MATHEMATICS

BEZIEHUNGEN DER $\mathfrak{E}_7$ UND $\mathfrak{E}_8$ ZUR OKTAVENEBENE. XI

VON

HANS FREUDENTHAL

(Communicated at the meeting of March 30, 1963)

55. Sei $A \in \mathfrak{R}_1$. Dann gilt

$$[\Phi, A\Phi] = 0 \text{ für alle } \Phi \in \mathfrak{W}_4.$$

Beweis: Wir dürfen annehmen: $A = \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$, $\Phi_i \in \mathfrak{W}_4$, $\Phi \in \mathfrak{W}_4$.

$$\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}_2\Phi = -\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}\Phi_2 = -\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}^2\Phi_2 - \widetilde{[\Phi, \Phi_1]}\tilde{\Phi}\Phi_2,$$

aber auch

$$= -\tilde{\Phi}^2\tilde{\Phi}_1\Phi_2 - \tilde{\Phi}\widetilde{[\Phi_1, \Phi]}\Phi_2.$$

Man addiere diese Ergebnisse und wende 35.4 an:

$$\begin{aligned} 2\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}_2\Phi &= -(\Phi, \Phi_2)\tilde{\Phi}_1\Phi - (\Phi, \tilde{\Phi}_1\Phi_2)\Phi + [\tilde{\Phi}, [\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}_1]]\Phi_2 \\ &= (\Phi, \Phi_2)\tilde{\Phi}\Phi_1 - (\Phi, \tilde{\Phi}_1\Phi_2)\Phi + (\Phi, \Phi_1)\tilde{\Phi}\Phi_2. \end{aligned}$$

Analog

$$2\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}_2\tilde{\Phi}_1\Phi = (\Phi, \Phi_1)\tilde{\Phi}\Phi_2 - (\Phi, \tilde{\Phi}_2\Phi_1)\Phi + (\Phi, \Phi_2)\tilde{\Phi}\Phi_1.$$

Also

$$\tilde{\Phi}((\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}_2 + \tilde{\Phi}_2\tilde{\Phi}_1)\Phi - (\Phi, \Phi_1)\Phi_2 - (\Phi, \Phi_2)\Phi_1) = 0,$$

w.z.b.w.

56. $(\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi_3, \Phi_4)$ ist invariant bei den Permutationen $1 \leftrightarrow 2$; $3 \leftrightarrow 4$; $1 \leftrightarrow 3$ und $2 \leftrightarrow 4$, wie man aus

$$\begin{aligned} 2(\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi_3, \Phi_4) = &-(\tilde{\Phi}_2\Phi_3, \tilde{\Phi}_1\Phi_4) - (\tilde{\Phi}_1\Phi_3, \tilde{\Phi}_2\Phi_4) \\ &+ (\Phi_1, \Phi_3)(\Phi_2, \Phi_4) + (\Phi_1, \Phi_4)(\Phi_2, \Phi_3) \end{aligned}$$

sieht.

$(\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi_3, \Phi_4)$ hängt daher nur von $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$ und $\langle \Phi_3, \Phi_4 \rangle$ ab; die Abhängigkeit ist bilinear. Es gibt daher in $\mathfrak{R}_1$ ein inneres Produkt mit der Eigenschaft

$$(\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle, \langle \Phi_3, \Phi_4 \rangle) = (\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi_3, \Phi_4). \tag{56.1}$$

Dieses innere Produkt ist metasymplektisch invariant. Dasselbe gilt aber für sp AB als Funktion von $A, B \in \mathfrak{R}_1$, da sp $([\tilde{\Phi}, A]B + A[\tilde{\Phi}, B]) = 0$ ist. Wegen der Irreduzibilität der metasymplektischen Gruppe muss es also eine Konstante $\varkappa$ geben mit

$$\operatorname{sp} AB = \varkappa(A, B). \tag{56.2}$$

Die Bestimmung dieser Konstanten skizzieren wir nur, da sie sich später nochmals durch geometrische Betrachtungen ergeben wird.

Man hat bei den Gruppen der vierten Zeile von S

(56.3) $$(\operatorname{sp} \tilde{\Phi}^2)^2 = \tfrac{1}{5}(2d+4) \operatorname{sp} \tilde{\Phi}^4,$$

wo $d = \dim \mathfrak{R}_4$, also
$$\tfrac{1}{5}(2d+4) = \tfrac{108}{5},\ 32,\ 54,\ 100$$
ist. Man berechnet
$$\langle \Phi, \Phi \rangle^2 \Phi_0 = \tilde{\Phi}^4 \Phi_0 + 2\varepsilon_2 \varepsilon_3^{-1} (\Phi, \Phi) \tilde{\Phi}^2 \Phi_0 + (1 - 2\varepsilon_2 \varepsilon_3^{-1})(\Phi, \Phi_0)(\Phi, \Phi)\Phi + \varepsilon_2^2 \varepsilon_3^{-2} (\Phi, \Phi)^2 \Phi_0,$$
also
$$\operatorname{sp} \langle \Phi, \Phi \rangle^2 = \operatorname{sp} \tilde{\Phi}^4 + 2\varepsilon_2 \varepsilon_3^{-1} (\Phi, \Phi) \operatorname{sp} \tilde{\Phi}^2 + (1 - 2\varepsilon_2 \varepsilon_3^{-1})(\Phi, \Phi)^2 + (\varepsilon_2^2 \varepsilon_3^{-2})(\Phi, \Phi)^2 \operatorname{sp} 1.$$

Man drücke nun nach 35.1 und 56.2 alles durch (Φ, Φ) aus:
$$\operatorname{sp} \langle \Phi, \Phi \rangle^2 = \left(\tfrac{5}{2d+4} \varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_2^2 \varepsilon_3^{-1} + 1 - 2\varepsilon_2 \varepsilon_3^{-1} + \varepsilon_2^2 \varepsilon_3^{-2} d\right)(\Phi, \Phi).$$

Ferner
$$(\langle \Phi, \Phi \rangle \Phi, \Phi) = (\varepsilon_2 \varepsilon_3^{-1} - 1)(\Phi, \Phi).$$

Wir erinnern an die Konstanten

$\varepsilon_2 =$	9	12	18	30
$\varepsilon_2 \varepsilon_3^{-1} =$	$\frac{5}{26}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{5}{2d+4} =$	$\frac{5}{108}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{100}$
$d =$	52	78	133	248.

Man rechnet dann aus:

(56.4) $$\varkappa = \operatorname{sp} \langle \Phi, \Phi \rangle^2 / (\langle \Phi, \Phi \rangle \Phi, \Phi) = -\tfrac{7}{2},\ -4,\ -5,\ -7.$$

57. Für $A \in \mathfrak{W}_1$, $B \in \mathfrak{R}_1$ gilt
$$ABA = -\tfrac{1}{2}(A, B)A.$$

Beweis: Sei $\Phi \in \mathfrak{W}_4$, $\Phi \neq 0$. Nach 53 gibt es ein Φ_1 mit
$$[\Phi_1, A\Phi] = 0,$$
$$A = \langle \Phi_1, A\Phi \rangle.$$
Nach 55 ist
$$[BA\Phi, A\Phi] = 0.$$
Also
$$\begin{aligned} ABA\Phi &= \langle \Phi_1, A\Phi \rangle BA\Phi \\ &= -\tfrac{1}{2}(BA\Phi, \Phi_1)A\Phi \\ &= -\tfrac{1}{2}(B, \langle A\Phi, \Phi_1 \rangle)A\Phi \\ &= -\tfrac{1}{2}(B, A)A\Phi. \end{aligned}$$
Dies gilt dann auch für *alle* $\Phi \in \mathfrak{R}_4$.

58. Zur Spur von AB ($A \in \mathfrak{W}_1$, $B \in \mathfrak{R}_1$) liefert nur der Teilraum $A\mathfrak{R}_4$ einen Beitrag. Nach 57 hat AB dort den einzigen Eigenwert $-\tfrac{1}{2}(A, B)$.

Also ist

$$\operatorname{sp}(AB) = -\tfrac{1}{2}(A, B) \dim A\mathfrak{R}_4.$$

Die Konstanten in 56.4 sind also bis auf den Faktor $-\frac{1}{2}$ die Dimensionen von $A\mathfrak{R}_4$. Auf diesem Wege werden sie später von neuem verifiziert werden.

