JOURNAL OF ALGEBRA **197,** 584–614 (1997)
ARTICLE NO. JA977080

Algèbre homologique dans la catégorie $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$

Thomas Guédénon

37, rue Pasteur, 92800 Puteaux, France

Communicated by Leonard Scott

JE DÉDIE CE TRAVAIL À ARSÈNE ASSOGBA

Let k be an algebraically closed field of characteristic zero, g a finite-dimensional Lie algebra over k, $U(g)$ the enveloping algebra of g, R a Noetherian k-algebra on which g acts by derivations via a Lie algebra morphism, and $R\#U(g)$ the differential operator rings generated by R and $U(g)$. This paper is concerned with the homological algebra for $R\#U(g)$-modules which are g-locally finite, especially with injective and projective modules, minimal injective resolutions, and cohomology.

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, g une k-algèbre de Lie de dimension finie, $U(g)$ l'algèbre enveloppante de g, R une k-algèbre noethérienne sur laquelle g opère par dérivations via un morphisme d'algèbres de Lie et $R\#U(g)$ le produit croisé de R par $U(g)$. Ce papier traite de l'algèbre homologique dans la catégorie des $R\#U(g)$-modules g-localement finis, plus particulièrement des modules injectifs et projectifs, des résolutions injectives minimales et de la cohomologie.

0. INTRODUCTION

Soient k un corps commutatif de caractéristique nulle, g une k-algèbre de Lie de dimension finie, $U(g)$ l'algèbre enveloppante de g, R une k-algèbre associative unitaire noethérienne à droite et à gauche sur laquelle g opère par dérivations via un morphisme d'algèbres de Lie δ et $R\#U(g)$ l'anneau d'opérateurs différentiels engendré par R et $U(g)$. Tous les modules considérés dans ce travail sont des modules à gauche.

Soit M un g-module. Un élément m de M est dit g-fini si $\dim_k U(g)m < +\infty$. Si tous les éléments de M sont g-finis, on dit que M est g-localement fini.

On note Mod_R la catégorie des R-modules, Mod_g la catégorie des g-modules, $\mathrm{Mod}_{(g)}$ la sous-catégorie de Mod_g dont les objets sont g-locale-

0021-8693/97 $25.00

ment finis, $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$ la catégorie des $R\#U(g)$-modules, $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ la sous-catégorie de $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$ dont les objets sont g-localement finis et k-ev la catégorie des espaces vectoriels sur k.

Si $M \in \mathrm{Mod}_g$, on note M^g le sous-g-module des invariants de M (l'action de g sur M^g est triviale). Il est clair que R^g est une sous-k-algèbre unitaire de R et R est un $(R^g$-$R^g)$ bimodule. L'anneau R^g sera supposé noethérien à droite et à gauche et désigné par la lettre S dans tout l'exposé.

On définit un foncteur $(\ )^g$ de $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$ vers $\mathrm{Mod}_{S\#U(g)}$ et, lorsque R est g-localement finie, deux foncteurs $\mathcal{F}_S(R,-)$ et $R \otimes_S -$ de Mod_S vers $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. Ces trois foncteurs vont nous permettre d'établir des relations entre les propriétés homologiques d'un $R\#U(g)$-module g-localement fini et celles de son sous-module des invariants.

Comme k est de caractéristique zéro, le théorème de Weyl sur la réductibilité complète peut être utilisé pour montrer que $\mathrm{Mod}_{(g)}$ est une catégorie semi-simple, si g est semi-simple; dans ces conditions, le foncteur $(\ )^g$ est exact de $\mathrm{Mod}_{(g)}$ vers Mod_g.

Les principaux résultats de l'article sont obtenus en supposant g semi-simple.

Le premier paragraphe contient les définitions de base, les notations et les résultats préliminaires dont on aura besoin dans l'article.

Dans le deuxième paragraphe, R est g-localement finie. Nous montrons que:

(1) le foncteur $\mathcal{F}_S(R,-)$ envoie les injectifs de Mod_S dans les injectifs de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ et les S-monomorphismes essentiels dans les $R\#U(g)$-monomorphismes essentiels;

(2) l'image par $\mathcal{F}_S(R,-)$ de l'enveloppe injective d'un objet de Mod_S est $R\#U(g)$-isomorphe à l'enveloppe injective de l'image de cet objet par $\mathcal{F}_S(R,-)$; et le foncteur $(\ )^g$ établit un isomorphisme de S-modules entre ces deux enveloppes injectives;

(3) le foncteur $(\ )^g$ envoie certains injectifs de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ dans les injectifs de Mod_S; et ces injectifs de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ sont $R\#U(g)$-isomorphes aux images par $\mathcal{F}_S(R,-)$ de leurs sous-modules des invariants;

(4) si la catégorie $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ possède un cogénérateur injectif d'un certain type, on peut caractériser les $R\#U(g)$-modules induits g-localement finis injectifs et le foncteur $(\ )^g$ préserve les résolutions injectives minimales: c'est-à-dire que le sous-module des invariants du n^{e} terme de la résolution injective minimale d'un objet de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ est S-isomorphe au n^{e} terme de la résolution injective minimale du sous-module des invariants de cet objet; cette condition imposée à la catégorie $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ est, en général, trop forte: elle implique en particulier que R est plat sur R^g pourvu que R soit commutative.

Dans le paragraphe 3, R est commutative et souvent g-localement finie. Nous montrons que le foncteur $(\ )^g$ transforme certains projectifs de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ en projectifs de Mod_S; nous obtenons certains résultats analogues à ceux du paragraphe 2 et nous étudions le groupe de Picard de l'anneau S.

Dans le paragraphe 4, nous examinons le cas particulier où R est l'algèbre de Hopf de g.

Dans le paragraphe 5, nous montrons sous certaines hypothèses que $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ est une catégorie semi-simple et S est un anneau semi-simple.

Pour obtenir nos résultats, nous nous sommes inspiré des articles de Magid [9, 10].

Pour la construction de l'anneau $R\#U(g)$, on pourra consulter [1]. On trouvera d'autres propriétés homologiques des $R\#U(g)$-modules dans [6, 7].

Ce travail est la suite de nos résultats parus dans [7].

1. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

On dit qu'un objet M de $\mathrm{Mod}_{(g)}$ est ergodique si $M^g = \{0\}$. Nous avons utilisé le terme ergodique par analogie avec [9, p. 126].

Si M est ergodique, alors tout sous-module de M est ergodique.

Si g est semi-simple et si $M \in \mathrm{Mod}_{(g)}$, on note M_g le plus grand sous-g-module ergodique de M. Il est clair que $M^g \cap Mg = \{0\}$. Par conséquent, M/M^g est ergodique pour tout $M \in \mathrm{Mod}_{(g)}$ si g est semi-simple.

LEMME 1.1. *Soient g semi-simple et $M \in \mathrm{Mod}_{(g)}$. Alors on a $M = M^g \oplus M_g$ une somme directe de g-modules.*

DÉFINITION 1.2. Soit $M \in \mathrm{Mod}_{(g)}$, on note M^1 le sous-g-module de M engendré par $g \cdot M$. On pose $(M)_g = M/M^1$ et on note $q_M\colon M \to (M)_g$ la projection canonique.

Il est évident que l'action de g sur $(M)_g$ est triviale.

LEMME 1.3. *Soit $M \in \mathrm{Mod}_{(g)}$. Si g est semi-simple, on a les isomorphismes de g-modules*

$$M^1 \approx M_g \qquad \textit{et} \qquad (M)_g \approx M^g.$$

Si g est semi-simple, la décomposition $M = M_g \oplus M^g$ en somme directe de g-modules est fonctorielle dans le sens suivant: si $f\colon M \to M'$ est un morphisme de g-modules, alors $f(M^g) \subseteq M'^g$ et $f(M_g) \subseteq M'_g$. En particulier, $f \circ p_M = p_{M'} \circ f$.

Soient g semi-simple et $M \in \mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. Pour r fixé dans S, notons f_r le k-endomorphisme de M défini par $f_r(m) = rm$. Alors f_r est g-linéaire, d'où $f_r \circ p_M = p_M \circ f_r$. Ceci implique que $f_r(M^g) \subseteq M^g$ et $f_r(M_g) \subseteq M_g$: c'est-à-dire que M^g et M_g sont des sous-S-modules (donc des sous-$S\#U(g)$-modules) de M et p_M est S-linéaire (donc $S\#U(g)$-linéaire).

Pour tout M dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, le sous-g-module M^1 de M engendré par $g \cdot M$ défini en (1.2) est un sous-$S\#U(g)$-module de M. Donc $(M)_g = M/M^1$ appartient à $\mathrm{Mod}_{(S\#U(g))}$ et la projection canonique q_M est $S\#U(g)$-linéaire. Il est facile de voir que les g-isomorphismes $M^1 \approx M_g$ et $(M)_g \approx M^g$ de (1.3) sont aussi des $S\#U(g)$-isomorphismes.

Si M et N sont dans Mod_g, on munit $\mathrm{Hom}(M, N)$ et $M \otimes N$ de la structure de g-module définie par l'action diagonale.

On note $\mathrm{Hom}_{(g)}(M, N)$ l'ensemble des éléments g-finis de $\mathrm{Hom}(M, N)$ [5, paragraphe 1 et 7, 1.4].

Si M et N sont dans $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$, on note [7, 2.9] $\mathcal{F}_R(M, N)$ l'ensemble des éléments g-finis de $\mathrm{Hom}_R(M, N)$.

Soit M un S-module. Munissons M de la structure de g-module trivial. Alors M devient un objet de $\mathrm{Mod}_{(S\#U(g))}$. Nous pouvons donc considérer $\mathrm{Hom}(R, M)$ comme un objet de $\mathrm{Mod}_{S\#U(g)}$.

Si $r \in R$ et $f \in \mathrm{Hom}(R, M)$, on pose $(rf)(s) = f(sr)$. Donc $\mathrm{Hom}(R, M) \in \mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$ et $\mathrm{Hom}_S(R, M)$ est un sous-$R\#U(g)$-module de $\mathrm{Hom}(R, M)$. Or, si R est g-localement finie, $s \to sr$ est dans $\mathcal{F}_S(R, R)$, donc [7, 1.7] $rf \in \mathcal{F}_S(R, M)$ pour tout $f \in \mathcal{F}_S(R, M)$. Ainsi $\mathcal{F}_S(R, M)$ est un objet de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, si R est g-localement finie.

Remarque. Les démonstrations de (2.7), (2.8), (2.17) et (2.35) de [7] n'utilisent pas le fait que R est g-localement finie. Cette remarque sera utile pour le paragraphe 5.

Rappels. (1) Si M (respectivement N) est dans Mod_S (respectivement dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$), on note $E_S(M)$ (respectivement $E_{R\#U(g)}(M)$) l'enveloppe injective de M dans Mod_S (respectivement de N dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$).

(2) Un objet M de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ est de type fini dans $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$ si et seulement s'il est de type fini dans Mod_R [7, 2.8].

(3) Si R est g-localement finie, on note [7, 2.21] $\widetilde{\mathrm{Ext}}_{R\#U(g)}(-,-)$ les foncteurs dérivés droits du foncteur $\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(-,-)$ restreint à $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))} \times \mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$.

(4) Soient M dans Mod_g et V un g-module simple. On appelle composant isotypique de M d'espèce V et on note M_V, la somme des sous-modules de M isomorphes à V. C'est un sous-module semi-simple de M, somme directe de sous-modules isomorphes à V.

LEMME 1.4. *Soient g semi-simple, M dans* $\mathrm{Mod}_{(g)}$ *et V un g-module simple de dimension finie. Alors, on a un isomorphisme de g-modules* $\mathrm{Hom}_g(V, M) \otimes V \approx M_V$ *et* $M = \bigoplus M_V$.

Si dans (1.4), M appartient à $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, alors

$$\mathrm{Hom}(V, M) = V^* \otimes M \in \mathrm{Mod}_{(R\#U(g))};$$

donc $\mathrm{Hom}_g(V, M) \in \mathrm{Mod}_{(S\#U(g))}$ et le g-isomorphisme de (1.4) devient un $S\#U(g)$-isomorphisme.

LEMME 1.5. (1) *Soit R commutative g-localement finie. Si M et N sont dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, *alors $M \otimes_R N$ est dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$.

