

Topology Vol. 9, pp. 183–194. Pergamon Press, 1970. Printed in Great Britain

FEUILLETAGES SUR LES VARIÉTÉS OUVERTES

A. HAEFLIGER

(Received 1 December 1969)

Soit X une variété différentiable de dimension n , munie d'un feuilletage différentiable de codimension q (les feuilles sont donc des sous-variétés de dimension $n - q$). Le sous-fibré vectoriel du fibré des vecteurs tangents à X formé des vecteurs tangents aux feuilles est par définition un champ de $(n - q)$ -plans complètement intégrable.

G. Reeb a posé dans sa thèse ([8], p. 95) le problème fondamental suivant: étant donné un champ de $(n - q)$ -plans tangents à X , à quelle condition est-il homotope à un champ complètement intégrable, c'est-à-dire tangent aux feuilles d'un feuilletage de codimension q sur X ?

Il est classique que tout champ de 1-plans soit complètement intégrable. John Wood [9] a démontré que tout champ de 2-plans transversalement orientés sur une variété close de dimension 3 est homotope à un champ complètement intégrable. Dans [6], A. Phillips a démontré que sur une variété ouverte, tout champ de $(n - q)$ -plans tel que le sous-fibré complémentaire de rang q ait un groupe structural discret, est homotope à un champ complètement intégrable.

D'autre part, R. Bott a démontré [1] que si un champ de $(n - q)$ -plans sur une variété X est homotope à un champ complètement intégrable, alors les classes de Pontrjagin du fibré complémentaire de rang q devaient vérifier certaines conditions. Il en a déduit les premiers exemples connus de champs non homotopes à des champs complètement intégrables.

Ce travail est essentiellement une application d'un théorème de transversalité, conjecturé par J. Milnor et démontré indépendamment par A. Phillips et Gromov, et qui généralise le théorème des submersions de A. Phillips [6].

Nous obtenons le résultat suivant. Soit X une variété différentiable *ouverte* de dimension n . Un champ de $(n - q)$ -plans sur X est homotope à un champ complètement intégrable si et seulement s'il existe une section d'un fibré E sur X . Ce fibré est l'image réciproque d'un fibré universel sur BO_q (ne dépendant que de q) par l'application classifiante du fibré vectoriel de rang q complémentaire au champ donné. De plus la fibre de E est q -connexe.

La démonstration se fait en deux pas. Nous définissons tout d'abord (§1) un foncteur homotopique associant à tout espace topologique de X les classes d'homotopie des feuilletages "singuliers" de codimension q sur X , c'est-à-dire des Γ_q -structures (introduites dans [4], où Γ_q est le pseudogroupe des difféomorphismes locaux de \mathbb{R}^q). D'après E. Brown [2] il

existe un espace classifiant $B\Gamma_q$ pour ce foncteur; on a de plus une application $v: B\Gamma_q \rightarrow BO_q$ classifiant le fibré normal de la Γ_q -structure universelle.

Nous utilisons ensuite le théorème de transversalité de Gromov-Phillips pour passer des Γ_q -structures aux feuilletages réguliers (§2). Ceci conduit au théorème de classification annoncé.

Dans le paragraphe 3, nous montrons que v est $(q+1)$ -connexe.

Pour terminer, nous faisons remarquer que les considérations précédentes peuvent être généralisées sans autre si l'on remplace le pseudogroupe Γ_q des difféomorphismes locaux de R^q par n'importe quel pseudogroupe Γ .

On en déduit par exemple une théorie d'obstruction pour déformer sur une variété ouverte une structure presque complexe en une structure complexe.

Malheureusement la portée de cette remarque est fort limitée, puisque on ne sait presque rien sur le type d'homotopie des espaces classifiants correspondants.

Je tiens à remercier vivement J. Milnor qui m'a beaucoup stimulé par ses suggestions et qui a considérablement simplifié ma démonstration de la q -connexité de v en me faisant remarquer que cette propriété découlait directement du théorème de classification (2.2).

§1. UN ESPACE CLASSIFIANT POUR LES Γ_q -STRUCTURES

1.1. *Définition.* Soit Γ_q le pseudogroupe des difféomorphismes locaux de classe C^∞ de R^q . Les éléments de Γ sont donc tous les difféomorphismes d'ouverts de R^q sur ouverts de R^q .

Soit X un espace topologique. Une Γ_q -structure sur X est donnée par

- (1) un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ de X
- (2) des applications continues $f_i: U_i \rightarrow R^q$ appelées projections locales
- (3) pour tout $i, j \in I$ et $x \in U_i \cap U_j$, un difféomorphisme γ_{ji}^x d'un voisinage de $f_i(x)$ sur un voisinage de $f_j(x)$, dont le germe au point $f_i(x)$ varie continuellement avec x , de sorte que
 - (a) $f_j = \gamma_{ji}^x \circ f_i$ au voisinage de x
 - (b) pour tout $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ on a

$$\gamma_{ki}^x = \gamma_{kj}^x \circ \gamma_{ji}^x \text{ au voisinage de } f_i(x).$$

La condition (b) exprime que les applications de transition $\gamma_{ji}: x \rightarrow \text{germe de } \gamma_{ji}^x \text{ au point } f_i(x)$ forment un 1-cocycle. Si les projections locales f_i sont ouvertes, alors les γ_{ji} sont complètement déterminées par les f_i et (b) résulte de (a).

Remarquons que les γ_{ji} déterminent les f_i car le germe de γ_{ji}^x au point $f_i(x)$ est celui de l'application identique de R^q au point $f_i(x)$. Le groupoïde des germes de difféomorphismes locaux de R^q est muni de la topologie naturelle qui en fait un espace étalé sur R^q .

Deux tels cocycles γ_{ij} et γ_{kl}' définis sur les recouvrements $\{U_i\}_{i \in I}$ et $\{U_k\}_{k \in I'}$ déterminent la même structure \mathcal{F} s'il existe des applications de transition $\tilde{\gamma}_{ki}$, $i \in I$ et $k \in I'$ qui forment avec les γ_{ij} et les γ_{kl}' un cocycle sur la réunion des recouvrements $\{U_i\}$ et $\{U_k\}$.

