

JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS 47, 284–309 (1974)

## Phénomènes de Transmission à Travers des Couches Minces de Conductivité Élevée

HUNG PHAM HUY ET ENRIQUE SANCHEZ-PALENCIA

*Mécanique des Fluides, Équipe de Recherche Associée au C.N.R.S.,  
4, Place Jussieu (Tour 66), 75230 PARIS CEDEX 05*

*Submitted by J. L. Lions*

### 1. INTRODUCTION

L'objet de ce travail est d'étudier certaines propriétés de comportement limite dans des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre où l'inconnue  $\phi$  satisfait à la surface de séparation entre deux domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  à des conditions de transmission du type:

$$\phi|_1 = \phi|_2 \quad (1.1)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_1 = \sigma_2 \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_2 \quad (1.2)$$

où  $n$  représente la normale à la surface et  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  des constantes associées à chacun des domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Nous étudions la limite de la solution quand le rapport  $\sigma_2/\sigma_1$  ou l'épaisseur du domaine  $\Omega_1$  (domaine "aplati" en un sens qui sera précisé par la suite) tendent vers zéro, séparément ou simultanément. Nous mettrons en évidence, en particulier, que ces deux passages à la limite ne sont pas permutable.

Les conditions aux limites (1.1), (1.2) se présentent dans des problèmes de conductivité thermique, où  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  désignent les conductivités de deux corps en présence ou d'électrostatique ou magnétostatique, où  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  sont les constantes diélectriques ou les perméabilités magnétiques. Tenant compte de ces applications, qui ont motivé cette étude, nous nous sommes efforcés de présenter les résultats de la façon la plus explicite possible, au lieu de les donner sous forme abstraite, en termes de solutions d'équations fonctionnelles dans des espaces de Banach.

En outre, nous n'avons pas cherché les hypothèses minima suffisantes pour les démonstrations; en particulier, les données seront toujours supposées régulières en un sens qui sera évident par la suite.

Les problèmes avec conditions d'interface du type (1.1), (1.2) ont été

étudiés d'un point de vue mathématique (cf. par exemple, [1-3]) conduisant, notamment, à des théorèmes d'existence, unicité et à des propriétés de régularité des solutions. Il n'est pas difficile (voir Sect. 2) d'étudier le comportement limite des solutions de ces problèmes quand des paramètres tendent vers certaines valeurs limites, par exemple,  $\sigma_2 \rightarrow \infty$ , ce qui permet d'établir le sens précis de certaines propriétés physiques telles que "le potentiel électrique dans un corps infiniment conducteur est constant" [4] et plus exactement, d'établir dans quel sens le comportement d'un corps de grande conductivité est proche de celui d'un corps idéal de conductivité infinie. De même, les méthodes de l'analyse fonctionnelle permettent d'étudier des problèmes de perturbation des solutions par rapport à des modifications de la forme des domaines dans lesquels elles sont définies [5, Sect. 3.6], en particulier, l'influence produite dans la solution d'un problème de transmission par la présence d'une couche mince (dont l'épaisseur tend vers zéro) d'un matériau donné plongée dans un milieu environnant formé d'un autre matériau (cf. Sect. 2). En combinant les deux passages à la limite qu'on vient de décrire, on est amené à étudier des phénomènes de transmission à travers des couches minces et fortement conductrices, ce qui constitue l'objet de cet article. Il est à remarquer que les deux passages à la limite "épaisseur de la couche tend vers zéro" et "conductivité tend vers l'infini" ne sont pas permutables (Sect. 2), et que, si on les effectue simultanément la solution limite dépend de la limite du produit de la conductivité par l'épaisseur de la couche (Sect. 3).

Signalons que dans la théorie de la diffraction des ondes électromagnétiques, il est souvent question des "écrans d'épaisseur nulle d'un conducteur parfait", pour lesquels on impose tout simplement les conditions aux limites d'un conducteur parfait sur une surface géométrique d'épaisseur nulle (cf. par ex. [6]). Ce problème est, à la rigueur, en dehors du champ d'application de notre étude, mais on serait tenté d'affirmer que ces conditions aux limites ne sont appropriées que dans le cas où le produit de l'épaisseur par la conductivité est grand. Toutefois, cela est en accord avec des mises au point de terminologie faites par des électrodynamiciens [4, Sec. 4.16; 7].

La Sect. 3 est consacrée à l'étude des plaques minces de conductivité élevée quelle que soit la valeur du produit de la conductivité par l'épaisseur. Il s'avère que le comportement limite est décrit par un phénomène physique complexe, qui combine une propagation bidimensionnelle à l'intérieur de la plaque et une autre tridimensionnelle dans l'espace environnant, avec des conditions aux limites qui couplent les deux phénomènes. Signalons certaines publications où l'on a introduit aussi des conditions aux limites non classiques pour certains problèmes d'électromagnétisme [8-10] ou de conduction de la chaleur [11, 12] et une étude de l'influence de l'épaisseur de l'écran dans un problème de diffraction [13].

Les problèmes de passage à la limite se ramènent, pour leur résolution, à

des perturbations des coefficients d'une forme bilinéaire sur un espace de Hilbert, ce qui nous a permis de nous inspirer largement de [5, Sect. 3.6; 14]. De ce point de vue on sait [5, Sect. 3.6; 15–17] que les solutions des problèmes elliptiques sont continues par rapport à des modifications des coefficients continues dans certaines topologies. Nos résultats des Sects. 3 et 4 montrent que cela n'est plus vrai pour des modifications des coefficients continues dans la topologie des distributions (voir aussi le contre-exemple de [17, p. 661–663; 18 et 12]).

La Sect. 4 est consacrée à l'étude de problèmes analogues aux précédents mais où le domaine rempli par le milieu très conducteur  $a$ , à la limite, dimension un ou zéro (filament ou petite boule). L'étude est, en ce cas, beaucoup plus simple. A la Sect. 5, nous étudions des problèmes analogues dans le cas d'évolution.

Pour certains problèmes de transmission très proches de ceux que nous étudions ici, on connaît les solutions explicites et on peut étudier leur comportement limite quand l'épaisseur de la couche tend vers zéro et sa conductivité vers l'infini. Aussi, on peut confirmer nos résultats de la Sect. 3 par le problème de la couche sphérique et ceux de la Sect. 4 par celui de l'ellipsoïde allongé [19, p. 718–723].

Les principaux résultats de cet article avaient été énoncés dans [20 et 21].

Nos remerciements s'adressent à MM. H. Cabannes, J. L. Lions et P. Poincelot pour leurs encouragements, intérêt et fructueuses discussions.

## 2. CARACTÈRE NON COMMUTATIF DE CERTAINS PASSAGES À LA LIMITE

### 2.1. *Enoncé du Problème et Conclusions*

Considérons (Fig. 1) un domaine borné  $D$  de l'espace euclidien tridimensionnel  $R_3$  contenant dans son intérieur une portion  $\omega$  de surface régulière et une suite  $\Omega_i$  de domaines tridimensionnels qui tendent vers  $\omega$  (variété

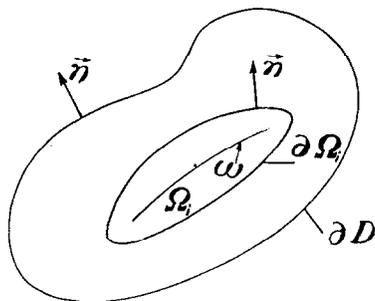


FIGURE 1

bidimensionnelle) au sens suivant: "La mesure de  $\Omega_i \rightarrow 0$  si  $i \rightarrow \infty$ , et étant donné un point  $M$  n'appartenant pas à  $\omega$ , il n'appartient pas à  $\Omega_i$  pour  $i$  suffisamment élevé (dépendant de  $M$ ).

Nous travaillerons avec des fonctions éventuellement discontinues sur le contour  $\partial\Omega_i$  de  $\Omega_i$ . Des expressions telles que (2.2) ci-dessous expriment l'égalité des valeurs limites de  $\phi$  sur  $\partial\Omega_i$  lorsqu'on s'approche soit de l'intérieur ( $\Omega_i$ ), soit de l'extérieur ( $D - \Omega_i$ ), qui est évidemment l'ouvert compris entre  $\partial\Omega_i$  et  $\partial D$ . Définissons:

*Problème ( $\Omega_i, \sigma_k$ ): trouver une fonction  $\phi$  [ou  $\phi(\Omega_i, \sigma_k)$ ] définie dans  $D$  telle que*

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_i \quad \text{et} \quad D - \bar{\Omega}_i, \quad (2.1)$$

$$\phi|_{\Omega_i} = \phi|_{D-\Omega_i} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_i, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} \Big|_{D-\bar{\Omega}_i} = \sigma_k \frac{\partial\phi}{\partial n} \Big|_{\Omega_i} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_i, \quad (2.3)$$

$$\phi|_{\partial D} = \psi \quad \text{sur} \quad \partial D. \quad (2.4)$$

Ici  $\Delta$  représente l'opérateur de Laplace,  $(\partial/\partial x_1)^2 + (\partial/\partial x_2)^2 + (\partial/\partial x_3)^2$ , et  $\psi$  est une fonction donnée définie sur  $\partial D$ .

*Problème ( $\Omega_i, \infty$ ): trouver une fonction  $\phi$  [ou  $\phi(\Omega_i, \infty)$ ] satisfaisant à (2.2), (2.4) et à*

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{dans} \quad D - \Omega_i \quad (2.5)$$

$$\phi|_{\Omega_i} = \text{cte (inconnue)} \quad (2.6)$$

$$\int_{\partial\Omega_i} \frac{\partial\phi}{\partial n} \Big|_{D-\bar{\Omega}_i} ds = 0. \quad (2.7)$$

*Problème ( $\omega, \infty$ ): trouver une fonction  $\phi$  [ou  $\phi(\omega, \infty)$ ] satisfaisant à (2.4) et à*

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{dans} \quad D - \omega \quad (2.8)$$

$$\phi|_{\omega} = \text{cte (inconnue)} \quad (2.9)$$

$$\int_{\omega} \frac{\partial\phi}{\partial n} \Big|_{D-\omega} ds = 0 \quad (2.10)$$

où (2.10) signifie intégrale des deux côtés de la surface  $\omega$ .

