

ÜBER C^∞ -FUNKTIONEN MIT VORGEGEBENEN SINGULARITÄTEN AUF D^2

CHRISTOPH MAIER

(Received 8 May 1981)

BETRACHTE C^∞ -Funktionen $f: D^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit nur einfachen Singularitäten im Sinne von Arnol'd (vgl. [1]) und vorgegebenem Randverhalten (nämlich $f(z)$ stimmt in einer Umgebung von ∂D^2 überein mit $|z|^2$ oder mit $\operatorname{Re} z^{1-m}$ für ein $m \leq 0$). Unter dem Typ τ einer Singularität $\eta \in m(2)^2$ verstehen wir ihre Äquivalenzklasse bezüglich orientierungserhaltender Rechtsäquivalenz, mit $m(\tau)$ bezeichnen wir den Hopfindex von τ . Eine endliche formale Linearkombination $C = \sum n_i \tau_i$ von einfachen Singularitätstypen mit positiven ganzzahligen Koeffizienten heiße *Konstellation*, $m(C) := \sum n_i m(\tau_i)$ nennen wir ihren Hopfindex. Die betrachteten Funktionen f haben dann eine Konstellation $C(f)$ vom Hopfindex $m \leq 1$ (Zu $m > 1$ vgl. Schlußbemerkung). Diese sagt jedoch noch nichts darüber aus, welche "Lage" die Singularitäten von f zueinander haben (vgl. Fig. 1, eingezeichnet sind die kritischen Niveauelemente).

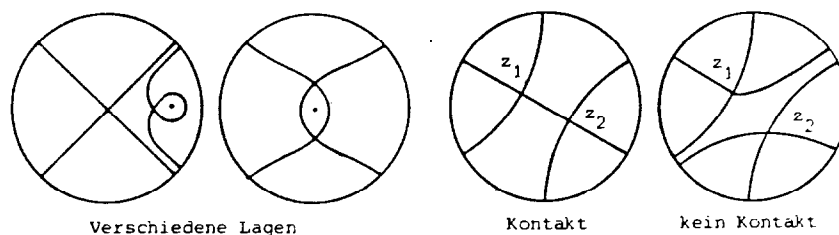


Fig. 1.

Fig. 2.

Die Anschauung suggeriert aber, daß die Singularitäten bei gegebener Konstellation nur endlich viele wesentlich verschiedene Lagen gegeneinander einnehmen können. Dies kann freilich nicht bis auf "Rechtsäquivalenz" so sein, weil dabei die Funktionswerte der Singularitäten erhalten bleiben. "Rechts-Links-Äquivalenz" ist wegen des Randverhaltens nicht sinnvoll. Vielmehr sagen wir, daß zwei Funktionen f, f' dieselbe *Lage* haben, wenn es eine kontakterhaltende Isotopie zwischen ihnen gibt (vgl. [3], S. 283), genauer:

Zwei Singularitäten einer C^∞ -Funktion $D^2 \rightarrow \mathbb{R}$ haben *Kontakt* (vgl. Fig. 2), wenn sie in derselben Niveauelemente liegen. Unter einer *konstellationstreu* Isotopie zwischen f und f' verstehen wir eine C^∞ -Funktion $H: [0, 1] \times D^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $H_0 = f$ und $H_1 = f'$, derart, daß alle H_t dieselbe Konstellation C haben und in einer von t unabhängigen Randumgebung übereinstimmen mit $\operatorname{Re} z^{1-m}$ bzw. $|z|^2$ für $m = 1$ ($m := m(C)$). Weil die Vereinigung der Singularitäten aller H_t in kanonischer Weise eine differenzierbare Überlagerung von $[0, 1]$ ist, kann man definieren: H heißt *kontakterhaltend*, wenn die Kontakt-Relationen zwischen den Singularitäten der H_t 's von t unabhängig sind. Die Äquivalenzklasse von f bezüglich kontakterhaltender Isotopie heiße die *Lage* von f .