Cette définition est équivalente à celle de Γ_q -structure sur X introduite dans [4].

1.2. *Définition d'un feuilletage.* Lorsque X est une variété différentiable un feuilletage (différentiable) de rang q sur X est une Γ_q -structure telle que les projections locales f_i soient toutes différentiables de rang q c'est-à-dire des submersions). C'est la notion usuelle de feuilletage. Les feuilles sont des sous-variétés différentiables de X de dimension $n - q$, coupant les ouverts U_i suivant des réunions de composantes connexes des $f_i^{-1}(z)$, où $z \in \mathbb{R}^q$.

1.3. *Γ_q -structure induite par une application continue.* Soit \mathcal{F} une Γ_q -structure sur X définie par les projections locales $f_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^q$ et les fonctions de transition γ_{ji} . Soit $f: X' \rightarrow X$ une application continue. La Γ_q -structure sur X' induite de \mathcal{F} par l'application f est la Γ_q -structure $f^* \mathcal{F}$ définie par le recouvrement $\{f^{-1}(U_i)\}$, les projections locales $f_i \circ f$ et les fonctions de transition $\gamma_{ji}' = \gamma_{ji} \circ f$.

Si f est l'inclusion d'un sous-espace X' dans X , alors $f^* \mathcal{F}$ sera appelée la restriction de \mathcal{F} à X' .

Si Y est un espace topologique et \mathcal{F} une Γ_q -structure sur X , alors $\mathcal{F} \times Y$ désigne la Γ_q -structure sur $X \times Y$ induite de \mathcal{F} par la projection $X \times Y \rightarrow X$.

1.4. *Recollement.* Soit X un espace topologique et soient X_1 et X_2 des ouverts de X dont la réunion est X . Soient \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 des Γ_q -structures sur X_1 et X_2 dont les restrictions à $X_1 \cap X_2$ coïncident. Il existe alors une Γ_q -structure (non unique en général) dont la restriction à X_1 (resp. X_2) est \mathcal{F}_1 (resp. \mathcal{F}_2).

1.5. *Homotopie.* Deux Γ_q -structures \mathcal{F} et \mathcal{F}_1 sur X sont homotopes s'il existe une Γ_q -structure \mathcal{F} sur $X \times [0, 1]$ induisant $\mathcal{F} \times 0$ et $\mathcal{F}_1 \times 1$ sur $X \times 0$ et $X \times 1$ respectivement. \mathcal{F} est appelée une homotopie.

En utilisant 1.4, on voit facilement que c'est une relation d'équivalence.

L'application faisant correspondre à X l'ensemble $\Gamma_q(X)$ des classes d'homotopie des Γ_q -structures sur X est un foncteur contravariant défini sur la catégorie des applications continues. C'est même un foncteur homotopique, de sorte que le théorème de Brown [2] implique le résultat suivant.

1.6. THÉORÈME 1. *Il existe un CW-complexe $B\Gamma_q$, muni d'une Γ_q -structure universelle \mathcal{U} tel que toute Γ_q -structure \mathcal{F} sur un CW-complexe X soit homotope à la Γ_q -structure induite de \mathcal{U} par une application $f: X \rightarrow B\Gamma_q$. De plus si les Γ_q -structures induites de \mathcal{U} par des applications f_0 et f_1 de X dans $B\Gamma_q$ sont homotopes, alors f_0 et f_1 sont homotopes. Enfin $B\Gamma_q$ est unique au type d'homotopie près. Ainsi $\Gamma_q(X) = [X, B\Gamma_q]$.*

Démonstration. Soit \mathcal{C} la catégorie des CW-complexes avec point base et des classes d'homotopie d'applications respectant les points bases. Sur un CW-complexes X avec point base x_0 , on considère l'ensemble $\Gamma_q^*(X)$ des classes d'homotopie avec point base des Γ_q -structures sur X . Une Γ_q -structure avec point base est définie par un 1-cocycle $\{\gamma_{ij}\}$ défini sur un recouvrement $\{U_i\}$ tel que le germe de γ_{ij}^0 soit celui de l'application identique en 0. Pour que deux tels cocycles définissent la même structure, il faut que les applications transition de $\tilde{\gamma}_{ki}$ (cf. 1.1) vérifient aussi cette condition. Deux Γ_q -structures \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1

avec point base sont homotopes s'il existe sur $X \times I / \{x_0\} \times I$ une Γ_q -structure \mathcal{F} telle que $i_0^* \mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ et $i_1^* \mathcal{F} = \mathcal{F}_1$, où i_0 et i_1 sont les inclusions naturelles.

Alors $\Gamma_q^*(X)$ est un foncteur homotopique au sens de E. Brown (cf. [2]). La condition sur les "wedges" est trivialement vérifiée. Vérifions celle sur les égalisateurs.

Soient f_0 et f_1 des applications continues de (A, a_0) dans (X_0, x_0) et (X_1, x_1) respectivement. Soit Z l'égalisateur de f_0 et f_1 obtenu en identifiant dans $A \times [0, 1] \cup X_0 \cup X_1$ les points $(a, 0)$ avec $f_0(a)$, $(a, 1)$ avec $f_1(a)$ et $a_0 \times [0, 1]$ avec x_0 et x_1 . Soient g_0 et g_1 les inclusions naturelles de X_0 et X_1 dans Z . Considérons deux Γ_q -structures \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 sur (X_0, x_0) et (X_1, x_1) telles que $f_0^* \mathcal{F}_0$ et $f_1^* \mathcal{F}_1$ soient homotopes. On doit montrer qu'il existe une Γ_q -structure \mathcal{F} sur Z telle que $g_0^* \mathcal{F}$ et $g_1^* \mathcal{F}$ soient homotopes à \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 respectivement.