*Problème ( $\omega, \sigma_k$ ): trouver une fonction  $\phi$  [ou  $\phi(\omega, \sigma_k)$ ] satisfaisant au problème ordinaire de Dirichlet dans le domaine  $D$ . (Cette définition est conservée pour des raisons d'uniformité), autrement dit, vérifiant (2.4) et*

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{dans} \quad D. \quad (2.11)$$

Remarquons que le problème  $(\Omega_i, \sigma_k)$  constitue un problème-type de transmission entre les deux corps  $\Omega_i$  et  $D - \bar{\Omega}_i$  de "conductivités" respectives (cf. Sect. 1)  $\sigma_k$  et 1. Le problème  $(\Omega_i, \infty)$  est un problème analogue mais avec  $\Omega_i$  de conductivité infinie; (2.7) constitue une condition aux limites globale, dont l'interprétation physique est que la chaleur totale (ou flux du vecteur déplacement électrique) reçue par le corps  $\Omega_i$  est nulle, comme correspond à un phénomène stationnaire. Cette condition détermine [puisque le problème  $(\Omega_i, \infty)$  possède une solution unique, comme on démontrera par la suite] la constante de (2.6) et fait toute la différence entre le problème  $(\Omega_i, \infty)$  et le problème ordinaire de Dirichlet dans  $D - \bar{\Omega}_i$ . Le problème  $(\omega, \infty)$  est analogue au précédent mais avec  $\Omega_i$  remplacé par  $\omega$ .

Nous énonçons maintenant (Proposition 2.1) les résultats de cette section de façon imprécise; les théorèmes rigoureux et la formulation des topologies dans lesquelles les limites ont lieu seront données dans 2.2.

PROPOSITION 2.1. *Les problèmes  $(\Omega_i, \sigma_k)$ ,  $(\Omega_i, \infty)$ ,  $(\omega, \infty)$ ,  $(\omega, \sigma_k)$  ont des solutions uniques (qui dépendent des indices  $i$  et  $\sigma_k$ ). Elles satisfont aux propriétés de limites suivantes:*

$$\lim_{\sigma_k \rightarrow \infty} \phi(\Omega_i, \sigma_k) = \phi(\Omega_i, \infty) \quad (2.12)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \phi(\Omega_i, \infty) = \phi(\omega, \infty) \quad (2.13)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \phi(\Omega_i, \sigma_k) = \phi(\omega, \sigma_k) \quad (2.14)$$

*Puisque  $\phi(\omega, \sigma_k)$  ne dépend pas de  $k$  et est différent de  $\phi(\omega, \infty)$ , les deux passages à la limite  $i \rightarrow \infty$  et  $\sigma_k \rightarrow \infty$  ne sont pas permutable. Le processus (2.12) suivi de (2.13) donne à la limite une fonction satisfaisant, sur  $\omega$  à la condition typique de corps de conductivité infinie, (2.9), tandis que le processus (2.14), suivi de  $\sigma_k \rightarrow \infty$  donne à la limite la solution de problème ordinaire de Dirichlet dans  $D$ , sans des conditions particulières sur  $\omega$ .*

Signalons que d'autres résultats analogues pour certains problèmes de magnétohydrodynamique ont été démontrés dans [22, Chap. 3; 23].

## 2.2. Étude des Passages à la Limite

Nous commençons par rendre homogène la condition aux limites (2.4) des problèmes de 2.1 en choisissant une fonction  $\phi_1$  régulière, nulle dans tous les  $\Omega_i$  et satisfaisant à (2.4). En prenant comme nouvelle inconnue (que nous continuerons de désigner par  $\phi$ )  $\phi - \phi_1$ , les problèmes des définitions 2.1-2.4 deviennent des problèmes analogues avec (2.4) remplacé par (2.15) et (2.1),

(2.5), (2.8) et (2.11) remplacés par (2.16), où  $f$ , définie par (2.17), est nulle dans tous les  $\Omega_i$

$$\phi|_{\partial D} = 0, \quad (2.15)$$

$$\Delta\phi = f, \quad (2.16)$$

$$f = -\Delta\phi_1. \quad (2.17)$$

Nous définissons à présent des espaces fonctionnels appropriés pour la résolution des problèmes de 2.1 (voir [1, 24]). Nous utilisons les symboles usuels [1] pour désigner les espaces de Lebesgue et de Sobolev. En particulier,  $L^2(D)$  est l'espace des fonctions définies p.p. dans  $D$  de carré sommable.

**DÉFINITION 2.1.**  $H_0^1(D)$  désigne l'espace des fonctions qui appartiennent ainsi que leurs dérivées premières à  $L^2(D)$  et qui sont nulles sur  $\partial D$  (au sens des traces [1]).

$W(\Omega_n)$  désigne l'espace des fonctions appartenant à  $H_0^1(D)$  et qui sont (p.p.) égales à une constante dans  $\Omega_n$ .

$W(\omega)$  désigne l'adhérence dans  $H_0^1(D)$  de l'ensemble des fonctions qui sont (p.p.) égales à une constante dans un voisinage de  $\omega$ .

Les théorèmes de trace [1 ou 25] et le fait que la convergence dans  $L^2(D)$  entraîne la convergence p.p. dans  $D$  montre que les espaces  $H_0^1(D)$ ,  $W(\Omega_n)$ ,  $W(\omega)$  sont de Hilbert.

Nous définissons à présent les solutions faibles ou généralisées associées aux problèmes proposés.

La résolution faible du problème  $(\Omega_i, \sigma_k)$  consiste à trouver  $\phi \in H_0^1(D)$  tel que  $\forall \theta \in H_0^1(D)$

$$\int_{D-\Omega_i} \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad} \theta \, d\Omega + \sigma_k \int_{\Omega_i} \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad} \theta \, d\Omega = - \int_D f\theta \, d\Omega. \quad (2.18)$$

La résolution faible du problème  $(\Omega_i, \infty)$  consiste à trouver  $\phi \in W(\Omega_i)$  tel que,  $\forall \theta \in W(\Omega_i)$

$$\int_{D-\Omega_i} \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad} \theta \, d\Omega = - \int_D f\theta \, d\Omega. \quad (2.19)$$

La résolution faible du problème  $(\omega, \infty)$  consiste à trouver  $\phi \in W(\omega)$  tel que,  $\forall \theta \in W(\omega)$

$$\int_D \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad} \theta \, d\Omega = - \int_D f\theta \, d\Omega. \quad (2.20)$$

La résolution faible du problème  $(\omega, \sigma_k)$  consiste à trouver  $\phi \in H_0^1(D)$  tel que,  $\forall \theta \in H_0^1(D)$ ,

$$\int_D \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad} \theta \, d\Omega = - \int_D f\theta \, d\Omega. \quad (2.21)$$

Les résolutions faibles et classiques des problèmes précédents sont équivalentes dans la mesure où les solutions faibles sont suffisamment régulières: c'est la situation habituelle des problèmes résolus par les méthodes de l'analyse fonctionnelle [24]. Cette équivalence est rigoureuse pour les problèmes  $(\Omega_i, \sigma_k)$  et  $(\omega, \sigma_k)$ , pour lesquels la régularité des solutions a été démontrée (cf. [3]), tandis que pour les autres problèmes elle n'a lieu que moyennant l'hypothèse de régularité. Les équivalences des définitions classiques et faibles s'établissent par les méthodes habituelles [24]. Démontrons-le, par exemple, pour le problème  $(\Omega_i, \infty)$ . Si  $\phi$  est une solution classique, en prenant  $\theta \in W(\Omega_i)$ , si l'on multiplie (2.5) [ou (2.16), après le changement] par  $\theta$  et on intègre par parties, on a compte tenu de (2.7):

$$\begin{aligned} - \int_D f \cdot \theta \, d\Omega &= - \int_{D-\bar{\Omega}_i} \Delta \phi \cdot \theta \, d\Omega \\ &= \int_{D-\bar{\Omega}_i} \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad} \theta \, d\Omega + \theta \int_{\partial\Omega_i} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_{D-\bar{\Omega}_i} \, dS \\ &= \int_{D-\bar{\Omega}_i} \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad} \theta \, d\Omega \end{aligned}$$

si bien que  $\phi$  est solution faible. Réciproquement, si  $\phi$  est une solution faible suffisamment régulière, elle vérifie (2.6) car  $\phi \in W(\Omega_i)$ . En intégrant par parties dans (2.19) on a

$$\int_D f \theta \, d\Omega = \int_{D-\bar{\Omega}_i} \Delta \phi \cdot \theta \, d\Omega + \theta \int_{\partial\Omega_i} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_{D-\bar{\Omega}_i} \, dS \quad (2.22)$$

en y prenant  $\theta$  de support compact dans  $D - \bar{\Omega}_i$ , on voit que  $\phi$  satisfait à (2.5) ou (2.15) et donc (2.22) devient

$$\theta \int_{\partial\Omega_i} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_{D-\bar{\Omega}_i} \, dS = 0$$

et en particulier, pour une  $\theta$  dont la valeur sur  $\partial\Omega_i$  ne soit pas nulle, on a (2.7). Nous sommes maintenant en mesure de formuler de façon précise la proposition 2.1 sous la forme du théorème suivant:

**THÉORÈME 2.1.** *Les problèmes  $(\Omega_i, \sigma_k)$ ,  $(\Omega_i, \infty)$ ,  $(\omega, \infty)$  et  $(\omega, \sigma_k)$ , possèdent des solutions uniques. Les propriétés de limite (2.12)–(2.14) ont lieu dans la topologie (forte) de l'espace  $H_0^1(D)$ .*

*Démonstration.* L'existence et l'unicité des solutions est une conséquence immédiate du principe de Lax–Milgram [5] étant donné que les premiers membres de (2.18)–(2.21) sont des formes bilinéaires et continues sur les

espaces correspondants et que les seconds membres sont des fonctionnelles linéaires et bornées sur ces espaces en vertu de l'inégalité de Friedrichs [24]:

$$\left| \int_D f \theta \, d\Omega \right| \leq K(D) \left( \int_D (\mathbf{grad} \theta)^2 \, d\Omega \right)^{1/2}. \quad (2.23)$$