Das Ziel dieser Note ist der Beweis von folgendem

LEMMA. *Zu jeder Konstellation vom Hopfindex ≤ 1 gibt es nur endlich viele Lagen.*

Beachte, daß es folglich zu jeder solchen Konstellation nur endlich viele konstellationstreue Isotopieklassen gibt, was auch nicht selbstverständlich ist. Diese Tatsache wird in [4] ebenso wie das Lemma zur Konstruktion universeller C -Familien benötigt.

Wie sich aus [3], S. 288 letzter Abschnitt ergibt, genügt es zu zeigen: Jede Konstellation vom Hopfindex ≤ 1 hat nur endlich viele "Basislagen" ("basic level situations", vgl. [3], §2). Sei jetzt C eine Konstellation vom Hopfindex $m \leq 1$ mit mindestens einer nichtextremalen Singularität. Alle anderen Konstellationen vom Hopfindex ≤ 1 sind von der Form $C = \text{Extremum-Typ}$ bzw. $C = 0$. Diese Fälle werden später (im "4. Schritt") noch gesondert behandelt. Zu jeder Basislage L von C wählen wir nun einen *numerierten Repräsentanten*, das ist eine Funktion f der Lage L zusammen mit einer Numerierung der 0-Zellen ("Ecken" I, II, ...) und der 1-Zellen ("Kanten" 1, 2, ...) des zugehörigen 2-dimensionalen CW-Komplexes X_f aus [2], §5 (vgl. Fig. 3).

Als nächstes ordnen wir den numerierten Repräsentanten gewisse Daten aus einer endlichen Datenmenge zu, und zum Beweis des Lemmas zeigen wir anschließend, daß gleiche Daten nur bei Repräsentanten derselben Lage auftreten können. Zur Definition der Daten brauchen wir noch einige Bezeichnungen: Für Hopfindex $m < 1$ sei $S'_m := \{e^{ik/(1-m)} \mid k = 1, \dots, 2-2m\}$. Zwei *Randecken* (d.h. in ∂D^2 gelegene 0-Zellen) von X_f heißen *vom selben Typ*, wenn sie in derselben Komponente von $\partial D^2 \setminus S'_m$ liegen (vgl. Fig. 3). Seien $\eta, \tilde{\eta}$ einfache Singularitäten desselben Typs. Ein *Zweig* des kritischen η -Niveaus (d.h. eine Komponente von $\eta^{-1}(0) \setminus 0$) und ein *Zweig* des kritischen $\tilde{\eta}$ -Niveaus heißen *vom selben Typ*, wenn sie durch einen orientierungserhaltenden lokalen Diffeomorphismus ineinander übergeführt werden, der η in $\tilde{\eta}$ überführt (vgl. Fig. 4, dort speziell $\eta = \tilde{\eta}$ vom Typ $\tau = A_1^{+-}$). Die Kanten von X_f sind

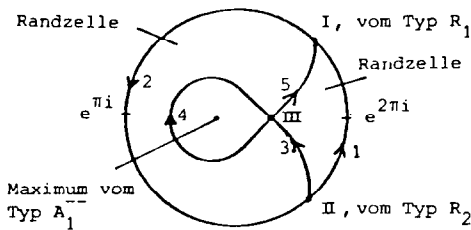


Fig. 3.

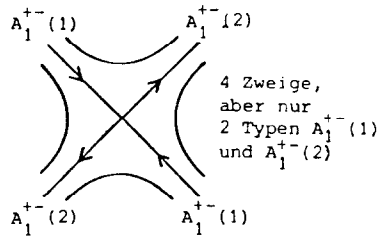


Fig. 4.

kanonisch orientiert (klar für in ∂D^2 gelegene Kanten; die übrigen Kanten orientiert man durch den um 90° gedrehten Gradienten von f , vgl. Fig. 3), und in jeder inneren 2-Zelle von X_f liegt genau ein Extremum ([2], S. 120). Bezeichne nun \mathcal{K} die Menge der Kantennummern, \mathcal{E} die Menge der Eckennummern, \mathcal{Z} die Menge der Zweig-Typen, \mathcal{R} die Menge der Randecken-Typen und \mathcal{E} die Menge der Extremum-Typen vereinigt mit der zweielementigen Menge {Randzelle, Äußeres}. Dann kann man folglich einem numerierten Repräsentanten f folgende Daten zuordnen (Erläuterung jeweils an einem Beispiel aus Fig. 3):