(2) *Si M est dans* Mod_S, *alors $R \otimes_S M$ est dans* $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$. *Il est g-localement fini si R est g-localement finie, car $R \otimes_S M$ est un quotient de $R \otimes_k S \otimes_k M$ dans* $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$ *et ce dernier est g-localement fini.*

(3)(a) *Si M est dans* Mod_S *et N dans* $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$, *on a des isomorphismes d'espaces vectoriels.*

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(R \otimes_S M, N) &= \mathrm{Hom}_S\big(M, \mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(R, N)\big)\\ &= \mathrm{Hom}_S(M, N^g).\end{aligned}$$

(b) *Si* $M \in \mathrm{Mod}_S$ *et* $N \in \mathrm{Mod}_{S\#U(g)}$, *alors* $\mathrm{Hom}_{S\#U(g)}(M, N)$ *et* $\mathrm{Hom}_S(M, N^g)$ *sont des espaces vectoriels isomorphes.*

(4) *Soit R commutative,* $M \in \mathrm{Mod}_S$, *V un g-module de dimension finie et* $N \in \mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. *Alors*

$$\mathrm{Hom}_R(R \otimes V, N) = \mathrm{Hom}(V, N) = V^* \otimes N = N \otimes V^*$$

sont des isomorphismes de $R\#U(g)$-modules. En particulier, $(N \otimes V^*)^g$ *et* $\mathrm{Hom}_g(V, N)$ *sont S-isomorphes.*

(5) *Soient S commutative,* $M \in \mathrm{Mod}_S$ *et V un g-module de dimension finie. Alors l'application* ϕ: $\mathrm{Hom}_g(V \otimes R, M) \to \mathrm{Hom}_g(V, \mathcal{F}_S(R, M))$ *définie par* $\phi(f)(v)(r) = f(v \otimes r)$ *est un isomorphisme d'espaces vectoriels.* (*La preuve est une conséquence de* [7, 1.5].)

2. LE FONCTEUR $\mathcal{F}_S(R, -)$

Dans ce paragraphe, R est g-localement finie. Nous avons la formule d'adjoint suivante:

PROPOSITION 2.1. *Soient* $M \in \mathrm{Mod}_S$ *et N dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. *Alors l'application* ϕ: $\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(N, \mathcal{F}_S(R, M)) \to \mathrm{Hom}_S((N)_g, M)$ *définie par* $\phi(f)(q_N(x)) = f(x)(1)$ *est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Preuve. Soit f appartenant à l'ensemble de départ de ϕ. Pour $n \in N$ et $r \in R$, nous avons $\phi(f)(q_N(rn)) = f(rn)(1) = f(n)(r)$. Cette relation prouve que ϕ est un monomorphisme. Maintenant, soit h_1 appartenant à l'ensemble d'arrivée de ϕ.

Posons $h(n)(r) = h_1(q_N(rn))$ pour $n \in N$ et $r \in R$. On définit ainsi une application linéaire $h\colon N \to \operatorname{Hom}_S(R, M)$. Pour tout $X \in g$, on a

$$\begin{aligned}(X \cdot h(n))(r) &= -h(n)(X(r)) \\ &= -h_1(q_N(X(r)n)) \\ &= -h_1(q_N(X(rn)) + h_1(q_N(r(Xn)) \\ &= h_1(q_N(r(Xn))) = h(Xn)(r),\end{aligned}$$

car $q_N(X(rn)) = 0$. Donc h est g-linéaire.

Pour tous $r, r' \in R$, on a $(rh(n))(r') = h(n)(r'r) = h_1(q_N(r'rn)) = h(rn)(r')$. Donc h est R-linéaire. Ainsi h est $R\#U(g)$-linéaire. Or N est g-localement fini; donc $h(N) \subseteq \mathsf{F}_S(R, M)$. L'application h est donc définie de N vers $\mathsf{F}_S(R, M)$ et $\phi(h) = h_1$.

COROLLAIRE 2.2. *Soient g semi-simple et I un injectif dans* Mod_S. *Alors $\mathsf{F}_S(R, I)$ est un injectif dans* $\operatorname{Mod}_{(R\#U(g))}$.

Preuve. Pour tout N dans $\operatorname{Mod}_{(R\#U(g))}$, on sait que $(N)_g$ et N^g sont S-isomorphes. De plus, le foncteur $(\ )_g$ est exact de $\operatorname{Mod}_{(R\#U(g))}$ dans Mod_S. Donc $\operatorname{Hom}_{R\#U(g)}(*, \mathsf{F}_S(R, I))$ est le composé, d'après (2.1), des foncteurs exacts $(\ )_g$ et $\operatorname{Hom}_S(*, I)$.

Nous allons voir maintenant que le corollaire (2.2) peut se préciser davantage. Mais, avant cela, signalons la formule suivante.

LEMME 2.3. *Soient g semi-simple et M un S-module. Alors l'application F de $\mathsf{F}_S(R, M)^g \to M$ définie par $F(f) = f(1)$ est un isomorphisme de S-modules.*

Preuve. Soit G l'application de $M \to \operatorname{Hom}(R, M)$ définie par $G(m)(r) = p_R(r)m$. Il est clair que $G(m)$ est S-linéaire et g-invariant. Donc G est définie de $M \to \operatorname{Hom}_S(R, M)^g = \mathsf{F}_S(R, M)^g$. Maintenant, $F \circ G(m) = G(m)(1) = p_R(1)m = m$; donc $F \circ G =$ identité de M. De même,

$$\begin{aligned}G \circ F(f)(r) &= G(F(f))(r) = G(f(1))(r) = p_R(r)f(1) \\ &= f(p_R(r)) = p_M \circ f(r) = f(r),\end{aligned}$$

car M est un g-module trivial. Donc $G \circ F =$ identité de $\mathsf{F}_S(R, M)^g$.

THÉORÈME 2.4. *Soit g semi-simple.*

(1) *Si $N \in \mathrm{Mod}_S$ et si M est un sous-$R\#U(g)$-module de $\mathsf{F}_S(R, N)$, alors $M^g = 0$ implique $M = 0$.*

(2) *Si $M \to N$ est un monomorphisme essentiel de S-modules, alors $\mathsf{F}_S(R, M) \to \mathsf{F}_S(R, N)$ est un monomorphisme essentiel de $R\#U(g)$-modules.*

(3) *Si $N \in \mathrm{Mod}_S$, alors $E_{R\#U(g)}(\mathsf{F}_S(R, N))$ est isomorphe à $\mathsf{F}_S(R, E_S(N))$.*

(4) *Si $N \in \mathrm{Mod}_S$, alors $E_{R\#U(g)}(\mathsf{F}_S(R, N))^g$ est isomorphe à $E_S(N)$.*

Preuve. Si T est un sous-ensemble de $\mathsf{F}_S(R, M)$, on pose $T(1) = \{f(1) \text{ tel que } f \in T\}$.

(1) Supposons $M^g = 0$. Alors $(M)_g = 0$; donc $\mathrm{Hom}_S((M)_g, N) = 0$. D'après (2.1), $\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(M, \mathsf{F}_S(R, N)) = 0$. Or, ce dernier "Hom" contient l'inclusion de M dans $\mathsf{F}_S(R, N)$. On conclut que $M = 0$.

(2) Si L est un sous $R\#U(g)$-module non nul de $\mathsf{F}_S(R, N)$, alors d'après (1), L^g est un sous-S-module non nul de $\mathsf{F}_S(R, N)^g$. D'après (2.3), ceci signifie que $L(1)$ est un sous-S-module non nul de N, et donc $L(1) \cap M$ est non nul. Or $L(1) \cap M = (\mathsf{F}_S(R, M) \cap L)(1)$; donc L rencontre $\mathsf{F}_S(R, M)$ de façon non triviale.

(3) D'après (2), $\mathsf{F}_S(R, N) \to \mathsf{F}_S(R, E_S(N))$ est un monomorphisme essentiel dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. Or, d'après (2.2), $\mathsf{F}_S(R, E_S(N))$ est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$; d'où (3).

(4) D'après (3), $E_{R\#U(g)}(\mathsf{F}_S(R, N)) = \mathsf{F}_S(R, E_S(N))$. D'après (2.3), $\mathsf{F}_S(R, E_S(N))^g = E_S(N)$.

D'après (1) de (2.4), les sous-$R\#U(g)$-modules non nuls M du $R\#U(g)$-module g-localement fini induit $\mathsf{F}_S(R, N)$ contiennent des invariants non nuls.

Voici une condition plus forte: nous allons voir ci-dessous que ceci implique que M est une extension essentielle de RM^g. Simultanément, nous obtenons une condition sur M qui implique qu'on peut prendre $N = M^g$.

COROLLAIRE 2.5. *Soient g semi-simple, N dans Mod_S et M un sous-$R\#U(g)$-module non nul de $\mathsf{F}_S(R, N)$. Alors*

(1) *M est une extension essentielle de son sous-$R\#U(g)$-module RM^g.*

(2) *Si $m \in M$ et $p_M(rm) = 0$ pour tout $r \in R$, alors $m = 0$.*

Preuve. (1) Soit L un sous-$R\#U(g)$-module non nul de M. D'après (2.4(1)), $L^g \neq 0$ et $L^g \subseteq M^g$. Donc $L \cap RM^g \neq 0$.

(2) Considérons le sous-$R\#U(g)$-module de M engendré par m. Si m est non nul, ce sous-module contient un élément invariant non nul $y = \sum r_i u_i m$, où $u_i \in U(g)$ et $r_i \in R$. Mais $p_M(y) = y$ alors que $P_M(\sum r_i u_i m) = P_M(\sum\sum u_{ij} r_{ij} m) = \sum\sum u_{ij} p_M(r_{ij} m) = 0$, où $r_{ij} \in R$ et $u_{ij} \in U(g)$, car p_M est g-linéaire. Donc y serait nul. Ce qui est une contradiction. Donc $m = 0$.

Nous voulons savoir maintenant quand un $R\#U(g)$-module est sous-module d'un module induit de la forme $\mathcal{F}_S(R, M)$. La condition nécessaire de (2.5(2)) est aussi suffisante.

DÉFINITION 2.6. Soient g semi-simple et M dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. Alors $^*M = \{m \in M$ tel que $p_M(rm) = 0$ pour tout $r \in R\}$.

LEMME 2.7. *Soient g semi-simple et M dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. *On définit ϕ_M: $M \to \mathcal{F}_S(R, M^g)$ par $\phi_M(m)(r) = p_M(rm)$.*

(1) *$^*M$ est le noyau de ϕ_M.*

(2) *Si f: $M \to M'$ est un morphisme dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, *alors $(^*M) \subseteq {}^*(M')$.*

(3) $^*(M/^*M) = 0$.

(4) *Si M est un sous-$R\#U(g)$-module de N, on a $^*N \cap M = {}^*M$.*

(5) *Si $^*M = 0$, ϕ_M est un monomorphisme essentiel dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$.

Remarque. D'après (2.1),

$$\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}\big(M, \mathcal{F}_S(R, M^g)\big) = \mathrm{Hom}_S\big((M)_g, M^g\big).$$

Donc ϕ_M est le $R\#U(g)$-morphisme correspondant au $S\#U(g)$-isomorphisme canonique $(M)_g \to M^g$.

Preuve du lemme. L'assertion (1) est évidente et (2) découle du fait que $P_{M'} \circ f = f \circ p_M$. Pour démontrer (3), observons que $(^*M)^g = 0$; donc $(M/^*M)^g = M^g$. Comme $\mathrm{Ker}\,\phi_M = {}^*M$, il existe un $R\#U(g)$-morphisme $\overline{\phi}_M$: $M/^*M \to \mathcal{F}_S(R, (M/^*M)^g) = \mathcal{F}_S(R, M^g))$ tel que $\phi_M = \overline{\phi}_M \circ (M \to M/^*M)$. Nécessairement, $\overline{\phi}_M = \phi_{M/^*M}$. Soit $m + {}^*M \in {}^*(M/^*M)$. D'après (1), $\phi_{M/^*M}(m + {}^*M) = 0$; donc $\phi_M(m) = 0$; d'où $m \in {}^*M$. On en déduit que $^*(M/^*M) = 0$. L'assertion (4) découle de la définition (2.6) et du fait que la restriction de p_N à M est p_M. Pour démontrer (5), supposons $^*M = 0$ et identifions M et $\phi_M(M)$. Si L est un sous-$R\#U(g)$-module non nul de $\mathcal{F}_S(R, M^g)$, alors, d'après (2.4(1)), $L^g \neq 0$, et d'après (2.3), $M^g = \mathcal{F}_S(R, M^g)^g$, donc $L \cap M \neq 0$.

Nous pouvons utiliser (2.7) pour identifier dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ les modules injectifs de la forme $\mathcal{F}_S(R, I)$, où I est S-injectif.