Soit V un voisinage ouvert du point base a_0 dans A qui se rétracte par déformation sur a_0 . Dans Z , soient U_0 , U_1 et U_2 respectivement les ouverts quotients de la réunion de $V \times I$ avec $A \times [0, 1/4[\cup X_0$, $A \times]3/4, 1] \cup X_1$ et $A \times]0, 1[$. Sur U_0 et U_1 on considère les Γ_q -structures \mathcal{F}_0' et \mathcal{F}_1' induites de \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 par les rétractions naturelles de U_0 et U_1 sur X_0 et X_1 . Sur U_2 , on considère la restriction \mathcal{F}_2' d'une homotopie avec points base reliant $f_0^* \mathcal{F}_0$ à $f_1^* \mathcal{F}_1$; on peut supposer que \mathcal{F}_2' coïncide avec \mathcal{F}_0' et \mathcal{F}_1' sur $U_0 \cap U_2$ et $U_1 \cap U_2$. On peut aussi supposer que toutes ces structures sont données par des cocycles constants sur le quotient de $V \times I$. D'après 1.4 il existe une Γ_q -structure \mathcal{F} induisant \mathcal{F}_0' , \mathcal{F}_1' , \mathcal{F}_2' sur U_0 , U_1 , U_2 .

Alors $\Gamma_q^*(X)$ est un foncteur homotopique au sens de E. Brown (cf. [2]). La condition sur les "wedges" est trivialement vérifiée. Vérifions celle sur les égalisateurs.

Soient f_0 et f_1 des applications continues de (A, a_0) dans (X_0, x_0) et (X_1, x_1) respectivement. Soit Z l'égalisateur de f_0 et f_1 obtenu en identifiant dans $A \times [0, 1] \cup X_1$ les points $(a, 0)$ avec $f_0(a)$, $(a, 1)$ avec $f_1(a)$ et $a_0 \times [0, 1]$ avec x_0 et x_1 . Soient g_0 et g_1 les inclusions naturelles de X_0 et X_1 dans Z . Considérons deux Γ_q -structures \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 . On doit montrer qu'il existe une Γ_q -structure \mathcal{F} sur Z tel que $g_0^* \mathcal{F}$ et $g_1^* \mathcal{F}$ soient homotopes à \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 respectivement.

Soient U_0 , U_1 et U_2 respectivement les ouverts quotients de $A \times [0, 1/4[\cup X_0$, $A \times]3/4, 1] \cup X_1$ et $A \times [0, 1]$. Sur U_0 et U_1 on considère les Γ_q -structures \mathcal{F}_0' et \mathcal{F}_1' induites de \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 par les rétractions naturelles de U_0 et U_1 sur X_0 et X_1 . Sur U_2 , on considère la restriction \mathcal{F}_2' d'une homotopie avec point base reliant $f_0^* \mathcal{F}_0$ à $f_1^* \mathcal{F}_1$; on peut supposer que \mathcal{F}_2' coïncide avec \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 sur $U_0 \cap U_2$ et $U_1 \cap U_2$. D'après 1.4 il existe une Γ_q -structure \mathcal{F}' induisant \mathcal{F}_0' , \mathcal{F}_1' , \mathcal{F}_2' sur U_0 , U_1 , U_2 .

Il suffit alors d'appliquer le théorème 2.8 de [2] et de remarquer qu'il n'y a qu'une Γ_q -structure sur S^0 .

On peut donner une forme relative plus précise au théorème précédent. Si $X \supset A$, une homotopie \mathcal{F} reliant deux Γ_q -structures \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 sur X sera dite fixe sur A si $\mathcal{F}|_A \times I = \mathcal{F}_0|_A \times I$.

1.7. THÉORÈME 1. *Soit X un CW-complexe et soit A un sous-complexe de X . Soit \mathcal{F} une Γ_q -structure sur X et $f_0: A \rightarrow BF_q$ une application telle que $f_0^* \mathcal{U} = \mathcal{F}|_A$. Il existe alors une application $f: X \rightarrow BF_q$ prolongeant f_0 et une homotopie, fixe sur A , reliant \mathcal{F} à $f^* \mathcal{U}$.*

Démonstration. Nous allons démontrer qu'il existe un CW -complexe B' muni d'une Γ_q -structure \mathcal{U}' , une inclusion $j: BF_q \rightarrow B'$ qui est une équivalence d'homotopie et $j^*\mathcal{U}' = \mathcal{U}$ de sorte que $f_0' = j \circ f_0$ vérifie la condition du théorème. Il en résultera que f_0 la vérifie aussi.

Posons $B = B\Gamma_q$. Soit Z l'égalisateur de l'inclusion de A dans X et de f_0 : c'est donc le quotient de $X \cup (A \times I) \cup B$ par la relation d'équivalence qui identifie $(a, 0)$ avec a et $(a, 1)$ avec $f_0(a)$ pour tout $a \in A$. Nous identifions X et B à des sous-espaces de Z par les inclusions naturelles. Sur Z , on a une Γ_q -structure \mathcal{G} naturelle induisant \mathcal{F} sur X et \mathcal{U} sur B .

Cette Γ_q -structure est induite à l'homotopie près par une application dans B . Soit B' le "mapping cylindre" de cette application. Il contient Z , donc aussi B comme sous-espace de Z , et il peut être muni d'une Γ_q -structure \mathcal{U}' induisant \mathcal{U} sur Z . Soit j l'inclusion de B dans B' . C'est une équivalence d'homotopie.

L'homotopie naturelle reliant l'inclusion $A \subset X \subset Z$ à f_0 s'étend suivant une homotopie reliant l'inclusion de X dans Z à une application f_0' de X dans Z . La Γ_q -structure induite de \mathcal{U}' par cette homotopie est une homotopie fixe sur A , reliant \mathcal{F} à $f^*\mathcal{U}'$, c.q.f.d.

1.8. *Fibré normal d'une Γ_q -structure.* Soit \mathcal{F} une Γ_q -structure sur X définie par le recouvrement $\{U_i\}_{i \in I}$, les projections locales f_i et les applications de transition γ_{ji} .