Passons à la démonstration de (2.12). Si nous désignons  $\phi(\Omega_i, \sigma_k)$  par  $\phi_k$  ( $i$  étant fixé), en prenant  $\theta = \phi_k$  dans (2.18) et en utilisant (2.23), compte tenu que  $f$  est nulle sur  $\Omega_i$ , on a (2.24), d'où (2.25) et (2.26). ( $C$  désigne des constantes diverses):

$$\int_{D-\Omega_i} (\mathbf{grad} \phi_k)^2 \, d\Omega + \sigma_k \int_{\Omega_i} (\mathbf{grad} \phi_k)^2 \, d\Omega \leq C \left( \int_{D-\Omega_i} (\mathbf{grad} \phi_k)^2 \, d\Omega \right)^{1/2}, \quad (2.24)$$

$$\|\phi_k\|_{H_0^1(D)} \leq C, \quad (2.25)$$

$$\|\mathbf{grad} \phi_k\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \leq \frac{C}{\sigma_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (2.26)$$

De (2.25) on déduit l'existence d'une sous-suite (que nous désignons encore par  $\phi_k$ ) telle que (2.27) ait lieu, d'où (2.28). Or, de (2.26) on déduit (2.29), qui montre avec (2.28), que les dérivées premières de  $\phi^*$  sont nulles dans  $\Omega_i$ , c'est-à-dire, que  $\phi^* \in W(\Omega_i)$ .

$$\phi_k \rightarrow \phi^* \in H_0^1(D) \quad \text{dans } H_0^1(D) \text{ faible}, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} \rightarrow \frac{\partial \phi^*}{\partial x_j} \quad \text{dans } L^2(D) \text{ faible } (j = 1, 2, 3), \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega_i) \text{ fort}. \quad (2.29)$$

En prenant alors  $\theta \in W(\Omega_i)$  dans (2.18) et utilisant (2.27), on voit que  $\phi^*$  est la solution du prob.  $(\Omega_i, \infty)$  (Déf. 2.7). On a donc établi (2.12) dans la topologie faible de  $H_0^1(D)$ . Pour démontrer la convergence forte, écrivons l'identité (2.30), qui est une conséquence de (2.18); le second membre tend vers zéro en vertu de (2.27), donc le premier membre aussi, ce qui implique (puisque  $\sigma_k \rightarrow \infty$ ) que la norme dans  $H_0^1(\Omega)$  de  $\phi_k - \phi^*$  tend vers zéro.

C.Q.F.D.

$$\begin{aligned} & \int_{D-\Omega_i} [\mathbf{grad}(\phi_k - \phi^*)]^2 \, d\Omega + \sigma_k \int_{\Omega_i} [\mathbf{grad}(\phi_k - \phi^*)]^2 \, d\Omega \\ &= - \int_D f(\phi_k - \phi^*) \, d\Omega - \int_{D-\Omega_i} \mathbf{grad} \phi^* \cdot \mathbf{grad}(\phi_k - \phi^*) \, d\Omega. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Démontrons maintenant (2.13). En désignant  $\phi(\Omega_i, \infty)$  par  $\phi_i$ , et en prenant  $\theta = \phi_i$  dans (2.19) compte tenu de (2.23), on voit que les  $\phi_i$  restent bornés dans  $H_0^1(D)$ , et donc qu'il existe une sous-suite telle que

$$\phi_i \rightarrow \phi^* \quad \text{dans } H_0^1(D) \text{ faible} \quad (2.31)$$

et  $\phi^* \in W(\omega)$  en tant que limite de fonctions de  $W(\Omega_i)$  donc constantes dans des voisinages de  $\omega$ . Si  $\theta$  est une fonction de  $H_0^1(\Omega)$  constante (p.p.) dans un voisinage de  $\omega$ , pour  $i$  suffisamment élevé, en vertu de la convergence des  $\Omega_i$  vers  $\omega$  décrite dans la Sect. 2.1, elle est constante sur tous les  $\Omega_i$ , si bien que (2.19) s'écrit (2.20) et, en faisant tendre  $i$  vers l'infini on voit, en vertu de (2.31), que  $\phi^*$  satisfait à (2.20) pour tous les  $\theta$  d'un ensemble dense dans  $W(\omega)$ , donc  $\forall \theta \in W(\omega)$  et donc  $\phi^* = \phi(\omega, \infty)$ . Comme cette solution est unique, c'est toute la suite  $i$  qui satisfait à (2.31). Pour passer à la convergence forte, considérons une suite (qui existe bien)  $\psi_i \rightarrow \phi^*$  dans  $H_0^1(\Omega)$  fort et telle que chaque  $\psi_i$  appartienne à  $W(\Omega_i)$ . On a alors, compte tenu de (2.31) et de (2.19):

$$\begin{aligned} & \lim_{i \rightarrow \infty} \int_D [\mathbf{grad}(\phi_i - \psi_i)]^2 d\Omega \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_D -f\phi_i d\Omega - 2 \int_D \mathbf{grad} \phi_i \cdot \mathbf{grad} \psi_i d\Omega + \int_D [\mathbf{grad} \psi_i]^2 d\Omega \\ &= \int_D -f \cdot \phi^* d\Omega - 2 \int_D [\mathbf{grad} \phi^*]^2 d\Omega + \int_D [\mathbf{grad} \phi^*]^2 d\Omega \\ &= (1 - 2 + 1) \int_D [\mathbf{grad} \phi^*]^2 d\Omega = 0. \end{aligned} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Finalement, nous démontrons (2.14). Cette propriété n'est pas originale; elle se trouve dans [5, Sect. 3.6.2].

Si  $\phi_i$  désigne  $\phi(\Omega_i, \sigma_k)$  ( $k$  étant fixé) et  $\phi^*$  la solution du problème ordinaire de Dirichlet dans  $D$  on a (nous supposons  $\sigma_k > 1$ ):

$$\begin{aligned} & \int_D [\mathbf{grad}(\phi_i - \phi^*)]^2 d\Omega \\ & \leq \int_{D-\Omega_i} [\mathbf{grad}(\phi_i - \phi^*)]^2 d\Omega + \sigma_k \int_D [\mathbf{grad}(\phi_i - \phi^*)]^2 d\Omega \\ &= - \int_D f(\phi_i - \phi^*) d\Omega + \int_D f(\phi_i - \phi^*) d\Omega \\ & \quad + (\sigma_k - 1) \int_{\Omega_i} \mathbf{grad} \phi^* \cdot \mathbf{grad}(\phi_i - \phi^*) d\Omega \\ & \leq (\sigma_k - 1) \left( \int_D [\mathbf{grad}(\phi_i - \phi^*)]^2 d\Omega \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega_i} [\mathbf{grad} \phi^*]^2 d\Omega \right)^{1/2} \end{aligned}$$

or, le dernier membre tend vers zéro quand  $i \rightarrow \infty$ , car son premier facteur reste borné et son second tend vers zéro comme intégrale sur un domaine dont la mesure tend vers zéro d'une fonction fixée.

Le premier membre tend donc aussi vers zéro et (2.14) a lieu dans la topologie forte de  $H_0^1(\Omega)$ . Le théorème 2.1 est donc démontré.

### 3. PASSAGES À LA LIMITE SIMULTANÉS. PLAQUE MINCE ET TRÈS CONDUCTRICE

Nous considérons maintenant des problèmes du type de ceux de la Sect. 2 mais en faisant tendre la conductivité des domaines  $\Omega_i$  vers l'infini et leur épaisseur vers zéro simultanément. Les résultats dépendent de certaines hypothèses supplémentaires, ce qui donne lieu à une grande variété de problèmes et résultats. Nous avons choisi trois problèmes, ceux des Sects. 3.1 à 3.3, 3.4, et 3.5.

#### 3.1. *Énoncé du Problème et Conclusions*

Soit  $D$  ou domaine connexe borné de  $R^3$  (Fig. 2) de frontière régulière  $\partial D$ , décomposée en deux régions  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  non vides,  $D$  est divisé en deux domaines par le plan  $\omega$ , et nous supposons que  $\Gamma_2$  a une portion cylindrique *orthogonale* à ce plan dans un voisinage de leur intersection (cette dernière hypothèse a un caractère technique, probablement elle n'est pas nécessaire). Considérons aussi une suite ( $i \rightarrow \infty$ ) de domaines  $\Omega_i$  constitués par la portion de  $D$  contenue entre  $\omega$  et  $\omega$  déplacé de l'épaisseur  $e_i$  ( $e_i \rightarrow 0$  quand  $i \rightarrow \infty$ ). Soit en outre  $\sigma_i$  une suite de valeurs numériques ("conductivités") tendant vers  $+\infty$  quand  $i \rightarrow \infty$ , et  $f$  une fonction régulière définie sur  $D$ , nulle sur tous les  $\Omega_i$ .

