Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

ELSEVIER

Journal of Functional Analysis 223 (2005) 28–43

JOURNAL OF Functional Analysis

www.elsevier.com/locate/jfa

Réflexivité d'une extension d'un opérateur normal par un opérateur nilpotent☆

M'hammed Benlarbi Delai*, Omar El-Fallah

Faculté des Sciences, Département de Mathématiques et Informatique, Université Mohammed V, BP 1014 Rabat, Maroc

Received 22 November 2003; received in revised form 20 December 2004; accepted 20 December 2004

Communicated by D. Sarason

Available online 12 April 2005

Abstract

Let T be an extension of a one to one normal operator A by a nilpotent operator N. In this paper we calculate the defect of reflexivity of T. We give a necessary and sufficient condition to insure the reflexivity of such extensions. In particular, it is shown that T is reflexive when N is reflexive.

Keywords: Décomposition de Sarason; Défaut de réflexivité; Extensions d'opérateurs; Fermeture faible des polynômes; Opérateurs nilpotents; Opérateurs normaux; Réflexivité des opérateurs; Sous-espaces invariants

1. Introduction

Soient H un espace de Hilbert complexe séparable et $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur H. Si $\mathcal{S}$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(H)$, on désigne par $Ref\,\mathcal{S} = \{B \in \mathcal{L}(H) : \quad Bx \in \overline{Vect}(\mathcal{S}x)\}$ où $\overline{Vect}(\mathcal{S}x)$ est le sous-espace fermé engendré par $\mathcal{S}x$. Le sous-espace $\mathcal{S}$ est dit réflexif si $\mathcal{S} = Ref\,\mathcal{S}$. Si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathcal{L}(H)$, nous désignons par $Lat\,\mathcal{A}$ le treillis des sous-espaces fermés de H invariants pour tout élément de $\mathcal{A}$ et si L est une famille de sous-espaces fermés de H, nous désignons par $Alg\,L$ l'algèbre des opérateurs $S \in \mathcal{L}(H)$ tels que $L \subset Lat\,S$. Lorsque $\mathcal{A}$ est

☆ Ce travail a été effectué dans le cadre du projet de l'action integrée franco-marocain MA/03/64.

* Corresponding author.

E-mail addresses: benlarbi@fsr.ac.ma (M.B. Delai), elfallah@fsr.ac.ma (O. El-Fallah).

0022-1236/$ - see front matter © 2005 Elsevier Inc. All rights reserved.
doi:10.1016/j.jfa.2004.12.012

une algèbre unitaire, il est facile de voir que $Ref\,\mathcal{A} = Alg\,Lat\,\mathcal{A}$. Pour $T \in \mathcal{L}(H)$, nous désignons par $W(T)$ la fermeture faible de l'algèbre des polynômes en T, par $W_T(T^n)$ la fermeture faible de l'idéal engendré par T^n dans $W(T)$ et par $\{T\}'$ le commutant de T. Notons qu'on a toujours $W(T) \subset Alg\,Lat\,T$. Le défaut de réflexivité de l'opérateur T est la quantité $\alpha(T) = \dim(Alg\,Lat\,T/W(T))$. On dit que T est réflexif si $\alpha(T) = 0$ c'est à dire $W(T) = Alg\,Lat\,T = Ref\,W(T)$. La notion de réflexivité fut initiée par D. Sarason dans [13], où il montre que tout opérateur normal est réflexif. De nombreux auteurs ont depuis largement développé cette notion et on peut citer notamment [9–12,15]. Signalons aussi que la réflexivité d'un opérateur est une notion "assez rigide" comme le montre l'exemple construit par D. Larson et W. Wogen dans [11]. En effet ils donnent un exemple d'opérateur T réflexif tel que $T \oplus 0$ n'est pas réflexif. L'étude de la réflexivité d'une extension T de certains opérateurs auto-adjoints par des opérateurs nilpotents cycliques a été abordée dans [2,3]. Dans ce papier, nous étudions la réflexivité d'une extension T d'un opérateur normal par un opérateur nilpotent quelconque. Nous caractérisons complètement les extensions T qui sont réflexives en calculant leurs défaut de réflexivité. La démarche adoptée ici est différente de celle de [2,3] et fait appel à la description de la fermeture faible des polynômes dans $L^\infty(\mu)$ dûe à D. Sarason dans [14].

Soient maintenant H et K deux espaces de Hilbert complexes séparables, $A \in \mathcal{L}(H)$ normal et $N \in \mathcal{L}(K)$ nilpotent d'ordre n. Soit T une extension de A par N, l'opérateur T s'écrit suivant la décomposition $H \oplus K$

$$T = \begin{bmatrix} A & X \\ 0 & N \end{bmatrix} \quad \text{où } X \in \mathcal{L}(K, H).$$

Quitte à décomposer $H = \overline{\mathrm{Im}(A)} \oplus ker\,A$, on peut supposer que A est injectif pour l'étude de la réfléxivité de T. Soient $e \in K$ tel que $N^{n-1}e \neq 0$ et $h(T^n e)$ la hauteur de $T^n e$ dans H relativement à A (la hauteur de $x \in H$ est définie par $h(x) = \mathrm{Max}\{p \in \mathbb{N} \;:\; x \in \mathrm{Im}(A^p)\}$). Nous montrons qu'une extension T d'un opérateur normal injectif A par un opérateur nilpotent N est réflexive si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est vérifiée (i) $I \notin W_A(A)$, (ii) N est réflexif, (iii) $h(T^n e) = 0$. Pour les extensions T telles que $I \in W_A(A)$, nous donnons une description complète de $Alg\,Lat\,T$ et nous calculons explicitement le défaut de réflexivité de T, ce qui constitue une extension des travaux de [2,3] .

Dans toute la suite, si $A \in \mathcal{L}(H)$, nous désignons par $\sigma(A)$ le spectre de A, $\sigma_p(A)$ le spectre ponctuel de A. Si $y_1, y_2, \ldots, y_r \in H$, $Vect(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ est le sous-espace vectoriel de H engendré par $y_1, y_2, \ldots, y_r$, $Vect_A(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ est le sous-espace vectoriel de H invariant pour A engendré par $y_1, y_2, \ldots, y_r$; et $\overline{Vect_A}(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ la fermeture de $Vect_A(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ dans H.