(a) Abbildung auf Anfangs- und Endpunkt mit ihrem "Enden-Typ":

$$\mathcal{K} \rightarrow (\mathcal{E} \times (\mathcal{Z} \cup \mathcal{R}))^2$$

z.B. in Fig. 3: $5 \mapsto ((\text{III}, A_1^{+-}(2)), (I, R_1))$

(Zu $A_1^{+-}(2)$ vgl. Fig. 4)

(b) Abbildung auf rechten und linken "Ufertyp":

$$\mathcal{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}^2$$

z.B. in Fig. 3: $4 \mapsto (A_1^-, \text{Randzelle})$

(c) Abbildung auf rechts- und linksseitigen Nachbarn am Kantenende:

$$\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^2$$

z.B. in Fig. 3: $4 \mapsto (4, 5)$.

Die Datenmenge ist offenbar endlich, denn die Anzahl der Ecken und Kanten von X_f kann man leicht mit Hilfe der Singularitäten-Anzahl abschätzen (einfache Singularitäten haben höchstens 6 Zweige), ebenso die Anzahl der vorkommenden Zweig- und Extremum-Typen; die Anzahl der Randeckentypen ist gerade $2 - 2m$.

Also genügt es zu zeigen, daß gleiche Daten nur bei Repräsentanten der gleichen Basislage auftreten können. Dazu wählen wir numerierte Repräsentanten f, f' von Basislagen L, L' mit gleichen Daten und führen f' durch schrittweise Abänderung mittels kontakterhaltender Isotopie in f über ($\Rightarrow L = L'$).

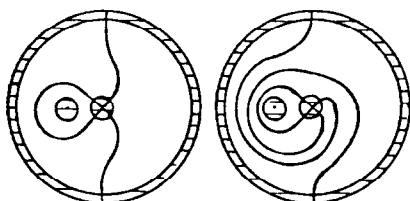
1. *Schritt.* Wegen der Gleichheit von Datum (a) findet man offenbar einen Homöomorphismus $\mathcal{H}: X_f^1 \rightarrow X_{f'}^1$ der 1-Gerüste, der gleich numerierte Ecken und Kanten aufeinander abbildet und die Orientierung der Kanten erhält. Dieser wird im folgenden zur Konstruktion einer kanonischen Bijektion zwischen den kritischen Niveauelementen von f und f' benutzt, und wir erreichen weiter, daß die Komponenten von f' denselben zugeordneten Funktionswert (vgl. [3], S. 286 unten) haben wie die entsprechenden von f .