Soit τ le fibré vectoriel des vecteurs tangents à R^q . Au-dessus de chaque U_i , considérons le fibré vectoriel v_i induit de τ par f_i : la fibre de τ_i au-dessus de x est l'ensemble des couples (x, v_i) , où v_i est un vecteur tangent à R^q en $F_i(x)$. Si $x \in U_i \cap U_j$ on identifie les points (x, v_i) et (x, v_j) si v_j est l'image de v_i par la différentielle de γ_{ji} au point $f_i(x)$. On obtient ainsi, par recollement des v_i , un fibré vectoriel $v\mathcal{F}$ sur X dont la classe d'isomorphie est bien déterminée par \mathcal{F} .

Si \mathcal{F} est un feuilletage, alors $v\mathcal{F}$ est isomorphe au fibré normal aux feuilles de \mathcal{F} .

Cette construction est fonctorielle. Elle donne une transformation naturelle $\Gamma_q(x) \rightarrow \text{Vect}_q(X)$, où $\text{Vect}_q(X)$ est l'ensemble des classes d'isomorphie des fibrés vectoriels de rang q sur X . Via le théorème 1, cette transformation est aussi induite par l'application $v: B\Gamma_q \rightarrow B0_q$ qui classe le fibré normal à la Γ_q -structure universelle de $B\Gamma_q$; $B0_q$ est naturellement l'espace classifiant pour les fibrés vectoriels de rang q .

Un problème fondamental est de déterminer le type d'homotopie de $B\Gamma_q$. Dans le §3, nous montrerons que l'application v est $(q+1)$ -connexe. Le théorème de Bott [1] implique que l'application $H^i(B0_q, Q) \rightarrow H^i(B\Gamma_q, Q)$ induite par v est nulle pour $i > 2q$.

1.9. *Définition d'un microfibré feuilleté de rang q sur X .* C'est un espace E , muni d'une injection $i: X \rightarrow E$, d'une projection $p: E \rightarrow X$, avec $p \circ i = \text{identité}$, et d'une Γ_q -structure \mathcal{F} ayant la propriété suivante: elle peut être définie par un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ et des projections locales f_i telles que l'application $(f_i, p|_{U_i})$ de U_i dans $R^q \times X$ soit un homéomorphisme sur un ouvert.

Il en résulte que les fibres de p sont des variétés différentiables de dimension q , les restrictions des f_i à ces variétés étant localement des difféomorphismes dans R^q . De plus, si X est une variété différentiable, alors E est aussi une variété différentiable, la projection p étant différentiable; la Γ_q -structure \mathcal{F} est un feuilletage dont les feuilles sont transverses aux fibres de p .

Le graphe d'une Γ_q -structure

PROPOSITION. Soit X un espace localement compact et paracompact. A toute Γ_q -structure \mathcal{F} sur X on peut associer un microfibré feuilleté séparé de rang q : $X \xleftarrow{i} E \xrightarrow{p} X$ tel que \mathcal{F} soit induit par i de la Γ_q -structure de E . Le germe de ce microfibré est unique à un isomorphisme près. On l'appellera le graphe de f .

Démonstration. C'est un cas particulier du théorème 1. p. 296 de [4]. Il suffit de prendre pour B le produit $X \times \mathbb{R}^q$ et pour Γ le pseudogroupe des automorphismes locaux de $X \times \mathbb{R}^q$ qui sont localement de la forme $(x, t) \rightarrow (x, \gamma(t))$, où γ est un difféomorphisme local de \mathbb{R}^q .

Si la Γ_q -structure sur X est donné par une seule projection $f: X \rightarrow \mathbb{R}^q$, on peut prendre pour E un voisinage du graphe de f . Plus généralement si les applications $f_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^q$ sont les projections locales de la Γ_q -structure, on obtient E en recollant convenablement des voisinages des graphes des f_i au moyen des applications de transition γ_{ij} .

Il résulte de cette proposition qu'on pourrait remplacer, comme l'a proposé Milnor, la notion de Γ_q -structure par celle de microfibré feuilleté.

Rappelons encore une fois que si X est une variété différentiable, le graphe d'une Γ_q -structure sur X est aussi une variété différentiable munie d'un feuilletage régulier. Comme l'inclusion i de X dans E peut être approchée par une section différentiable, toute Γ_q -structure sur X peut être approchée par une Γ_q -structure dont les projections locales sont différentiables. De même en modifiant i convenablement, on peut la remplacer par une Γ_q -structure homotope dont les projections locales présentent une singularité de type donné sous forme générique.

§2. FEUILLETAGES

2.1. *Le Théorème de transversalité de Gromov-Phillips* (cf. [3] et [7]). Soit M une variété différentiable munie d'un feuilletage \mathcal{F} différentiable de codimension q . Soit $\nu\mathcal{F}$ le fibré normal aux feuilles de \mathcal{F} . Une application différentiable f d'une variété différentiable X dans M est transverse à \mathcal{F} si f est transverse à chaque feuille de \mathcal{F} . Autrement dit, soit τX et τM les fibrés vectoriels tangents à X et M , soit π la projection naturelle de τM sur ν . Alors f est transverse à \mathcal{F} si et seulement si le composé $\pi \circ df$, où df est la différentielle de f , est un épimorphisme sur chaque fibre.

Soit $\text{Tr}(X, \mathcal{F})$ l'espace des applications différentiables de X dans M qui sont transverses à \mathcal{F} , muni de la C^1 -topologie.

Soit $\text{Epi}(\tau X, \nu\mathcal{F})$ l'espace des épimorphismes de τX sur $\nu\mathcal{F}$ muni de la topologie compacte ouverte. Un tel épimorphisme est par définition une application continue appliquant linéairement et surjectivement les fibres de τX dans celles de $\nu\mathcal{F}$.