2. Généralités

Dans cette section nous donnons les principaux résultats classiques qui nous seront utiles dans la suite de ce travail.

Soient μ une mesure positive à support compact dans $\mathbb{C}$. Pour tout entier $n\geqslant 0$, nous notons par $P^\infty(z^n,\mu)$ l'adhérence faible dans $L^\infty(\mu)$ de l'idéal $\{z^n p(z) : p \text{ polynôme}\}$ et par $P^2(\mu)$ la fermeture dans $L^2(\mu)$ de l'algèbre des polynômes de la variable complexe z. Dans le cas $n=0$, $P^\infty(z^n,\mu)$ sera noté simplement $P^\infty(\mu)$. Pour toute fonction $\phi \in L^\infty(\mu)$, l'opérateur M_ϕ désignera la multiplication par ϕ dans $L^2(\mu)$. Rappellons que si A est un opérateur normal sur un espace de Hilbert et μ une mesure spectrale scalaire associée à A, alors $P^\infty(\mu)$ et $W(A))$ sont isomorphes par le biais de l'application suivante

$$f \in P^\infty(\mu) \longrightarrow f(A) = \int f\,dE \in W(A)$$

(E est la mesure spectrale de A). Notons que si $W^*(A)$ est l'algèbre de Von Neuman engendrée par A, alors il existe $x_0 \in H$ un vecteur séparateur pour $W^*(A)$ tel que $\mu(\Delta) = ||E(\Delta)x_0||^2$ pour tout borélien Δ de $\mathbb{C}$ ($x_0 \in H$ est dit séparateur pour $W^*(A)$ si de $Bx_0 = 0$ et $B \in W^*(A)$ résulte $B = 0$) [5].

Lemme 1. *Si $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal et $n \in \mathbb{N}$, alors $W_A(A^n)$ est réflexif.*

Preuve. Soit $B \in \mathcal{L}(H)$ tel que $Bx \in \overline{Vect}_A(A^n x)$ pour tout $x \in H$. Supposons d'abord que A est star-cyclique. D'après la représentation spectrale des opérateurs normaux, nous pouvons supposer que $H = L^2(\mu)$ où μ est une mesure positive bornée et $A = M_z$. Comme $B \in Alg\,Lat\,A \subset \{A\}'$, il existe une fonction g mesurable bornée sur $\sigma(A)$ telle que $B = M_g$. Pour montrer que $B \in W_A(A^n)$, nous sommes amenés à montrer que $g \in P^\infty(z^n,\mu)$. En vertu de la dualité faible entre $L^1(\mu)$ et $L^\infty(\mu)$, il suffit de montrer que pour tout $f \in L^1(\mu)$ telle que $\int z^m f\,d\mu = 0$ pour tout $m\geqslant n$, on ait $\int gf\,d\mu = 0$. Soit $f \in L^1(\mu)$ telle que $\int z^m f\,d\mu = 0$ pour tout $m\geqslant n$. En écrivant $f = h\overline{k}$ avec h et $k \in L^2(\mu)$, on obtient que k est orthogonal à $\overline{Vect}_{M_z}(z^n h)$. Or $gh \in \overline{Vect}_{M_z}(z^n h)$, donc $\int gf\,d\mu = \int gh\overline{k}\,d\mu = 0$.

Considérons maintenant le cas où A est normal quelconque. Soient E la mesure spectrale de A et μ une mesure spectrale scalaire associée à A. Soit x_0 un vecteur séparateur pour $W^*(A)$ tel que $\mu(\Delta) = ||E(\Delta)x_0||^2$ pour tout borélien Δ de $\mathbb{C}$. Posons $H_0 = \overline{Vect}_{A,A^*}(x_0)$, $A_0 = A|_{H_0}$ et $B_0 = B|_{H_0}$. Il est clair que $Lat\,A_0 \subset Lat\,B_0$ et d'après le cas star-cyclique qui précède on a $B_0 \in W_{A_0}(A_0^n)$. Il existe donc $f \in P^\infty(z^n,\mu)$ tel que $B_0 = f(A_0) = f(A)|_{H_0}$. Comme x_0 est séparateur pour $W^*(A)$, on obtient $B = f(A) \in W_A(A^n)$. $\square$

Soit μ une mesure positive à support compact dans $\mathbb{C}$. Pour tout ouvert Ω de $\mathbb{C}$, $H^\infty(\Omega)$ désignera l'algèbre des fonctions holomorphes bornées sur Ω. D. Sarason a démontré dans [14] qu'il existe un ouvert G de $\mathbb{C}$ et une décomposition $\mu = \mu_a \oplus \mu_s$ avec $\mu_a \perp \mu_s$, $P^\infty(\mu) = P^\infty(\mu_a) \oplus L^\infty(\mu_s)$ et $P^\infty(\mu_a)$ isomorphe à $H^\infty(G)$. L'ouvert G s'appelle le hull de Sarason associé à μ. Le lemme suivant découle immédiatement de [14] (voir aussi [6, Chapitre VI]).