59. Von 37 an ist nicht wesentlich benutzt, zu welchem reellen Typ der Gruppen der vierten Zeile von S die metasymplektischen Gruppen gehören. Im nächsten Satz spielt das wohl eine Rolle. Daher muss die Darstellung der metasymplektischen Gruppe aus 7 entscheidend herangezogen werden.

Nach 54 sind die mit einem Punkte inzidenten Symplekta paarweise verflochten. Nun wird behauptet:

Die mit einem Punkte inzidenten Symplekta bilden eine maximale Menge paarweise verflochtener Symplekta.

(Es gibt auch noch andere maximale Mengen paarweise verflochtener Symplekta.)

Beweis: Φ_0 sei verflochten mit allen Symplekta, die mit A inzidieren, also

$$[\Phi_0, A\Phi^*] = 0$$

für alle $\Phi^* \in \mathfrak{W}_4$, also auch für alle $\Phi^* \in \mathfrak{R}_4$. Wir haben zu zeigen:

$$\Phi_0 \text{ ist von der Form } A\Phi^* \text{ mit } \Phi^* \in \mathfrak{W}_4.$$

Wegen 38 dürfen wir Φ_0 in der speziellen Form

$$\Phi_0 = \underline{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

annehmen.

Für

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Theta+\gamma & \underline{\delta} \\ \bar{\delta} & \Theta-\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

ist

$$[\Phi_0, \Phi] = \begin{pmatrix} \bar{\delta} & -2\gamma \\ 0 & -\bar{\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die mit Φ_0 kommutierenden Φ sind also von der Form

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Theta & \underline{\delta} \\ 0 & \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{59.1}$$

Um zu $\mathfrak{W}_4$ zu gehören, müssen sie (siehe 36 d–e) noch

$$\Theta^2 = 0,\ P \text{ von der Form } \Theta S,\ P \times P = 2\underline{\delta}\Theta$$

oder

$$\Theta = 0,\ P \times P = 0,\ \underline{\delta} = 0$$

erfüllen. Im zweiten Fall ist auch $\Phi + \Phi_0 \in \mathfrak{W}_4$, also $\langle \Phi, \Phi_0 \rangle = 0$.

Sei nun A speziell von der Form $\langle\Phi, \Phi_0\rangle \neq 0$ mit einem solchen Φ, also jedenfalls $\Theta \neq 0$.
Mit

$$\Phi^* = \begin{pmatrix} \Theta^* & 0 \\ 0 & \Theta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\Theta^{*2} = 0)$$

ist $[\Phi_0, \Phi^*] = 0$, also

$$\langle\Phi_0, \Phi\rangle\Phi^* = \tfrac{1}{2}(\Phi, \Phi^*)\Phi_0.$$

Wegen $\Theta \neq 0$ ist das für geeignetes Φ^* von null verschieden. Also inzidiert Φ_0 mit dem Punkte A.

Allgemein: Wenn $A = \langle\Phi_1, \Phi_2\rangle \neq 0$, $[\Phi_1, \Phi_2] = 0$, so inzidieren die Φ_i mit A.

Der Punkt A darf nun in der Form

$$A = \langle\Phi_1, \Phi_2\rangle$$

angenommen werden, wo

$$[\Phi_1, \Phi_0] = [\Phi_2, \Phi_0] = 0,$$

also

(59.2) $$\Phi_i = \begin{pmatrix} \Theta_i & \underline{\delta}_i \\ 0 & \Theta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit

(59.3) $$\Theta_i{}^2 = 0, \;\; \varrho_i P_i = \Theta_i S, \;\; P_i \times P_i = 2\underline{\delta}\Theta_i.$$

Die Bedingung $[\Phi_1, \Phi_2] = 0$ liefert weiter

(59.4) $$[\Theta_1, \Theta_2] = 0, \;\; \{P_1, P_2\} = 0, \;\; \Theta_1 P_2 = \Theta_2 P_1.$$

Wir haben nun zu fordern:

$$[\Phi_0, \langle\Phi_1, \Phi_2\rangle\Phi^*] = 0$$

für alle $\Phi^* \in \mathfrak{R}_4$. Für $\Phi^* = \overline{\Delta}$ erhält man an der 6. Stelle von $\langle\Phi_1, \Phi_2\rangle\Phi^*$: $\Theta_1 P_2$. Ebenso für $\Phi^* = \overline{P}^*$: $\Theta_1\Theta_2 P^*$.
Also

(59.5) $$\Theta_1 P_2 = \Theta_2 P_1 = 0,$$

(59.6) $$\Theta_1\Theta_2 = 0,$$

also nach (32.9) Θ_1, Θ_2 linear abhängig.

Also: Sollen alle mit dem Punkte A inzidenten Symplekta mit Φ_0 verflochten sein, so muss A von der Form $\langle\Phi_1, \Phi_2\rangle$ sein mit $\Phi_i \in \mathfrak{W}_4$, die 59.2–6 erfüllen.

Für

$$\Phi^* = \begin{pmatrix} \Theta^* + \gamma & \underline{\delta}^* \\ \bar{\delta}^* & \Theta^* - \gamma^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1{}^* \\ P_2{}^* \end{pmatrix}$$

berechnet man dann (hauptsächlich mit Verwendung von 32.6.1–2, wobei $P \times P$ durch Θ_i und P durch P_i ersetzt wird):

(59.7) $$\langle\Phi_1, \Phi_2\rangle\Phi^* = \begin{pmatrix} \bar{\delta}^*\Theta & \frac{1}{4\varepsilon}\,\mathrm{sp}\;\Theta\Theta^* \\ 0 & \bar{\delta}^*\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta P_2{}^* \\ 0 \end{pmatrix},$$

wo zur Abkürzung

(59.8) $$\Theta = \underline{\delta}_1 \Theta_2 + \underline{\delta}_2 \Theta_1 - P_1 \times P_2$$

gesetzt ist.

(59.7) gibt also bei festem Θ und variablen $\Theta^*, \bar{\delta}^*, P_2{}^*$ mit

(59.9) $$P_2{}^* \times P_2{}^* = -2\bar{\delta}^* \Theta^*$$

die Gesamtheit der mit A inzidenten Symplekta. Wählt man Φ^* so, dass $\bar{\delta}^* = 0$, $P_2{}^* = 0$, sp $\Theta\Theta^* \neq 0$, so ergibt sich die zu beweisende Behauptung, dass Φ_0 unter ihnen vorkommt. Diese Wahl ist möglich, denn wegen $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \neq 0$ ist $\Theta \neq 0$.

60. Wir nutzen die letzten Resultate noch aus, um die Struktur der Mannigfaltigkeit $\{A\}$ der mit A inzidenten Symplekta zu bestimmen.

Als A nehmen wir das door (59.7) bestimmte $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$.

Nach 59.3 ist es klar, dass $\Theta^2 = 0$ sein muss. Nach 9 dürfen wir speziell

$$\Theta = (0, 0, A, 0)$$ [1]

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

annehmen. Mit

$$P_2{}^* = (X, U, \xi, \omega),$$

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \omega_1 & & \\ & & * \\ & & \end{pmatrix},$$

wird nach 4.1.

$$\Theta P_2{}^* = (\omega A, 2A \times X, (A, U), 0).$$

Nun ist

$$2A \times X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_3 & -x_1 \\ 0 & -\bar{x}_1 & \xi_2 \end{pmatrix}, \quad (A, U) = \omega_1.$$

Weiter aus 59.3, 59.9, 32.4, 4.5

$$2\bar{\delta}^* \cdot \tfrac{1}{4\varepsilon} \operatorname{sp} \Theta\Theta^* = -\tfrac{1}{4\varepsilon} \operatorname{sp} \Theta(P_2{}^* \times P_2{}^*) =$$
$$\tfrac{1}{4}\{\Theta P_2{}^*, P_2{}^*\} = \tfrac{1}{4}((X, A \times X) - 2\omega(A, U)).$$

Das allgemeine Symplekton von 59.7 wird also durch die reellen Koordinaten

$$\eta_1 = 2\bar{\delta}^*, \ \eta_2 = \tfrac{1}{4\varepsilon} \operatorname{sp} \Theta\Theta^*, \ \eta_3 = \xi_2, \ \eta_4 = \xi_3, \ \eta_5 = \omega, \ \eta_6 = \omega_1$$

und das Element x_1 der Hurwitz-Algebra beschrieben, die der Bedingung

$$|x_1|^2 + 4\eta_1\eta_2 - 2\eta_3\eta_4 + 2\eta_5\eta_6 = 0$$

unterworfen sind.