THÉORÈME 2.8. *Soit g semi-simple.*

(1) *Si E est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ avec $*E = 0$, alors E^g est S-injectif et E est $R\#U(g)$-isomorphe à $F_S(R, E^g)$.*

(2) *Si M est dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ avec $*M = 0$, alors $E_{R\#U(g)}(M)$ est $R\#U(g)$-isomorphe à $F_S(R, E_S(M^g))$.*

Preuve. (1) Soit $E' = E_s(E^g)$. Alors $E^g \to E'$ est un S-monomorphisme essentiel; donc, d'après (2.4(2)), $F_S(R, E^g) \to F_S(R, E')$ est un $R\#U(g)$-monomorphisme essentiel. D'après (2.7(5)), $E \to F_S(R, E^g)$ est aussi un $R\#U(g)$-monomorphisme essentiel. Comme E est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, nous avons les $R\#U(g)$-isomorphismes $E = F_S(R, E^g) = F_S(R, E')$. D'après (2.3) $F_S(R, E')^g \approx E'$ est S-injectif; donc $E^g = E'$ est S-injectif.

(2) Posons $E = E_S(M^g)$. D'après (2.2), $F_S(R, E)$ est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, et nous avons d'après (2.7(5)) et (2.4(2)), les $R\#U(g)$-monomorphismes essentiels $M \to F_S(R, M^g) \to F_S(R, E)$. Donc $E_{R\#U(g)}(M)$ est $R\#U(g)$-isomorphe à $F_S(R, E)$.

Nous remarquons que la condition $*E = 0$ de (2.8(1)) est aussi nécessaire d'après (2.5(2)) pour que E soit $R\#U(g)$-isomorphe à $F_S(R, E^g)$.

Nous allons maintenant trouver une condition sur $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ qui nous permettra d'appliquer (2.8).

LEMME 2.9. *La catégorie $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ possède un cogénérateur injectif C.*

Preuve. Soient I un cogénérateur injectif de $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$. Pour tout M dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))} \subseteq \mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$ et pour tout élément non nul m de M, il existe un $R\#U(g)$-morphisme f: $M \to I$ tel que $f(m) \neq 0$. Comme M est g-localement fini, on a $f(M) \subseteq I^{(g)}$ et, d'après [7, 2.2′], $I^{(g)}$ est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. Donc $I^{(g)} = C$ est un cogénerateur injectif de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$.

Remarque. S'il existe un cogénérateur injectif C de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ qui vérifie $*C = 0$, alors, d'après (2.7(4)), chaque objet M de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ vérifie $*M = 0$.

On dira que la condition (α) est satisfaite dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, si $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ possède un cogénérateur injectif C tel que $*C = 0$.

PROPOSITION 2.10. *Soit g semi-simple. On suppose que la condition (α) est satisfaite dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$.*

(1) *Alors chaque injectif de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ est de la forme $F_S(R, I)$, où I est un injectif de Mod_S.*

(2) *Soit* $M \in \mathrm{Mod}_S$ *et* $N \in \mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. *Alors*

$$\widetilde{\mathrm{Ext}}^p_{R\#U(g)}(R \otimes_S M, N) = \mathrm{Ext}^p_S(M, N^g), \qquad p \geq 0.$$

Preuve. (1) C'est évident à partir de (2.8(1)) et de la remarque précédente.

(2) Soit $\{E^i\}$ une résolution injective de N dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. D'après (1.5(3)), $\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(R \otimes_S M, E^i) = \mathrm{Hom}_S(M, (E^i)^g)$ pour chaque i. Nous avons donc

$$\widetilde{\mathrm{Ext}}^p_{R\#U(g)}(R \otimes_S M, N) = H^p\left(\mathrm{Hom}_S\left(M, (E^*)^g\right)\right)$$

pour $p \geq 0$. Or, d'après (2.8(1)), $(E^i)^g$ est un injectif dans Mod_S et le foncteur $(\ )^g$ est exact. Donc le membre de droite est $\mathrm{Ext}^p_S(M, N^g)$.

LEMME 2.11. *Soient g semi-simple et* $\{E^i/i \in I\}$ *un ensemble de S-modules injectifs. Alors* $E = \oplus\{\mathcal{F}_S(R, E^i)/i \in I\}$ *est* $R\#U(g)$*-isomorphe à* $\mathcal{F}_S(R, \{\oplus E^i/i \in I\})$.

Preuve. D'après (2.2) et [7, remarque suivant (2.2)], E est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. D'après (2.5(2)), $\mathcal{F}_S(R, E^i) = 0$ pour tout i; donc $^*E = 0$. D'après (2.3) $E^g = \oplus E^i$. D'après (2.7(5)), ϕ_E est un $R\#U(g)$-monomorphisme essentiel et, puisque E est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, on conclut que ϕ_E est un $R\#U(g)$-isomorphisme.

LEMME 2.12. *Soient g semi-simple, I un injectif dans* Mod_S, $M \in \mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *avec* $^*M = 0$ *et* $f\colon M \to \mathcal{F}_S(R, I)$ *un* $R\#U(g)$*-monomorphisme essentiel. Alors* $M^g \to \mathcal{F}_S(R, I)^g = I$ *est un S-monomorphisme essentiel*.

Preuve. D'après (2.7(5)), ϕ_M est un $R\#U(g)$-monomorphisme essentiel; et d'après (2.2), $\mathcal{F}_S(R, I)$ est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. Il existe donc un $R\#U(g)$-morphisme $h\colon \mathcal{F}_S(R, M^g) \to \mathcal{F}_S(R, I)$ tel que $f = h \circ \phi_M$. Soit L un sous-S-module de I tel que $L \cap M^g = 0$. Alors $\mathcal{F}_S(R, M^g) \cap \mathcal{F}_S(R, L) = 0$ et $\mathcal{F}_S(R, L)$ est un sous-$R\#U(g)$-module de $\mathcal{F}_S(R, I)$. Si $\mathcal{F}_S(R, L)$ est non nul, il rencontrerait $M = \phi_M(M)$ de façon non triviale, car $\phi_M(M) \subseteq \mathcal{F}_S(R, M^g)$. Ce qui n'est pas possible; donc $\mathcal{F}_S(R, L) = 0$. On en déduit d'après (2.3), que $0 = \mathcal{F}_S(R, L)^g = L$.

Nous sommes maintenant prêt pour montrer que le foncteur $(\ )^g$ transforme les résolutions injectives minimales de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ en résolutions injectives minimales de Mod_S et on pourra donc déterminer les résolutions dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$.

PROPOSITION 2.13. *On suppose que la condition* (α) *est satisfaite dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. *Soient g semi-simple,* $M \in \mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, $\{E^i_{R\#U(g)}(M)\}$ *la résolution injective minimale de M dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *et* $\{E^i_S(M^g)\}$ *la S-résolution injective minimale de* M^g. *Alors* $(E^i_{R\#U(g)}(M))^g = E^i_S(M^g)$ *pour chaque i*.

Preuve. Posons $E^i = E^i_{R\#U(g)}(M)$ pour chaque i et $K^i = \operatorname{Ker}(E^i \to E^{i+1})$. D'après (2.8(1)), $I^i = (E^i)^g$ est S-injectif et $E^i = \mathsf{F}_S(R, I^i)$. Comme g est semi-simple, la suite $I^0 \to I^1 \to \cdots \to I^i \to \cdots$ est exacte dans Mod_S et $(K^i)^g = \operatorname{Ker}(I^i \to I^{i+1})$. Comme $*(K^i) = 0$ et $K^i \to E^i = \mathsf{F}_S(R, I^i)$ est un $R\#U(g)$-monomorphisme essentiel, $(K^i)^g \to I^i = \mathsf{F}_S(R, I^i)^g$ est, d'après (2.12), un S-monomorphisme essentiel. Donc $\{I^i\}$ est une S-résolution injective minimale de $(K^0)^g = M^g$.

THÉORÈME 2.14. *Soit S commutative. On suppose que la condition (α) est satisfaite dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *et g semi-simple. Soit $M \in$* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *et, pour $P \in$* $\operatorname{spec}(S)$, *soit $\mu_i(P, M^g)$ le nombre de fois que $E_S(S/P)$ apparaît dans $E^i_S(M^g)$. Alors $E^i_{R\#U(g)}(M)$ est la somme directe, pour P parcourant* $\operatorname{spec}(S)$, *de $\mu_i(P, M^g)$ copies de $E_{R\#U(g)}(R/RP)$.*

Preuve. D'après (2.8(1)) et (2.13), $E^i_{R\#U(g)}(M)$ est $R\#U(g)$-isomorphe à $\mathsf{F}_S(R, E^i_{R\#U(g)}(M)^g) = \mathsf{F}_S(R, E^i_S(M^g))$. Donc, d'après la définition des μ_i et (2.11), $E^i_{R\#U(g)}(M)$ est la somme directe, pour P parcourant $\operatorname{spec}(S)$, de $\mu_i(P, M^g)$ copies de $\mathsf{F}_S(R, E_S(S/P))$. Or $(R/PR)^g = S/P$; donc, d'après (2.8(2)), $\mathsf{F}_S(R, E_S(S/P))$ est $R\#U(g)$-isomorphe à $E_{R\#U(g)}(R/PR)$; d'où le résultat.

Remarque. La condition (α) imposée à $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ est trop forte. Elle montre d'après (2.10(2)) que si N est un injectif dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, alors N^g est S-injectif.

Nous allons voir maintenant sous une hypothèse de finitude de R sur S, que cela signifie que R est S-plat.

Nous commençons par identifier les composants g-isotypiques des $R\#U(g)$-modules $\mathsf{F}_S(R, M)$.

LEMME 2.15. *Soient g semi-simple et S commutative. Si M est un S-module et V un g-module simple de dimension finie, alors $\mathsf{F}_S(R, M)_V$ est $S\#U(g)$-isomorphe à $\mathsf{F}_S(R_{V^*}, M)$.*

Preuve. Considérons les isomorphismes suivants:

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_g\big(V, \mathsf{F}_S(R, M)\big) &= \operatorname{Hom}_g(V \otimes R, M) \\ &= \operatorname{Hom}_g(V \otimes R_{V^*}, M) = \operatorname{Hom}_g\big(V, \mathsf{F}_S(R_{V^*}, M)\big).\end{aligned}$$

Le premier et le troisième isomorphismes découlent de (1.5(5)) et le deuxième de la définition de R_{V^*} (si W est un autre g-module simple de dimension finie, alors $\operatorname{Hom}_g(V, W^*) = 0$ si $W^* \neq V$). Il résulte maintenant de (1.4) que $\mathsf{F}_S(R, M)_V = \mathsf{F}_S(R_{V^*}, M)_V$. Si W est un g-module simple de dimension finie non isomorphe à V, alors $\operatorname{Hom}_g(W \otimes R_{V^*}, M) = 0$, car $\operatorname{Hom}_g(W \otimes V^*, k) = 0$, donc

$$\mathsf{F}_S(R_{V^*}, M) = \bigoplus_W \mathsf{F}_S(R_{V^*}, M)_W = \mathsf{F}_S(R_{V^*}, M)_V.$$

COROLLAIRE 2.16. *Soient g semi-simple et R commutative. Supposons que le foncteur* $(\ )^g$ *transforme les injectifs de* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *en injectifs de* Mod_S. *Si I est S-injectif et V un g-module simple de dimension finie, alors* $\mathsf{F}_S(R_{V^*}, I)$ *est aussi S-injectif.*

Preuve. Posons $W = V^*$ et $E = \mathsf{F}_S(R, I)$. Alors, d'après (2.2), E est un injectif de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. Posons $M = R \otimes V$; donc M est de type fini dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ et libre comme R-module. D'après (1.5(4)), $E \otimes W$ et $\mathrm{Hom}_R(M, E)$ sont $R\#U(g)$-isomorphes. D'après [7, 2.17], $\mathsf{F}_R(M, E) = \mathrm{Hom}_R(M, E)$; donc, d'après [7, 2.37], $\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(*, E \otimes W) = \mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(* \otimes_R M, E)$. Or $\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(-, E)$ et $(*) \otimes_R M$ sont exacts respectivement de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ dans k-ev et de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$; donc $E \otimes W$ est injectif dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. Il résulte de nos hypothèses que $(E \otimes W)^g$ est S-injectif. Or, d'après (1.5(4)), $(E \otimes W)^g$ est S-isomorphe à $\mathrm{Hom}_g(V, E)$. Maintenant, $E_V = \mathrm{Hom}_g(V, E) \otimes V$ comme objet de $\mathrm{Mod}_{(S\#U(g))}$; donc E_V est S-injectif. D'après (1.4), $E_V = \mathsf{F}_S(R, I)_V = \mathsf{F}_S(R_{V^*}, I)$; d'où le résultat.