Lemme 2. *Soient μ une mesure positive à support compact dans $\mathbb{C}$ et G le hull de Sarason asssocié à μ. Pour tout $n \geqslant 0$ on a*

(1) *Si $0 \notin G$, alors $P^\infty(z^n, \mu) = P^\infty(\mu)$.*
(2) *Si $0 \in G$, alors $P^\infty(z^n, \mu) = z^n P^\infty(\mu_a) \oplus L^\infty(\mu_s)$*

Corollaire 3. *Soient $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal et $n \in \mathbb{N}$. Si $A^n \in W_A(A^{n+1})$, alors $I \in W_A(A)$.*

Preuve. Soient μ une mesure spectrale scalaire associée à A et G le hull de Sarason associé à μ . Supposons que $z^n \in P^\infty(z^{n+1}, \mu)$. Comme $P^\infty(z^{n+1}, \mu) = z^{n+1} P^\infty(\mu_a) \oplus L^\infty(\mu_s)$ et $P^\infty(\mu_a)$ est isomorphe à $H^\infty(G)$, on obtient $z^n \in z^{n+1} H^\infty(G)$; par suite $0 \notin G$ et donc $I \in W_A(A)$ d'après le Lemme 2. $\square$

La description de $Alg\,Lat\,(N)$ lorsque N est un opérateur nilpotent sur un espace vectoriel de dimension finie a été donnée par J.A. Deddens et P.A. Fillmore dans [8] (voir aussi [4]). Cette description s'étend aisément, grâce au Lemme 4 suivant, dans le cadre des espaces de Banach. Plus précisément on a:

Lemme 4 (*Baraa and Charles [1], Lemme 1*). *Si $N \in \mathcal{L}(K)$ est un opérateur nilpotent d'ordre n et $e \in K$ tel que $N^{n-1}e \neq 0$, alors il existe $G \in Lat\,N$ tel que $K = Vect_N(e) \oplus G$.*

Théorème 5. *Soient $N \in \mathcal{L}(K)$ nilpotent d'ordre n et $e \in K$ tel que $N^{n-1}e \neq 0$. Soient $G \in Lat\,N$ tel que $K = Vect_N(e) \oplus G$ et z^p le polynôme minimal de $N|_G$. On a*

$$Lat\,N \subset Lat\,M \Leftrightarrow \begin{cases} M = P(N) + D \quad avec\ P\ polynôme, \\ DN^i e \in Vect_N(N^{p+i}e), \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ De = 0, \quad D|_G = 0. \end{cases}$$

Le défaut de réflexivité $\alpha(N)$ de N est donné par

$$\alpha(N) = \frac{(n-p)(n-p-1)}{2}.$$

3. Description de $W_T(T^n)$

L'objectif de ce paragraphe est de donner une description complète de l'idéal $W_T(T^n)$, lorsque T est une extension d'un opérateur normal injectif par un opérateur nilpotent d'ordre n.

Théorème 6. *Soient $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal injectif et $N \in \mathcal{L}(K)$ nilpotent d'ordre $n \geqslant 1$. Soient*

$$T = \begin{bmatrix} A & X \\ 0 & N \end{bmatrix} \quad \text{où } X \in \mathcal{L}(K, H),$$

une extension de A par N et $X_n = \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-1-i} X N^i$. Alors $W_T(T^n)$ est l'ensemble des opérateurs S de la forme $S = \begin{bmatrix} B & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tels que $B \in W_A(A^n)$ et $BX_n = A^n Y$.

Preuve. Si $S \in W_T(T^n)$, alors il existe une suite généralisée de polynômes p_α telle que $T^n p_\alpha(T) = \begin{bmatrix} A^n p_\alpha(A) & p_\alpha(A)X_n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ converge vers S pour la topologie WOT. Donc S vérifie les conditions ci-dessus du théorème.

Inversement, supposons que $S = \begin{bmatrix} B & Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ avec $B \in W_A(A^n)$ et $BX_n = A^n Y$. Montrons que $S \in W_T(T^n)$. Nous allons distinguer deux cas.

Cas où $I \in W_A(A)$. Puisque $B \in W(A)$, il existe une suite généralisée de polynômes p_α telle que $p_\alpha(A)$ converge vers B pour la topologie WOT. Or $BX_n = A^n Y$, donc $p_\alpha(A)X_n$ converge vers $A^n Y$ pour la topologie WOT et $T^n p_\alpha(T)$ converge vers $T^n S$. Puisque $I \in W_A(A)$, il existe une suite généralisée de polynômes q_α telle que $A^n q_\alpha(A)$ converge vers I pour la topologie WOT, donc $T^n q_\alpha(T) S$ converge vers S et $S \in W_T(T^n)$.

Cas où $I \notin W_A(A)$. Si μ est une mesure spectrale scalaire associée à A, alors $P^\infty(\mu)$ est isomorphe à $W(A)$ et donc $P^\infty(\mu) \neq P^\infty(z, \mu)$. Soit $\mu = \mu_a \oplus \mu_s$ la décomposition de Sarason, d'après le Lemme 2 on a

$$P^\infty(z^n, \mu) = z^n P^\infty(\mu_a) \oplus L^\infty(\mu_s). \tag{1}$$

Comme $B \in W_A(A^n)$, il existe $g \in P^\infty(z^n, \mu)$ telle que $B = g(A)$. On peut écrire $g = g_a \oplus g_s$ avec $g_a = z^n G_a$, $G_a \in P^\infty(\mu_a)$ et $g_s \in L^\infty(\mu_s)$. D'après l'égalité (1), il existe une suite généralisée de polynômes p_α telle que $z^n p_\alpha$ converge faiblement vers 1 dans $L^\infty(\mu_s)$. L'opérateur $(G_a \oplus p_\alpha g_s)(A) T^n$ converge vers S pour la topologie WOT. En effet, il est clair que

$$(G_a \oplus p_\alpha g_s)(A) T^n = \begin{bmatrix} (g_a \oplus z^n p_\alpha g_s)(A) & (G_a \oplus p_\alpha g_s)(A) X_n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

D'une part $g_a \oplus z^n p_\alpha$ converge faiblement vers $g_a \oplus 1$ dans $L^\infty(\mu)$, donc $(g_a \oplus z^n p_\alpha g_s)(A)$ converge vers B pour la topologie WOT. D'autre part comme $BX_n = A^n Y$, on obtient

$$A^n (G_a \oplus p_\alpha g_s)(A) X_n = A^n (1 \oplus z^n p_\alpha)(A) Y$$

et par suite on a $(G_a \oplus p_\alpha g_s)(A)X_n = (1 \oplus z^n p_\alpha)(A)Y$ compte tenu de l'injectivité de A. Donc $(G_a \oplus p_\alpha g_s)(A)X_n$ converge vers Y pour la toplogie WOT. D'où $(G_a \oplus p_\alpha g_s)(A)T^n$ converge vers S et par suite $S \in \overline{W(A)T^n}^{\mathrm{WOT}} \subset W_T(T^n)$. $\square$

4. Description de Alg Lat T et réflexivité

Le but de cette section est de donner une description explicite de $Alg\,Lat\,T$ lorsque T est une extension d'un opérateur normal injectif par un opérateur nilpotent. Ceci nous permettera de calculer le défaut de réflexivité de T.