---

[1]) Die Bezeichnungen aus 4. Man verwechsele das A nicht mit dem Punkt A der metasymplektischen Geometrie.

$\{A\}$ ist also eine Quadrik der (projektiven) Dimension

$$5, \quad 6, \quad 8, \quad 12$$

und der Signatur

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8,$$

die also Ebenen als höchst-dimensionale projektive Räume enthält. Die Verbundenheit der Symplekta in $\{A\}$ ist die der Punkte auf der Quadrik. Wie in 58 angekündigt, ergibt sich

$$\dim A\mathfrak{R}_4 = 7, \quad 8, \quad 10, \quad 14.$$

61. Wir nutzen die Resultate von 59 weiter aus, um die Struktur der Mannigfaltigkeit $\{\Phi_0\}$, d.h. der Menge der mit Φ_0 inzidenten Punkte, zu ermitteln.

Durch 59.7 ist sie in eineindeutige Beziehung zu $\mathfrak{N}$ (siehe 9), der Mannigfaltigkeit der Punkte der symplektischen Geometrie $Sy(5, \mathscr{H})$ über $\mathscr{H}$, gesetzt:

$$\zeta\Theta = \langle\Phi_1, \Phi_2\rangle. \tag{61.1}$$

Was entspricht bei ζ verbundenen[1]) Punkten? Die Verbundenheitsbedingung war

$$\operatorname{sp}\,\Theta\Theta' = 0.$$

Man berechne nach 59.7

$$(\zeta\Theta')(\zeta\Theta)\Phi^* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4\varepsilon}\bar{\delta}^*\operatorname{sp}\,\Theta\Theta' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also $\operatorname{sp}\,\Theta\Theta' = 0$ dann und nur dann, wenn $(\zeta\Theta')(\zeta\Theta) = 0$ ist. Gemäss der Definition in 37 erhält ζ die Verbundenheitsrelation.

Nach 38 gilt das hier für Φ_0 Bewiesene für beliebige $\Phi \in \mathfrak{W}_4$. $\{\Phi\}$ ist ein Symplekton im Sinne von $Sy(5, \mathscr{H})$.

Die Bezeichnung Symplekton ist damit gerechtfertigt.

62. Die mit Φ_0 verbundenen Φ (also $\langle\Phi, \Phi_0\rangle = 0$) haben die Form

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\delta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } P \times P = 0 \tag{62.1}$$

(siehe 36e), stehen also durch die Abbildung ζ mit

$$\zeta P = \Phi \bmod \Phi_0$$

in mod Φ_0 eineindeutiger Beziehung zu den Ebenen (über der Hurwitz-Algebra $\mathscr{H}$) der symplektischen Geometrie. Wie verhält sich dies ζ zu dem von 61?

Sei Θ Punkt der symplektischen Geometrie $Sy(5, \mathscr{H})$. Dann ist nach (59.7) und (61.1) $(\zeta\Theta)\Phi^* = \langle\Phi_1, \Phi_2\rangle\Phi^*$ dann und nur $= \Phi$ für geeignetes Φ^*, wenn $P = \Theta P^*$ für geeignetes P^* ist; das ist aber nach 9 wegen

[1]) Wir wollen lieber "verbunden" statt "verbindbar" sagen.

$P \times P = 0$ dann und nur dann der Fall, wenn $\Theta P = 0$ ist, also der Punkt Θ auf der Ebene P (in $Sy(5, \mathscr{H})$) liegt. Also:

Der Punkt $\zeta\Theta$ inzidiert mit den Symplekta $\zeta P = \Phi + \lambda\Phi_0$ (Φ verbunden mit Φ_0) dann und nur dann, wenn Θ auf P liegt. Dies gilt wieder für *beliebiges* $\Phi_0 \in \mathfrak{W}_4$.

Zwei verschiedene verbundene Symplekta Φ_0, Φ haben also als Durchschnitt $\{\Phi_0\} \cap \{\Phi\}$ eine Ebene der symplektischen Geometrie von $\{\Phi_0\}$; alle diese Ebenen ergeben sich als solche Durchschnitte; die Symplekta $\{\Phi\}$, die eine gegebene Ebene enthalten, bilden ein Büschel (reelle projektive Gerade).

Die Mannigfaltigkeit mod Φ_0 der mit Φ_0 verbundenen Symplekta ist im Wesentlichen die Mannigfaltigkeit der Ebenen von $Sy(5, \mathscr{H})$. Sind $\zeta P_i = \Phi_i \bmod \Phi_0$ $(i = 1, 2)$ mit Φ_0 verbunden, so ergibt sich mit 62.1 nach einfacher Rechnung, bei der 32.5 eine Rolle spielt:

Φ_1, Φ_2 verflochten, dann und nur dann, wenn $\{P_1, P_2\} = 0$, also wenn die Ebenen P_i sich schneiden;

Φ_1, Φ_2 verbunden, dann und nur dann, wenn $P_1 \times P_2 = 0$, also wenn die Ebenen P_i mehr als einen Schnittpunkt haben.

In $Sy(5, \mathscr{H})$ hat jede Menge paarweise längs Geraden schneidender Ebenen eine Gerade (über $\mathscr{H}$) als Durchschnitt (siehe 16.10). Also gilt auch:

Der Durchschnitt einer Menge paarweise verbundener Symplekta ist eine projektive Gerade über $\mathscr{H}$.

Jedenfalls gibt es also einen Punkt A, der mit einer gegebenen Menge paarweise verbundener Symplekta inzidiert. Nach 60 liegen auf der Quadrik $\{A\}$ reelle projektive Ebenen als maximale Mengen paarweise verbundener Symplekta. Also:

Maximale Mengen paarweise verbundener Symplekta sind reelle projektive Ebenen.

63. Für ein Paar verschiedener verbundener Punkte A, A' gilt Analoges. Es wird vorläufig unter der Voraussetzung bewiesen, dass es ein Symplekton gibt, das mit beiden inzidiert. (Siehe 64.) Wir dürfen nach 38 annehmen, Φ_0 sei ein solches.

$$A = \zeta\Theta, \quad A' = \zeta\Theta',$$

wobei Θ, Θ' unabhängig sind wegen der Unabhängigkeit von A, A', und wobei Θ, Θ' verbunden sind wegen der Verbundenheit von A, A' (siehe 62). Der Durchschnitt $\{A\} \cap \{A'\}$ soll bestimmt werden. Nach 59.7 und wegen der Unabhängigkeit von Θ, Θ' muss ein Element von $\{A\} \cap \{A'\}$ die Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \underline{\delta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$$

haben, wo nach 36e

$$P \times P = 0$$

ist, sowie

$$\Theta P = \Theta' P = 0.$$

In $Sy(5, \mathscr{H})$ muss also P mit der Geraden $\Theta\Theta'$ inzidieren. Nach 12 bilden diese Ebenen ein Büschel. Unter Berücksichtigung des Parameters $\underline{\delta}$ erhält man für

$\{A\} \cap \{A'\}$ eine reelle projektive Ebene auf den Quadriken von $\{A\}$ und $\{A'\}$.

Man erhält alle $\{A''\}$, die diese Ebene enthalten, wenn man Θ'' mit $\zeta\Theta''=A''$ auf der Geraden $\Theta\Theta'$ variieren lässt. Die $\{A''\}$, die eine solche projektive Ebene enthalten, bilden also eine projektive Gerade über der Hurwitz-Algebra $\mathscr{H}$.