Dazu beachte: Die nichtextremalen kritischen Komponenten von f bzw. f' sind gerade die Zusammenhangskomponenten des Unterkomplexes von X_f^1 bzw. $X_{f'}^1$, der durch Entfernen der Randkanten (d.h. der in ∂D^2 gelegenen Kanten) entsteht (vgl. Fig. 3), und Datum (a) zeichnet Randkanten aus. Zur Herstellung der gesuchten Bijektion muß man also nur noch die Zuordnung der Extrema angeben. Nach [2], S. 120, proposition 1 genügt hierzu die folgendermaßen konstruierte Bijektion β zwischen den 2-Zellen von X_f und $X_{f'}$, die innere 2-Zellen in innere 2-Zellen überführt: Zu jeder 2-Zelle e von X_f wähle eine Kante K von X_f in \bar{e} . Liegt e rechts (links) von K , so sei $\beta(e)$ die rechts (links) von $\mathcal{H}(K)$ gelegene 2-Zelle e' von $X_{f'}$. β ist hierdurch wohldefiniert, denn e' ist unabhängig von der Wahl von K in \bar{e} , weil \mathcal{H} wegen Datum (c) die Nachfolger-Beziehungen der Kanten in $\bar{e} \setminus e$ (vgl. [2], S. 122; in Randecken analog, ohne Rücksicht auf Orientierung) in die in $\bar{e}' \setminus e'$ geltenden Beziehungen überträgt. Mit e ist auch e' innere 2-Zelle; wegen Datum (b) enthält e' sogar ein Extremum vom gleichen Typ wie e . \mathcal{H}^{-1} liefert β^{-1} , und β ist unabhängig von der Wahl von \mathcal{H} . Also kann man von "entsprechenden" kritischen Komponenten von f und f' reden, und die Gleichheit der zugeordneten Funktionswerte erreichen wir wie in [3], S. 287 mit $M = \text{pt}$, $F = f'$, wobei ϕ_L durch die von f induzierte Abbildung $\Sigma_{f'} \rightarrow \mathbb{R}$ zu ersetzen ist (beachte, daß auch die mit diesem ϕ_L konstruierten H_i Nachbarn unterscheiden. Dies ist leicht zu sehen außer im Falle einer Randzelle, $m < 1$; in diesem Fall betrachte man das Verhalten von $\text{grad } f$ entlang dem Rand der Zelle und beachte, daß f im Inneren regulär ist).

2. *Schritt.* Wir werden durch geeignete Abänderung von f' erreichen: $X_{f'}^1 = X_f^1$, $\mathcal{H} = \text{id}$, und in einer Umgebung der Singularitäten gilt $f' = f$.

Nach dem 1. Schritt entspricht jeder Singularität von f genau eine von f' vom selben Typ.

1. *Teilschritt.* Mit dem Isotopiesatz von Thom erreicht man leicht, daß entsprechende Singularitäten von f und f' an derselben Stelle in \mathring{D}^2 sitzen, und daß $f' = f$, $\mathcal{H} = \text{id}$ in einer Umgebung der Singularitäten und des Randes ∂D^2 gilt (vgl. Fig. 5; beachte, daß man für jede nicht-extremale Singularität aufgrund von Datum (a) (Endentyp) erreichen kann, daß ein Zweig der Singularität zu gleich nummerierten Kanten von X_f^1 und $X_{f'}^1$ gehört. Wegen Datum (c) ist dies dann für alle Zweige der Fall, und man erreicht $\mathcal{H} = \text{id}$ in der Nähe der Singularität).



Übereinstimmung in \equiv
Fig. 5.

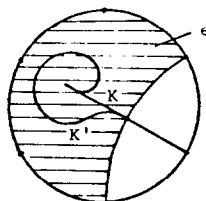


Fig. 6.

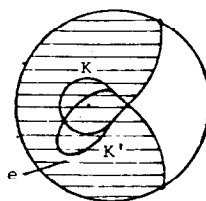


Fig. 7.

2. *Teilschritt.* Wir erreichen im folgenden $X_f^1 = X_{f'}^1$, und zwar zunächst für Hopfindex $m < 1$.

Die Vereinigung der schon übereinstimmenden 0- und 1-Zellen von X_f^1 und $X_{f'}^1$ ist ein Unterkomplex von X_f^1 , der $X_f^0 \cup \partial D^2$ enthält, falls $m < 1$. Sei Z diejenige von seinen Zusammenhangskomponenten, die ∂D^2 enthält. Dann sind (Z^0, Z, D^2) die Skelette eines endlichen 2-dimensionalen CW-Komplexes Z^2 (Begründung wie für X_f in [2], S. 120). Sei $K \notin Z$ eine 1-Zelle von X_f mit $\bar{K} \cap Z \neq \emptyset$. Dann sind K und die entsprechende 1-Zelle K' von $X_{f'}$ in derselben 2-Zelle e von Z^2 enthalten (vgl. Fig. 6 bzw. 7; eingezeichnet: Z, K, K' und e). Unser weiteres Vorgehen beruht auf folgender

Idee. Ändere f' ab durch Vorschalten einer Diffeotopie, die K in K' überführt und außerhalb e konstant ist. Durch diese Abänderung vergrößert sich die Kantenzahl von Z , weil anschließend $K' = K$ gilt, und nach endlich vielen Schritten ist $X_f^1 = Z = X_{f'}^1$ erreicht.