Dans tout ce qui suit, si

$$T = \begin{bmatrix} A & X \\ 0 & N \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(H \oplus K)$$

est une extension d'un opérateur normal A par un opérateur nilpotent N d'ordre n, alors pour tout $k \geqslant 1$, X_k dénote l'opérateur défini par

$$X_k = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} X N^i.$$

Et de plus on a

$$T^k = \begin{bmatrix} A^k & X_k \\ 0 & N^k \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A^k X_n - A^n X_k = X_n N^k.$$

Nous commençons par donner quelques lemmes qui nous seront utiles pour la suite.

Lemme 7. *Soient $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal injectif et $N \in \mathcal{L}(K)$ nilpotent d'ordre $n \geqslant 1$. Soient*

$$T = \begin{bmatrix} A & X \\ 0 & N \end{bmatrix} \quad où \ X \in \mathcal{L}(K, H),$$

une extension de A par N. Alors $Alg\,lat\,T$ est contenu dans l'ensemble des opérateurs S de la forme $S = \begin{bmatrix} B & Y \\ 0 & D \end{bmatrix}$ tels que $B \in W(A)$, $D \in Alg\,lat\,N$ et $BX_n = A^n Y + X_n D$.

Preuve. Supposons que $Lat\,T \subset Lat\,S$. On peut alors écrire S sous la forme

$$S = \begin{bmatrix} B & Y \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

avec $B \in Alg\,Lat\,A = W(A)$, $D \in Alg\,Lat\,N$ et $Y \in \mathcal{L}(K, H)$. Montrons que $BX_n = A^nY + X_nD$. Soient $x \in H$ et $y \in K$ tel que $N^{n-1}y \neq 0$. Comme $S(x+y) \in \overline{Vect}_T(x+y)$ et

$$\overline{Vect}_T(x+y) = Vect(x+y, T(x+y), \dots, T^{n-1}(x+y)) + \overline{Vect}_A(A^nx + T^ny),$$

il existe $Q = \sum_{i=0}^{i=n-1} a_i z^i$ polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ (dépendant de x et y) tel que

$$(Bx + Yy \oplus Dy) - Q(T)(x+y) \in \overline{Vect}_A(A^nx + T^ny). \tag{2}$$

Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$T^k = \begin{bmatrix} A^k & X_k \\ 0 & N^k \end{bmatrix} \quad avec \ X_k = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} X N^i,$$

on obtient d'après (2)

$$\left\{ \begin{array}{c} Dy = Q(N)(y), \\ Bx + Yy - Q(A)x - \sum_{k=0}^{k=n-1} a_k X_k y \in \overline{Vect}_A(A^nx + X_ny). \end{array} \right. \tag{3}$$

Notons que le polynôme Q ne dépend que de y du fait que $N^{n-1}y \neq 0$. Posons $\Delta_k = \{z \in \sigma(A) : \ |z| \geqslant \frac{1}{k}\}$ et soit $h_k{}^{(n)}(z) = \frac{1}{z^n}\chi_{\Delta_k}$ ($k \in \mathbb{N}^*$ et χ_{Δ_k} est la fonction caractéristique de Δ_k). Si E est la mesure spectrale de A, il est clair que $A^n h_k{}^{(n)}(A) = E(\Delta_k)$ converge pour la topologie SOT vers I puisque A est injectif. En substituant -$h_k{}^{(n)}(A)X_ny$ à x dans (3) on obtient

$$\begin{aligned} &-Bh_k{}^{(n)}(A)X_ny + Yy + Q(A)h_k{}^{(n)}(A)X_ny - \sum_{k=0}^{k=n-1} a_k X_k y \\ &\in \overline{Vect}_A(-E(\Delta_k)X_ny + X_ny). \end{aligned}$$

Donc $E(\Delta_k)A^n(-Bh_k{}^{(n)}(A)X_ny + Yy + Q(A)h_k{}^{(n)}(A)X_ny - \sum_{k=0}^{k=n-1} a_k X_k y)$

$$\in E(\Delta_k)A^n(\overline{Vect}_A(-E(\Delta_k)X_ny + X_ny)) = (0),$$

et par suite

$$
\begin{aligned}
E(\Delta_k)(BX_n - A^nY)y &= E(\Delta_k)\left[Q(A)X_ny - \sum_{k=0}^{k=n-1} a_kA^nX_ky\right] \\
&= E(\Delta_k)\left[\sum_{k=0}^{k=n-1} a_k(A^kX_n - A^nX_k)y\right] \\
&= E(\Delta_k)\left[\sum_{k=0}^{k=n-1} a_kX_nN^ky\right] \\
&= E(\Delta_k)(X_nDy).
\end{aligned}
$$

Par conséquent $(BX_n - A^nY)y = X_nDy$ pour tout $y \notin \ker N^{n-1}$, donc $BX_n - A^nY = X_nD$. $\square$

Remarque. Le lemme précédent signifie que $Alg\,Lat\,T \subset \{T^n\}'$. Si de plus on suppose que N est réflexif, alors on peut vérifier aisément que $\{T^n\}' \subset \{T\}'$ et par suite $Alg\,Lat\,T \subset \{T\}'$.

Lemme 8. *Soient $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal injectif, $N \in \mathcal{L}(K)$ un opérateur nilpotent d'ordre $n \geqslant 1$ et T une extension de A par N. Soient $e \in K$ tel que $N^{n-1}e \neq 0$ et S l'opérateur défini sur $H \oplus K$ comme suit*:

$$S = \begin{bmatrix} B & Y \\ 0 & D \end{bmatrix} \quad avec\ De = 0.$$

Si $S \in Alg\,Lat\,T$, alors $B \in W_A(A^n)$.