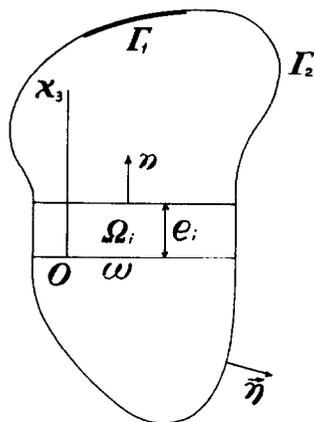


FIGURE 2

Définissons alors le problème suivant:

*Problème  $P_i$ : trouver une fonction  $\phi$  (ou  $\phi_i$ ) définie dans  $D$  et satisfaisant à (3.1)–(3.4):*

$$\Delta\phi = f \quad \text{dans} \quad \Omega_i \quad \text{et} \quad D - \bar{\Omega}_i \quad (3.1)$$

$$\phi|_{\Gamma_1} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = 0 \quad (3.3)$$

$$\phi|_{D-\bar{\Omega}_i} = \phi|_{\Omega_i}; \quad \frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{D-\bar{\Omega}_i} = \sigma_i \frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{\Omega_i} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_i. \quad (3.4)$$

Soit  $\eta$  la limite définie par (3.5). Elle peut être nulle, positive ou  $+\infty$ .

$$\eta = \lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_i e_i. \quad (3.5)$$

Le comportement limite du problème  $P_i$  dépend de  $\eta$ , comme nous démontrerons dans les paragraphes suivants (où l'on explicitera les topologies dans lesquelles les limites ont lieu). Introduisons les problèmes aux limites suivants: (remarquons que les axes  $x_1$ ,  $x_2$  sont contenus dans le plan  $\omega$ , tandis que  $x_3$  est normal):

*Problème  $L(\eta = 0)$  (c'est le problème ordinaire sans domaine  $\Omega_i$ ): trouver  $\phi$  satisfaisant à (3.1) dans  $D$  et à (3.2), (3.3).*

*Problème  $L(\eta = \infty)$ : trouver une fonction  $\phi$  définie dans  $D$  satisfaisant à (3.2), (3.3) et à*

$$\Delta\phi = f \quad \text{dans} \quad D - \omega, \quad (3.6)$$

$$\phi|_{\omega} = \text{cte (inconnue)}, \quad (3.7)$$

$$\phi \text{ est continue à la traversée de } \omega. \quad (3.8)$$

$$\int_{\omega} \frac{\partial\phi}{\partial n} dS = 0 \quad (\text{deux faces de } \omega). \quad (3.9)$$

*Problème  $L(\eta \text{ fini})$  consiste à trouver une fonction  $\phi$  définie dans  $D$ , satisfaisant à (3.2), (3.3), (3.6), (3.8) et à (3.10) et (3.11):*

$$\eta \left( \frac{\partial^2\phi}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial X_2^2} \right) = - \frac{\partial\phi}{\partial X_3}\Big|_{x_3>0} - \frac{\partial\phi}{\partial X_3}\Big|_{x_3<0} \quad \text{sur } \omega, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{\omega \cap \partial D} = 0 \quad \text{sur le contour de } \omega. \quad (3.11)$$

Remarquons que les problèmes  $L(\eta = 0)$  et  $L(\eta = \infty)$  coïncident (à des modifications des conditions aux limites sur  $\partial D$  près) avec les problèmes  $(\omega, \sigma_k)$  et  $(\omega, \infty)$  de la Sect. 2.3.

Par contre le problème  $L(\eta = \text{fini})$  est nouveau; on peut le décrire comme la combinaison d'un problème aux limites elliptique dans le domaine tridimensionnel  $D$  (3.6) et un autre dans le domaine bidimensionnel  $\omega$  (3.10), le second membre de ce problème étant couplé avec les conditions aux limites du problème tridimensionnel sur les deux faces de  $\omega$  [second membre de (3.10)].

Dans ces conditions, nous démontrerons que:

**PROPOSITION 3.1.** *Les problèmes  $P_i$ ,  $L(\eta = 0)$ ,  $L(\eta = \infty)$ ,  $L(\eta = \text{fini})$  ont des solutions uniques. Quand  $i \rightarrow \infty$ , la solution de  $P_i$  tend vers celle du problème  $L$  de la valeur correspondante de  $\eta$ , défini par (3.5).*

### 3.2. Cadre Fonctionnel et Estimations à priori

Définissons des espaces fonctionnels, appropriés pour la formulation faible des problèmes  $P_i$  et  $L$ .

**DÉFINITION 3.1.**  $V(D)$  est l'espace des fonctions de  $H^1(D)$  dont la trace sur  $\Gamma_1$  est nulle. Nous prendrons comme produit scalaire dans  $V(D)$ :

$$((u, v)) \equiv \int_D \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v \, d\Omega; \quad \|u\|^2 = ((u, v)) \quad (3.11)$$

$V(D, \omega)$  est l'espace des fonctions de  $V(D)$  dont la trace sur  $\omega$  appartient à  $H^1(\omega)$ . Nous prendrons comme produit scalaire dans  $V(D, \omega)$ :

$$(u, v)_{v(D, \omega)} = ((u, v)) + \int_{\omega} \left( \frac{\partial u}{\partial X_1} \frac{\partial v}{\partial X_1} + \frac{\partial u}{\partial X_2} \frac{\partial v}{\partial X_2} \right) d\omega \quad (3.12)$$

$V(D, \omega \text{ cte})$  est l'espace des fonctions de  $V(D)$  dont la trace sur  $\omega$  est (p.p.) égale à une constante. Nous y prendrons comme produit scalaire (3.11).

Une inégalité du type de celle de Friedrichs qu'on peut obtenir grâce à ce que  $\Gamma_1$  est de mesure (bidimensionnelle) non nulle et les théorèmes classiques de trace sur  $\Gamma_1$ , et  $\omega$  montrent que  $V(D)$ ,  $V(D, \omega)$  et  $V(D, \omega \text{ cte})$  sont des espaces de Hilbert.

Nous pouvons maintenant établir les formulations faibles des problèmes Sect. 3.1. L'équivalence (sous des hypothèses de régularité) avec les problèmes de la Sect. 3.1 s'établit par les méthodes habituelles, comme à la Sect. 2.2.

La résolution faible du problème  $P_i$  consiste à trouver  $\phi_i \in V(D)$  tel que,  $\forall \theta \in V(D)$ , on ait:

$$\int_{D-\Omega_i} \mathbf{grad} \phi_i \cdot \mathbf{grad} \theta \, d\Omega + \sigma_i \int_{\Omega_i} \mathbf{grad} \phi_i \cdot \mathbf{grad} \theta \, d\Omega = - \int_D f \theta \, d\Omega. \quad (3.13)$$

La résolution faible du problème  $L$  ( $\eta = 0$ ) consiste à trouver  $\phi \in V(D)$  tel que,  $\forall \theta \in V(D)$ , on ait:

$$\int_D \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad} \theta \, d\Omega = - \int_D f\theta \, d\Omega \quad (3.14)$$

La résolution faible du problème  $L$  ( $\eta = \infty$ ) consiste à trouver  $\phi \in V(D, \omega \text{ cte})$  tel que,  $\forall \theta \in V(D, \omega \text{ cte})$  on ait (3.14).

La résolution faible du problème  $L$  ( $\eta$  fini) consiste à trouver  $\phi \in V(D, \omega)$  tel que,  $\forall \theta \in V(D, \omega)$ , on ait:

$$\int_D \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad} \theta \, d\Omega + \eta \int_\omega \left( \frac{\partial \phi}{\partial X_1} \frac{\partial \theta}{\partial X_1} + \frac{\partial \phi}{\partial X_2} \frac{\partial \theta}{\partial X_2} \right) d\omega = - \int_D f\theta \, d\Omega. \quad (3.15)$$

Ces définitions nous permettront d'établir de façon précise la propriété énoncé dans la Proposition 3.1 (voir Théorème 3.1 à la fin de la Sect. 3.3).

Etablissons maintenant des estimations a priori pour les solutions de  $P_i$ . En prenant comme fonction-test  $\theta = \phi_i$  dans (3.13) et puisque on peut considérer  $\sigma_i > 1$ , on a le

LEMME 3.1. *Les solutions  $\phi_i$  satisfont aux estimations (3.16) et (3.17) où  $C$  désigne des constantes diverses, indépendantes de  $i$ .*

$$\int_D (\mathbf{grad} \phi_i)^2 \, d\Omega \leq C \quad (3.16)$$

$$\sigma_i \int_{\Omega_i} (\mathbf{grad} \phi_i)^2 \, d\Omega \leq C \quad (3.17)$$

Définissons maintenant à l'aide de (3.18) l'opérateur "moyenne  $i$ " qui transforme des fonctions définies sur  $\Omega_i$  en fonctions définies sur  $\omega$ :

$$U_{\text{moy}i}(X_1, X_2) = \frac{1}{e_i} \int_0^{e_i} U(X_1, X_2, X_3) \, dX_3. \quad (3.18)$$

LEMME 3.2. *L'opérateur moyenne  $i$ , défini par (3.18) commute avec  $\partial/\partial x_\lambda$  ( $\lambda = 1, 2$ ) si la fonction  $u$  et la dérivée appartiennent à  $L^2(\Omega_i)$ . En plus, il est linéaire et borné de  $L^2(\Omega_i)$  dans  $L^2(\omega)$  et de  $H^1(\Omega_i)$  dans  $H^1(\omega)$ , avec norme  $\leq e_i^{-1/2}$  dans les deux cas.*

*Démonstration.* La permutabilité se déduit sans peine de ce qu'elle est évidente pour des fonctions régulières dans  $\Omega_i$ , qui forment un ensemble

dense dans  $H^1(\Omega_i)$ . La propriété de borne s'établit à l'aide de l'inégalité de Cauchy comme il suit:

$$\begin{aligned} \int_{\omega} |U_{\text{moy}i}|^2 dX_1 dX_2 &= \int_{\omega} e_i^{-2} \left( \int_0^{e_i} U dX_3 \right)^2 dX_1 dX_2 \\ &\leq \int_{\omega} e_i^{-2} \cdot e_i \left( \int_0^{e_i} U^2 dX_3 \right) dX_1 dX_2 = e_i^{-1} \int_{\Omega_i} U^2 d\Omega. \end{aligned}$$

LEMME 3.3. *Les solutions des problèmes  $P_i$  satisfont à (3.19), où  $C$  ne dépend pas de  $i$ .*

$$\|\phi_{i\text{moy}i}\|_{H^1(\omega)} \leq C + \frac{C}{e_i \sigma_i}. \quad (3.19)$$

*Démonstration.* En appliquant le Lemme 3.2 à (3.17) on a immédiatement:

$$\left\| \frac{\partial \phi_i}{\partial X_\lambda} \right\|_{L^2(\omega)} \leq \frac{C}{e_i \sigma_i} \quad (\lambda = 1, 2). \quad (3.20)$$

D'autre part, de la continuité par rapport à  $x_3$  de l'opérateur de trace sur la section  $x_3 = \text{cte}$  [25, Sect. 113] et de (3.16) on déduit (3.21) et (3.22), d'où (3.23). C.Q.F.D.