Zur Ausführung der Einzelheiten. Mit Hilfe geeigneter Einbettungen $J : D^2 \rightarrow e$ gelingt die Rückführung auf die folgenden zwei Spezialfälle: (vgl. Fig. 8, falls nur ein Ende von \bar{K} in Z liegt, und Fig. 9, falls beide Enden von \bar{K} in Z liegen).

1. *Spezialfall:* $e = \mathring{D}^2$, $\bar{K} = D^2 \cap \mathbb{R}_+$ (vgl. Fig. 8, linke Scheibe)
2. *Spezialfall:* $e = \mathring{D}^2$, $\bar{K} = D^2 \cap \mathbb{R}$ (vgl. Fig. 9, linke Scheibe)

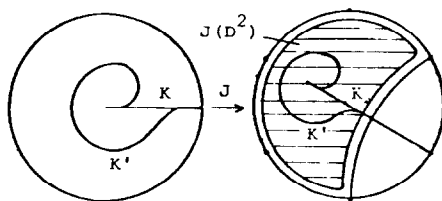


Fig. 8.

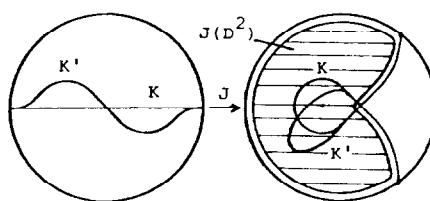


Fig. 9.

Die Ausführung der Idee ist in beiden Fällen nicht schwer und soll hier nur kurz angedeutet werden. Mit dem Isotopiesatz verschafft man sich leicht eine randumgebungsfeste Diffeotopie ϕ von D^2 , die K in K' überführt, wenn man \mathring{D}^2 als $S^2 \setminus \text{pt}$ auffaßt und beachtet, daß je zwei Einbettungen $I \rightarrow S^2$ bzw. $S^1 \rightarrow S^2$ isotop sind. Damit die Ergebnisse des 1. Teilschritts erhalten bleiben, brauchen wir $\phi_1 = \text{id}$ in einer Umgebung der in e gelegenen Singularitäten. Im 1. Spezialfall sitzt eine von diesen Singularitäten in $0 \in \mathring{D}^2$, und man kann *OBdA* annehmen, daß jedes ϕ_t in der Nähe von $0 \in \mathring{D}^2$ eine Drehung ist. Dann ist $\phi_1 = \text{id}$ in einer Umgebung von $0 \in \mathring{D}^2$. Die übrigen in e gelegenen Singularitäten verschieben wir vor dem Durchlaufen von ϕ in $e \setminus K$, so daß sie in den Bereich gelangen, wo $\phi_1 = \text{id}$. Anschließend schieben wir sie in $e \setminus K'$ wieder zurück. Dies ist möglich, denn jedes Extremum läßt sich in $e \setminus X_f^1$ und in $e \setminus X_{f'}^1$ in die Nähe einer in \bar{e} gelegenen nichtextremalen Singularität schieben, und jede nicht-extremale Singularität $s \in e$ ist in $e \cap X_f^1 \setminus K$ mit einem Punkt p nahe $\partial e \cup \{\text{Endpunkte von } K\}$ verbindbar; Übergang zu den entsprechenden Kanten von X_f^1 liefert Verbindung zwischen s und p in $e \cap X_f^1 \setminus K'$. Damit ist der 2. Teilschritt für Hopfindex $m < 1$ getan. Um dasselbe Verfahren auch für $m = 1$ anwenden zu können, befestigen wir zunächst X_f^1 und $X_{f'}^1$ mit je einer "Hilfskante" an $1 \in \partial D^2$ (vgl. Fig. 10).