Schliesslich ist jede reelle projektive Ebene der Quadrik $\{A\}$ als Durchschnitt $\{A\} \cap \{A'\}$ erhältlich. Denn sind Φ_0, Φ_1, Φ_2 verbundene nichtkollineare Elemente von $\{A\}$, $\Phi_i=\zeta P_i \bmod \Phi_0$ $(i=1, 2)$, $A=\zeta\Theta$, so ist (nach 62) $\Theta P_i=0$, $P_1 \times P_2=0$; ferner mit einem Θ' auf der Schnittgeraden der P_i und mit $A'=\zeta\Theta'$ in der Tat $\Phi_i \in \{A\} \cap \{A'\}$.

64. Die vorläufige Voraussetzung in 63 wird noch eliminiert:

Seien A, B verbundene Punkte. Dann gibt es ein Symplekton, das mit beiden inzidiert.

B e w e i s : $AB=0$, also $(AB\Phi_1, \Phi_2)=0$, $(B\Phi_1, A\Phi_2)=0$. Also scharnieren die Symplekta von $\{A\}$ mit denen von $\{B\}$.

Seien $\Phi, \Phi_1 \in \{A\}$, $\Phi_2 \in \{B\}$. Dann $(\Phi, \Phi_2)=(\Phi_1, \Phi_2)=0$. Ferner wegen $AB=0$ und $\Phi_2=B\Phi_3$ mit gewissem Φ_3, auch $A\Phi_2=0$. Also wegen 52: $0=A\Phi_2=\langle\Phi, \Phi_1\rangle\Phi_2=\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}_1\Phi_2$. Also ist $[\Phi_1, \Phi_2]=0$ mit allen Φ aus $\{A\}$ verflochten. Also nach 59: $[\Phi_1, \Phi_2] \in \{A\}$. Analog $[\Phi_1, \Phi_2] \in \{B\}$. Ist $[\Phi_1, \Phi_2]$ für alle $\Phi_1 \in \{A\}$, $\Phi_2 \in \{B\}$, so geben A und B nach 59 denselben Punkt. Dann ist die Behauptung aber evident.

Es hat sich sogar ergeben:

Mit den verbundenen Punkten A, B inzidieren alle $[\Phi_1, \Phi_2]$ mit $\Phi_1 \in \{A\}$, $\{\Phi_2\} \in B$; wenn A, B verschiedene Punkte sind, so ist das schon die Gesamtheit der mit ihnen inzidierenden Symplekta.

Das Letzte ergibt sich mittels 59.7 unter Berücksichtigung der in 63 erzielten Charakterisierung dieser Symplekta.

65. Es folgt hier eine Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse. Dabei wird jedes Resultat dualisiert; Beweise folgen später.

65.1. Verbunden $\to$ verflochten $\to$ scharnierend für Symplekta (siehe 37), für Punkte (siehe 66).

65.2. $\{\Phi_1\} \cap \{\Phi_2\}$ besteht dann und nur dann aus mindestens einem Punkt, wenn Φ_1, Φ_2 verflochten sind. (Im Allgemeinen: $\langle\Phi_1, \Phi_2\rangle$; siehe auch 62.)

65.2′. $\{A\} \cap \{B\}$ besteht dann und nur dann aus mindestens einem Symplekton, wenn A, B verflochten sind. (Im Allgemeinen: $AB\Phi^*=BA\Phi^*$; siehe auch 63–64.)

65.3. $\{\Phi_1\} \cap \{\Phi_2\}$ besteht dann und nur dann aus höchstens einem Punkt, wenn Φ_1, Φ_2 nicht verbunden sind (siehe 62).

65.3′. $\{A\} \cap \{B\}$ besteht dann und nur dann aus höchstens einem Symplekton, wenn A, B nicht verbunden sind (siehe 63–64).

65.4. Zu Symplekta Φ_1, Φ_2 gibt es dann und nur dann mindestens ein mit beiden verbundenes Symplekton, wenn Φ_1, Φ_2 scharnieren. (Im Allgemeinen $[\Phi_1, \Phi_2]$ (siehe 45); verschwindet das, so betrachte man die Geometrie in der Quadrik $\{\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle\}$.)

65.4′. Zu Punkten A, B gibt es dann und nur dann mindestens einen Punkt, der mit beiden verbunden ist, wenn A, B scharnieren. (Siehe 72.)

65.5. Zu Symplekta Φ_1, Φ_2 gibt es dann und nur dann höchstens ein Symplekton, das mit beiden verbunden ist, wenn Φ_1, Φ_2 nicht verflochten sind. (Siehe 45.)

65.5′. Zu Punkten A, B gibt es dann und nur dann höchstens einen Punkt, der mit beiden verbunden ist, wenn A, B nicht verflochten sind. (Siehe 72.)

65.6. Wenn die Symplekta Φ_1, Φ_2 verbunden und Φ_2, Φ_3 verflochten sind, so scharnieren Φ_1, Φ_3. (Siehe 43.)

65.6′. Wenn die Punkte A, B verbunden und B, C verflochten sind, so scharnieren A, C. (Siehe 72.)

65.7. In $\{\Phi_1\}, \{\Phi_2\}$ gibt es dann und nur dann bzw. Punkte A_1, A_2, die verbunden sind, wenn Φ_1, Φ_2 scharnieren (siehe 72).

65.7′. In $\{A_1\}, \{A_2\}$ gibt es dann und nur dann bzw. Symplekta Φ_1, Φ_2, die verbunden sind, wenn A_1, A_2 scharnieren. (Siehe 72.)

65.8. Für jeden Punkt A ist $\{A\}$ eine maximale Menge verflochtener Symplekta. (Siehe 59.)

65.8′. Für jedes Symplekton Φ ist $\{\Phi\}$ eine maximale Menge verflochtener Punkte. (Siehe 72.)

65.9. Die Menge $\{A\}$ hat die Struktur einer Quadrik der Dimension 5, 6, 8, 12 und der Signatur 1, 2, 4, 8. (Siehe 60.)

65.9′. Die Menge $\{\Phi\}$ hat die Struktur einer 5-dimensionalen symplektischen Geometrie über der Hurwitz-Algebra $\mathscr{H}$. (Siehe 61.)

65.10. Für verschiedene verbundene A, B hat $\{A\} \cap \{B\}$ die Struktur einer reellen projektiven Ebene; alle Ebenen der Quadrik von $\{A\}$ sind so erhältlich; die $\{A\}$, die solch eine Ebene enthalten, bilden eine projektive Gerade über der Hurwitz-Algebra $\mathscr{H}$. (Siehe 63.).

65.10′. Für verschiedene verbundene Φ_1, Φ_2 hat $\{\Phi_1\} \cap \{\Phi_2\}$ die Struktur einer projektiven Ebene über der Hurwitz-Algebra $\mathscr{H}$; alle Ebenen der symplektischen Geometrie von $\{\Phi_1\}$ sind so erhältlich; die $\{\Phi\}$, die solch eine Ebene enthalten, bilden eine reelle projektive Gerade. (Siehe 62.)

65.11. Die Mannigfaltigkeit $\operatorname{mod} \Phi_0$ der mit Φ_0 verbundenen Symplekta (also die der reellen projektiven Geraden von Symplekta durch Φ_0) hat die Struktur der Mannigfaltigkeit der Ebenen einer 5-dimensionalen symplektischen Geometrie über der Hurwitz-Algebra $\mathscr{H}$; „verflochten" entspricht „schneiden", „verbunden" entspricht „schneiden in einer Geraden". (Siehe 62.)

65.11′. Die Mannigfaltigkeit mod A_0 der mit A_0 verbundenen Punkte (d.h. die der projektiven Geraden über $\mathscr{H}$ durch A) hat die Struktur der Mannigfaltigkeit der Ebenen der reellen Quadrik $\{A_0\}$; ,,verflochten'' entspricht ,,schneiden'', ,,verbunden'' entspricht ,,schneiden in einer Geraden''. (Siehe 72.)

65.12. Eine maximale Menge paarweise verbundener Symplekta ist eine reelle projektive Ebene auf der Quadrik $\{A\}$. Ihr Durchschnitt ist eine projektive Gerade über $\mathscr{H}$. (Siehe 62.)

65.12′. Eine maximale Menge paarweise verbundener Punkte ist eine Ebene von $Sy(5, \mathscr{H})$. Ihr Durchschnitt ist eine reelle projektive Gerade von Symplekta. (Siehe 72.)