Si dans (2.16), R_{V^*} est de type fini comme S-module, alors [7, 2.17] $\mathrm{Hom}_S(R_{V^*}, I)$ est S-injectif. Nous allons utiliser cette observation pour conclure sous les hypothèses de (2.16) que R_{V^*} est S-plat.

THÉORÈME 2.17. *Soient g semi-simple et R commutative. Supposons que le foncteur* $(\ )^g$ *transforme les injectifs de* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *en injectifs de* Mod_S. *Soit V un g-module simple de dimension finie. Si* R_V *est de type fini comme S-module, alors* R_V *est S-plat. Si* R_W *est de type fini comme S-module pour chaque g-module simple de dimension finie W, alors R est S-plat.*

Preuve. Soit I un injectif dans Mod_S. Alors on a l'isomorphisme de dualité [2, p. 348]

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_S\big(\mathrm{Tor}_1^S(M, R_V), I\big) &= \mathrm{Ext}_S^1\big(M, \mathrm{Hom}_S(R_V, I)\big)\\ &= \mathrm{Ext}_S^1\big(M, \mathsf{F}_S(R_V, I)\big)\end{aligned}$$

et (2.16) montre que $\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Tor}_1^S(M, R_V), I) = 0$ pour tout M dans Mod_S. On en déduit que $\mathrm{Tor}_1^S(M, R_V) = 0$ (il suffit de prendre $I = E_S(\mathrm{Tor}_1^S(M, R_V))$).

La deuxième assertion est immédiate à partir de la première.

La réciproque de (2.17) est aussi vraie:

PROPOSITION 2.18. *Supposons g semi-simple et R un S-module plat à droite. Alors le foncteur* $(\ )^g$ *transforme les injectifs de* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *en injectifs de* Mod_S.

Preuve. Soient E un injectif dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ et M un S-module quelconque. D'après (1.5(3)), $\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(R\otimes_S M, E) = \mathrm{Hom}_S(M, E^g)$; donc le foncteur $\mathrm{Hom}_S(*, E^g)$ est le composé du foncteur $R\otimes_S (*)$ qui est exact de Mod_S vers $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ et du foncteur $\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(*, E)$ qui est exact de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ vers k-ev.

LEMME 2.19. *Soient g semi-simple, M de type fini dans* Mod_S *et N un objet de* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. *Alors pour tout i,* $\mathrm{Ext}^i_S(M,N)$ *est un g-module localement fini et* $\mathrm{Ext}^i_S(M,N)^g = \mathrm{Ext}^i_S(M,N^g)$.

Preuve. Considérons M comme un objet de $\mathrm{Mod}_{(S\#U(g))}$ (l'action de g est triviale). Soit $\{F_i\}$ une résolution de M par des S-modules libres de type fini et regardons chaque F_i comme un objet de $\mathrm{Mod}_{(S\#U(g))}$ (l'action de g est triviale). Alors $\mathrm{Ext}^i_S(M,N)$ est dans $\mathrm{Mod}_{(g)}$. Ainsi,

$$\mathrm{Ext}^i_S(M,N)^g = H^i(\mathrm{Hom}_S(F_*,N))^g = H^i\big(\mathrm{Hom}_S(F_*,N)^g\big).$$

D'après (7, 2.10 et 2.17], nous avons $\mathrm{Hom}_S(F_p,N)^g = \mathrm{Hom}_S(F_p,N^g)$; donc

$$\mathrm{Ext}^i_S(M,N)^g = H^i\big(\mathrm{Hom}_S(F_*,N^g)\big) = \mathrm{Ext}^i_S(M,N^g).$$

PROPOSITION 2.20. *Soient g semi-simple, $M\in$* Mod_S, $N\in \mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *et R de type fini dans* Mod_S. *Alors on a la suite spectrale*

$$\widetilde{\mathrm{Ext}}^i_{R\#U(g)}\big(N, \mathrm{Ext}^j_S(R,M)\big) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_S(N^g, M);\ \text{pour } i\ge 0,\ j\ge 0.$$

Si de plus N est de type fini, on a

$$\mathrm{Ext}^i_R\big(N, \mathrm{Ext}^j_S(R,M)\big)^g \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_S(N^g, M).$$

Preuve. Comme R est de type fini dans Mod_S, on a d'après [7, 2.17], $\mathcal{F}_S(R,M) = \mathrm{Hom}_S(R,M)$. D'après (2.2), le foncteur $\mathcal{F}_S(R,-)$ envoie les injectifs de Mod_S dans les injectifs de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. D'après (2.1), le foncteur $\mathrm{Hom}_S((N)_g,-)$ défini de Mod_S vers k-ev est le composé du foncteur covariant $\mathcal{F}_S(R,-) = \mathrm{Hom}_S(R,-)$ qui va de Mod_S dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ et du foncteur covariant exact à gauche $\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(N,-)$ qui va de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ dans k-ev. La suite spectrale des foncteurs composés donne (1).

(2) Il suffit d'appliquer [7, 2.25].

Remarque. Posons $R = U(g)$. Alors R est un g-module localement fini pour l'action adjointe de g et R^g est le centre de R. La plupart des résultats que nous venons d'établir sont vrais pour l'anneau $R\#U(g)$.

Soit $M\in \mathrm{Mod}_R$. On munit M de la structure de g-module trivial. Si g opère trivialement sur R (donc $R\#U(g)$ et $R\otimes U(g)$ sont isomorphes comme k-algèbres), alors M devient un objet de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$.

COROLLAIRE 2.21. *Soient g semi-simple opérant trivialement sur R, $M \in$* Mod_R *et $N \in$* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. *Alors on a*

$$\widetilde{\mathrm{Ext}}^i_{R\#U(g)}(N, M) = \mathrm{Ext}^i_R(N^g, M) \qquad \textit{pour } i \geq 0.$$

Si de plus, N est de type fini, on a

$$\mathrm{Ext}^i_R(N, M)^g = \mathrm{Ext}^i_R(N^g, M) \qquad \textit{pour } i \geq 0.$$

Preuve. On pose $R = S$ dans (2.20).

3. LE FONCTEUR $R \otimes_S (-)$

Dans ce paragraphe, R est commutative. Si M est un R-module, la notation M^* désigne $\mathrm{Hom}_R(M, R)$. Nous allons étudier le groupe de Picard de l'anneau S.

DEFINITION 3.1. Un objet M de $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$ est de type invariant si $M = RM^g$.

LEMME 3.2. *Soit $M \in$* $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$. *L'application f_M: $R \otimes_S M^g \to M$; $r \otimes m \to rm$ est $R\#U(g)$-linéaire. Son image est RM^g. Si M est de type invariant, alors f_M est un épimorphisme.*

LEMME 3.3. *Soient M et $N \in$* $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$. *On suppose qu'il existe une $R\#U(g)$-surjection $M \to N$. Alors, si M est de type invariant, il en est de même pour N.*

LEMME 3.4. *Soit $M \in$* Mod_S *et $M_R = R \otimes_S M$. Alors l'application ϕ définie de $R(M_R)^g \to M_R$ par $\phi[r(r_1 \otimes m)] = rr_1 \otimes m$ est un isomorphisme de $R\#U(g)$-modules. Donc M_R est de type invariant. En particulier, R est de type invariant.*

LEMME 3.5. *Soient g semi-simple, R g-localement finie, $M \in$* Mod_S *et $M_R = R \otimes_S M$. Si M est S-projectif, alors M_R est projectif dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$.

Preuve. Pour tout objet N de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, on a d'après (1.5(3)), $\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(M_R, N) = \mathrm{Hom}_S(M, N^g)$. Le foncteur $(\ )^g$ est exact de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ dans $\mathrm{Mod}_{(S\#U(g))}$; d'où le résultat.

PROPOSITION 3.6. *Soit M un projectif de type fini dans* Mod_S. *Alors l'application $M \to (R \otimes_S M)^g$ définie par $m \to 1 \otimes m$ est un S-isomorphisme.*

Preuve. Pour tout S-module N, notons f_N l'application $N \to (R \otimes_S N)^g$ définie par $f_N(n) = 1 \otimes n$. Alors f est une transformation naturelle de foncteurs additifs de S-modules: $1 \to (R \otimes_S (*))^g$, où 1 désigne le foncteur identité dans Mod_S et f_S est un isomorphisme. Il en résulte que f_M est un isomorphisme si M est projectif de type fini.

Lorsque R est g-localement finie, le lemme (3.5) et la proposition (3.6) montrent que si g est semi-simple et si M est un S-module projectif de type fini, alors le $R\#U(g)$-module g-localement fini projectif de type fini et de type invariant $R \otimes_S M$ a la propriété que son sous-S module des invariants est aussi un projectif de type fini. Nous allons voir que cette propriété est vraie pour tout $R\#U(g)$-module g-localement fini projectif de type fini et de type invariant.

LEMME 3.7. *Soir M dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$.

(1) *On suppose que R est g-localement finie. Si M est un projectif dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, *alors M est un projectif dans* Mod_R.

(2) *Si g est semi-simple et si M est de type fini R-projectif, alors M est projectif dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$.

Preuve. (1) C'est évident.

(2) Les foncteurs $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ et $(\ )^g$ sont exacts respectivement de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ dans $\mathrm{Mod}_{(g)}$ et de $\mathrm{Mod}_{(g)}$ dans Mod_g.

LEMME 3.8. *Soient g semi-simple, R g-localement finie, P et Q de type fini dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *avec Q projectif dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *et f: $P \to Q$ un $R\#U(g)$-épimorphisme. Alors il existe un $R\#U(g)$-monomorphisme h: $Q \to P$ tel que $f \circ h =$ identité de Q.*

Preuve. L'application $f^* = \mathrm{Hom}_R(Q, f)$ définie de $\mathrm{Hom}_R(Q, P) \to \mathrm{Hom}_R(Q, Q)$ est surjective, car Q est projectif dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$; donc dans Mod_R. Il est facile de voir que f^* est g-linéaire. D'après [7, 2.17 et 2.36], $\mathrm{Hom}_R(Q, P)$ et $\mathrm{Hom}_R(Q, Q)$ appartienent à $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))} \subseteq \mathrm{Mod}_{(g)}$. Donc f^* est surjective sur les invariants, c'est-à-dire que f^* est surjective de

$$\mathrm{Hom}_R(Q, P)^g = \mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(Q, P)$$

$$\to \mathrm{Hom}_R(Q, Q)^g = \mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(Q, Q).$$

Comme l'identité de Q appartient à $\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(Q, Q)$, il existe donc $h \in \mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(Q, P)$ tel que $f \circ h =$ identité de Q. Il est clair que h est un monomorphisme.

THÉORÈME 3.9. *Soient g semi-simple et P un projectif de type fini et de type invariant dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *où R est g-localement finie. Alors*

(1) *P^g est un S-module de type fini projectif.*

(2) *P^* est de type invariant.*

(3) *L'application définie de $(P^g)_R = R \otimes_S P^g \to P$ par $r \otimes p \to rp$ est un $R\#U(g)$-isomorphisme.*

Preuve. Comme P est de type invariant, il existe $p_1, p_2, \ldots, p_n \in P^g$ avec $n < +\infty$ tel que $P = \sum Rp_i$. Posons $F = R^{(n)} = R \oplus R \oplus \cdots \oplus R$ et soit $f\colon F \to P$ l'application définie par $f(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \sum r_i p_i$. Alors $F \in \mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ et f est un $R\#U(g)$-épimorphisme. D'après (3.8), il existe un monomorphisme $h \in \mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(P, F)$ tel que $f \circ h =$ identité de P. La restriction de h à P^g est donc un S-morphisme inverse à droite pour la restriction de f à F^g, et

$$F^g = S^{(n)} = S \oplus \cdots \oplus S; \qquad \text{d'où (1)}.$$

L'application $h^* = \mathrm{Hom}_R(h, R)$ définie de $F^* = \mathrm{Hom}_R(F, R) \to P^* = \mathrm{Hom}_R(P, R)$ est surjective et g-linéaire; donc P^* est de type invariant, car F^* l'est, d'où (2).

Pour démontrer (3), considérons l'application $R\#U(g)$-linéaire t_P définie de $R \otimes_S P^g \to P$ par $t_P(r \otimes p) \to rp$. Alors t est une transformation naturelle de foncteurs additifs $R \otimes_S (\ )^g \to 1$ de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, où 1 est le foncteur identité de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. L'application t_R est un isomorphisme; donc t_F est un isomorphisme par additivité. Il en résulte que t_P est un isomorphisme, car $F = P \oplus \mathrm{Ker}\, f$ comme g-modules.