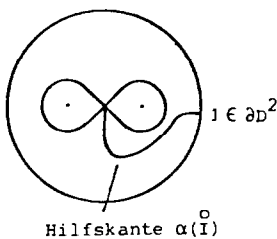


Fig. 10.

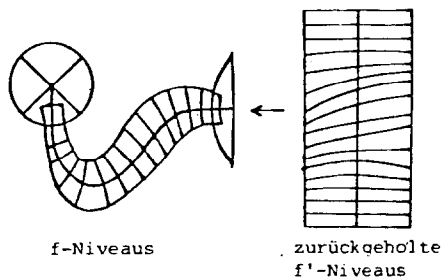


Fig. 11.

Dazu wählen wir reguläre C^∞ -Wege α, α' von $1 \in \partial D^2$ zu einer nicht-extremalen Singularität von f (und damit auch von f' , vgl. 1. Teilschritt), derart daß gilt:

- (1) $d(f \circ \alpha)(t) = d(f' \circ \alpha')(t) \neq 0$ für alle $t \in [0, 1)$.
- (2) $\alpha(t) = \alpha'(t) = 1 - t$ in einer Umgebung von $0 \in I$.
- (3) $\alpha = \alpha'$ in einer Umgebung von $1 \in I$.

Wir erhalten so zusammenhängende 1-dimensionale CW-Komplexe $\tilde{X}_f^1 := X_f^1 \cup \alpha(I) \cup \partial D^2$ und $\tilde{X}_{f'}^1 := X_{f'}^1 \cup \alpha'(I) \cup \partial D^2$, die wir wie im Fall Hopfindex < 1 zur Übereinstimmung bringen.

Damit ist der 2. Teilschritt auch für Hopfindex $m = 1$ getan, und wir haben zusätzlich $\tilde{X}_f^1 = \tilde{X}_{f'}^1$ und $f = f'$ auf der Hilfskante erreicht.

Offenbar kann man nun *OBdA* $\mathcal{H} = \text{id}$ annehmen, und der 2. Schritt ist getan.

3. Schritt. Wir erreichen nun $f' = f$ in einer Umgebung von $X_f^1 = X_{f'}^1$ ($=: Z$ für Hopfindex $m < 1$), für $m = 1$ auch in einer Umgebung der "Hilfskante" (vgl. Fig. 10) von $\tilde{X}_f^1 = \tilde{X}_{f'}^1$ ($=: Z$ für $m = 1$).

Jedenfalls gilt $f' = f$ schon in einer Umgebung von $Z^0 \cup \partial D^2$. Mittels Tubenumgebungen für die in \mathring{D}^2 gelegenen 1-Zellen von Z holt man nun f und f' zurück nach $[-\epsilon, \epsilon] \times I$, und zwar so, daß f übergeht in die Projektion $(x, y) \mapsto y$ im Falle der Hilfskante (vgl. Fig. 11) und in eine Abbildung $(x, y) \mapsto x + \text{Konstante}$ andernfalls (vgl. Fig. 12). In Fig. 11 sind also die zurückgeholten f -Niveaus waagrecht, in Fig. 12 senkrecht.

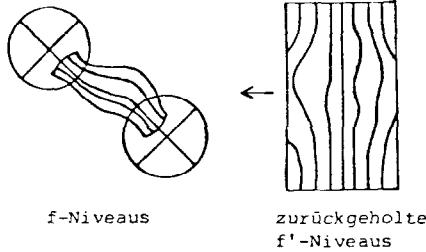


Fig. 12.

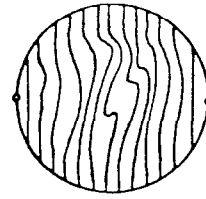


Fig. 13.

In beiden Fällen ist es nicht schwer, das zurückgeholte f' durch "randumgebungs-feste" reguläre Homotopie so abzuändern, daß in einer Umgebung von $0 \times I$ Übereinstimmung mit dem zurückgeholten f eintritt.