66. Beweis von 65.1 für Punkte:

Sei $AB=0$, also $(AB\Phi_1, \Phi_2)=0$, $(\Phi_1, BA\Phi_2)=0$ für alle Φ_1, Φ_2, also $BA=0$.

Sei $AB=BA$. Dann nach 57: $(A, B)A=-2ABA=-2A^2B=0$ nach 49.

67. Beweis von 65.6′: Sei $AB=0$, $BC=CB$. Sei $\Phi_1 \in \{A\} \cap \{B\}$ (siehe 65.2′) und Φ_2 so, dass $A=\langle\Phi_1, \Phi_2\rangle$. Es gibt $\Phi_1{}^*, \Phi_2{}^*$ mit $B\Phi_1{}^*=\Phi_1$, $A\Phi_2{}^*=\Phi_2$. Nach 56.1

$$(C,A)=(C\Phi_1,\Phi_2)=(CB\Phi_1{}^*,A\Phi_2{}^*)=(BC\Phi_1{}^*,A\Phi_2{}^*)=(C\Phi_1{}^*,BA\Phi_2{}^*)=0.$$

68. Inzident $\rightarrow$ halbinzident.

Denn für inzidente A, Φ gibt es ein Φ^* mit $A\Phi^*=\Phi$, also $A\Phi=A^2\Phi^*=0$ wegen 49.

69. Für Punkte A und Symplekta Φ sind folgende Aussagen äquivalent:

69.1. A und Φ sind halbinzident.

69.2. $[A, \tilde{\Phi}]=0$.

69.3. Φ scharniert mit jeden $\Phi_1 \in \{A\}$.

69.3′. A scharniert mit jedem $A_1 \in \{\Phi\}$.

69.4. In $\{A\}$ gibt es ein mit Φ verbundenes Φ_1.

69.4′. In $\{\Phi\}$ gibt es ein mit A verbundenes A_1.

69.5. In $\{A\}$ gibt es mehrere mit Φ verflochtene Symplekta.

69.5′. In $\{\Phi\}$ gibt es mehrere mit A verflochtene Punkte.

(Beweise in 72.)

70. A, Φ seien halbinzident, aber nicht inzident. Dann gilt:

70.1. Die mit Φ verbundenen Symplekta in $\{A\}$ bilden eine reelle projektive Gerade auf $\{A\}$, die besteht aus allen $[\Phi, \Phi_1]\neq 0$ mit $\Phi_1 \in \{A\}$. (Siehe 72.)

70.1′. Die mit A verbundenen Punkte in $\{\Phi\}$ bilden eine Gerade (über $\mathscr{H}$) der symplektischen Geometrie von Φ. (Siehe 72.)

70.2. $\Phi_1 \in \{A\}$ ist dann und nur dann mit Φ verflochten, wenn Φ_1 mit allen Symplekta aus $\{A\}$ verbunden ist, mit denen Φ verbunden ist. (Siehe 72.)

70.2′. $A_1 \in \{\Phi\}$ ist dann und nur dann mit A verflochten, wenn A_1 verbunden ist mit allen Punkten aus $\{\Phi\}$, mit denen A verbunden ist. (Siehe 72.)

71.

71.1. Sei Φ_0 mit Φ_1 und Φ_2 verbunden, und seien Φ_1, Φ_2 verflochten. Dann ist $\{\Phi_0\} \cap \{\Phi_1\} \cap \{\Phi_2\}$ nichtleer. (Siehe 62 Ende.)

71.1′. Sei A_0 mit A_1 und A_2 verbunden, und seien A_1, A_2 verflochten. Dann ist $\{A_0\} \cap \{A_1\} \cap \{A_2\}$ nichtleer. (Siehe 72.)

71.2. Sei Φ_0 mit den Φ_1, Φ_2 verflochten, aber nicht verbunden, und seien Φ_1, Φ_2 verbunden. Dann stimmen die Punkte $\langle\Phi_0, \Phi_1\rangle$, $\langle\Phi_0, \Phi_2\rangle$ überein. (Siehe 72.)

71.2′. Sei A_0 mit den A_1, A_2 verflochten, aber nicht verbunden, und seien A_1, A_2 verbunden. Dann liegen sie in einem Symplekton. (Siehe 72.)

71.3. Seien Φ_1 mit Φ_2, Φ_2 mit Φ_3, Φ_3 mit Φ_4 verbunden und Φ_1 mit Φ_4 verflochten. Dann gibt es einen Punkt, mit dem drei ihrer inzidieren und der vierte (Φ_3 oder Φ_4) halbinzidiert.

71.3′. Seien A_1 mit A_2, A_2 mit A_3, A_3 mit A_4 verbunden und A_1 mit A_4 verflochten. Dann gibt es ein Symplekton, mit dem drei ihrer inzidieren und der vierte (A_3 oder A_4) halbinzidiert.

71.4. Seien Φ_i ($i=1, \ldots, 5 \bmod 5$) zyklisch verbunden. Dann gibt es einen Punkt, mit dem vier ihrer inzidieren und der fünfte halbinzidiert.

71.4′. Seien A_i ($i=1, \ldots, 5 \bmod 5$) zyklisch verbunden. Dann gilt: Entweder liegen sie in einem Symplekton, oder gewisse vier unter ihnen liegen in einer Ebene (über $\mathscr{H}$).

72. Beweise:

Zu 71.2: Man nehme Φ_0 spezial $= \underline{\Delta}$. Die mit Φ_0 verflochtenen, nicht verbundenen Φ_i müssen die Form 59.1

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} \Theta_i & \underline{\delta}_i \\ 0 & \underline{\Theta}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

haben. Da $\langle\Phi_1, \Phi_2\rangle = 0$, hat man wie in 59: $[\Phi_0, \langle\Phi_1, \Phi_2\rangle\Phi^*] = 0$, also (59.6) $\Theta_1\Theta_2 = 0$, Θ_1, Θ_2 abhängig. $A = \zeta\Theta_i$ (siehe 61) inzidiert mit Φ_0 und Φ_i (siehe 62). Also sind die Punkte $\langle\Phi_0, \Phi_1\rangle$ und $\langle\Phi_0, \Phi_2\rangle$ mit A identisch.

Zu $69.1 \leftrightarrow 69.3$: $A\Phi = 0 \leftrightarrow (A\Phi, \Phi^*) = 0 \leftrightarrow (\Phi, A\Phi^*) = 0$.

Zu $69.1 \rightarrow 69.3'$: $A\Phi = 0 \rightarrow (A\Phi, \Phi^*) = 0 \rightarrow (A, \langle\Phi, \Phi^*\rangle) = 0$.

Zu $69.1 \rightarrow 69.4$: Seien $\Phi_i \in \{A\}$. Dann ist $\langle\Phi_1, \Phi_2\rangle$ abhängig von A, also $\langle\Phi_1, \Phi_2\rangle\Phi = 0$, also (nach 69.3)

$$(*) \qquad \widetilde{\Phi}_1\widetilde{\Phi}_2\Phi = 0,$$

also (nach 69.3 und 42) $\widetilde{\Phi}_2\Phi \in \mathfrak{W}_4$, also entweder $\widetilde{\Phi}_2\Phi = 0$ für alle $\Phi_2 \in \{A\}$ und nach 65.8 $\Phi \in \{A\}$; oder für gewisses $\Phi_2 \in \{A\}$ gilt $\Phi_3 = \widetilde{\Phi}_2\Phi \neq 0$, aber dann ist Φ_3 nach (*) mit allen $\Phi_1 \in \{A\}$ verflochten, also (nach 65.8) $\Phi_3 \in \{A\}$, und andererseits $\Phi_3 = [\Phi_2, \Phi]$ nach 45 mit Φ verbunden.

Zu 70.1. Sei $A\Phi = 0$ und $\mathfrak{g}$ die Menge der mit Φ verbundenen Symplekta in $\{A\}$. Sei $\mathfrak{g}'$ die Menge der Symplekta $\tilde{\Phi}\Phi_1$ mit $\Phi_1 \in \{A\}$.

Im Beweis zu 69.1 $\to$ 69.4 ergab sich: $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$.