THÉORÈME. Soit X une variété différentiable ouverte (c'est-à-dire sans bord et sans composante connexe compacte). L'application $f \rightarrow \pi \circ df$ de $\text{Tr}(X, \mathcal{F})$ dans $\text{Epi}(\tau X, \nu\mathcal{F})$ est une équivalence d'homotopie faible.

Ceci implique donc qu'une application f est homotope à une application transverse à \mathcal{F} si et seulement s'il existe un épimorphisme de τX sur $\nu\mathcal{F}$ se projetant sur f .

D'autre part, il existe une homotopie différentiable f_t reliant deux applications $f_0, f_1 : X \rightarrow M$ transverse à \mathcal{F} pour chaque $t \in [0, 1]$ si et seulement si les épimorphismes de τX dans $\nu\mathcal{F}$ définis par f_0 et f_1 sont homotopes.

2.2. Classification des feuilletages sur les variétés ouvertes. Deux feuilletages \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 sur la variété différentiable X sont dits intégrablement homotopes[†], s'il existe un feuilletage sur $X \times [0, 1]$ induisant $\mathcal{F}_0 \times 0$ sur $X \times 0$ et $\mathcal{F}_1 \times 1$ sur $X \times 1$, et dont les feuilles sont transverses à chaque tranche $X \times t$. On dira que est \mathcal{F} une homotopie intégrable reliant \mathcal{F}_0 à \mathcal{F}_1 .

Remarquons que si M est munie d'un feuilletage \mathcal{F} , les feuilletages induits sur X par deux applications f_0 et f_1 de X dans M -transverses à \mathcal{F} et homotopes dans $\text{Tr}(X, \mathcal{F})$ sont intégrablement homotopes.

On vérifie facilement que c'est une relation d'équivalence. Il faut remarquer que si la variété X est close, dire que \mathcal{F}_0 est intégrablement homotope à \mathcal{F}_1 équivaut à dire qu'il existe un difféomorphisme h de X , isotope à l'identité, transportant \mathcal{F}_0 sur \mathcal{F}_1 . En fait, nous ne considérerons cette relation d'équivalence que sur les variétés ouvertes.

Considérons le classifiant $B\Gamma_q$ pour les classes d'homotopie des Γ_q -structures et soit $v : B\Gamma_q \rightarrow B0_q$ une application classifiant le fibré normal de la structure universelle sur $B\Gamma_q$ (cf. 1.8).

On a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} B\Gamma_q \times B0_{n-q} & & \\ \downarrow & \searrow v \times id & \\ B0_n & \xleftarrow{\oplus} & B0_q \times B0_{n-q} \end{array}$$

où \oplus désigne une application induisant la somme de Whitney des fibrés vectoriels. Sans changer le type d'homotopie, on peut supposer que toutes les applications de ce diagramme sont des fibrations.

Soit X une variété différentiable de dimension n et soit $\tau : X \rightarrow B0_n$ une application classifiant son fibré tangent.

Les classes d'homotopie des relèvements de τ dans $B0_q \times B0_{n-q}$ correspondent bijectivement aux classes d'homotopie des champs de $(n - q)$ -plans sur X .

THÉORÈME 2. *Soit X une variété différentiable de dimension n . Il existe une application naturelle de l'ensemble des classes d'homotopie intégrable de feuilletages de codimension q sur X dans l'ensemble des classes d'homotopie des relèvements de τ dans $B\Gamma_q \times B0_{n-q}$ (relative à la projection σ).*

Si X est une variété ouverte, cette application est bijective.

Démonstration. Commençons par quelques remarques générales. Soit ξ un fibré vectoriel sur $X \times I$ et soient ξ_0 et ξ_1 les fibrés induits par les inclusions $X \rightarrow X \times 0$ et $X \rightarrow X \times 1$

[†] Cette terminologie a été proposée par Milnor.

de X dans $X \times I$. Il existe alors un isomorphisme h de ξ sur $p^*(\xi_0)$ où p est la projection $X \times I \rightarrow X$; h définit un isomorphisme de ξ_0 sur ξ_1 dont la classe d'homotopie ne dépend que de ξ .

Soit η le fibré vectoriel universel de rang m sur BO_m et soient g_0 et g_1 des applications de X dans BO_m . Il résulte de ce qui précède que les classes d'homotopie des homotopies reliant g_0 à g_1 correspondent bijectivement aux classes d'homotopie des isomorphismes de $g_0^*(\eta)$ sur $g_1^*(\eta)$.

En utilisant ces remarques et la propriété de relèvement des homotopies pour la fibration σ , on obtient l'interprétation suivante, pour les classes d'homotopie des relèvements $X \rightarrow B\Gamma_q \times BO_{n-q}$ de τ . Elles correspondent bijectivement aux classes de triples (f_0, ξ_0, h_0) où f_0 est une application de X dans $B\Gamma_q$, ξ_0 un fibré vectoriel de rang $n - q$ sur X et h_0 un isomorphisme du fibré tangent τX à X sur la somme de Whitney $\xi_0 \oplus f_0^*v$. Deux tels triples (f_0, ξ_0, h_0) et (f_1, ξ_1, h_1) sont dans la même classe s'il existe une homotopie $f_i : X \rightarrow B\Gamma_q$ reliant f_0 à f_1 et donnant un isomorphisme k de f_0^*v sur f_1^*v , un isomorphisme l de ξ_0 sur ξ_1 et une homotopie reliant l'isomorphisme h_0 à $h_1 \circ (k \oplus l)$.

Définissons maintenant l'application Φ de l'ensemble des classes d'homotopie intégrable de feuilletages de codimension q sur X dans l'ensemble des classes d'homotopie des relèvements de τ dans $B\Gamma_q \times BO_{n-q}$.