$$\|\phi_i|_{x_3=\alpha} - \phi_i|_{x_3=0}\|_{L^2(\omega)} \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (3.21)$$

$$\|\phi_i|_{x_3=0}\|_{L^2(\omega)} \leq C \quad (3.22)$$

$$\|\phi_{i\text{moy}i}\|_{L^2(\omega)} \leq C. \quad (3.23)$$

Nous établirons maintenant le lemme fondamental de convergence:

LEMME 3.4. *Les solutions  $\phi_i$  des problèmes  $P_i$  convergent lorsque  $i \rightarrow \infty$ , vers une fonction  $\phi^*$  appartenant aux espaces  $V(D)$ ,  $V(D, \omega)$ ,  $V(D, \omega \text{ cte})$  dans les cas  $\eta = 0$ ,  $\eta$  fini et  $\eta = \infty$  respectivement, au sens de (3.24)–(3.26). En plus, si  $\eta = \infty$ ,  $\phi^*|_{\omega} = \text{cte}$  (p.p.).*

$$\phi_i \rightarrow \phi^* \quad V(D) \quad \text{faible}. \quad (3.24)$$

$$\phi_i|_{\omega} \rightarrow \phi^*|_{\omega} \quad L^2(\omega) \quad \text{fort}. \quad (3.25)$$

$$\phi_{i\text{moy}i} \rightarrow \phi^*|_{\omega} \begin{cases} L^2(\omega) & \text{faible si } \eta = 0 \\ H^1(\omega) & \text{faible si } \eta = \text{fini ou } \infty. \end{cases} \quad (3.26)$$

*Démonstration.* Pour le moment, nous ne démontrons que l'existence d'une sous-suite satisfaisant au lemme. Le fait que la limite est une fonction

bien déterminée montrera qu'il s'agit de la suite entière. (3.24) et (3.25) sont une conséquence immédiate de (3.16), compte tenu de la compacité faible des boules dans les espaces de Hilbert et de la continuité de l'opérateur de trace de  $H^1(D)$  dans  $L^2(\omega)$  [25, Sect. 117]. D'autre part, de (3.19), [compte tenu que le premier terme du second membre vient de la norme de  $\phi_{i\text{moy}i}$  dans  $L^2(\omega)$ ] on déduit l'existence de  $\psi$  tel que:

$$\phi_{i\text{moy}i} \rightarrow \psi \begin{cases} L^2(\omega) & \text{faible si } \eta = 0, \\ H^1(\omega) & \text{faible si } \eta \text{ fini ou } \infty. \end{cases} \quad (3.27)$$

En plus dans le cas  $\eta = \infty$ , de (3.27) et de (3.19) (le second terme du second membre vient de la norme dans  $L^2(\omega)$  des dérivées), on a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{i\text{moy}i}}{\partial X_\lambda} &\rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial X_\lambda} & L^2(\omega) & \text{faible} \quad (\lambda = 1, 2), \\ \frac{\partial \phi_{i\text{moy}i}}{\partial X_\lambda} &\rightarrow 0 & L^2(\omega) & \text{fort} \quad (\lambda = 1, 2), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que  $\psi|_\omega = \text{cte}$  (p.p.). Pour établir le lemme il ne reste qu'à démontrer, dans les trois cas, que  $\psi = \phi^*|_\omega$ . Ecrivons l'identité (3.28), qui représente une égalité entre éléments (par exemple) de  $L^2(\omega)$ :

$$\phi^*|_\omega - \psi = (\phi^*|_\omega - \phi_i|_\omega) + (\phi_i|_\omega - \phi_{i\text{moy}i}) + (\phi_{i\text{moy}i} - \psi). \quad (3.28)$$

De (3.24) et la continuité complète de l'opérateur de trace, on déduit (3.29), et de (3.27), (3.30). Pour la deuxième parenthèse de (3.28) on a (3.31):

$$\phi^*|_\omega - \phi_i|_\omega \rightarrow 0 \quad L^2(\omega) \text{ fort}, \quad (3.29)$$

$$\phi_{i\text{moy}i} - \psi \rightarrow 0 \quad L^2(\omega) \text{ faible}, \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \int_\omega (\phi_{i\text{moy}i} - \phi_i|_\omega)^2 d\omega &= \int_\omega e_i^{-2} \left[ \int_0^{e_i} (\phi_i|_{x_3=\text{cte}} - \phi_i|_\omega) dX_3 \right]^2 d\omega \\ &\leq e_i^{-1} \int_\omega \int_0^{e_i} (\phi_i|_{x_3=\text{cte}} - \phi_i|_\omega)^2 dX_3 d\omega \\ &\leq e_i^{-1} \cdot e_i \sup \|\phi_i|_{x_3=\text{cte}} - \phi_i|_\omega\|_{L^2(\omega)}^2, \end{aligned} \quad (3.31)$$

où le sup est par rapport à  $i$  et à  $x_3$  (appartenant à un intervalle fixé arbitrairement petit, qui contiendra tous les  $e_i$  à partir d'un certain indice). Or, le second membre de (3.31) tend vers zéro si  $i \rightarrow \infty$  en vertu de la continuité par rapport à  $x_3$  de l'opérateur de trace sur  $x_3 = \text{cte}$  [25, Sect. 113] et de (3.16). Le second membre de (3.28) tend donc vers zéro dans  $L^2(\omega)$  faible, donc le premier membre est nul, et le lemme est démontré.

Compte tenu de la démonstration qui précède et de la Déf. 3.1 le lemme suivant est évident:

LEMME 3.5. *L'élément limite  $\phi^*$  appartient aux espaces  $V(D)$ ,  $V(D, \omega)$  et  $V(D, \omega \text{ cte})$  dans les cas  $\eta = 0$ ,  $\eta$  fini et  $\eta = \infty$  resp.*

### 3.3. Passage à la Limite

Dans cette section, nous utilisons les propriétés de convergence du Lemme 3.4 pour montrer que la limite  $\phi^*$  est la solution du problème limite  $L$ . Pour cela, il nous faudra prendre dans le problème  $P_i$  des fonctions test d'une forme particulière, ce qui nous oblige à établir le lemme de densité suivant.

LEMME 3.6. *Dans le cas  $\eta$  fini (resp.  $\eta = \infty$ ,  $\eta = 0$ ), l'ensemble  $\check{V}(D, \omega)$  (resp.  $\check{V}(D, \omega \text{ cte})$ ,  $\check{V}(D)$ ) formé par les fonctions de  $V(D, \omega)$  (resp.  $V(D, \omega \text{ cte})$ ,  $V(D)$ ) qui sont p.p. indépendantes de  $x_3$  dans un intervalle  $0 \leq x_3 \leq \delta$  qui dépend de la fonction (dans le cas  $\eta = 0$ , les fonctions indépendantes de  $x_3$ , à valeurs dans  $C^\infty(\omega)$ ) est un ensemble dense dans  $V(D, \omega)$  (resp.  $V(D, \omega \text{ cte})$ ,  $V(D)$ ).*

*Démonstration.* Nous l'expliciterons seulement pour  $\eta$  fini. En utilisant une partition de l'unité on voit qu'il suffit de démontrer qu'on peut approcher dans la topologie de  $V(D, \omega)$ , les fonctions nulles pour  $|x_3| \geq a$ , c'est-à-dire, de support contenu dans la partie cylindrique de  $D$ . Dans ces conditions, si  $U \in V(D, \omega)$ , nous construirons  $U_\delta$ , définie par

$$U_\delta(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} = U(x_1, x_2, x_3) & \text{si } x_3 \leq 0 \\ = U(x_1, x_2, 0) & \text{si } 0 \leq x_3 \leq \delta \\ = U(x_1, x_2, x_3 - \delta) & \text{si } x_3 \geq \delta \end{cases}$$

qui est bien une fonction de  $\check{V}(D, \omega)$  car  $U(x_1, x_2, 0) \in H^1(\omega)$ . La "continuité en moyenne" des fonctions de carré sommable ([5], p. 57), appliquée aux dérivées premières montre immédiatement que  $U_\delta$  tend vers  $U$  dans la topologie de  $V(D, \omega)$ .

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer de façon précise la Proposition 3.1, sous la forme:

THÉORÈME 3.1. *Les problèmes  $P_i$  et  $L$  ont des solutions uniques. Si  $i \rightarrow \infty$ , la solution  $\phi_i$  de  $P_i$  tend vers celle de  $L$  [suivant les valeurs de  $\eta$  fini par (3.5)] dans la topologie du Lemme 3.4.*

*Démonstration.* L'existence est une conséquence immédiate du lemme de Lax-Milgram. Ensuite fixons dans (3.13) une fonction  $\theta$  de  $\check{V}(D)$ ,  $\check{V}(D, \omega)$

ou  $\tilde{V}(D, \omega \text{ cte})$  suivant le cas. A partir d'un certain  $i$ , (3.13) prend la forme:

$$\int_D \mathbf{grad} \phi_i \cdot \mathbf{grad} \theta \, d\Omega + \int_D f\theta \, d\Omega = \begin{cases} = (\sigma_i - 1) \int_{\Omega_i} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial X_1} \frac{\partial \theta}{\partial X_1} + \frac{\partial \phi_i}{\partial X_2} \frac{\partial \theta}{\partial X_2} \right) d\Omega & \text{si } \eta = \text{fini ou } 0, \\ = 0 & \text{si } \eta = \infty. \end{cases} \quad (3.32)$$

En utilisant (3.24), on peut passer à la limite dans le premier membre de (3.32), et on voit, dans le cas  $\eta = \infty$ , que  $\phi^*$  est la solution du problème  $L(\eta = \infty)$ . Le théorème est démontré dans ce cas. Pour la même raison, dans les deux autres cas, il suffit de démontrer que:

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} (\sigma_i - 1) \int_{\Omega_i} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial X_1} \frac{\partial \theta}{\partial X_1} + \frac{\partial \phi_i}{\partial X_2} \frac{\partial \theta}{\partial X_2} \right) d\Omega \\ = \eta \int_{\omega} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial X_1} \frac{\partial \theta}{\partial X_1} + \frac{\partial \phi^*}{\partial X_2} \frac{\partial \theta}{\partial X_2} \right) d\omega \quad (\eta = \text{fini ou } 0). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Dans le cas  $\eta = 0$ , puisque  $\theta$  est fixée indépendante de  $x_3$  dans  $\Omega_i$ , on a (3.34), et en appliquant l'inégalité de Cauchy ou premier membre de (3.33) on voit grâce à (3.17) qu'il est borné par la quantité (3.35), qui tend vers zéro. Le théorème est donc démontré pour  $\eta = 0$ .