On attire l'attention du lecteur sur la similarité entre les assertions (1) et (3) de (3.9) et les résultats de (2.8(1)).

Nous allons maintenant établir un résultat analogue à (2.4(1)).

LEMME 3.10. *Soient $N \in \mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, et $M \in \mathrm{Mod}_S$. Si N est un quotient de $R \otimes_S M$ dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, alors $N^g = 0$ implique $N = 0$.*

Preuve. Si $N^g = 0$, alors $\mathrm{Hom}_S(M, N^g) = 0$. D'après (1.5(3)), $\mathrm{Hom}_{R\#U(g)}(R \otimes_S M, N) = 0$. Or ce dernier "Hom" contient le $R\#U(g)$-épimorphisme $R \otimes_S M \to N$; donc $N = 0$.

La troisième assertion de (3.9) montre que le rang de P comme R-module est égal au rang de P^g comme S-module. Donc, si P est inversible comme R-module, alors P^g est inversible comme S-module.

Le reste de ce paragraphe est consacré à l'étude de ces modules qui sont de rang 1.

Nous allons suivre la même démarche que Magid [10]. Pour obtenir des résultats plus généraux, nous allons utiliser l'ensemble $Z(g, R)$ introduit dans [9, p. 1239] à la place des caractères de g.

Notons $\mathrm{Pic}(R)$ le groupe de Picard de R. Si M est un R-module inversible, sa classe dans $\mathrm{Pic}(R)$ sera notée $[M]$.

Un $R\#U(g)$-module est inversible s'il est inversible en tant que R-module. Par exemple, R est un $R\#U(g)$-module inversible.

Soit M un $R\#U(g)$-module. Les isomorphismes canoniques: $M \otimes_R R = M$ et $M \otimes_R M^* = R$ sont $R\#U(g)$-linéaires. On en déduit que les classes d'isomorphismes des $R\#U(g)$-modules inversibles forment un groupe commutatif. Nous allons le noter $\mathrm{Pic}(R, g)$. Si M est inversible, on note $\{M\}$ sa classe dans $\mathrm{Pic}(R, g)$. Plus précisément, si N est un autre $R\#U(g)$-module inversible, alors $\{M\} \cdot \{N\} = \{M \otimes_R N\}$, $\{M\}^{-1} = \{M^*\}$. L'élément unité de $\mathrm{Pic}(R, g)$ est $\{R\}$. Nous avons un homomorphisme de groupes

$$q: \mathrm{Pic}(R, g) \to \mathrm{Pic}(R), \qquad \{M\} \to [M].$$

Soit ϕ une application additive de $g \to R$. On dit que ϕ vérifie la condition de cocycles [11, p. 1239] si $\phi([X, Y]) = X(\phi(Y)) - Y(\phi(X))$ pour tous $X, Y \in g$.

On note $Z(g, R)$ le groupe additif de toutes les applications additives de g vers R qui vérifient la condition de cocycles.

EXEMPLES. (1) Si λ est un caractère de g, alors $\lambda \in Z(g, R)$.

(2) Supposons que R est intègre et soit a un élément non nul g-normal de R, c'est-à-dire normal dans $R\#U(g)$. Donc $X(a) = r_X a$ pour tout $X \in g$, où r_X est un élément de R. Comme R est intègre, r_X est unique pour chaque $X \in g$. Posons $\phi(X) = r_X$ pour chaque $X \in g$. Alors $\phi \in Z(g, R)$.

Posons $R_\phi = \{a \in R$ tel que $X(a) = \phi(X)a$ pour tout $X \in g$; où $\phi \in Z(g, R)\}$. Donc $R_0 = R^g$.

Il est clair que R_ϕ est un sous-espace vectoriel de R et RR_ϕ est un sous-$R\#U(g)$-module de R. Nous avons $1 \in R_\phi$ si et seulement si $\phi = 0$. Si $a \in R_\phi$ et si a est inversible, alors $a^{-1} \in R_{-\phi}$.

Nous prions le lecteur de ne pas confondre la notation R_ϕ avec celle de [11, p. 1239].

Posons $Z^u(g, R) = \{\phi \in Z(g, R)$ tel que R_ϕ contient un élément inversible de $R\}$ et

$$Z^s(g, R) = \left\{\phi \in Z(g, R) \text{ tel que } RR_\phi = R \text{ et } RR_{-\phi} = R\right\}.$$

Ce sont des sous-groupes de $Z(g, R)$ et $Z^u(g, R) \subseteq Z^s(g, R)$.

LEMME 3.11. *Soient M un $R\#U(g)$-module inversible et $e \in M$ tels que $M = Re$. Alors M est R-libre et e est une R-base de M.*

Soit M comme dans (3.11). Alors, d'après [11, 1.3], il existe $\phi \in Z(g, R)$ tel que $X(e) = \phi(X)e$ pour tout $X \in g$.

LEMME 3.12. *Soient M et M' deux $R\#U(g)$-modules inversibles tels que $M = Re$, $M' = Re'$, où $e \in M$ et $e' \in M'$. S'il existe un élément ϕ de $Z(g, R)$ vérifiant $X(e) = \phi(X)e$ et $X(e') = \phi(X)e'$ pour tout $X \in g$, alors le R-isomorphisme de M vers M' qui envoie e sur e' est un isomorpisme de $R\#U(g)$-modules.*

Soit $\phi \in Z(g, R)$. D'après [11, 1.3], il existe un $R\#U(g)$-module inversible M, un élément e dans M tels que $M = Re$ et $X(e) = \phi(X)e$ pour tout $X \in g$. Un tel M sera noté $R[\phi]$. Les "$R[\phi]$" sont $R\#U(g)$-isomorphes aux "R_ϕ" de [11].

On définit un morphisme de groupes p de $Z(g, R) \to \mathrm{Pic}(R, g)$, en posant $p(\phi) = \{R[\phi]\}$.

THÉORÈME 3.13. *Sous les hypothèses et avec les notations ci-dessus, on a une suite exacte de groupes*:

$$0 \to Z^u(g, R) \to Z(g, R) \to \mathrm{Pic}(R, g) \to \mathrm{Pic}(R).$$

Preuve. Notons f l'injection canonique de $Z^u(g, R)$ dans $Z(g, R)$. La suite est exacte en $Z^u(g, R)$. Soit $\phi \in Z^u(g, R)$. Donc R_ϕ contient un élément inversible a de R tel que $(Xfa) = (X(a) = \phi(X)a$ pour tout $X \in g$. Si e désigne une R-base de $R[\phi]$ telle que $X(e) = \phi(X)e$ pour tout $X \in g$, alors l'application $R[\phi] \to R$; $re \to ra$ est un isomorphisme de $R\#U(g)$-modules; donc $p(\phi) = \{R[\phi]\} = \{R\}$; donc $\mathrm{Im}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\, p$. Soit $\phi \in Z(g, R)$ et $p(\phi) = \{R\}$; donc $R[\phi]$ possède une R-base m telle que $X(m) = 0$ pour tout $X \in g$. Soit e une R-base de $R[\phi]$ telle que $X(e) = \phi(X)e$ pour tout $X \in g$. Alors $e = um$, où u est un élément inversible de R.

Il est facile de vérifier que $u \in R_\phi$; donc $\phi \in Z^u(g, R)$; d'où $\mathrm{Ker}\, p \subseteq \mathrm{Im}\, f$. Ainsi la suite est exacte en $Z(g, R)$. Si $\phi \in Z(g, R)$, alors $q(p(\phi)) = [R]$. Maintenant soit $\{M\} \in \mathrm{Ker}\, q$. Donc $[M] = [R]$; c'est-à-dire $M = Rm$ avec $m \in M$. D'après [11, 1.3], $X(m) = \phi(X)m$ pour tout $X \in g$, où $\phi \in Z(g, R)$. Soit e une R-base de $R[\phi]$ telle que $X(e) = \phi(X)e$ pour tout $X \in g$. Alors l'application $M \to R[\phi]$; $rm \to re$ est un isomorphisme de $R\#U(g)$-modules. On en déduit que $\{M\} = \{R[\phi]\} = p(\phi)$; donc la suite est exacte en $\mathrm{Pic}(R, g)$.

A partir de maintenant, R est g-localement finie.

Posons $\mathrm{Pic}_R(R, g) = \{\{M\} \in \mathrm{Pic}(R, g)$ tel que M est g-localement fini$\}$: c'est un sous-groupe de $\mathrm{Pic}(R, g)$. Nous avons un homomorphisme de groupes

$$\mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}_R(R, g); \qquad [M] \to \{M_R\}; \qquad \text{où } M_R = R \otimes_S M.$$

Nous allons utilser (3.6), (3.9) et (3.13) pour étudier le groupe de Picard de l'anneau S.

PROPOSITION 3.14. *Le morphisme* $\mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}_R(R, g)$ *est une injection. Si g est semi-simple, l'image est* $\{\{M\} \in \mathrm{Pic}_R(R, g)$ *tel que M est de type invariant*$\}$.

Preuve. Soit $[M] \in \mathrm{Pic}(S)$. D'après (3.6), $M = (M_R)^g$. Si $\{M_R\} = \{R\}$, alors $(M_R)^g = R^g = S$; donc le morphisme est injectif. Si $[M] \in \mathrm{Pic}(S)$, alors M_R est de type invariant, donc l'image est contenue dans l'ensemble désiré. Réciproquement, si g est semi-simple et $\{M\} \in \mathrm{Pic}_R(R, g)$ avec M de type invariant, alors $M = (M^g)_R$ d'après (3.9(3)). Donc $\{M\}$ est dans l'image.

Posons $Z_R(g, R) = \{\phi \in Z(g, R)$ tel que $\mathrm{Im}\,\phi$ est contenue dans un sous-g-module de dimension finie de $R\}$.

Remarquons que tout caractère de g appartient à $Z_R(g, R)$.

Si on suppose que les éléments de $Z(g, R)$ sont k-linéaires, alors $Z_R(g, R) = Z(g, R)$.

On dira que la condition $(*)$ est satisfaite dans R si l'image de tout élément de $Z_R(g, R)$ est contenue dans une sous-algèbre de dimension finie g-stable de R.

La condition $(*)$ est satisfaite dans R dans les cas suivants:

1*er cas*. Si tout sous-g-module de dimension finie de R est contenu dans une sous-algèbre de dimension finie g-stable de R. Par exemple si R est algébrique sur k.

2*ème cas*. Si $Z_R(g, R)$ est l'ensemble des caractères de g. Ce cas est trivialement réalisé, si R est intègre et tous les éléments de R sont des semi-invariants pour g. On trouvera au paragraphe 6, un exemple non trivial.

Dans la suite du paragraphe, on suppose que la condition $(*)$ est satisfaite dans R.

LEMME 3.15. *Soit* $\phi \in Z(g, R)$. *Alors* $R[\phi]$ *est* g*-localement fini si et seulement si* $\phi \in Z_R(g, R)$.

Preuve. Posons $M = R[\phi]$ et soit e une R-base de M telle que $X(e) = \phi(X)e$ pour tout $X \in g$. Soit e' l'élément de M^* tel que $\langle e', e\rangle = 1$. Si M est g-localement fini, alors $\phi(X)e$ appartient à un sous-g-module V de dimension finie M pour tout $X \in g$. On en déduit que $\mathrm{Im}\,\phi \subseteq W = e'(V)$ et W est un sous-espace vectoriel de dimension finie de R. Comme R est g-localement finie, on peut supposer que W est g-stable donc $\phi \in Z_R(g, R)$ et la condition est nécessaire.

Si $\mathrm{Im}\,\phi$ est contenue dans une sous-algèbre W de dimension finie g-stable de R, alors We est un sous-g-module de dimension finie de M et $U(g)e \subseteq We$. Soit $m \in M$. On a $m = re$ avec $r \in R$ et $\dim U(g)(r) < +\infty$. Il est clair que $(U(g)(r))(U(g)e)$ est un sous-g-module de dimension finie de M contenant $U(g)m$. Donc M est g-localement fini.

Posons $Z_R^u(g, R) = Z_R(g, R) \cap Z^u(g, R)$ et

$$Z_R^s(g, R) = Z_R(g, R) \cap Z^s(g, R).$$

Ce sont des sous-groupes de $Z_R(g, R)$ et $Z_R^u(g, R) \subseteq Z_R^s(g, R)$:

THÉORÈME 3.16. *Nous avons une suite exacte de groupes*

$$0 \to Z_R^u(g, R) \to Z_R(g, R) \to \mathrm{Pic}_R(R, g) \to \mathrm{Pic}(R).$$

Preuve. D'après (3.15), la restriction de p à $Z_R(g, R)$ définit un morphisme $Z_R(g, R) \to \mathrm{Pic}_R(R, g)$. Le théorème (3.13) donne le résultat.