Weiter ist, wenn $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathfrak{g}$ nicht verbunden sind, $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = A$, also nach 71.1 $\Phi \in \{A\}$ im Widerspruch zur Voraussetzung, dass Φ, A nicht inzidieren. Also sind je zwei Symplekta aus $\mathfrak{g}$ verbunden.

Also spannen Φ und $\mathfrak{g}$ eine Menge verbundener Symplekta auf, die nach 65.12 höchstens zweidimensional ist. Da $\Phi \notin \{A\}$, also $\notin \mathfrak{g}$, ist $\dim \mathfrak{g} \leqslant 1$.

Sei nun (nach 69.4) $\Phi_1 \in \{A\}$ verbunden mit Φ, $[\Phi_1, \Phi_2] = 0$ und $A = \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$. Da $\Phi \notin \{A\}$, ist (wegen 65.8)

$$\tilde{\Phi}\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi^* \text{ nicht identisch null in } \Phi^*.$$

Nun ist
$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi^* &= \tilde{\Phi}\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}_2\Phi^* - \tfrac{1}{2}(\Phi_1, \Phi^*)\tilde{\Phi}\Phi_2 \\ &= \langle \Phi, \Phi_1 \rangle \tilde{\Phi}_2\Phi^* + \tfrac{1}{2}(\Phi, \tilde{\Phi}_2\Phi^*)\Phi_1 - \tfrac{1}{2}(\Phi_1, \Phi^*)\tilde{\Phi}\Phi_2 \\ &= \tfrac{1}{2}(\tilde{\Phi}\Phi_2, \Phi^*)\Phi_1 - \tfrac{1}{2}(\Phi_1, \Phi^*)\Phi\Phi_2 \end{aligned}$$

nicht identisch null. Also sind Φ_1 und $\tilde{\Phi}\Phi_2$ unabhängig. $\tilde{\Phi}\Phi_2 \in \mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$. Also $\dim \mathfrak{g} = 1$. Nun kann man zu jedem $\Phi_1 \in \mathfrak{g}$ ein $\Phi_2 \in \{A\}$ so wählen, dass $A = \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$ ist, und dann ist $\tilde{\Phi}\Phi_2$ von Φ_1 unabhängig. Also ist auch $\dim \mathfrak{g}' = 1$ und daher $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$.

Zu 69.4 $\to$ 69.2: Sei wieder $\Phi_1 \in A$ verbunden mit Φ, $[\Phi_1, \Phi_2] = 0$ und $A = \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$. Dann ist $A\tilde{\Phi}\Phi^* =$

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \tilde{\Phi}\Phi^* &= \tilde{\Phi}_2\tilde{\Phi}_1\tilde{\Phi}\Phi^* - \tfrac{1}{2}(\Phi_2, \tilde{\Phi}\Phi^*)\Phi_1 \\ &= \tilde{\Phi}_2\langle \Phi_1, \Phi \rangle \Phi^* + \tfrac{1}{2}(\Phi_1, \Phi^*)\tilde{\Phi}_2\Phi - \tfrac{1}{2}(\Phi_2, \tilde{\Phi}\Phi^*)\Phi_1 \\ &= \tfrac{1}{2}(\tilde{\Phi}\Phi_2, \Phi^*)\Phi_1 - \tfrac{1}{2}(\Phi_1, \Phi^*)\tilde{\Phi}\Phi_2 \end{aligned}$$

gleich dem Ausdruck, der im Beweis von 70.1 (wesentlich unter der Voraussetzung 69.4) für $\tilde{\Phi}A\Phi^*$ berechnet wurde. Also $\tilde{\Phi}A = A\tilde{\Phi}$.

Zu 69.2 $\to$ 69.1: Sei $\Phi^* \in \mathfrak{W}_4$, $(\Phi, \Phi^*) = 0$. Dann ist (nach 42) $\tilde{\Phi}\Phi^* \in \mathfrak{W}_4$, also $A\tilde{\Phi}\Phi^* \in \mathfrak{W}_4$, also (nach Voraussetzung 69.2) $\tilde{\Phi}A\Phi^* \in \mathfrak{W}_4$, also (nach 42) $(\Phi, A\Phi^*) = 0$. Also $(A\Phi, \Phi^*) = 0$ für alle $\Phi^* \in \mathfrak{W}_4$ mit $(\Phi, \Phi^*) = 0$. Also $A\Phi$ abhängig von Φ und wegen $A^2 = 0$ sogar $A\Phi = 0$.

Zu 69.3′ $\to$ 69.1: Sei $A\Phi \neq 0$. Nach 69.4 $\to$ 69.1 ist $B = \langle \Phi, A\Phi \rangle \neq 0$. Nach 65.8 gibt es ein Symplekton Φ_1 mit $\Phi = B\Phi_1 = \langle \Phi, A\Phi \rangle \Phi_1 = \tfrac{1}{2}(A\Phi, \Phi_1)\Phi$. Also $(A, \langle \Phi, \Phi_1 \rangle) = (A\Phi, \Phi_1) \neq 0$. A scharniert nicht mit $\langle \Phi, \Phi_1 \rangle$.

Zu 69.1 $\to$ 69.5 und 70.2: Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ wie im Beweis von 70.1. Φ_2 elementweise verbunden mit $\mathfrak{g} \leftrightarrow \langle \Phi_2, \tilde{\Phi}\Phi_1 \rangle = 0$ für alle $\Phi_1 \in \{A\} \leftrightarrow \langle \tilde{\Phi}\Phi_2, \Phi_1 \rangle = 0$ für alle $\Phi_1 \in \{A\} \leftrightarrow \tilde{\Phi}\Phi_2 = 0$.

Zu 69.1 $\to$ 69.4′. Seien $\Phi_i \in \{A\}$, Φ_1 verbunden mit Φ, Φ_2 verflochten, nicht verbunden mit Φ (siehe 69.4, 70.2). $A_1 = \langle \Phi, \Phi_2 \rangle$ ist ein Punkt. Φ_1 ist mit Φ und Φ_2 verbunden, also nach 71.1 $\Phi_1 \in \{A\}$. Daher hat $\{A\} \cap \{A_1\}$ mindestens die zwei Elemente Φ_1, Φ_2, also eine Gerade der

Quadrik $\{A\}$. Jedes Element Φ^* der Quadrik ist mit einem gewissen Element dieser Geraden, also mit einem Element von $\{A_1\}$ verbindbar. Also (nach 69.4) $A_1\Phi^*$ für alle $\Phi^* \in \{A\}$. Also $A_1 A \Phi^{**}$ für alle $\Phi^{**} \in \mathfrak{W}_4$. Also $A_1 A = 0$.

Zu 69.4′ $\to$ 69.4: Sei A_1 mit A verbunden und mit Φ inzident. Nach 63–64 enthält $\{A\} \cap \{A_1\}$ eine Ebene der Quadrik $\{A_1\}$, auf der auch Φ liegt. Φ ist mit einem gewissen Φ_1 dieser Ebene verbunden, Φ_1 inzidiert auch mit $\{A\}$. Da gibt es also ein mit Φ verbundenes Φ_1.

Zu 69.1 $\to$ 69.5′: Man wähle $\Phi_i \in \{A\}$ wie im Beweis von 69.1 $\to$ 69.4′, ausserdem $\Phi_3 \in \{A\}$ verflochten, nicht verbunden mit Φ und nicht verbunden mit Φ_2. $A_2 = \langle \Phi, \Phi_3 \rangle$. $\Phi_1, \Phi_2 \in \{A\} \cap \{A_1\}$, $\Phi_1, \Phi_3 \in \{A\} \cap \{A_2\}$. Nach 65.3′ ist A mit A_1 und A_2 verbunden; nach 63–64 sind die Symplekta aus $\{A\} \cap \{A_1\}$ miteinander verbunden, ebenso die von $\{A\} \cap \{A_2\}$. Aber Φ_2, Φ_3 sind nicht verbunden, also ist $\{A\} \cap \{A_1\} \neq \{A\} \cap \{A_2\}$, also $\{A_1\} \neq \{A_2\}$.

Zu 69.5′ $\to$ 69.5: Seien A_1, A_2 mit A verflochten und $A_i \in \{\Phi\}$. Nach 63–64 gibt es Symplekta $\Phi_i \in \{A_i\} \cap \{A\}$, die also mit Φ verflochten und $\in \{A\}$ sind.