Soit \mathcal{F}_0 un feuilletage sur X . Il existe (cf. 1.6) une application continue $f_0 : X \rightarrow B\Gamma_q$ et une homotopie reliant \mathcal{F}_0 à $f_0^*\mathcal{U}$, où \mathcal{U} est la Γ_q -structure universelle sur $B\Gamma_q$. Cette homotopie donne un isomorphisme du fibré normal $v\mathcal{F}_0$ sur f_0^*v . Soit ξ_0 le sous-fibré de τX , noyau de l'épimorphisme naturel de τX sur $v\mathcal{F}_0$; c'est le fibré des vecteurs tangents aux feuilles de \mathcal{F}_0 . On a évidemment un isomorphisme h_0 de τX sur $\xi_0 \oplus f_0^*v$.

Soient \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 deux feuilletages intégrablement homotopes sur X et soient (f_0, ξ_0, h_0) et (f_1, ξ_1, h_1) les triples qui leur correspondent comme ci-dessus. Vérifions qu'ils sont équivalents. Par hypothèse il existe un feuilletage sur $X \times I$ induisant sur chaque tranche $X \times t$ un feuilletage \mathcal{F}_t . Ainsi τX est isomorphe à la somme directe du fibré tangent aux feuilles ξ_t de \mathcal{F}_t et du fibré normal aux feuilles v_t , et ceci d'une manière continue en t . On a donc un isomorphisme k de $v_0 \approx f_0^*v$ sur $v_1 \approx f_1^*v$, un isomorphisme l de ξ_0 sur ξ_1 et une homotopie reliant h_0 à $h_1 \circ (k \oplus l)$.

Il faut encore vérifier que l'isomorphisme k de f_0^*v sur f_1^*v est homotope à l'isomorphisme donné par une homotopie reliant f_0 à f_1 . Cela résulte de ce qu'il existe (cf. 1.7) une application $f : X \times I \rightarrow B\Gamma_q$ telle que $f(x, 0) = f_0(x)$, $f(x, 1) = f_1(x)$ et une homotopie fixe sur $X \times \partial I$ reliant \mathcal{F} à $f^*\mathcal{U}$.

L'application désirée Φ est donc bien définie.

Supposons maintenant que X soit une variété ouverte. Pour montrer que Φ est surjective, partons d'un triple (f, ξ, h) comme ci-dessus. Considérons le graphe $X \xrightarrow{i} E \rightarrow X$ de $f^*\mathcal{U}$ et soit \mathcal{E} le feuilletage de E . Comme $f^*\mathcal{E} = \mathcal{F} = f^*\mathcal{U}$, on a $i^*v\mathcal{E} = f^*v$. L'isomorphisme $h : \tau X \rightarrow \xi \oplus f^*v$ composé avec la projection sur $f^*v = i^*v\mathcal{E}$ donne un isomorphisme de τX dans $v\mathcal{E}$ au-dessus de f . D'après le théorème de transversalité de Gromov-Phillips (2.1) i est homotope à une application transverse à \mathcal{E} . On obtient ainsi un feuilletage sur X dont l'image par Φ est la classe du triple (f, ξ, h) .

Montrons que Φ est injective. Soient \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 des feuilletages sur X dont les triples correspondants (f_0, ξ_0, h_0) et (f_1, ξ_1, h_1) sont équivalents. Par hypothèse, il existe une Γ_q -structure \mathcal{F} sur $X \times I$ induisant $\mathcal{F}_0 \times 0$ et $\mathcal{F}_1 \times 1$, un isomorphisme l du fibré ξ_0 tangent aux feuilles de \mathcal{F}_0 sur le fibré ξ_1 tangent aux feuilles de \mathcal{F}_1 , un isomorphisme k de $v\mathcal{F}_0$ sur $v\mathcal{F}_1$ déterminé par $v\mathcal{F}$, de sorte que l'isomorphisme naturel $\tau X \approx \xi_1 \oplus v_0$ composé avec $l \oplus k$ soit homotope à l'isomorphisme $\tau X \oplus \xi_1 \oplus v\mathcal{F}_1$. Soit $X \times I \xrightarrow{i} E \rightarrow X \times I$ le graphe de $\mathcal{F}E$ étant muni du feuilletage \mathcal{E} . Alors $v\mathcal{F}$ est isomorphe à $i^*v\mathcal{E}$ et il résulte de ce qui précède que les épimorphismes naturels $\tau X \rightarrow v\mathcal{F}_0 \rightarrow v\mathcal{E}$ et $\tau X \rightarrow v\mathcal{F}_1 \rightarrow v\mathcal{E}$ sont homotopes. Le théorème de transversalité implique alors que les injections i_0 et i_1 de X dans E définies par $i_0(x) = i(x, 0)$ et $i_1(x) = i(x, 1)$ sont connectées par une homotopie i_t différentiable, transverse à \mathcal{E} pour chaque valeur de $t \in I$. Les feuilletages \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 sont donc intégrablement homotopes.

2.3. COROLLAIRE. *Soit X une variété ouverte de dimension n , munie d'un champ de $(n - q)$ -plans et soit $\mu : X \rightarrow B\Gamma_q$ une application classifiant le fibré vectoriel complémentaire. Alors ce champ est homotope à un champ complètement intégrable si et seulement si μ peut se relever dans $B\Gamma_q$.*

Démonstration. Soit \mathcal{F} un feuilletage sur X . Comme on l'a vu, il lui correspond un relèvement $\Phi(\mathcal{F}) : X \rightarrow B\Gamma_q \times B\Gamma_{n-q}$ de τ ; la projection de ce relèvement dans $B\Gamma_q \times B\Gamma_{n-q}$ définit la classe d'homotopie du champ de $(n - q)$ -plans sur X tangents aux feuilles de \mathcal{F} . La projection de $\Phi(\mathcal{F})$ dans $B\Gamma_q$ est une application classifiant le fibré normal v .

Réciproquement, étant donné un champ de $(n - q)$ -plans tangents à X , il lui correspond un relèvement de τ dans $B\Gamma_q \times B\Gamma_{n-q}$; sa projection μ dans $B\Gamma_q$ classe le fibré complémentaire. D'après le théorème précédent, ce champ est homotope au champ tangent à un feuilletage si et seulement si ce relèvement peut se relever lui-même dans $B\Gamma_q \times B\Gamma_{n-q}$; ceci équivaut à construire un relèvement de μ dans $B\Gamma_q$.