Preuve. Supposons que $Lat\,T \subset Lat\,S$. Commençons par traiter le cas où A est star-cyclique. Nous pouvons supposer que $A = M_z$ sur $H = L^2(\mu)$ où μ est une mesure positive bornée. Comme $B \in Alg\,Lat\,A = W(A)$, il existe $g \in L^\infty(\mu)$ tel que $B = M_g$. Pour montrer que $B \in W_A(A^n)$ il suffit de montrer, en vertu du Lemme 1, que $g\phi \in \overline{Vect}_{M_z}(z^n\phi)$ pour tout $\phi \in L^2(\mu)$. Posons $T^ne = h \in L^2(\mu)$ et $\Delta = \{h = 0\}$. On a $Se \in \overline{Vect}_T(e)$ et $S(\chi_\Delta + e) \in \overline{Vect_T}(\chi_\Delta + e)$. Comme $Se \in H$, on obtient

$$
\begin{cases}
Se \in \overline{Vect}_A(T^ne) = \overline{Vect}_{M_z}(h), \\
S(\chi_\Delta + e) \in \overline{Vect}_A(T^n(\chi_\Delta + e)) = \overline{Vect}_{M_z}(z^n\chi_\Delta + h).
\end{cases}
$$

Il existe donc $f \in P^2(|h|^2\,d\mu)$ et $F \in P^2(|z^n\chi_\Delta + h|^2\,d\mu)$ tels que

$$
\begin{cases}
Se = fh, \\
S(\chi_\Delta + e) = F(z^n\chi_\Delta + h).
\end{cases} \tag{4}
$$

D'une part, d'après le Lemme 7 et la remarque précédente, on a $ST^n e = T^n Se$; donc $gh = z^n fh$ et par suite

$$g\chi_{\Delta^c} = z^n f\chi_{\Delta^c}.$$

D'autre part d'après l'Éq. (4) on obtient

$$g\chi_\Delta + fh = F(z^n\chi_\Delta + h),$$

ce qui donne

$$g\chi_\Delta = z^n F\chi_\Delta \ et \ fh = Fh.$$

Il en résulte que $f\chi_{\Delta^c} = F\chi_{\Delta^c}$ et donc $g = z^n F$ sur $\sigma(A)$. Pour conclure que $g\phi = z^n F\phi \in \overline{Vect}_{M_z}(z^n\phi)$, il suffit de montrer que $F \in P^2(|z^n\phi|^2\, d\mu)$ pour tout $\phi \in L^2(\mu)$. Soit $\phi \in L^2(\mu)$ et soit $\psi \in L^2(\mu)$ tel que

$$\begin{cases} z^n\psi(z) = |z^n\phi(z)|\dfrac{h(z)}{|h(z)|} & \text{si } h(z) \neq 0, \\ z^n\psi(z) = |z^n\phi(z)| & \text{si } h(z) = 0. \end{cases}$$

Puisque $S(\psi + e) \in \overline{Vect}_T(\psi + e) = Vect(\psi + e, T(\psi + e), \dots, T^{n-1}(\psi + e)) + \overline{Vect}_{M_z}(z^n\psi + h)$ et $S(\psi + e) \in H$ on obtient $S(\psi + e) \in \overline{Vect}_{M_z}(z^n\psi + h)$. Par suite

$$g\psi + fh = F(z^n\psi + h) \in \overline{Vect}_{M_z}(z^n\psi + h),$$

donc $F \in P^2(|z^n\psi + h|^2\, d\mu)$, donc $F \in P^2(|z^n\phi|^2\, d\mu)$.

Cas où A est normal quelconque. Soit E la mesure spectrale de A et μ une mesure spectrale scalaire associée à A. Soit x_0 un vecteur séparateur pour $W^*(A)$ tel que $\mu(\Delta) = ||E(\Delta)x_0||^2$. Posons $H_0 = \overline{Vect}_{A,A*}(x_0)$, $A_0 = A|H_0$ et $B_0 = B|H_0$. Montrons que $B_0 \in W_{A_0}(A_0^n)$. Soit π la projection orthogonale de H sur H_0. Considérons les opérateurs

$$T_0 = \begin{bmatrix} A_0 & \pi X \\ 0 & N \end{bmatrix} \quad et \ \ S_0 = \begin{bmatrix} B_0 & \pi Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a $Lat\, T_0 \subset Lat\, S_0$. En effet, comme $Lat\, T \subset Lat\, S$, on a $S(x + y) \in \overline{Vect}_T(x + y) \cap H$ pour $x \in H_0$ et $y \in K$. Puisque $\pi A = A\pi$, on obtient $S_0(x + y) = \pi S(x + y) \in \pi(\overline{Vect}_T(x + y) \cap H) \subset \overline{Vect}_{T_0}(x + y)$. D'après le cas star-cyclique qui précéde on obtient que $B_0 \in W_{A_0}(A_0^n)$. Donc $B \in W_A(A^n)$ puisque x_0 est séparateur pour $W^*(A)$. $\square$

Lemme 9. *Soient* $A \in \mathcal{L}(H)$ *un opérateur normal injectif et* $N \in \mathcal{L}(K)$ *nilpotent d'ordre* $n \geqslant 1$. *Soient*

$$T = \begin{bmatrix} A & X \\ 0 & N \end{bmatrix} \quad où\ X \in \mathcal{L}(K, H),$$

une extension de A par N et $X_n = \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-1-i} X N^i$. *Soient* $e \in K$ *tel que* $N^{n-1}e \neq 0$, $G \in Lat\, N$ *tel que* $K = Vect_N(e) \oplus G$. *Si* $Lat\, T \subset Lat\, S$, *alors S satisfait aux conditions suivantes*

$$\begin{cases} S = S_0 + S_1 \quad avec\ S_0 \in W(T)\ et\ S_1 = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & D \end{bmatrix}, \\ Lat\, N \subset Lat\, D,\ \ De = 0, D|_G = 0, \\ A^n C + X_n D = 0. \end{cases}$$

Si de plus N est réflexif, alors T est réflexif.

