes Pech (Réédition, Bruxelles: Culture et Civilisation, 1969).

——— 1894. *Oeuvres,* P. Tannery et C. Henry, Eds., Tome 2. Paris: Gauthier Villars.

Folkerts, M. 1977. Regiomontanus als Mathematiker. *Centaurus* **21,** 214–245.

——— 1980. Die mathematischen Studien Regiomontans in seiner Wiener Zeit. *Österreichische Akademie der Wissenschaften, Philosophisch-Historische Klasse, Sitzungberichte* **364,** 175–209.

Heilbronner, J. C. 1742. *Historia Matheseos universae*. Leipzig: Johann Friedrich Gleditsch.

Henry, C. 1879. Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat suivies de fragments inédits de Bachet et de Malebranche. *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche* **12,** 477–568, 619–740.

Jamblique. 1667. *In Nicomachi Geraseni Arithmeticam introductionem et de fato*. Arnhem: Fridericus Hagius.

——— 1894. *In Nicomachi Geraseni Arithmeticam introductionem liber ad Fidem Codicis Florentini,* H. Pistelli, Ed. Leipzig: Teubner.

Libri, G. 1841. *Histoire des sciences mathématiques en Italie depuis la Renaissance* etc., Tome 4. Paris: Renouard.

Maracchia, S. 1979. *Da Cardano a Galois*. Milano: Feltrinelli.

Marre, A. 1980. Notice sur Nicolas Chuquet et son Triparty en la science des nombres. *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche* **13,** 555–659, 693–814.

Muzafarova, C. 1970. O matematicheskikh glavakh enciklopedicheskogo proizvedeniya Durra-attadž li gurra-at-dibadž Kutbeddina Sirazi. *Uchenie zapiski trudy mechaniko-matematicheskogo fakulteta* **1,** 85–93.

Nicomaque. 1538. *Arithmeticae libri duo*. Paris: Christianus Wechelus.

——— 1952. *Introduction to arithmetic*. Chicago/London/Toronto: Enciclopaedia Britannica (Great Books of the Western World, pp. 805–848).

Pacioli, L. 1494. *Summa de Aritmetica Geometria Proportioni et Proportionalita*. Venezia: Paganino de Paganini.

Picutti, E. 1977. *Sul numero e la sua storia*. Milano: Feltrinelli.

——— 1982. Note su un opuscolo aritmetico di Pascal. *Archimede* **1–2,** 75–80.

——— 1984. Cataldi e i numeri perfetti. *Le Scienze Quaderni* **18,** 40–43.

Rashed, R. 1983. Nombres amiables, parties aliquotes et nombres figurés aux XIII^{ème} et XIV^{ème} siècles. *Archive for History of Exact Sciences* **28,** 107–170.

Riccardi, P. 1952. *Biblioteca matematica italiana dalle origini della stampa ai primi anni del secolo XIX*. Milano: Görlich.

Scheybl, J. 1555. *Das sibend acht und neunt buch des hochberumbten mathematici Euclidis Megarensis*. Augsburg: Valentin Ottmar.

Tartaglia, N. 1556. *General Trattato di numeri e misure,* 2^{a} parte. Venezia: Curtio Troiano de i Navò.

Wertheim, G. 1902. Ein Beitrag zur Beurteilung des Pietro Antonio Cataldi. *Bibliotheca Mathematica,* 3. Folge **3,** 76–83.

Zamberti, B. 1537. *Euclidis Megarensis mathematici clarissimi Elementorum geometricorum Libri XV*. Basel: Johannes Hervagius.