On a évidemment un énoncé analogue pour la construction d'une homotopie intégrable reliant deux feuilletages donnés dont les champs tangents sont homotopes.

§3. COMPARAISON ENTRE LES CLASSIFIANTS $B\Gamma_q$ ET $B\Gamma_{n-q}$

Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant:

3.1. THÉORÈME 3. *L'application $v : B\Gamma_q \rightarrow B\Gamma_{n-q}$ est $(q + 1)$ -connexe.*

3.2. COROLLAIRE. *Soit X une variété différentiable ayant le type d'homotopie d'un complexe de dimension r .*

Si $r \leq q + 1$, alors tout champ de $(n - q)$ -plans sur X est homotope à un champ complètement intégrable.

Si $r < q + 1$, deux feuilletages réguliers sur X de codimension q sont régulièrement homotopes si et seulement si les deux champs de $(n - q)$ -plans tangents aux feuilles qu'ils déterminent sont homotopes. C'est une conséquence immédiate de 3.1, 2.2, et 2.3.

Démonstration du théorème. (a) $\pi_{i+1}(v) = 0$ pour $i < q$ (d'après Milnor).

Si $i < q$, le fibré tangent à $S^i \times R^{q-i}$ est trivial; il est donc classé par une application constante τ dans $B\Gamma_q$. D'après le théorème 2, les classes d'homotopie des relèvements de τ

dans $B\Gamma_q$ c'est-à-dire les classes d'homotopie des applications de S^i dans la fibre F de v correspondent bijectivement aux classes d'homotopie intégrable des feuilletages de codimension q sur $S^i \times R^{q-i}$.

Or si X est une variété ouverte de dimension q , il n'existe qu'un feuilletage sur X de codimension q , à savoir celui dont les projections locales sont les cartes définissant la structure différentiable sur X .

Il en résulte que $\pi_i(F) = \pi_{i+1}(v) = 0$ pour $i < q$, donc v est q -connexe.

(b) $\pi_{q+1}(v) = 0$.

Un élément de $\pi_{q+1}(v)$ peut être représenté par une Γ_q -structure \mathcal{F}_0 sur S^q munie d'une trivialisation de son fibré normal $v\mathcal{F}_0$, cet élément est nul si et seulement s'il existe une Γ_q -structure \mathcal{F} sur le disque unité D^{q+1} dont la restriction à S^i est \mathcal{F}_0 , la trivialisation donnée de $v(\mathcal{F}_0)$ pouvant s'étendre suivant une trivialisation de $v(\mathcal{F})$.

Nous pouvons tout d'abord supposer que \mathcal{F}_0 est définie dans un voisinage U de S^q dans R^{q+1} , et que c'est même un feuilletage dans ce voisinage. En effet d'après le théorème 2, toute Γ_q -structure à fibré normal trivial définie sur une variété ouverte parallélisable est homotope à un feuilletage.

D'après Phillips [5] il existe une submersion g de U dans R^q ayant la propriété suivante: un champ de q -repères sur U se projetant par dg sur le champ naturel de q -repères tangents à R^q est homotope au champ donné par la trivialisation de $v\mathcal{F}_0$.

Soit alors \mathcal{F}_1 le feuilletage défini au voisinage de la sphère de rayon $\frac{1}{2}$ par la seule projection locale $f_1(x) = g(2x)$. D'après la construction de g , il existe un champ de vecteurs unités dans le voisinage de la couronne $\frac{1}{2} \leq |x| \leq 1$ qui sont tangents aux feuilles de \mathcal{F}_0 au voisinage de S^q et aux feuilles de \mathcal{F}_1 au voisinage de $\frac{1}{2}S^q$. Au voisinage de cette couronne, les trajectoires de ce champ de vecteurs sont les feuilles d'un feuilletage \mathcal{F}' coïncidant avec \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 au voisinage de S^q et $\frac{1}{2}S^q$ respectivement.

Soit f une application dans R^q du disque de rayon $\frac{1}{2}$ égale à f_1 au voisinage de $\frac{1}{2}S^q$. La Γ_q -structure cherchée \mathcal{F} sera égale à \mathcal{F}' au voisinage de la couronne $\frac{1}{2} \leq |x| \leq 1$, et donnée par la projection locale f à l'intérieur du disque de rayon $\frac{1}{2}$.

§4. REMARQUES GÉNÉRALES

4.1. *Le classifiant* $B\Gamma$. Soit Γ un pseudogroupe d'homéomorphismes locaux d'un espace topologique Z (les éléments de Γ sont des homéomorphismes d'ouverts de Z sur ouverts de Z).

Sur un espace topologique X une Γ -structure est donnée (comme dans 1.1) par un recouvrement ouvert U_i de X , des projections locales continues $f_i: U_i \rightarrow Z$, et des applications de transition γ_{ji}^x appartenant à Γ et vérifiant les conditions (3), (a) et (b) de 1.1. Le cas considéré dans le §1 correspond au cas où Γ est le pseudogroupe des difféomorphismes locaux de classe C^∞ de R^q .

Toutes les considérations du §1 se généralisent sans changement, tout au moins si le pseudogroupe Γ agit transitivement sur Z . En particulier on obtient un classifiant $B\Gamma$ pour les classes d'homotopie de Γ -structures.

Par exemple, soit G un groupe de Lie connexe agissant effectivement et transitivement sur Z , et soit Γ le pseudogroupe formé des restrictions des éléments de G aux ouverts de Z . Alors $B\Gamma$ est le fibré universel de fibre Z associé au fibré universel à groupe structural discret G .

4.2. Γ -feuilletages. Supposons que les éléments de Γ soient des difféomorphismes locaux de R^q . Le classifiant $B\Gamma$ est alors muni aussi d'une application $v: B\Gamma \rightarrow B0_q$. Cette application se factorise en une application dans BG , le classifiant du sous-groupe G de $Gl(n, R)$ formé des différentielles des éléments de Γ laissant fixe l'origine.