Preuve. Supposons que $Lat\, T \subset Lat\, S$ où $T = \begin{bmatrix} A & X \\ 0 & N \end{bmatrix}$ et $X \in \mathcal{L}(K, H)$. Soit $e \in K$ tel que $N^{n-1}e \neq 0$. D'après le Lemme 7, on peut écrire

$$S = \begin{bmatrix} B & Y \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

avec $B \in W(A)$, $D \in Alg\, lat\, N$ et $BX_n = A^n Y + X_n D$. D'après le Théorème 5, et quitte à retrancher de S un polynôme convenable en T, on peut supposer que $De = 0$ et $D|_G = 0$. Par suite on a $B \in W_A(A^n)$ d'après le Lemme 8.

Soit $C \in \mathcal{L}(K)$ défini par

$$\begin{cases} C(N^k e) = -A^k Ye + BX_k e + YN^k e \ \ (0 \leqslant k \leqslant n-1), \\ C|_G = 0. \end{cases}$$

Posons

$$S_0 = \begin{bmatrix} B & Y - C \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } S_1 = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

Puisque $A^k X_n - A^n X_k = X_n N^k$ et $BX_n e = A^n Y e$, on obtient $A^n C + X_n D = 0$. Comme $A^n(Y - C) = BX_n$ et $B \in W_A(A^n)$, $S_0 \in W_T(T^n)$ d'après le Théorème 6. On obtient ainsi le résultat.

Si N est réflexif, alors $D = 0$ car $De = 0$. Or $X_n D = A^n C$ et A est injectif, donc $C = 0$ et par suite $S \in W(T)$. $\square$

D'après le Lemme 9, il n'est pas difficile de montrer que le défaut de réflexivité de T ne dépasse pas celui de N. Notre objectif dans ce qui suit est de calculer explicitement le défaut de réflexivité $\alpha(T)$ de T. Nous montrerons dans le cas où $I \notin W_A(A)$ que T est réflexive. Par contre dans le cas où $I \in W_A(A)$ (dans ce cas A est nécéssairement injectif), nous aurons besoin de la notion de hauteur d'un vecteur pour l'étude de la réflexivité de T.

Définition 10. Soient $A \in \mathcal{L}(H)$ et $x \in H$. La hauteur de x dans H (relativement à A), notée $h(x)$, est définie par $h(x) = \mathrm{Max}\{p \geqslant 0 : x \in A^p(H)\}$. Si $x \in \mathrm{Im}(A^p)$ pour tout $p \geqslant 0$, on convient $h(x) = \infty$.

Théorème 11. *Soient $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal tel que $I \in W_A(A)$ et $N \in \mathcal{L}(K)$ nilpotent d'ordre n. Soient*

$$T = \begin{bmatrix} A & X \\ 0 & N \end{bmatrix} \quad \textit{où } X \in \mathcal{L}(K, H),$$

une extension de A par N et $X_n = \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-1-i} X N^i$. Soient $e \in K$ tel que $N^{n-1}e \neq 0$, $G \in Lat\, N$ tel que $K = Vect_N(e) \oplus G$. Soient h la hauteur de $T^n e$ et z^p le polynôme minimal de $N|_G$. Il y a équivalence entre les assertions suivantes

(i) *$Lat\, T \subset Lat\, S$,*
(ii) *S s'écrit d'une manière unique sous la forme $S = S_0 + S_1$ avec $S_0 \in W(T)$, $S_1 = \begin{bmatrix} 0 & Y \\ 0 & D \end{bmatrix}$ et D, Y satisfont aux conditions suivantes*

$$\begin{cases} A^n Y + X_n D = 0, \\ D|_G = 0,\ De = 0, \\ DN^i e \in Vect_N(N^{n-h} e), \quad 1 \leqslant i \leqslant n - p - h, \\ DN^i e \in Vect_N(N^{p+i} e), \quad n - p - h + 1 \leqslant i \leqslant n - 1. \end{cases} \tag{5}$$

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii). Unicité. Si $S_1 \in W(T)$, alors S_1 commute avec T et par suite D commute avec N et donc $D = 0$, puisque $De = 0$.

Existence. Soit S tel que $Lat\, T \subset Lat\, S$. Comme $I \in W_A(A)$, A est injectif et on peut écrire d'après le Lemme 9:

$$S = S_0 + \begin{bmatrix} 0 & Y \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

avec $S_0 \in W(T)$, $A^n Y + X_n D = 0$, $De = 0$, $D|_G = 0$ et $Lat\, N \subset Lat\, D$. Il résulte du Théorème 5

$$DN^i e \in Vect_N(N^{p+i} e), \quad 1 \leqslant i \leqslant n - 1.$$

Soient $1 \leqslant i \leqslant n-p-h$ et P_i un polynôme tel que $DN^i e = P_i(N)N^{p+i}e$. Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $A^k X_n - X_n N^k = A^n X_k$, on obtient

$$P_i(A)A^{p+i}X_n e - X_n P_i(N)N^{p+i}e \in \operatorname{Im} A^n.$$

Or $X_n P_i(N)N^{p+i}e = X_n DN^i e = -A^n Ye$, donc $P_i(A)A^{p+i}X_n e \in \operatorname{Im} A^n$. Par suite le polynome $z^{n-p-h-i}$ divise P_i compte tenu de la définition de la hauteur h. Donc $DN^i e = P_i(N)N^{i+p}e \in Vect_N(N^{n-h}e)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Montrons que $Lat\, T \subset Lat\, S$. Quitte à retrancher S_0 de S on peut supposer que S est de la forme

$$S = \begin{bmatrix} 0 & Y \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

avec $A^n Y + X_n D = 0$ et D satisfait (5). Soient $x \in H$ et $y \in K$. Comme $Lat\, N \subset Lat\, D$, il existe un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ tel que $Dy = P(N)y$. On a

$$\begin{aligned} A^n(S - P(T))(x+y) &= A^n \left[Yy - P(A)x - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X_k y \right] \\ &= -X_n Dy - A^n P(A)x - \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^n X_k y \\ &= -A^n P(A)x - \sum_{k=0}^{n-1} a_k (X_n N^k + A^n X_k) y \\ &= -A^n P(A)x - \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k X_n y \\ &= -P(A)T^n(x+y) \in \overline{Vect}_A(T^n(x+y)). \end{aligned}$$