Zu 69.5 $\to$ 69.1: Seien $\Phi_i \in \{A\}$ mit Φ verflochten. Zu Φ_i gibt es Φ_i' mit $[\Phi_i, \Phi_i'] = 0$, $\langle \Phi_i, \Phi_i' \rangle = A$. Nun ist $A\Phi = \langle \Phi_i, \Phi_i' \rangle \Phi = -\frac{1}{2}(\Phi, \Phi_i')\Phi_i$, also $A\Phi = 0$ für unabhängige Φ_i.

Zu 71.1′: Nach 63–64 gibt es ein $\Phi \in \{A_1\} \cap \{A_2\}$. In $\{A_0\} \cap \{A_i\}$ liegt nach 62 eine Ebene $\mathfrak{e}_i$ der Quadrik $\{A_i\}$. Φ ist auf der Quadrik $\{A_i\}$ mit einer Geraden $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{e}_i$ punktweise verbunden. Nach 70.1 ist entweder Φ mit A_0 inzident oder $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2$. Wegen $\mathfrak{g}_i \subset \{A_0\} \cap \{A_i\}$ ist dann $\{A_0\} \cap \{A_1\} \cap \{A_2\}$ nichtleer.

Zu 71.2′: Nach 65.3′, 65.4′ liegt in $\{A_0\} \cap \{A_i\}$ genau ein Symplekton Φ_i. Nach 62 enthält $\{A_1\} \cap \{A_2\}$ eine reelle Ebene $\mathfrak{e}$ von Symplekta. Auf der Quadrik $\{A_i\}$ ist Φ_i punktweise verbunden mit einer Geraden $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{e}$. Diese Geraden haben ein Φ gemein, das mit den Φ_i verbunden ist. $\Phi_i \in \{A_0\}$. Wenn $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \neq 0$, so $\Phi \in \{A_0\}$ nach 71.1. $\Phi \in \mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{e} \subset \{A_1\} \cap \{A_2\}$. Also $\{A_0\} \cap \{A_1\} \cap \{A_2\}$ nichtleer. Ist dagegen $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = 0$, so ist Φ_1 verbunden mit Φ_2 und elementweise mit $\mathfrak{g}_2$. Also nach 70.1 entweder $\Phi_1 \in \{A_2\}$ oder $\Phi_2 \in \mathfrak{g}_2$. In beiden Fällen kommt man zum selben Ergebnis wie vorhin.

Zu 65.7′: Sei $(A_1, A_2) = 0$. Dann $(A_2\Phi_1^*, \Phi_2^*) = 0$ für alle $\Phi_i^* \in \{A_1\}$. Ist $A_2\Phi_1^* = 0$ für alle $\Phi_1^* \in \{A_1\}$, so ist $A_1 A_2 = 0$, also ist nach 63–64 die Behauptung evident. Sei $\Phi_2 = A_2\Phi_1^* \neq 0$. Dann ist nach 69.3 $\to$ 69.4 Φ_2 verbunden mit einem Symplekton Φ_1 aus $\{A_1\}$. Seien umgekehrt $\Phi_i \in \{A_i\}$ verbunden. Nach 69.4 $\to$ 69.1 ist dann $A_2\Phi_1 = 0$, also $(A_2\Phi_1, \Phi_1^*) = 0$ für alle $\Phi_1^* \in \{A_1\}$, also $(A_1, A_2) = 0$.

Zu 65.4′ und 65.5′: Sei $(A, B) = 0$. Nach 65.7′ gibt es verbundene $\Phi_1 \in A$, $\Phi_2 \in B$. Nach 70.1 ist Φ_1 mit einer Geraden $\mathfrak{g}_2$ der Quadrik $\{B\}$ verbunden, ebenso Φ_2 mit einer Geraden $\mathfrak{g}_1$ der Quadrik $\{A\}$. Sind $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ elementweise verbunden, so haben sie nach 65.12 ein Φ gemein. Dann liegen A, B im Symplekton Φ, wo es sogar unendlich viele mit A und B verbundene C gibt. Es ist dies ein Fall verflochtener A und B.

Sind $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ nicht elementsweise verbunden, so gibt es nichtverbundene $\Phi_i' \in \mathfrak{g}_i$, die man von den Φ_i verschieden annehmen darf. Φ_1', Φ_2' scharnieren nach 43. Ist $[\Phi_1', \Phi_2'] \neq 0$, so ist das nach 42 ein Symplekton, das mit A und B inzidiert. Nach 65.2′ sind dann A, B wieder verflochten; es gibt dann unendlich viele mit ihnen verbundene C.

Ist dagegen $[\Phi_1', \Phi_2'] = 0$, so ist $C = \langle \Phi_1', \Phi_2' \rangle$ ein Punkt, da die Φ_i' nicht verbunden sind. Φ_1 ist mit beiden verbunden, also nach 71.1 in C; ferner ist Φ_1' in C. Nach 65.3′ sind A und C verbunden. Evenso zeigt man, dass B und C verbunden sind.

Seien nun die scharnierenden A, B nicht verflochten, also (65.2′) $\{A\} \cap \{B\}$ leer. Seien C und C' mit A und B verbunden. Es gibt Ebenen von Symplekta $\mathfrak{e}_1 \subset \{A\} \cap \{C\}$, $\mathfrak{e}_2 \subset \{B\} \cap \{C\}$, $\mathfrak{e}_1' \subset \{A\} \cap \{C'\}$, $\mathfrak{e}_2' \subset$ $\subset \{B\} \cap \{C'\}$. Sei $\Phi_1 \in \mathfrak{e}_1$, $\Phi_1' \in \mathfrak{e}_1'$. Es gibt ein mit Φ_1 verbundenes $\Phi_2 \in \mathfrak{e}_2$. Nach 70.1 ist $[\Phi_2, \Phi_1'] \in \{A\} \cap \{B\}$, also Φ_2, Φ_1' verflochten. Ferner $\Phi_1 . \Phi_1'$ verflochten, Φ_1, Φ_2 verbunden. Wegen $\{A\} \cap \{B\}$ leer und nach 71.2 ist Φ_1' mit Φ_1 oder mit Φ_2 verbunden. Also $\Phi_1' \in \mathfrak{e}_1$. Also $\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_1'$. Ebenso $\mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}_2'$. Also $C = C'$.

Sei umgekehrt nur vorausgesetzt, dass C mit A und B verbunden ist. Dann gibt es ein $\Phi \in \{A\}$ mit $B\Phi = 0$. Für gewisses Φ_1 ist $A = \langle \Phi, \Phi_1 \rangle$. $(A, B) = (B\Phi, \Phi_1) = 0$. Wenn A, B obendrein verflochten sind, so ist weiter klar, dass es mehrere C gibt, die mit A und B verbunden sind.

Zu 70.1′: Sei $B \neq A$ mit A verbunden, $\mathfrak{e} = \{A\} \cap \{B\}$, und $\mathfrak{g}$ die Menge der mit Φ verbundenen Symplekta $\in \{A\}$. Dann ist $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{e}$.

Da Φ und A nicht inzidieren, erzeugen $\mathfrak{g}$ und Φ eine Ebene $\mathfrak{e}'$ auf der Quadrik $\{B\}$. Umgekehrt gilt für alle B mit $\mathfrak{e}' \subset \{B\}$, dass B in Φ liegt und mit A verbunden ist. Nach 65.10′ folgt hieraus die Behauptung.

Zu 70.2′: Sei $B \in \{\Phi\}$ mit A verbunden; sei $C \in \{\Phi\}$, also mit B verflochten, ausserdem C mit A verflochten. Nach 71.2′ gibt es ein $\Phi' \in \{A\} \cap$ $\cap \{B\} \cap \{C\}$. Da Φ, A nicht inzidieren, sind die Symplekta Φ, Φ' verschieden. $\{B\} \cap \{C\}$ besteht aus mehr als einem Symplekton, also sind B, C nach 65.3 verbunden.

Sei nun $C \in \{\Phi\}$ nicht mit A verflochten. Da $A\Phi = 0$, ist $(A, C) = 0$, also gibt es nach 65.5′ genau einen mit A und C verbundenen Punkt, und der liegt in Φ. Es gibt aber in Φ mehr Punkte, die mit A verbunden sind. Also, wenn $C \in \{\Phi\}$ nicht mit A verflochten ist, ist C nicht mit allen Punkten in $\{\Phi\}$ verbunden, die mit A verbunden sind.