4. Schritt. Durch geeignete Abänderung erreichen wir nun sogar $f' = f$.

Offenbar genügt es zu zeigen: Zu den Konstellationen $C=0$ und $C = \text{Extremum-Typ}$ gibt es jeweils nur eine Lage. Denn nach Wahl einer geeigneten Einbettung $j_e: D^2 \rightarrow e$ für jede 2-Zelle e von Z^2 erreicht man dann leicht $f' = f$ durch Abänderung auf den $j_e(D^2)$ unter Beachtung von Proposition 1 aus [2], §5. Beachte auch: Hiermit ist dann das Lemma auch für die anfangs ausgeschlossenen Konstellationen gezeigt.

Im Fall $C=0$ hat man eine Isotopie zwischen zwei beliebigen C -Funktionen (vgl. [3], S. 283) f und f' zu finden. f definiert eine Einbettung $\phi = (f, g): D^2 \setminus \pm 1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, indem man als $g(z)$ die Bogenlänge des mit Einheitsgeschwindigkeit durchlaufenen f -Niveau-Stücks zwischen z und $f^{-1}(f(z)) \cap \partial D^2 \cap \{Imz < 0\}$ hernimmt (vgl. Fig.

13). Sei $M := \text{Bild}(\phi) = \bigcup_{x \in (-1, 1)} \{x\} \times [0, a(x)]$ und ϕ' die von f' definierte Einbettung mit Bild M' . Dann findet man einen Diffeomorphismus $\Psi: M' \rightarrow M$ mit $\Psi(x, y) = (x, \psi(x, y))$ und $(\partial\psi/\partial y)(x, y) = 1$ in einer Randumgebung und für x nahe ± 1 . Nach [5] gibt es eine randumgebungs-feste Diffeotopie H zwischen id und $\phi^{-1} \circ \Psi \circ \phi'$, und $f \circ H$ ist die gesuchte Isotopie zwischen f und f' . Den Fall $C = \text{Extremum-Typ}$ führt man auf $C = 0$ zurück, indem man das OBdA in $0 \in D^2$ gelegene Extremum mit einer Hilfskante an $1 \in \partial D^2$ befestigt und weiter vorgeht wie im 2., 3. und 4. Schritt. Damit ist das Lemma bewiesen, und wir kommen zur.

Schlußbemerkung: Die Bedingung Hopfindex $m \leq 1$ kommt daher, daß für $m > 1$ erst noch ein sinnvoller Lagenbegriff erklärt werden muß. Sinnvoll heißt, daß die Konstruktion universeller L - und C -Familien durchgeführt werden kann wie in [3, 4]. Den "richtigen" Lagenbegriff erhält man vermutlich, wenn man verlangt, daß bei kontakterhaltender Isotopie auch die Kontaktrelationen zwischen Singularitäten und Randextrema erhalten bleiben. Man kann zeigen, daß das Lemma mit dieser Lagendefinition auch für Hopfindex $m > 1$ gilt. Der Beweis geht im wesentlichen wie für $m \leq 1$.

LITERATURVERZEICHNIS

1. V. J. ARNOL'D: Normal Forms for Functions near Degenerate Critical Points, the Weyl Groups of A_k , D_k and E_k , and Lagrangian Singularities. *Funkcional. Anal. i Priložen.* **6** (1972), 3–25; *Functional Anal. Appl.* **6** (1972), 254–272.
2. K. JÄNICH: Symmetry Properties of Certain C^∞ -Functions on the 2-dimensional Disk. *Topology* **19** (1980), 111–133.
3. K. JÄNICH: Contact Preserving Families of Functions. *Topology* **19** (1980), 283–290.
4. K. JÄNICH: Universal Families of C^∞ -Functions on D^2 . *Math. Ann.* **256** (1981), 67–84.
5. S. SMALE: Diffeomorphisms of the 2-sphere. *Proc. Am. Math. Soc.* **10** (1959), 621–626.

Universität Regensburg
 Fachbereich Mathematik
 Universitätsstrasse 31
 D-8400 Regensburg
 West Germany