Comme $I \in W_A(A)$, on obtient $(S - P(T))(x+y) \in \overline{Vect}_A(T^n(x+y)$ et par suite $S(x+y) \in \overline{Vect}_T(x+y)$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Dans [3], l'auteur détermine le défaut de réflexivité d'une extension T d'un opérateur autoadjoint injectif cyclique par un nilpotent cyclique. Notons qu'un opérateur autoadjoint injectif A vérifie $I \in W_A(A)$. Par suite le corollaire suivant est une extension des travaux de [3]:

Corollaire 12. *Soient $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal tel que $I \in W_A(A)$, $N \in \mathcal{L}(K)$ nilpotent d'ordre n et T une extension de A par N. Soit $m = Min(n-p-1, h)$ (p, n*

et h sont définis dans le Théorème 11). *Le défaut de réflexivité de T est donné par*:

$$\alpha(T) = m(n-p-m) + \frac{m(m-1)}{2}.$$

Preuve. D'après le Théorème 11, on a $Lat\,T \subset Lat\,S$ si et seulement si S s'écrit d'une manière unique sous la forme $S = S_0 + S_1$ avec $S_0 \in W(T)$, $S_1 = \begin{bmatrix} 0 & Y \\ 0 & D \end{bmatrix}$ et D et Y satisfont (5). Comme $I \in W_A(A)$, A est injectif et donc Y est déterminé de manière unique à partir de D. En tenant compte de l'expression de D dans le Théorème 11 et en comptant le nombre de paramètres dont dépend D, on obtient $\alpha(T) = m(n-p-m) + \frac{m(m-1)}{2}$. $\square$

Lemme 13. *Soient $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal, $f \in H$ et $n \geqslant 1$. Si pour tout $x \in H$, $A^n x + f \in \overline{Vect}_A(A(A^n x + f))$, alors $I \in W_A(A)$.*

Preuve. D'après le Corollaire 3, il suffit de montrer que $A^n \in W_A(A^{n+1})$. Pour cela, il suffit de montrer que $A^n x \in \overline{Vect}_A(A^{n+1}x)$ pour tout $x \in H$ en vertu du Lemme 1. D'après la représentation spectrale des normaux, on peut supposer que $A = M_\phi$ sur $H = L^2(\mu)$ où μ est une mesure positive bornée et $\phi \in L^\infty(\mu)$. Soit $h \in L^2(\mu)$, montrons que $\phi^n h \in \overline{Vect}_{M_\phi}(\phi^{n+1}h)$. Soit $g \in L^2(\mu)$ tel que $|\phi^n g + f| = |\phi^n h| + |f|$. Comme $\phi^n g + f \in \overline{Vect}_{M_\phi}(\phi(\phi^n g + f))$, il existe une suite de polynômes p_k telle que

$$\lim_{k\to+\infty} \int |\phi p_k(\phi) - 1|^2 |\phi^n g + f|^2 \, d\mu = 0.$$

On obtient en particulier que

$$\lim_{k\to+\infty} \int |\phi p_k(\phi) - 1|^2 |\phi^n h|^2 \, d\mu = 0.$$

On obtient ainsi $A^n \in W_A(A^{n+1})$. $\square$

Théorème 14. *Soit T une extension d'un opérateur normal injectif $A \in \mathcal{L}(H)$ par un opérateur nilpotent $N \in \mathcal{L}(K)$. Si $I \notin W_A(A)$, alors T est réflexif.*

Preuve. Supposons que $Lat\,T \subset Lat\,S$ où $T = \begin{bmatrix} A & X \\ 0 & N \end{bmatrix}$, $X \in \mathcal{L}(K, H)$ et soit $X_k = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} X N^i$. Soient n l'ordre de nilpotence de N, $e \in K$ tel que $N^{n-1}e \neq 0$ et $G \in Lat\,N$ tel que $K = Vect_N(e) \oplus G$. Sans perdre de généralité on peut supposer, d'après le Lemme 9, que S est de la forme

$$S = \begin{bmatrix} 0 & Y \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

avec $A^n Y + X_n D = 0$, $De = 0$, $D|_G = 0$ et $Lat\, N \subset Lat\, D$. Soit P_i un polynôme tel que $DN^i e = P_i(N)N^i e$. Pour tout $x \in H$ on a $S(x + N^i e) \in \overline{Vect}_T(x + N^i e)$, donc il existe un polynôme $Q_i = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,i} z^k$ tel que

$$YN^i e + P_i(N)N^i e - Q_i(T)(x + N^i e) \in \overline{Vect}_A(A^n x + X_n N^i e).$$

Par suite on obtient

$$\begin{cases} P_i(N)N^i e = Q_i(N)N^i e, \\ YN^i e - Q_i(A)x + \sum a_{k,i} X_k N^i e \in \overline{Vect}_A(A^n x + X_n N^i e). \end{cases}$$

Donc $A^n(YN^i e - Q_i(A)x + \sum a_{k,i} X_k N^i e) \in A^n(\overline{Vect}_A(A^n x + X_n N^i e))$. Compte tenu de l'égalité $A^n Y N^i e = -X_n D N^i e = -X_n P_i(N)N^i e$, on obtient

$$X_n Q_i(N)N^i e + A^n Q_i(A)x + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,i} A^n X_k N^i e \in A^n(\overline{Vect}_A(A^n x + X_n N^i e)).$$

D'après l'identité $A^k X_n - X_n N^k = A^n X_k$, on obtient

$$Q_i(A)(A^n x + X_n N^i e) \in A^n(\overline{Vect}_A(A^n x + X_n N^i e)).$$

Si Q_i est non-nul, alors $A^n x + X_n N^i e \in \overline{Vect}_A A(A^n x + X_n N^i e)$. Donc d'après le Lemme 12, $I \in W_A(A)$, ce qui est absurde. Donc $Q_i = 0$ et par suite $S = 0$. $\square$

Corollaire 15. *Soient $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal injectif, $N \in \mathcal{L}(K)$ nilpotent d'ordre n, $e \in K$ tel que $N^{n-1}e \neq 0$ et T une extension de A par N. Alors T est réflexif si et seulement si, l'une des trois conditions suivantes est vérifiée* (i) $I \notin W_A(A)$, (ii) *N réflexif*, (iii) $h(T^n e) = 0$.