$$\int_{\Omega_i} \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial X_2} \right)^2 \right] d\Omega \leq C e_i, \quad (3.34)$$

$$C(\sigma_i - 1) \sigma_i^{-1/2} e_i^{1/2} = C \left( \frac{\sigma_i - 1}{\sigma} \right)^{1/2} [(\sigma_i - 1) e_i]^{1/2}. \quad (3.35)$$

Dans le cas  $\eta$  fini, puisque  $\theta$  ne dépend pas de  $x_3$  dans  $\Omega_i$ , on peut transformer le second membre de (3.32) sous la forme (3.36) or, on a (3.37) et, d'après (3.26), (3.38), ce qui permet de passer à la limite dans le dernier membre de (3.36) et d'établir (3.33).

$$\begin{aligned} (\sigma_i - 1) \int_{\Omega_i} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial X_1} \frac{\partial \theta}{\partial X_1} + \frac{\partial \phi_i}{\partial X_2} \frac{\partial \theta}{\partial X_2} \right) d\Omega \\ = (\sigma_i - 1) \int_{\omega} \left( \frac{\partial \theta}{\partial X_1} \int_0^{e_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial X_1} dX_3 + \frac{\partial \theta}{\partial X_2} \int_0^{e_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial X_2} dX_3 \right) d\omega \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} = e_i (\sigma_i - 1) \int_{\omega} \left( \frac{\partial \theta}{\partial X_1} \frac{\partial \phi_{i\text{moy}i}}{\partial X_1} + \frac{\partial \theta}{\partial X_2} \frac{\partial \phi_{i\text{moy}i}}{\partial X_2} \right) d\omega \\ e_i (\sigma_i - 1) \frac{\partial \theta}{\partial X_j} \rightarrow \eta \frac{\partial \theta}{\partial X_j} \quad L^2(\omega) \text{ fort} \quad (j = 1, 2) \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial \phi_{i\text{moy}i}}{\partial X_j} \rightarrow \frac{\partial \phi^*}{\partial X_j} \Big|_{\omega} \quad L^2(\omega) \text{ faible} \quad (j = 1, 2). \quad (3.38)$$

Le Théorème 3.1 est démontré.

### 3.4. Cas où la Couche n'Arrive pas Jusqu'au Bord

On peut faire [20] une étude analogue à celle des Sects. 3.1–3.3 dans le cas où la couche  $\omega$  n'arrive pas jusqu'à  $\partial D$ : aucune hypothèse sur la forme de  $\partial D$  n'est nécessaire dans ce cas. La seule modification à introduire est dans la démonstration du lemme de densité 3.6. La difficulté supplémentaire consiste en ce que la fonction  $U_\delta$  de 3.3 n'appartient plus à  $V(D, \omega)$ , car la trace sur  $x_3 = 0$  est une fonction de  $H^1$  seulement sur  $\omega$ .

Néanmoins, *tous les résultats des paragraphes 3.1–3.3 restent valables*. Pour établir le lemme de densité, nous procédons comme il suit. En utilisant une partition de l'unité et des cartes locales, on se ramène au problème suivant (Fig. 3).

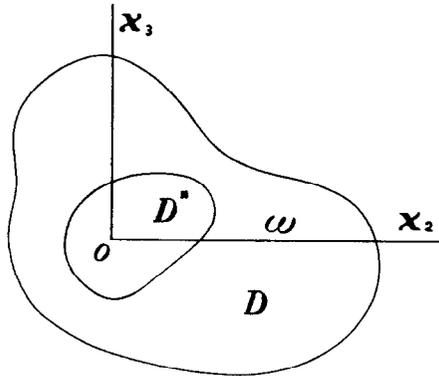


FIGURE 3

Soit  $D^*$  un domaine difféomorphe à une boule coupée par le demi-plan  $\omega$  représenté en coordonnées locales par  $x_3 = 0, x_2 \geq 0$ . Soit  $u \in H_0^1(D^*)$  avec  $u|_\omega \in H^1(\omega)$ . On demande d'approcher  $u$  dans la norme de  $V(D, \omega)$  par des fonctions de  $V(D, \omega)$  indépendantes de  $x_3$  dans un voisinage de  $\omega$ .

Ce problème est résoluble. En effet,  $u|_\omega \in H^1(\omega)$  donc, on peut la prolonger (par symétrie, par exemple) à une fonction  $\tilde{u}$  définie sur  $D^* \cap \{x_3 = 0\}$ , où elle appartient à  $H^1$ . Si maintenant  $\theta(x_3)$  est une fonction indéfiniment dérivable de support assez petit autour de  $x_3 = 0$  et avec  $\theta(0) = 1$  dans un voisinage de l'origine, la fonction  $\theta\tilde{u} \in H^1(D, \omega)$  et est indépendante de  $x_3$  dans un voisinage de  $\omega$ . Il suffit donc de démontrer qu'une fonction  $v = u - \theta\tilde{u}$  de trace nulle sur  $\omega$  peut être approchée par des fonctions de  $H^1(D)$  nulles dans un voisinage de  $\omega$  dans la norme de  $H^1(D)$  [qui coïncide avec celle de  $V(D, \omega)$  pour telles fonctions]. Or, cela se fait facilement à l'aide de trois processus successifs:

- (a) translation dans la direction des  $x_2$  négatifs;  
 (b) translation-écart de  $\omega$ , défini par  $u \rightarrow u_6$ :

$$u_6(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} = u(x_1, x_2, x_3 - \delta f(x_2)) & \text{si } x_3 \geq \delta f(x_2), \\ = 0 & \text{si } |x_3| \leq \delta f(x_2), \\ = u(x_1, x_2, x_3 + \delta f(x_2)) & \text{si } x_3 < -\delta f(x_2), \end{cases}$$

où  $f(x_2)$  est une fonction régulière positive pour  $x_2 > 0$ , nulle pour  $x_2 < 0$ .

(c) régularisation par convolution avec un noyau de régularisation. Les méthodes habituelles [5] de la théorie de la régularisation montrent que ces processus approchent bien la fonction  $v$ . Des démonstrations analogues peuvent être faites pour les cas limites  $\eta = 0$  et  $\eta = \infty$ , c'est-à-dire, pour les espaces  $V(D)$  et  $V(D, \omega \text{ cte})$ .

### 3.5. Cas où $\omega$ n'est pas Plane ou $\eta$ Dépend de $x$

Il n'est pas difficile d'étudier un problème légèrement plus général que celui de 3.1–3.3, mais où  $\omega$  est une surface régulière coupant orthogonalement  $\partial D$  et où les domaines  $\Omega_i$  n'ont pas une "épaisseur" uniforme. En prenant des coordonnées curvilignes  $y_1, y_2, y_3$  telles que

- (a)  $\omega$  coïncide avec la surface  $y_3 = 0$ ,  
 (b) les domaines deviennent  $0 < y_3 < e_i$ ,  
 (c) les lignes coordonnées  $y_3$  issues de  $\omega \cap \partial D$  soient contenues dans  $\partial D$  dans un voisinage de  $\omega \cap \partial D$ ,

les problèmes à étudier deviennent des problèmes analogues à ceux des sections précédentes, mais où la forme du premier membre de (3.13)–(3.15) est remplacée par la forme bilinéaire, symétrique et coercive (3.38), (3.39), obtenue par changement de variables

$$((\phi, \theta)) = \int_D a_{lm}(y) \frac{\partial \phi}{\partial x_l} \frac{\partial \theta}{\partial x_m} d\Omega_y, \quad (3.38)$$

$$a_{lm}(y) = \frac{\partial y_l}{\partial x_s} \frac{\partial y_m}{\partial x_s} \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(y_1, y_2, y_3)}, \quad (3.39)$$

Si l'on prend les coordonnées curvilignes *orthogonales* dans un voisinage de  $\omega$ , (ce qui est toujours possible grâce à ce que  $\omega$  coupe normalement  $\partial D$ ), les coefficients  $a_{31}$  et  $a_{32}$  sont nuls sur les  $\Omega_i$  et un calcul analogue à celui de (3.36) est possible. Tous les développements de 3.2, 3.3 restent valables avec la seule différence de la définition du problème  $L$  ( $\eta$  fini) qui devient:

La résolution faible du problème  $L(\eta)$  finie consiste à trouver  $\phi \in V(D, \omega)$  tel que,  $\forall \theta \in V(D, \omega)$  on ait:

$$\int_D \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad} \theta \, d\Omega + \int_{\omega} \eta(x) \nabla_{\omega} \phi|_{\omega} \cdot \nabla_{\omega} \theta|_{\omega} \, d\omega = - \int_D f\theta \, d\Omega$$

$$\eta(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_i e_i(x) \tag{3.40}$$

où  $e_i(x)$  est l'épaisseur de  $\Omega_i$  mesuré suivant la normale et  $\nabla_{\omega}$  désigne le gradient bidimensionnel sur la surface  $\omega$ .

Par ailleurs, il faudrait faire une modification analogue dans la formulation classique du problème. Le premier membre de (3.10) devient l'opérateur différentiel associé à la forme bilinéaire sur  $\omega$  de (3.40).

#### 4. ÉTUDE DU CAS OÙ L'INCLUSION EST UN FILAMENT OU UNE PETITE BOULE

Des problèmes analogues aux précédents peuvent être étudiés si  $\Omega_i$  est un domaine contenu dans un voisinage (arbitrairement petit si  $i \rightarrow \infty$ ) d'un arc de courbe régulière  $\gamma$  ou d'un point. Les résultats sont pourtant complètement différents; quel que soit  $\eta$ , la solution tend vers celle du problème de Dirichlet ordinaire dans  $D$ , si bien que les inclusions  $\Omega_i$  n'exercent aucune influence sur la solution limite. Ce comportement tient essentiellement à ce que les traces des fonctions de  $H^1(D)$  ( $D$  tridimensionnel) sur des variétés de dimension un ou zéro ne sont pas définies [26, Sect. 14].