LEMME 3.17. *Soit* $\phi \in Z_R(g, R)$. *Alors* $R[\phi]$ *est de type invariant si et seulement si* $RR_{-\phi} = R$.

Preuve. $R[\phi] = Re$, où $e \in R[\phi]$ et $X(e) = \phi(X)e$ pour tout $X \in g$. On en déduit que $re \in R[\phi]^g$ si et seulement si $X(r)e = -r\phi(X)e$ pour tout $X \in g$; donc, si et seulement si $X(r) = -\phi(X)r$ pour tout $X \in g$. Ainsi, $R[\phi]^g = R_{-\phi}e$ et, $R[\phi] = RR[\phi]^g$ si et seulement si $Re = RR_{-\phi}e$; donc $R = RR_{-\phi}$.

Le lemme (3.17) peut s'améliorer si g est semi-simple.

COROLLAIRE 3.18. *Soient g semi-simple et* $\phi \in Z_R(g, R)$. *Alors* $R[\phi]$ *est de type invariant si et seulement si* $\phi \in Z_R^s(g, R)$.

Preuve. Signalons que $R[\phi]^* = R[-\phi]$. Si $R[\phi]$ est de type invariant, alors, d'après (3.9), il en est de même pour $R[\phi]^*$. D'après (3.17), $RR_{-\phi} = R$ et $RR_\phi = R$; donc $\phi \in Z_R^s(g, R)$.

Si $\phi \in Z_R^s(g, R)$, alors $RR_{-\phi} = R$; donc $R[\phi]$ est de type invariant, d'après (3.17).

THÉORÈME 3.19. *Soit g semi-simple. Alors, il existe une suite exacte de groupes*

$$0 \to Z_R^u(g, R) \to Z_R^s(g, R) \to \mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(R).$$

Preuve. D'après (3.14), $\mathrm{Pic}(S)$ est le sous-groupe de $\mathrm{Pic}_R(R, g)$ constitué des objets de type invariant. D'après (3.18), l'image inverse dans $Z_R(g, R)$ de ce sous-groupe est $Z_R^s(g, R)$. Le résultat découle de (3.16).

Même si g n'est pas semi-simple, on peut appliquer quand même certains des résultats précédents.

THÉORÈME 3.10. *Il existe un sous-groupe* E *de* $Z_R^s(g, R)$ *et une suite exacte de groupes*

$$E \to \mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(R).$$

Preuve. Le morphisme $\mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(R)$ est le composé $\mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}_R(R, g) \to \mathrm{Pic}(R)$ et le premier morphisme est injectif, d'après (3.14). Soit M un S-module inversible tel que $[M]$ est dans le noyau. Supposons qu'il existe $\phi \in Z_R(g, R)$ tel que $\{R[\phi]\} = \{M_R\}$. Donc $R[\phi]$ est de type invariant. Le lemme (3.17) entraîne que $RR_{-\phi} = R$. Or, $R[-\phi] = R[\phi]^* = (M_R)^* = (M^*)_R$ est aussi de type invariant; donc, d'après (3.17), $RR_\phi = R$. Ainsi, $\phi \in Z_R^s(g, R)$. Il en résulte que le sous-groupe E en question est l'image inverse dans $Z_R(g, R)$ de l'image de $\mathrm{Pic}(S)$ dans $\mathrm{Pic}_R(R, g)$. Le théorème (3.16) donne le résultat.

Le théorème (3.20) donne assez d'informations sur le groupe $\mathrm{Pic}(S)$ si le groupe $Z_R^s(g, R)$ est réduit à $\{0\}$; donc E est réduit à $\{0\}$.

LEMME 3.21. *Soit R intègre. Supposons qu'il existe un idéal maximal g-invariant J de R tel que $R/J = k$. Si ϕ est un élément non nul de $Z_R(g, R)$, alors $RR_\phi \neq R$. En particulier, $Z_R^s(g, R) = \{0\}$.*

Preuve. Supposons qu'il existe un élément f de R_ϕ qui ne soit pas dans J. Choisissons

$$0 \neq \lambda \in k \qquad \text{avec } f - \lambda \in J \text{ et } X \in g \text{ tel que } \phi(X) = b \neq 0.$$

Alors $bf = X(f - \lambda) \in J$; donc $b \in J$. D'autre part, b appartient à une k-algèbre de dimension finie intègre; donc b est inversible. Ce qui est une contradiction. Il en résulte que $R_\phi \subseteq J$, donc $RR_\phi \neq R$.

COROLLAIRE 3.22. *Soit R intègre, S'il existe un idéal maximal g-invariant J de R tel que $R/J = k$, alors* $\mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(R)$ *est une injection.*

On trouvera au paragraphe 6 les mêmes résultats sur le groupe de Picard dans le cas d'une action de groupe.

4. CAS PARTICULIER OÙ R EST L'ALGÈBRE DE HOPF DE g

On pose [7, p. 1114] $R(g) = \mathrm{Hom}_{(g)}(U(g), k)$. Il est bien connu que $R(g)$ est une sous-k-algèbre unitaire de la k-algèbre associative et commutative $\mathrm{Hom}(U(g), k)$. L'unité de $R(g)$ est le morphisme de k-algèbres $\varepsilon\colon U(g) \to k$ induit par le morphisme d'algèbres de Lie $g \to \{0\}$. L'action de g sur $R(g)$ est une action de dérivation et il est facile de vérifier que $R(g)$ est un $R(g)\#U(g)$-module g-localement fini et $R(g)^g$ est isomorphe à k comme k-algèbre et comme g-module trivial.

Le foncteur $\mathcal{F}_k(R(g), -)$ sera noté $\mathrm{Hom}_{(g)}(R(g), -)$ conformément à [5, 1.2]. Si k est algébriquement clos et si g est semi-simple, alors [3, 2.8.16(a) et (d)], $R(g)$ est une k-algèbre commutative de type fini. Comme $R(g)^g \approx k$, la plupart des résultats du paragraphe 2 sont triviaux lorsqu'on remplace

R par $R(g)$. Notre but est de réunir dans ce paragraphe les résultats non triviaux du paragraphe 2 et de reformuler les résultats du paragraphe 3 dans le cas particulier où $R = R(g)$. L'anneau $R(g)$ sera noté H.

Si M est un espace vectoriel sur K, on va le considérer comme un g-module trivial.

Nous conservons les mêmes conventions et les mêmes notations qu'aux paragraphes précédents et nous supposons k algébriquement clos et g semi-simple.

PROPOSITION 4.1. *Soient* $M \in k$-ev *et* $N \in \mathrm{Mod}_{(H\#U(g))}$. *Alors* $\mathrm{Hom}_{H\#U(g)}(N, \mathrm{Hom}_{(g)}(H, M))$ *et* $\mathrm{Hom}(N^g, M)$ *sont k-isomorphes.*

COROLLAIRE 4.2. *Soit* $I \in k$-ev, *alors* $\mathrm{Hom}_{(g)}(H, I)$ *est un injectif de* $\mathrm{Mod}_{(H\#U(g))}$.

LEMME 4.3. *Soit* $M \in k$-ev, *alors* $\mathrm{Hom}_{(g)}(H, M)^g \approx M$.

LEMME 4.4. *Soient* $N \in k$-ev *et* M *un sous-*$H\#U(g)$*-module de* $\mathrm{Hom}_{(g)}(H, N)$. *Alors* $M^g = 0$ *implique* $M = 0$.

LEMME 4.5. *Soit* $N \in k$-ev *et* M *un sous-*$H\#U(g)$*-module non nul de* $\mathrm{Hom}_{(g)}(H, N)$. *Alors* M *est une extension essentielle de son sous-*$H\#U(g)$*-module* HM^g.

THÉORÈME 4.6. (1) *Si* E *est un injectif de* $\mathrm{Mod}_{(H\#U(g))}$ *tel que* $*E = 0$, *alors* $E = \mathrm{Hom}_{(g)}(H, E^g)$ *un isomorphisme de* $H\#U(g)$*-modules.*

(2) *Soit* $M \in \mathrm{Mod}_{(H\#U(g))}$ *tel que* $*M = 0$, *alors*

$$E_{H\#U(g)}(M) = \mathrm{Hom}_{(g)}(H, M^g).$$

LEMME 4.7. *Soit* $\{E_i\}$ *une famille d'espaces vectoriels sur* k. *Alors*

$$\bigoplus \mathrm{Hom}_{(g)}(H, E_i) = \mathrm{Hom}_{(g)}\Big(H, \bigoplus E_i\Big).$$

LEMME 4.8. *Soient* $M \in k$-ev *et* V *un* g*-module simple de dimension finie. Alors* $\mathrm{Hom}_{(g)}(H, M)_V = \mathrm{Hom}_{(g)}(H_{V^*}, M)$.

LEMME 4.9. *Soient* $M \in k$-ev. *Alors* $H \otimes M$ *est un projectif de type invariant dans* $\mathrm{Mod}_{(H\#U(g))}$. *Si de plus,* M *est de dimension finie, alors* $H \otimes M$ *est de type fini et* $(H \otimes M)^g \approx M$.

Remarque. Si $M \in k$-ev est de dimension finie, le résultat $(H \otimes M)^g = M$ est bien connu, car $(H \otimes M)^g = \mathrm{Hom}_g(U(g), M)$.

THÉORÈME 4.10. *Soit P un projectif de type fini et de type invariant dans* $\mathrm{Mod}_{(H\#U(g))}$. *Alors*

(1) *P^g est un espace vectoriel de dimension finie sur k.*

(2) *$H \otimes P^g$ est $H\#U(g)$-isomorphe à P; donc P est H-libre de type fini et son rang en tant que H-module est la dimension de l'espace vectoriel P^g.*

LEMME 4.11. *Soient $N \in \mathrm{Mod}_{(H\#U(g))}$ et $M \in k$-ev. Si N est un quotient de $H \otimes M$ dans $\mathrm{Mod}_{(H\#U(g))}$, alors $N^g = 0$ implique $N = 0$.*

Considérons la projection canonique $p = p_H \colon H \to H^g = k$. Alors $p \in \mathrm{Hom}(H, k)$ et il est g-invariant, donc $p \in \mathrm{Hom}_g(H, k)$.

Enfin, voici le dernier résultat de ce paragraphe.

THÉORÈME 4.12. *Conservant les notations ci-dessus, on a*

$$E_{H\#U(g)}(kp) = \mathrm{Hom}_{(g)}(H, k).$$

Preuve. Il est clair que $Hp = kp$. D'après (4.3), on a $\mathrm{Hom}_g(H, k) = kp$; donc $H\,\mathrm{Hom}_g(H, k) = kp$. D'après (4.2), $\mathrm{Hom}_{(g)}(H, k)$ est un injectif de $\mathrm{Mod}_{(H\#U(g))}$; donc, d'après (4.5), $\mathrm{Hom}_{(g)}(H, k) = E_{H\#U(g)}(kp)$.

5. SEMI-SIMPLICITÉ DE LA CATÉGORIE $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$

Dans ce paragraphe, g est semi-simple. On se propose de généraliser le théorème de Weyl sur la réductibilité complète à la catégorie $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. Cette généralisation dans le cas des actions de groupes est faite dans [4]. On définit dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ la notion de simplicité et de semi-simplicité de manière évidente.

Soit $M \in \mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. Alors M est simple (respectivement semi-simple) dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ si et seulement si M est simple (respectivement semi-simple) dans $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$. Quand nous disons qu'un objet de $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$ est simple (respectivement semi-simple), il s'agit d'une simplicité (respectivement d'une semi-simplicité) dans $\mathrm{Mod}_{R\#U(g)}$.

On suppose dans la suite du paragraphe que l'hypothèse suivante est satisfaite: Pour tout objet de type fini M de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, le foncteur $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ est exact de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ dans $\mathrm{Mod}_{(g)}$.

Cette hypothèse est réalisée dans les cas suivants:

1*er cas*. R est un anneau semi-simple.

2*ème cas*. R est commutative g-simple; car d'après [11, 1.6], tout $R\#U(g)$-module de type fini comme R-module est R-projectif.

3*ème cas*. R est commutative de type fini régulière intègre et $R\delta(g) = \mathrm{Der}_k R$; l'algèbre de Lie des k-dérivations de R [8, prop. 7.7].

LEMME 5.1. *Soit* $M \in \mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. *Si M est de type fini, alors M est un projectif dans* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$.

Preuve. On utilise l'exactitude du foncteur $(\ )^g$ de $\mathrm{Mod}_{(g)}$ dans Mod_g et celle du foncteur $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ dans $\mathrm{Mod}_{(g)}$.