Un Γ -feuilletage sur une variété différentiable X est une Γ -structure sur X dont les projections locales sont des submersions différentiables (cf. 1.2). Deux Γ -feuilletages sont dits *intégrablement homotopes* s'il existe un Γ -feuilletage sur $X \times I$ qui est transverse à chaque tranche $X \times t$ et qui induit les Γ -feuilletages donnés sur $X \times 0$ et $X \times 1$.

Le théorème 2 (cf. 2.2) se généralise également, avec la même démonstration; sur une variété différentiable ouverte X de dimension n , les classes d'homotopie intégrable des Γ -feuilletages correspondent bijectivement aux classes d'homotopie des relèvements de τ dans $B\Gamma \times B0_{n-q}$.

4.3. Remarquons que si X est une variété différentiable de dimension q , alors un Γ -feuilletage sur X n'est autre qu'une structure définie par un atlas différentiable, les changements de cartes étant des éléments de Γ . Une telle structure sera appelée une Γ -structure *régulière* sur X . Si Γ est par exemple le pseudogroupe des automorphismes locaux analytiques complexes de C^n (où $2n = q$) une Γ -structure régulière sur X n'est autre qu'une structure complexe sur X .

On voit que deux Γ -structures régulières S_0 et S_1 sur X sont intégrablement homotopes s'il existe sur chaque tranche $X \times t$ une Γ -structure régulière S_t et un champ de vecteurs différentiable sur $X \times I$, se projetant sur le champ de vecteurs unités sur I , et tel que les applications d'ouverts de $X \times t$ sur ouverts de $X \times t'$, obtenues en intégrant ce champ, soient des isomorphismes locaux de S_t dans $S_{t'}$.

L'analogie du théorème 2 donne le cas particulier suivant.

THÉORÈME. *Soit X une variété ouverte de dimension q dont le fibré tangent est classé par une application $\tau: X \rightarrow B0_q$. Les classes d'homotopie intégrable des Γ -structures régulières sur X correspondent bijectivement aux classes d'homotopie des relèvements de τ dans $B\Gamma$.*

Prenons par exemple le cas où Γ est le pseudogroupe Γ_n^C des automorphismes locaux analytiques complexes de C^n . Le théorème précédent montre qu'il existe une théorie des obstructions à la construction d'une structure complexe sur une variété différentiable ouverte X de dimension $2n = q$. L'application $v: B\Gamma_n^C \rightarrow B0_{2n}$ se factorise en une application dans

BU_n , le classifiant pour les fibrés vectoriels complexes de rang n . Les relèvements de τ dans BU_n correspondent naturellement aux structures presque complexes sur X .

4.4. Les considérations précédentes montrent bien l'intérêt de l'étude des propriétés homotopiques et cohomologiques des espaces classifiants $B\Gamma$.

Malheureusement notre ignorance est presque totale. Mentionnons cependant quelques faits.

Le théorème de Bott [1] implique que l'homomorphisme $H^i(BU_n, \mathbb{Q}) \rightarrow H^i(B\Gamma_n^C, \mathbb{Q})$ est nul pour $i > 2n$.

Désignons par Γ_q^r (resp. Γ_q^ω) le pseudogroupe des automorphismes locaux de classe C^r (resp. analytiques réels) de R^q . L'inclusion de Γ_q^{r+1} dans Γ_q^r induit une application de $B\Gamma_q^{r+1}$ dans $B\Gamma_q^r$. Est-ce une équivalence d'homotopie?

Les arguments du §2 s'appliquent au cas analytique réel et l'on montre comme au §3 que l'application $\nu: B\Gamma_q^\omega \rightarrow B\mathbb{O}_q$ est q -connexe. Il en résulte que l'application $\pi_i(B\Gamma_q^\omega) \rightarrow \pi_i(B\mathbb{O}_q)$ est un isomorphisme pour $i < q$ et est surjective pour $i = q$. En revanche le lemme fondamental, p. 317 de [4] implique que le noyau de l'application $\pi_1(B\Gamma_1^\omega) \rightarrow \pi_1(B\mathbb{O}_1)$ est non trivial. En effet la Γ_1^ω -structure sur S^1 définie par la structure analytique de S^1 ne peut se prolonger analytiquement à l'intérieur du disque D^2 , mais une extension différentiable est possible.

Soit Γ le pseudogroupe des automorphismes locaux différentiables de $R^n = R^{n-q} \times R^q$ qui laissent invariant le double feuilletage défini par les projections sur R^q et R^{n-q} . On a évidemment $B\Gamma = B\Gamma_q \times B\Gamma_{n-q}$. Le théorème précédent, combiné avec les résultats du §3 donne des renseignements sur l'existence de doubles feuilletages.

Notons pour terminer que presque tout ce qui précède pourra se généraliser au cas topologique lorsque l'analogue topologique du théorème de transversalité sera démontré.

REFERENCES

1. R. BOTT: On a topological obstruction to integrability, to appear.
2. E. H. BROWN: Abstract homotopy theory, *Trans. Am. math. Soc.* **119** (1965), 79–85.
3. M. L. GROMOV: *Izv. Akad. Nauk SSSR* **33** (1969), 707–734.
4. A. HAEFLIGER: Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes, *Comment. math. helvet.* **32** (1958), 248–329.
5. A. PHILLIPS: Submersions of open manifolds, *Topology* **6** (1967), 171–206.
6. A. PHILLIPS: Foliations on open manifolds—II, *Comment. math. helvet.* **44** (1969), 367–370.
7. A. PHILLIPS: Smooth maps transverse to a foliation, to appear.
8. G. REEB: Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, *Acta. Scient. Indust.* Hermann, Paris (1952).
9. J. WOOD: Foliations on 3-manifolds, *Ann. Math.* **89** (1969), 336–358.

University of Geneva
Geneva, Switzerland