Considérons donc à nouveau le problème  $(\Omega_i, \sigma_i)$  (Sect. 2) mais où les domaines  $\Omega_i$  sont contenus dans les ensembles  $E_i$  des points de  $D$  qui restent à distance  $< e_i$  ( $e_i \rightarrow 0$  si  $i \rightarrow \infty$ ) de l'arc de courbe régulier  $\gamma$  (qui peut se réduire à un point). Dans ces conditions on a:

**THÉORÈME 4.1.** *La solution  $\phi(\Omega_i, \sigma_i)$  du problème  $(\Omega_i, \sigma_i)$  converge dans  $H_0^1(D)$  vers celle du problème ordinaire de Dirichlet (2.21) si  $i \rightarrow \infty$ ,  $\sigma_i \rightarrow \infty$ .*

Pour la démonstration de ce théorème, nous admettons le lemme suivant, qui sera démontré par la suite:

**LEMME 4.1.** *L'ensemble  $H_0^1(D)^*$  formé par les fonctions de  $H_0^1(D)$  qui sont (p.p.) égales à une constante dans l'un des ensembles  $E_i$ , est dense dans  $H_0^1(D)$ .*

En faisant  $\theta = \phi_i = \phi(\Omega_i, \sigma_i)$  dans (2.18) on obtient immédiatement une borne pour la norme de  $\phi_i$  dans  $H_0^1(D)$  ce qui permet d'extraire une sous-

suite (qui est d'ailleurs la suite entière en vertu de l'unicité de la limite) telle que:

$$\phi_i \rightarrow \phi^* \quad \text{dans } H_0^1(D) \text{ faible.} \quad (4.1)$$

En prenant dans (2.18)  $\theta \in H_0^1(D)^*$ , pour  $i$  suffisamment élevé, (2.18) devient (4.2) et, en vertu de (4.1) nous avons (4.3), qui montre, grâce au Lemme 4.1 que  $\phi^*$  est la solution du problème ordinaire de Dirichlet.

$$\int_{D-\Omega_i} \mathbf{grad} \phi_i \cdot \mathbf{grad} \theta \, d\Omega = \int_D \mathbf{grad} \phi_i \mathbf{grad} \theta \, d\Omega = - \int_D f\theta \, d\Omega, \quad (4.2)$$

$$\int_D \mathbf{grad} \phi^* \cdot \mathbf{grad} \theta \, d\Omega = - \int_D f\theta \, d\Omega. \quad (4.3)$$

Pour démontrer la convergence dans la topologie forte de  $H_0^1(D)$ , nous écrivons les identités (4.4), (4.5), et (4.6); en les ajoutant membre à membre nous avons (4.7), dont le second membre tend vers zéro en vertu de (4.1). Puisque  $\sigma_i - 1 > 0$ , le deuxième terme du premier membre tend vers zéro, ce qui démontre le théorème.

$$\int_{D-\Omega_i} (\mathbf{grad} \phi_i)^2 \, d\Omega + \sigma_i \int_{\Omega_i} (\mathbf{grad} \phi_i)^2 \, d\Omega = - \int_D f\phi_i \, d\Omega \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} & \int_D [\mathbf{grad}(\phi_i - \phi^*)]^2 \, d\Omega \\ &= \int_D (\mathbf{grad} \phi_i)^2 \, d\Omega - \int_D \mathbf{grad}(\phi_i - \phi^*) \cdot \mathbf{grad} \phi^* \, d\Omega \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} & - \int_D \mathbf{grad} \phi^* \cdot \mathbf{grad} \phi_i \, d\Omega \\ & - \int_D \mathbf{grad} \phi^* \cdot \mathbf{grad} \phi_i \, d\Omega = \int_D f\phi_i \, d\Omega \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} & (\sigma_i - 1) \int_{\Omega_i} (\mathbf{grad} \phi_i)^2 \, d\Omega + \int_D [\mathbf{grad}(\phi_i - \phi^*)]^2 \, d\Omega \\ &= - \int_D \mathbf{grad}(\phi_i - \phi^*) \cdot \mathbf{grad} \phi^* \, d\Omega. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Passons à la démonstration du Lemme 4.1. Soit  $\theta \in \mathcal{D}(D)$ , ensemble des fonctions indéfiniment dérivables de support compact dans  $D$ . Construisons une fonction approchée appartenant à  $H_0^1(D)^*$  de la façon suivante. L'arc de courbe  $\gamma$  étant régulier, considérons à chaque point de  $\gamma$ , le cercle de rayon  $R$  (suffisamment petit) situé dans le plan normal à  $\gamma$ , et aux extrémités de  $\gamma$ , la demiboule de rayon  $R$  centrée à l'extrémité, de façon à former un

voisinage  $\Gamma_R$  de  $\gamma$ . Construisons alors la fonction  $\theta_R$  égale à  $\theta$  en dehors de  $\Gamma_R$ , égale à zéro dans  $\Gamma_{R/2}$  et définie dans  $\Gamma_R - \Gamma_{R/2}$  de façon à ce qu'elle soit continue, et linéaire sur chaque normale à la courbe  $\gamma$  (ou sur chaque rayon issu de ses extrémités). On voit alors que  $\theta_R \in H_0^1(D)^*$  et que  $\theta - \theta_R$  est une fonction dont le gradient est borné par  $KR^{-1}$ ,  $K$  étant une constante. Puisque la mesure de  $\Gamma_R$  est bornée par  $KR^2$ , la norme de  $\theta - \theta_R$  dans  $H_0^1(D)$  est bornée lorsque  $R \rightarrow 0$ . D'autre part, le produit scalaire de  $\theta - \theta_R$  par une fonction de  $\mathcal{D}(D)$  tend vers zéro quand  $R \rightarrow 0$ , si bien que  $\theta - \theta_R \rightarrow 0$  dans  $H_0^1(D)$  faible. Cela suffit pour démontrer le lemme. En effet, puisque  $\mathcal{D}(D)$  est dense dans  $H_0^1(D)$  d'après ce qui précède, pour tout  $a \in H_0^1(D)$  on peut construire une suite  $a_i \in H_0^1(D)^*$  qui converge faiblement vers  $a$ . S'il y avait un élément  $b \in H_0^1(D)$  orthogonal à l'adhérence de  $H_0^1(D)^*$ , on aurait

$$(b, b_i) = 0; \quad b_i \rightarrow b \quad H_0^1(D) \text{ faible}$$

et en passant à la limite la norme de  $b$  serait nulle. Le Lemme 4.1, et donc le Théorème 4.1 sont démontrés.

## 5. PROBLÈMES D'ÉVOLUTION

Les techniques utilisées pour des problèmes stationnaires (elliptiques) dans les paragraphes précédents s'appliquent à des problèmes de conduction de la chaleur (paraboliques) entre deux cors de très différente conductivité thermique mais de chaleur spécifique comparable (en fait, pour les problèmes étudiés ci-dessous, nous avons pris la même chaleur spécifique), qui donnent lieu à des perturbations portant sur la forme bilinéaire associée aux dérivées par rapport aux variables d'espace. Nous n'avons pas abordé des perturbations de la chaleur spécifique, qui porteraient sur le coefficient de la dérivée par rapport au temps.

Des problèmes analogues se présentent dans la propagation hyperbolique des ondes sonores dans des gaz à la traversée d'une nappe étroite d'un gaz beaucoup moins dense que le gaz environnant.

Pour l'étude de ces problèmes nous avons considéré les conditions initiales nulles (un cas un peu plus général se trouve dans [21]); la prise en considération de conditions initiales arbitraires ferait intervenir des énergies tendant vers l'infini avec la conductivité, dont la limite serait difficile à étudier.

En nous inspirant de [14], nous avons étudié les problèmes d'évolution dans le cadre des solutions fortes par rapport à  $t$  (temps), ce qui facilite certaines démonstrations.

Dans les paragraphes qui suivent, nous n'énonçons d'une façon précise que les résultats pour le cas où  $\sigma_i \rightarrow \infty$  et  $e_i \rightarrow 0$  simultanément, et la limite  $\eta$  du produit  $\sigma_i e_i$  est finie. Une étude plus détaillée se trouve dans [21]; mais

dans tous les cas, les résultats sont analogues à ceux du cas elliptique, en particulier pour ce qui touche aux conditions aux limites à imposer sur  $\omega$ .

### 5.1. Problèmes Paraboliques

Nous nous plaçons à nouveau dans la situation de 3.1, et nous considérons pour  $t \in ]0, T[$  où  $T$  est fini, arbitrairement fixé, le problème suivant (Les définitions des espaces  $L^2$  à valeurs vectorielles sont les habituelles [1]).

*Problème  $\Pi_i$ : trouver une fonction  $\phi$  (ou  $\phi_i$ ) définie dans  $Q = D \times ]0, T[$  satisfaisant à (5.1)–(5.5).*

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \Delta \phi + f \quad \text{dans} \quad D - \bar{\Omega}_i, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \sigma_i \Delta \phi \quad \text{dans} \quad \Omega_i, \quad (5.2)$$

$$\phi|_{\Gamma_1} = 0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = 0, \quad (5.3)$$

$$\phi|_{D - \bar{\Omega}_i} = \phi|_{\Omega_i}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{D - \bar{\Omega}_i} = \sigma_i \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\Omega_i} \quad \text{sur} \quad \partial \Omega_i, \quad (5.4)$$

$$\phi|_{t=0} = 0. \quad (5.5)$$

Si  $\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_i e_i = \eta = \text{fini}$ , on peut définir un problème limite  $\Lambda$  ( $\eta$  fini).