PROPOSITION 5.2. *Chaque objet M de* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *de type fini est la somme directe d'une famille de sous-*$R\#U(g)$*-modules simples de type fini de M. Donc M est semi-simple.*

Preuve. Il suffit de montrer que tout sous-$R\#U(g)$-module N de M est un facteur direct de M. Soit donc N un sous-$R\#U(g)$-module de M. On a dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ la suite exacte $0 \to N \to M \to M/N \to 0$. D'après (5.1), M/N est un projectif de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$, car il est de type fini. La suite exacte précédente est donc scindée dans $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$; d'où le résultat.

COROLLAIRE 5.3. *Chaque objet M de* $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$ *est la somme directe d'une famille de sous-*$R\#U(g)$*-modules simples de type fini de M. Donc M est semi-simple.*

Preuve. M est la somme de ses sous-$R\#U(g)$-modules de type fini. La proposition (5.2) donne le résultat.

COROLLAIRE 5.4. *On suppose que R est g-localement finie. Alors* $S = R^g$ *est un anneau semi-simple.*

Preuve. Soit $I \in \mathrm{Mod}_S$. D'après (5.3), $\mathcal{F}_S(R, I)$ est un injectif de $\mathrm{Mod}_{(R\#U(g))}$. D'après (2.5(2)), $*\mathcal{F}_S(R, I) = 0$; donc, d'après (2.8(1)), $\mathcal{F}_S(R, I)^g$ est un injectif dans Mod_S et d'après (2.3), $\mathcal{F}_S(R, I)^g$ et I sont S-isomorphes.

Remarque. Si dans (5.4), R est commutative g-simple, alors R^g est un corps et le résultat est trivial.

COROLLAIRE 5.5. *Soient R commutative g-localement finie g-simple et M un sous-*$R\#U(g)$*-module non nul de* $R^{(n)} = R \oplus R \oplus \cdots \oplus R$, $n < +\infty$. *Alors M est* $R\#U(g)$*-isomorphe à un* $R^{(m)}$, $1 \le m \le n$.

Preuve. Soit $\pi_i\colon R^{(n)} \to R$ la projection sur la $i$ème coordonnée. Si $\mu\colon M \to R^{(n)}$ est l'inclusion, alors $\pi_i \circ \mu(M)$ est un idéal g-invariant de R; donc $\pi_i \circ \mu(M) = 0$ ou R. Or M est non nul. Donc, si M est simple, M est $R\#U(g)$-isomorphe à R. Si M n'est pas simple, alors M est semi-simple, d'après (5.3). Donc M est $R\#U(g)$-isomorphe à $R^{(m)}$; où m est un entier compris entre 1 et n, d'après (5.3).

C'est la fin de l'exposé. Mais nous allons ajouter un paragraphe consacré à l'étude du groupe de Picard dans le cas d'une action de groupe.

6. APPENDICE

Nous rassemblons ici, certains résultats qui auraient pu alourdir le paragraphe 3. Dans ce paragraphe, R est un anneau commutatif associatif unitaire et G un groupe qui opère sur R par automorphisme d'anneaux. On note $U(R)$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de R et G^R l'ensemble de toutes les applications de G vers $U(R)$ muni de la multiplication $\phi\phi'(g) = \phi(g)\phi'(g)$ pour tout $g \in G$: c'est un groupe commutatif. L'inverse d'un élément ϕ de G^R est défini par $\phi^{-1}(g) = (\phi(g))^{-1}$ pour tout $g \in G$. L'élément neutre de G^R est l'application définie par $1(g) = 1$ pour tout $g \in G$. Si $u \in U(R)$, alors $g(u) \in U(R)$ pour tout $g \in G$ et l'inverse de $g(u)$ est $g(u^{-1})$.

Soit M un R-module. Pour tout $r \in R$, on note r_M l'opérateur de M qui définit l'action de r sur M et R_M l'ensemble de tous ces opérateurs. Si $r \in U(R)$, alors r_M est un R-automorphisme de M.

On dit qu'une bijection additive f de M vers M est un quasi-R-automorphisme si $f \circ R_M = R_M \circ f$.

On note $Q\,\mathrm{Aut}_R(M)$ l'ensemble de tous les quasi-R-automorphismes de M: c'est un groupe qui contient tous les R-automorphismes de M. De plus, $Q\,\mathrm{Aut}_R(R)$ contient tous les automorphismes d'anneaux de R.

On munit $Q\,\mathrm{Aut}_R(M)$ d'une structure de $U(R)$-module en posant $u \cdot f = u_M \circ f$.

Notons $\overline{Q\,\mathrm{Aut}}_R(M)$ l'ensemble de tous les couples (f, j), où f est un quasi-R-automorphisme de M et j un automorphisme d'anneaux de R vérifiant $f \circ r_M = j(r)_M \circ f$ pour tout $r \in R$. Naturellement, $\overline{Q\,\mathrm{Aut}}_R(M)$ est muni d'une structure de groupe.

On dit qu'un groupe additif M est un G-module, s'il existe un morphisme de groupes η de G vers le groupe $S(M)$ des bijections additives de M vers M. Pour des raisons de simplicité, on écrira $\eta(g)(m) = g(m)$ et $\eta(g) = g_M$ pour tous $g \in G$ et $m \in M$. Il est clair que R est un G-module.

Un (R, G)-module est un R-module M qui est aussi muni d'une structure de G-module tel que le couple (g_M, g_R) appartienne à $\overline{Q\,\mathrm{Aut}}_R(M)$.

Il est clair que R est un (R, G)-module.

Soit M un (R, G)-module. Posons $\rho_\phi(g) = \phi(g)_M \circ g_M$ pour tous $\phi \in G^R$ et $g \in G$. Alors ρ_ϕ est une application de G vers $Q\,\mathrm{Aut}_R(M)$ et le couple (ρ_ϕ, g_R) appartient à $\overline{Q\,\mathrm{Aut}}_R(M)$.

Pour que ρ_ϕ soit un morphisme de groupes, il faut qu'on ait la relation:

$$\phi(gg') = g(\phi(g'))\phi(g) \qquad \text{pour tous } g, g' \in G. \tag{α}$$

Notons $Z(G, R)$ le sous-ensemble de G^R dont les éléments vérifient la relation (α): c'est un sous-groupe de G^R. Si $\phi \in Z(G, R)$, alors $\phi(e) = 1$, où e est l'élément neutre de G et $\phi^{-1}(g) = g(\phi(g^{-1}))$ pour tout $g \in G$.

EXEMPLE 1. Soit M un (R,G)-module R-libre de rang 1. Si m est une R-base de M, alors $g_M(m) = r_g m$ pour tout $g \in G$; où r_g est un élément de R qui est unique parce que M est R-libre. Posons $\phi(g) = r_g$. Alors $\phi \in Z(G, R)$.

Un élément a de R est dit G-normal si $g(a) = r_g a$ pour tout $g \in G$; où r_g est un élément de R.

EXEMPLE 2. Si R est intègre, tout élément G-normal non nul de R permet de définir un élément ϕ de $Z(G, R)$.

PROPOSITION 6.1. *Soit M un R-module inversible. Si η et η' sont deux morphismes de groupes de G vers $S(M)$ compatibles avec la structure de R-module, alors il existe $\phi \in Z(G, R)$ tel que $\eta'(g) = \phi(g)_M \circ \eta(g)$ pour tout $g \in G$.*

Preuve. On sait que $(\eta(g), g_R)$ et $(\eta'(g), g_R)$ appartiennent à $\overline{Q\,\mathrm{Aut}}_R(M)$; donc $(\eta'(g) \circ \eta(g)^{-1}, \mathrm{id}_R) \in \overline{Q\,\mathrm{Aut}}_{\mathrm{R}}(M)$. Ceci signifie que $(\eta'(g) \circ \eta(g)^{-1} \in \mathrm{Aut}_R(M)$. Or,

$$\mathrm{Aut}_R(M) \subseteq \mathrm{Hom}_R(M, M) = M \otimes_R M^* \cong R;$$

donc $\eta'(g) \circ \eta(g)^{-1} \in U(R)$.

Posons $\phi(g) = \eta'(g) \circ \eta(g)^{-1}$ pour tout $g \in G$. Alors $\phi \in G^R$. Puisque η' est un morphisme de groupes, nous avons $u_M = v_M$; où $u = \phi(gg')$ et $v = g(\phi(g'))\phi(g)$ pour tous $g, g' \in G$. D'autre part, il existe des éléments m_i dans M et f_i dans M^* en nombre fini tels que $\sum f_i(m_i) = 1$. Pour chaque i, nous avons $um_i = vm_i$; donc $uf_i(m_i) = vf_i(m_i)$. Il en résulte que $u = v$; donc $\phi \in Z(G, R)$.

Soient ϕ un élément de $Z(G, R)$ et M un (R, G)-module. Donc ρ_ϕ est un morphisme de groupes. On peut définir un nouveau (R, G)-module $M(\phi)$ qui coïncide avec M comme R-module et dont l'action de G est définie par

$$g \cdot m = \rho_\phi(g)(m) = \phi(g)_M \circ g_M(m) = \phi(g)(g(m)).$$

Un (R, G)-module est dit inversible s'il est inversible en tant que R-module. Par exemple R est un (R, G)-module inversible.

D'après la proposition (6.1), si M est un (R, G)-module inversible, alors les $M(\phi)$ (où ϕ parcourt $Z(G, R)$ sont les seuls (R, G)-modules qui coïncident avec M comme R-modules.

LEMME 6.2. *Soient M un (R, G)-module inversible et $m \in M$ tels que $M = Rm$. Alors M est R-libre et m est une R-base de M.*

Preuve. Il faut utiliser l'élément m^* de M^* défini par $m^*(m) = 1$.

PROPOSITION 6.3. (1) *Soit $\phi \in Z(G, R)$. Alors, il existe un (R, G)-module inversible M, un élément x dans M tels que $M = Rx$ et $g(x) = \phi(g)x$ pour tout $g \in G$. Réciproquement, soient M un (R, G)-module inversible et $x \in M$ tels que $M = Rx$. Alors il existe $\phi \in Z(G, R)$ tel que $g(x) = \phi(g)x$ pour tout $g \in G$.*

(2) *Soient N un autre (R, G)-module inversible, $y \in N$ tels que $N = Ry$. Soit $\phi' \in Z(G, R)$ tel que $g(y) = \phi'(g)y$ pour tout $g \in G$. Pour qu'il existe un (R, G)-isomorphisme i: $M \to N$ vérifiant $i(x) = y$, il faut et il suffit que $\phi = \phi'$.*

Preuve. (1) Par définition, le (R, G)-module $R(\phi)$ est R-isomorphe à R; donc il est inversible. Nous avons $g \cdot 1 = \phi(g) \cdot 1$; d'où la première assertion. La réciproque est déja signalée (cf. lemme (6.2) et exemple 1).

(2) Notons id l'application identique de $R(\phi)$ vers $R(\phi')$: elle est R-linéaire. Elle est G-linéaire si et seulement si $\phi = \phi'$. Considérons les (R, G)-isomorphismes j de $R(\phi)$ vers M et j' de $R(\phi')$ vers N définis par $j(r) = rx$ et $j'(r) = ry$ pour tout $r \in R$. Posons $i = j' \circ \mathrm{id} \circ j^{-1}$. Alors i est le seul R-isomorphisme qui vérifie $i(x) = y$. Il est G-linéaire si et seulement si id est G-linéaire; d'où le résultat.

LEMME 6.4. *Tout élément inversible de R est un élément G-normal.*

Preuve. Soit u un élément inversible de R; donc $R = Ru$. D'après (6.3(1)), il existe $\phi \in Z(G, R)$, tel que $g(u) = \phi(g)u$ pour tout $g \in G$.

Posons $R_\phi = \{a \in R$ tel que $g(a) = \phi(g)a$ pour tout $g \in G$; où $\phi \in Z(G, R)\}$. Donc $R_1 = R^G$; R_ϕ est un sous-groupe additif de R; RR_ϕ est un sous-(R, G)-module de R et $1 \in R_\phi$ si et seulement si $\phi = 1$. Si $a \in R_\phi$ et si a est inversible, alors $a^{-1} \in R_{\phi^{-1}}$.