5. Remarques et Commentaires

1. Si A est un opérateur normal de mesure spectrale scalaire associée μ, alors la condition $I \in W_A(A)$ se traduit par $1 \in P^\infty(z, \mu)$. D'après le Lemme 2 cette condition est équivalente à $0 \notin G$ où G est le hull de Sarason associé à μ. Signalons aussi qu'on peut démontrer facilement, à partir du théorème de Mergelyan, que si

0 n'appartient pas à l'enveloppe polynômialement convexe du spectre de A, alors $I \in W_A(A)$.

2. Il est clair que si A et N sont deux opérateurs réflexifs vérifiant la condition $W(A \oplus N) = W(A) \oplus W(N)$, alors $A \oplus N$ est réflexif. Lorsque N est nilpotent, le résultat suivant provient du Théorème 2.1 dans [7].

Proposition 16. *Si $A \in \mathcal{L}(H)$ et $N \in \mathcal{L}(K)$ est nilpotent, alors $W(A \oplus N) = W(A) \oplus W(N)$ si et seulement si $I \in W_A(A)$.*

Preuve. Soit n l'ordre de nilpotence de N. Si $I \in W_A(A)$, il existe une suite généralisée de polynômes p_α telle que $A^n p_\alpha(A)$ converge vers I pour la toplogie faible des opérateurs et par suite d' après le Théorème 2.1 dans [7] on a $W(A \oplus N) = W(A) \oplus W(N)$. Inversement, supposons que $W(A \oplus N) = W(A) \oplus W(N)$. En vertu du Théorème 2.1 dans [7], il existe une suite généralisée de polynômes p_α telle que $p_\alpha(A)$ converge vers I et $p_\alpha(N)$ converge vers 0 pour la toplogie faible des opérateurs. En écrivant $p_\alpha = z^n q_\alpha + r_\alpha$ avec $deg\, r_\alpha \leqslant n-1$, on obtient $r_\alpha(N)$ converge vers 0 pour la toplogie WOT, et par suite les coéfficients du polynôme $r_\alpha(N)$ tendent vers 0. Il en résulte que $A^n p_\alpha(A)$ converge vers I, donc $I \in W_A(A)$. $\square$

3. L'étude de la réflexivité d'une extension T d'un opérateur normal par un opérateur algébrique peut être abordée à partir des différentes techniques de ce papier. On peut citer notamment le résultat suivant

Théorème 17. *Soit T une extension d'un opérateur normal A par un opérateur algébrique N tels que $\sigma_p(A) \cap \sigma(N) = \emptyset$. Si N est réflexif, alors T l'est aussi.*

4. La description de $W_T(T^n)$, lorsque T est une extension d'un opérateur normal injectif par un opérateur nilpotent d'ordre n, est basée sur la description de $P^\infty(z^n, \mu)$ dû à D. Sarason (Lemme 2). Est-il possible de retrouver cette description sans faire appel au Lemme 2 dû à D. Sarason?

References

[1] M. Baraa, B. Charles, Sous-espaces invariants d'un opérateur nilpotent sur un espace de Banach, Linear Algebra Appl. 153 (1991) 177–182.

[2] M. Benlarbi Delai, Extension d'opérateur auto-adjoint et défaut de réflexivité, Linear Algebra Appl. 297 (1999) 81–85.

[3] M. Benlarbi Delai, Description de $Alg\, Lat\, T/W(T)$ pour certaines extensions d'opérateur auto-adjoint, Linear Algebra Appl. 322 (2001) 43–49.

[4] M. Benlarbi Delai, B. Charles, Description de $Alg\, Lat\, A$ pour un opérateur A algébrique, Linear Algebra Appl. 187 (1993) 105–108.

[5] J.B. Conway, A Course in Operator Theory, Graduate Studies in Mathematics, vol. 21, American Mathematical Society, Providence, RI.

[6] J.B. Conway, The Theory of Subnormal Operators, Mathematical Survey and Monographs, vol. 36, American Mathematical Society, Providence, RI.

[7] J.B. Conway, P.Y. WU, The splitting of $A(T_1 \oplus T_2)$ and related questions, Indiana Univ. Math. J. 26 (1977) 41–56.

[8] J.A. Deddens, P.A. Fillmore, Reflexive linear transformations, Linear Algebra Appl. 10 (1975) 89–93.
[9] D. Hadwin, C. Laurie, Reflexive binormal operators, J. Funct. Anal. 123 (1994) 99–108.
[10] D. Hadwin, E.A. Nordgren, Subalgebras of reflexive algebras, J. Operator Theory 7 (1982) 3–23.
[11] D.R. Larson, W.R. Wogen, Reflexivity properties of $T \oplus 0$, J. Funct. Anal. 92 (1990) 448–467.
[12] J.E. McCarthy, Reflexivity of subnormal operators, Pacific J. Math. 161 (1993) 359–370.
[13] D. Sarason, Invariant subspaces and unstarred operator algebras, Pacific J. Math. 17 (1966) 511–517.
[14] D. Sarason, Weak-star density of polynomials, J. Reine Angew. Math. 252 (1972) 1–15.
[15] W.R. Wogen, Some counterexamles in nonselfadjoint algebras, Ann. Math. 126 (1987) 415–427.