Zu 65.7: Sind Φ_1, Φ_2 verflochten, so gibt es (65.2) einen Punkt A, der mit beiden inzidiert; man setze $A_1 = A_2 = A$. Ist aber $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$, $\Phi_3 = [\Phi_1, \Phi_2] \neq 0$, so nehme man $A_1 \in \{\Phi_1\} \cap \{\Phi_3\}$ (siehe 65.2). Da Φ_2 mit $\Phi_3 \in \{A_1\}$ verbunden ist, gibt es nach 69.4 $\rightarrow$ 69.4′ ein $A_2 \in \{\Phi_2\}$, das mit A verbunden ist. Seien umgekehrt $A_i \in \{\Phi_i\}$ und A_1, A_2 verbunden. Nach 69.4′ $\rightarrow$ 69.3 scharniert Φ_1 mit Φ_2.

Zu 65.6′: Sei $\Phi \in \{B\} \cap \{C\}$ (siehe 65.2). Φ ist in der Quadrik $\{B\}$ mit einem Element von $\{A\} \cap \{B\}$ verbunden, also wegen 69.4 $\to$ 69.1 $A\Phi = 0$. Mit $C = \langle \Phi, \Phi_1 \rangle$ erhält man $(A, C) = (A\Phi, \Phi_1) = 0$.

Zu 65.8′: Sei A verflochten mit allen Punkten aus $\{\Phi\}$, also jedenfalls mit mehr als einem, also nach 69.5 $\to$ 69.1 : $A\Phi = 0$. Nach 69.4′ gibt es ein mit A verbundenes $A_1 \in \{\Phi\}$. Weiter gibt es in $\{\Phi\}$ ein mit A_1 nichtverbundenes B_1. Nach Voraussetzung ist A verflochten mit B_1, während es ein mit A verbundenes A_1 gibt, das nicht mit B_1 verbunden ist. Nach 70.2′ müssen A, Φ inzidieren.

Zu 65.11′: Der erste Teil der Aussage steht in 63. Seien A_1, A_2 mit A_0 verbunden. Sind A_1, A_2 obendrein untereinander verflochten, so ist nach 71.1′ $\{A_0\} \cap \{A_1\} \cap \{A_2\}$ nichtleer, also schneiden die Ebenen $\{A_0\} \cap \{A_i\}$ $(i = 1, 2,)$ auf der Quadrik $\{A_0\}$ einander; und umgekehrt. Sind A_1, A_2 sogar verbunden, so ist entweder $\{A_1\} \cap \{A_2\} \subset \{A_0\}$ und dann schneiden die $\{A_0\} \cap \{A_i\}$ $(i = 1, 2)$ sich in mehr als einem Punkt; oder es gibt ein $\Phi \in \{A_1\} \cap \{A_2\}$, $\Phi \notin \{A_0\}$. Es gibt in der Quadrik $\{A_0\}$ Ebenen $\mathfrak{e}_i \geqslant \subset$ $\subset \{A_0\} \cap \{A_i\}$ $(i = 1, 2)$. In der Quadrik $\{A_i\}$ ist Φ elementweise verbunden mit einer Geraden $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{e}_i$. Andererseits bilden die Symplekta aus $\{A_0\}$, mit denen Φ verbunden ist, nach 70.1 genau eine Gerade. Also $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{e}_1 \cap \mathfrak{e}_2$; die $\{A_0\} \cap \{A_i\}$ schneiden sich in mehr als einem Punkt.

Zu 65.12′: Sei $\mathfrak{a}$ eine maximale Menge paarweise verbundener Punkte und A_0 ein Punkt aus $\mathfrak{a}$. Die $\{A\} \cap \{A_0\}$ mit $A \in \mathfrak{a}$, $A \neq A_0$ (als Punkt) sind Ebenen auf der Quadrik $\{A_0\}$, die einander mehrpunktig schneiden (65.11′). Die Menge dieser Ebenen ist hinsichtlich dieser Eigenschaft maximal, also gleich der Menge aller Ebenen auf $\{A_0\}$ durch eine feste Gerade $\mathfrak{g}$ auf $\{A_0\}$. Seien Φ_1, Φ_2 zwei Symplekta aus $\mathfrak{g}$. Nun ist $\mathfrak{a}$ der Durchschnitt der Symplekta $\{\Phi_i\}$, also nach 65.10 eine projektive Ebene über $\mathscr{H}$.

Zu 71.3: Nach 46 ist etwa Φ_1 mit Φ_3 verflochten. Sind Φ_1 und Φ_3 nicht verbunden, so inzidieren nach 71.1 und 71.2 Φ_2 und Φ_4 mit dem Punkt $\langle \Phi_1, \Phi_3 \rangle$. Sind Φ_1, Φ_3 verbunden, so inzidieren Φ_1, Φ_2, Φ_3 mit einem Punkt, mit dem Φ_4 nach 69.4 $\to$ 69.1 halbinzident ist.

Zu 71.4: Nach 47 ist etwa Φ_1 mit Φ_3, Φ_3 mit Φ_5 und Φ_5 mit Φ_2 verflochten. Sei Φ_1 nicht mit Φ_3 verbunden. Nach 71.1 inzidieren Φ_2, Φ_5 mit dem Punkt $\langle \Phi_1, \Phi_3 \rangle$; Φ_4 ist mit ihm halbinzident. Sei Φ_3 nicht mit Φ_5 verbunden, dagegen Φ_1 mit Φ_3 und Φ_5 mit Φ_2 verbunden. Dann gibt es einen Punkt, der mit allen inzidiert. Sei Φ_1 mit Φ_3, Φ_3 mit Φ_5, Φ_5 mit Φ_2 verbunden. Dann ergibt sich wieder der erste Fall.

Zu 71.3′: Sei $\Phi \in \{A_4\} \cap \{A_1\}$, $\Phi' \in \{A_2\} \cap \{A_3\}$. Da Φ mit A_2 und A_3 halbinzidiert, ist (nach 70.1) entweder $[\Phi, \Phi'] \in \{A_1\} \cap \{A_2\}$ und $\in \{A_3\} \cap \{A_4\}$, und dann sind die A_i verflochten. Oder Φ verflochten mit ganz $\{A_2\} \cap \{A_3\}$. Aber dann ist (nach 70.2) entweder Φ mit A_2 inzident und daher A_2 mit A_4 verflochten, oder ganz $\{A_2\} \cap \{A_3\}$ verbunden mit allen $\Phi'' \in \{A_2\}$, die mit Φ verbunden sind, und die eine Gerade $\mathfrak{g} \subset \{A_1\} \cap \{A_2\}$ bilden. Nun muss $\mathfrak{g} \subset \{A_2\} \cap \{A_3\}$ sein, also $\{A_1\} \cap \{A_3\}$ nichtleer, A_1, A_3 verflochten. – Man fährt fort wie in 71.3.

71.4′. Für $\Phi_i \in \{A_{i-1}\} \cap \{A_i\}$ hat man nach 70.1

$$[\Phi_i, \Phi_{i+2}] \subset \{A_i\} \cap \{A_{i+1}\}.$$

$$[[\Phi_i, \Phi_{i+2}], \Phi_{i+3}] = [[\Phi_i, \Phi_{i+3}], \Phi_{i+2}]$$

ergibt sich nun einerseits $\in \{A_{i+1}\} \cap \{A_{i+2}\}$, andererseits $\in \{A_{i+2}\} \cap \{A_{i+3}\}$, insoweit die Kommutatoren nicht verschwinden. Wie in 47 schliesst man hier auf die Existenz eines i mit

$$[\Phi_i, \Phi_{i+2}] = [\Phi_{i+2}, \Phi_{i+4}] = [\Phi_{i+4}, \Phi_{i+1}] = 0.$$

Wie in 71.2′ schliesst man, wenn alle $[\Phi_i, \Phi_{i+2}]$ verschwinden, auf die Verflochtenheit von A_i, A_{i+2}. Man fährt dann fort wie in 71.4.