Posons $Z^u(G, R) = \{\phi \in Z(G, R)$ tel que R_ϕ contient un élément inversible de $R\}$ et $Z^s(G, R) = \{\phi \in Z(G, R)$ tel que $RR_\phi = R$ et $RR_{\phi^{-1}} = R\}$. Ce sont des sous-groupes de

$$Z(G, R) \text{ et } Z^u(G, R) \subseteq Z^s(G, R).$$

Si M est un R-module inversible, sa classe dans $\mathrm{Pic}(R)$ sera notée $[M]$. Les classes d'isomorphismes des (R, G)-modules inversibles forment un groupe commutatif. Nous allons le noter $\mathrm{Pic}(R, G)$. Si M est un (R, G)-module inversible, on note $\{M\}$ sa classe dans $\mathrm{Pic}(R, G)$. Nous avons un homophormisme de groupes q:

$$\mathrm{Pic}(R, G) \to \mathrm{Pic}(R); \qquad \{M\} \to [M].$$

Soit $\phi \in Z(G, R)$. D'après la proposition (6.3), il existe un (R, G)-module inversible M, un élément x dans M tels que

$$M = Rx \qquad \text{et} \qquad g(x) = \phi(g)x \qquad \text{pour tout } g \in G,$$

un tel M sera noté $R[\phi]$. Il est clair que $R[\phi]$ et $R(\phi)$ sont (R, G)-isomorphes. On définit un morphisme de groupes p de $Z(G, R)$ vers $\operatorname{Pic}(R, G)$ et posant $p(\phi) = \{R[\phi]\}$.

THÉORÈME 6.5. *Sous les hypothèses et avec les notations ci-dessus, on a une suite exacte de groupes*

$$1 \to Z^u(G, R) \to Z(G, R) \to \operatorname{Pic}(R, G) \to \operatorname{Pic}(R).$$

Preuve. Il suffit d'adapter la preuve de (3.13) à notre contexte en faisant les changements appropriés.

A partir de maintenant, R est de plus une algèbre sur un corps k algébriquement clos et G un groupe algébrique affine sur k. Dans le contexte actuel, un espace vectoriel M sur k est un G-module si le morphisme g_M appartient au groupe linéaire $GL(M)$ de M qui est un sous-groupe de $S(M)$. Un G-module M est rationnel si pour chaque $m \in M$, le translaté $G(m)$ de m engendre un sous-espace vectoriel W de dimension finie de M et le morphisme induit de G vers $GL(W)$ est un morphisme de groupes algébriques sur k.

Dans la suite, on suppose que l'action de G sur R est rationnelle.

Remarque. Dans (6.1), si η et η' agissent rationnellement sur M, alors l'élément ϕ appartient à $Z_R(G, R)$.

Nous pouvons utiliser le lemme 1, la proposition 2, le corollaire 4 et la proposition 5 de [10], puisque leurs démonstrations ne font pas intervenir les hypothèses (2) et (3) de la page 305.

Posons $\operatorname{Pic}_R(R, G) = \{\{M\} \in \operatorname{Pic}(R, G)$ tel que M est rationnel$\}$: c'est un sous-groupe de $\operatorname{Pic}(R, G)$. Nous avons un homormorphisme de groupes $\operatorname{Pic}(S) \to \operatorname{Pic}_R(R, G)$; $[M] \to \{M_R\}$; où $M_R = R \otimes_S M$. Nous allons étudier le groupe de Picard de l'anneau S.

Posons $Z_R(G, R) = \{\phi \in Z(G, R)$ tel que $\operatorname{Im} \phi$ est contenue dans un sous-G-module de dimension finie de $R\}$

Tout caractère de G appartient à $Z_R(G, R)$.

Remarque. L'image de tout élément de $Z_R(G, R)$ est contenue dans une sous-algèbre de dimension finie G-stable de R dans certains cas:

1*er cas*. Si tout sous-G-module de dimension finie de R est contenu dans une sous-algèbre de dimension finie G-stable de R. Par exemple, si R est algébrique sur k.

2*ème cas*. Si $Z_R(G, R) = \chi(G)$ l'ensemble des caractères de G ou mieux encore, si $Z(G, R) = \chi(G)$: c'est l'hypothèse (3) faite sur R dans [10] à la page 305.

LEMME 6.6. *Soit $\phi \in Z(G, R)$. Alors $R[\phi]$ est rationnel si et seulement si $\phi \in Z_R(G, R)$.*

Preuve. On raisonne exactement comme en (3.15) en faisant les changements appropriés.

Posons

$$Z_R^u(G, R) = Z_R(G, R) \cap Z^u(G, R)$$

et

$$Z_R^s(G, R) = Z_R(G, R) \cap Z^s(G, R).$$

Ce sont des sous-groupes de $Z_R(G, R)$ et $Z_R^u(G, R) \subseteq Z_R^s(G, R)$.

THÉORÈME 6.7. *Nous avons une suite exacte de groupes*

$$1 \to Z_R^u(G, R) \to Z_R(G, R) \to \mathrm{Pic}_R(R, G) \to \mathrm{Pic}(R).$$

Preuve. D'après (6.6), la restriction de p à $Z_R(G, R)$ définit un morphisme de groupes de $Z_R(G, R)$ vers $\mathrm{Pic}_R(R, G)$. Le théorème (6.5) donne le résultat.

LEMME 6.8. *Soit $\phi \in Z_R(G, R)$. Alors $R[\phi]$ est de type invariant si et seulement si $RR_{\phi^{-1}} = R$.*

Preuve. Le raisonnement est identique à celui de (3.17) ou [10, lemme 7).

Le lemme (6.8) peut être amélioré si G est linéairement réductif.

COROLLAIRE 6.9. *Soient G linéairement réductif et $\phi \in Z_R(G, R)$. Alors $R[\phi]$ est de type invariant si et seulement si $\phi \in Z_R^s(G, R)$.*

Preuve. Il suffit d'adapter la preuve de (3.18) avec les changements appropriés. On utilise [10, corollaire 4] à la place de (3.9).

THÉORÈME 6.10. *Soit G linéairement réductif. Alors il existe une suite exacte de groupes*

$$1 \to Z_R^u(G, R) \to Z_R^s(G, R) \to \mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(R).$$

Preuve. Le raisonnement est similaire à celui de (3.19). On utilise [10, prop. 5] à la place de (3.14) et (6.9) à la place de (3.18).

Même si G n'est pas linéairement réductif, on peut appliquer certains des résultats précédents.

THÉORÈME 6.11. *Il existe un sous-groupe E de $Z_R^s(G,R)$ et une suite exacte de groupes $E \to$ Pic$(S) \to$ Pic(R).*

Preuve. Le raisonnement est identique à celui de (3.20). On utilise [10, prop. 5] à la place de (3.14) en faisant les changements appropriés.

Le théorème (6.11) donne assez d'informations sur le groupe Pic(S) si le groupe $Z_R^s(G,R)$ est réduit à $\{1\}$.

On dit que la condition $(**)$ est satisfaite dans R si l'image de tout élément de $Z_R(G,R)$ est contenue dans une sous-algèbre W de dimension finie G-stable de R et $W \setminus \{0\} \subseteq U(R)$.

Pour le lemme suivant et son corollaire, on suppose que la condition $(**)$ est satisfaite dans R.

LEMME 6.12. *Supposons qu'il existe un idéal maximal G-invariant J de R tel que $R/J = k$. Si $\phi \in Z_R^s(G,R)$ avec $\phi \neq 1$, alors $RR_\phi \neq R$. En particulier, $Z_R^s(G,R) = \{1\}$.*

Preuve. On raisonne comme dans [10, lemme 11] en faisant les changements appropriés.

COROLLAIRE 6.13. *S'il existe un idéal maximal G-invariant J de R tel que $R/J = k$, alors* Pic$(S) \to$ Pic(R) *est une injection.*

Preuve. Le raisonnement est similaire à celui de [10, corollaire 12].

Remarques. (1) Dans la démonstration du théorème 6 de [10] à la dixième ligne, il semble qu'on n'a pas besoin d'imposer aux éléments inversibles de R d'être des semi-invariants.

(2) Nos résultats généralisent ceux de [10]. Nous avons tout simplement remplacé l'ensemble $\chi(G)$ des caractères de G par un ensemble plus gros $Z_R(G,R)$ qui est lui-même un sous-groupe de $Z(G,R)$. Si $Z(G,R)$ est réduit à $\chi(G)$ (c'est l'hypothèse (3) faite à la page 305 de [10]), on retrouve les résultats de [10].

Nous allons donner un exemple où la condition $(*)$ du paragraphe 3 est satisfaite.

Soient k de caractéristique nulle et G connexe d'algèbre de Lie F. Soit M un (R,G)-module rationnel. D'après [8, lemme 2, p. 559], M est un $R\#U(\mathsf{F})$-module localement fini.

LEMME 6.14. *Soit a un élément de R. Alors*

(1) *a est G-normal si et seulement si a est F-normal.*

(2) *a est G-semi-invariant si et seulement si a est F-semi-invariant.*

(3) *a est G-invariant si et seulement si a est F-invariant.*

Preuve. (1) Soit a G-normal; donc Ra est un idéal G-invariant de R, c'est-à-dire Ra est un sous (R,G)-module de R. On en déduit que Ra est un sous-$R\#U(\mathsf{F})$-module de R; donc a est F-normal. Pour démontrer la réciproque, posons $W = U(\mathsf{F})(a)$. Comme R est rationnel, il existe d'après

[8, preuve du lemme, p. 559] un G-module V de dimension finie contenant W. Or, en caractéristique zéro, il est bien connu que G et F laissent stables les mêmes sous-espaces vectoriels de V. Donc W est G-stable. Il en résulte que RW est un sous (R, G)-module de R. D'autre part, $Ra \subseteq RW$, car $a \in W$. Supposons maintenant que a soit F-normal; donc $W \subseteq Ra$. On en déduit que $RW = Ra$; donc a est G-normal.

(2) Si a est G-semi-invariant, alors ka est un sous-G-module de dimension 1 de R, donc ka est un sous-F-module de R; donc a est F-semi-invariant. Pour la réciproque, remarquons que $W = U(\mathsf{F})(a) = ka$, si a est F-semi-invariant. Un raisonnement similaire à celui de (1) montre que W est G-stable; donc a est G-semi-invariant.

(3) Comme R est rationnel, l'élément a appartient à un sous-G-module V de dimension finie de R. Ce sous-espace V est aussi F-stable. Il est bien connu que G et F possèdent les mêmes éléments invariants dans V.

COROLLAIRE 6.15. *Soit R normale de type fini. Alors $Z(\mathsf{F}, R) = \chi(\mathsf{F})$.*

Preuve. Soit $\phi \in Z(\mathsf{F}, R)$. Supposons que R_ϕ ne soit pas réduit à $\{0\}$. Soit $a \in R_\phi$. Donc a est un élément F-normal de R. D'après (6.14(1)), a est un élément G-normal de R. Comme R est intègre, il existe $\psi \in Z(G, R)$ tel que $g(a) = \psi(g)a$ pour tout $g \in G$. D'après [10, p. 305], ψ est un caractère de G. Donc a est G-semi-invariant. D'après (6.14(2)), a est F-semi-invariant. Comme R est intègre, ϕ est un caractère de F.

Si R_ϕ est réduit à $\{0\}$, alors est ϕ un élément quelconque de $Z(\mathsf{F}, R)$. On peut donc supposer que ϕ est un caractère de F.

REFERENCES

1. A. D. Bell, Localization and ideal theory in iterated differential operator rings, *J. Algebra* **106** (1987), 376–401.
2. H. Cartan and S. Eilenberg, "Homological Algebra," Princeton University Press, 1956.
3. J. Dixmier, "Algèbres enveloppantes," Gauthier–Villars, Paris, 1974.
4. I. Doraiswamy, Projectivity of modules over rings with suitable group action, *Comm. Algebra* **10** (1982), 787–795.
5. F. Du Cloux, Foncteurs dérivés des vecteurs g-finis (cf. Représentations de longueur finie des groupes de Lie résolubles), *Mem. Amer. Math. Soc.* **407** (1989).
6. G. L. Fel'dman, Global dimension of rings of differential operators, *Trans. Moscow Math. Soc.* (1982), 123–147.
7. T. Guédénon, Sur la cohomologie g-finie, *Comm. Algebra* **21** (1993), 1103–1139.
8. T. Levasseur, Critère d'induction et de coinduction pour certains anneaux d'opérateurs différentiels, *J. Algebra* **110** (1987), 530–562.
9. A. R. Magid, Cohomology of rings with algebraic group action, *Adv. Math.* **59** (1986), 124–151.
10. A. R. Magid, Picard groups of rings of invariants, *J. Pure Appl. Algebra* **17** (1980), 305–311.
11. S. M. Skryabin, An algebraic approach to the Lie algebras of Cartan type, *Comm. Algebra* **21** (1993), 1229–1336.