*Problème limite  $\Lambda$  ( $\eta$  fini): trouver une fonction  $\phi$  définie dans  $Q$  satisfaisant à:*

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \Delta \phi + f \quad \text{dans} \quad D - \omega, \quad (5.6)$$

$$\phi|_{\Gamma_1} = 0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = 0, \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \eta \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \Big|_{x_3 > 0} - \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \Big|_{x_3 < 0} \quad \text{dans} \quad \omega, \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\omega \cap \partial D} = 0 \quad \text{dans le contour de } \omega. \quad (5.9)$$

Les formulations faibles associées sont:

*La résolution faible du problème  $\Pi_i$  [resp. ( $\eta$  fini)] consiste à trouver  $\phi_i$  (resp.  $\phi$ ) appartenant aux espaces (5.10), (5.11) [resp. (5.12), (5.13)], nulles pour  $t = 0$  et satisfaisant à (5.13) [resp. (5.15)] pour toute fonction-test  $\theta$  de (5.16).*

$$\phi \in L^2(0, T; V(D)) \cap L^\infty(0, T; L^2(D)), \quad (5.10)$$

$$\phi'_i \in L^2(0, T; V(D)) \cap L^\infty(0, T; L^2(D)), \quad (5.11)$$

$$\phi \in L^2(0, T; V(D, \omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(D)), \quad (5.12)$$

$$\phi' \in L^2(0, T; V(D)) \cap L^\infty(0, T; L^2(D)), \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} & \int_Q \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \theta \, d\Omega \, dt + \int_{(D-\Omega_i) \times ]0, T[} \mathbf{grad} \phi_i \cdot \mathbf{grad} \theta \, d\Omega \, dt \\ & + \int_{\Omega_i \times ]0, T[} \sigma_i \mathbf{grad} \phi_i \cdot \mathbf{grad} \theta \, d\Omega \, dt = \int_Q f \theta \, d\Omega \, dt, \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} & \int_Q \frac{\partial \phi}{\partial t} \theta \, d\Omega \, dt + \int_Q \mathbf{grad} \phi \cdot \mathbf{grad} \theta \, d\Omega \, dt + \eta \int_\omega \mathbf{grad}_\omega \theta \cdot \mathbf{grad}_\omega \theta \, d\omega \, dt \\ & = \int_Q f \theta \, d\Omega \, dt, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\theta \in L^2(0, T; V(D)) \quad [\text{resp. } L^2(0, T; V(D, \omega))], \quad (5.16)$$

l'existence et l'unicité des solutions de ces problèmes s'établissent très facilement par la méthode de Faedo-Galerkin (cf. par ex. [27, pp. 155–168]) pourvu que  $f, f'$  soient de carré sommable dans  $Q$ . Si en plus,  $f$  est nulle sur tous les  $\Omega_i$  (ce que nous supposerons, comme dans le cas elliptique), la même méthode donne l'estimation a priori

$$\int_0^T \int_{\Omega_i} (\mathbf{grad} \phi_i)^2 \, d\Omega \, dt \leq \frac{C}{\sigma_i}.$$

Un raisonnement analogue à celui du cas elliptique, par utilisation de l'opérateur moy  $i$  permet de démontrer le résultat suivant, où  $P = \omega \times ]0, T[$ :

**THÉORÈME 5.1.** *Quand  $i \rightarrow \infty$ , la solution  $\phi_i$  du pb.  $\Pi_i$  tend, au sens de (5.17)–(5.19) vers  $\phi$ , solution de  $\Lambda$  ( $\eta$  fini)*

$$\phi_i \rightarrow \phi \quad H^1(Q) \quad \text{faible}, \quad (5.17)$$

$$\phi_i|_P \rightarrow \phi|_P \quad L^2(P) \quad \text{fort}, \quad (5.18)$$

$$\phi_{i\text{moy}i} \rightarrow \phi|_P \quad L^2(0, T, H^1(\omega)) \quad \text{faible}. \quad (5.19)$$

## 5.2. Problèmes Hyperboliques

Si l'on considère des problèmes analogues aux  $\Pi_i$  et  $\Lambda$  ( $\eta$  fini) mais où  $\partial\phi/\partial t$  est remplacé par  $\partial^2\phi/\partial t^2$  on obtient des formulations faibles analogues, où les solutions  $\phi_i$  et la limite  $\phi$  appartiennent aux espaces (5.20)–(5.22) et

où les identités intégrales (5.14) et (5.15) doivent être satisfaites pour les fonctions test  $\theta$  de (5.23).

$$\phi_i \in L^\infty(0, T; V(D)); \quad \phi \in L^\infty(0, T; V(D, \omega)), \quad (5.20)$$

$$\phi_i' \in L^\infty(0, T; V(D)); \quad \phi' \in L^\infty(0, T; V(D)), \quad (5.21)$$

$$\phi_i'' \in L^\infty(0, T; L^2(D)); \quad \phi'' \in L^\infty(0, T; L^2(D)), \quad (5.22)$$

$$\theta \in L^\infty(0, T; V(D)); \quad \theta \in L^\infty(0, T; V(D, \omega)). \quad (5.23)$$

Ces problèmes possèdent des solutions uniques qui satisfont à l'estimation

$$\int_0^T \int_{\Omega_i} \left[ (\mathbf{grad} \phi_i)^2 + \left( \mathbf{grad} \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right)^2 \right] d\Omega dt \leq \frac{C}{\sigma_i}$$

et en appliquant l'opérateur moy  $i$  aux fonctions  $\phi_i$  on démontre que

$$\phi_i \rightarrow \phi \quad L^\infty(0, T; V(D)) \quad \text{faible étoile,} \quad (5.24)$$

$$\phi_i' \rightarrow \phi' \quad L^\infty(0, T; V(D)) \quad \text{faible étoile,} \quad (5.25)$$

$$\phi_i'' \rightarrow \phi'' \quad L^\infty(0, T; L^2(D)) \quad \text{faible étoile,} \quad (5.26)$$

$$\phi_{i \text{ moy } i} \rightarrow \phi|_D \quad L^2(0, T; H^1(\omega)) \quad \text{faible.} \quad (5.27)$$

#### BIBLIOGRAPHIE

1. J. L. LIONS, "Équations Différentielles Opérationnelles et Problèmes aux Limites," Springer, Berlin, 1961.
2. O. A. OLEINIK, Boundary value problems for linear elliptic and parabolic equations with discontinuous coefficients, *Amer. Math. Soc. Trans.* **42** (1964), 175-194.
3. M. TROISI, Sulla regolarizzazione delle soluzioni di taluni problemi di trasmissione, *Rich. Mate.* **13** (1964), 281-316.
4. P. POINCELOT, "Précis d'Électromagnétisme Théorique," Dunod, Paris, 1963.
5. J. NECAS, "Les Méthodes Directes en Théorie des Équations Élliptiques," Masson-Akademia, Paris-Prague, 1967.
6. S. A. MASALOV ET V. G. SOLOGUB, Solution rigoureuse du problème de la diffraction des ondes électromagnétiques par une structure de bandes (en russe), *Zh. Vich. Mat. i Mat. Fiz.* **10** (1970), 693-715.
7. P. POINCELOT, Sur la notion d'écran infiniment mince et infiniment conducteur, *Comp. Rend. Acad. Sci. Paris* **243** (1956), 1616-1617.
8. L. RUBENFELD AND J. BAZER, Diffraction by an anisotropic disk, perfectly conducting along equiangular spirals, *J. Inst. Math. Appl.* **3** (1967), 216-244.
9. T. DI FRANCIA, Electromagnetic cross-section of a small circular disk with unidirectional conductivity, *Nuovo Cimento* **3** (1956), 1276-1284.
10. E. V. JULL, Diffraction by a wide unidirectionally conducting strip, *Canad. J. Phys.* **46** (1968), 2107-2117.

11. SH. VELIKOV ET F. A. AZIZOV, Sur un problème de contact dans la théorie de la conduction de la chaleur (en russe), *Function. Analiz. Primen.* (1971), 71–81.
12. E. SANCHEZ-PALENCIA, Comportement limite d'un problème de transmission à travers une plaque mince et faiblement conductrice, *Comp. Rend. Acad. Sci. Paris, Sér. A* **270** (1970), 1026–1028.
13. A. TRAD ET W. ECKHAUS, Sur l'influence de l'épaisseur dans le problème de diffraction de Sommerfeld, *J. Mécan.* **5** (1966), 293–307.
14. D. HUET, Phénomène de perturbation singulière dans les problèmes aux limites, *Ann. Inst. Fourier* **10** (1960), 61–150.
15. P. K. SENATOROV, Sur la stabilité de la solution du problème de Dirichlet pour une équation elliptique pour des perturbations en mesure de ses coefficients (en russe), *Differentialnye Uravnenia* **6** (1970), 1725–1726.
16. T. ZOLEZZI, Sulla stabilità, rispetto ai coefficienti di alcuni problemi al contorno per equazioni ellittiche e paraboliche, *Boll. Union. Mat. Ital., Sér. IV* **3** (1970), 208–212.
17. S. SPAGNOLO, Sul limite delle soluzioni di problemi di Cauchy relativi all'equazione del calore, *Ann. Scuol. Norm. Sup. Pisa., Ser. III* **21** (1967), 657–699.
18. I. BABUSKA, The theory of small changes in the domain of existence in the theory of partial differential equations and its applications, *Proc. Conf. Diff. Eq., Prague* (1962), 1–13.
19. P. FRANK AND R. v. MISES, "Die Differential und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, II," Dover, New York, 1961.
20. E. SANCHEZ-PALENCIA, Un type de perturbations singulières dans les problèmes de transmission, *Comp. Rend. Acad. Sci. Paris, Sér. A* **268** (1969), 1200–1202.
21. HUNG PHAM HUY, "Sur Certains Phénomènes de Perturbation dans les Conditions de Transmission pour des Problèmes d'Évolution," Thèse de 3ème Cycle, Univ. Paris VI, 1973.
22. E. SANCHEZ-PALENCIA, "Sur Certaines Questions d'Existence et d'Unicité pour des Problèmes aux Limites de Magnétohydrodynamique," Paris, Thèse, 1969.
23. A. AYOUB, Quelques problèmes de perturbation en Magnétohydrodynamique, *Bull. Math. Soc. Sci. R. S. Roum.* **14** (1970), 387–403.
24. S. G. MIKHLIN, "Mathematical Physics, an Advanced Course," North-Holland, Amsterdam, 1970.
25. V. I. SMIRNOV, "A Course of Higher Mathematics," Vol. 5, Pergamon, Oxford, 1964.
26. S. L. SOBOLEV, "Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics," *Amer. Math. Soc.*, Providence, RI, 1963.
27. J. L. LIONS, "Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires," Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1969.