JOURNAL OF ALGEBRA 40, 618–626 (1976)

Zur Charakterisierung der Fittinggruppe der Automorphismengruppe einer endlichen Gruppe

R. LAUE

Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Deutschland

Submitted by B. Huppert

Received December 10, 1975

1. ERGEBNISSE

Schmid [9] warf die Frage auf, ob sich der größte nilpotente Normalteiler der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(G)$ einer endlichen Gruppe G, die Fittinggruppe $F(\mathrm{Aut}(G))$, durch eine ausgezeichnete Operation auf G charakterisieren läßt. Schmid zerlegt $F(\mathrm{Aut}(G))$ in das direkte Produkt seiner π- und π'-Hallgruppen, wobei π die Menge der Primteiler von $|F(G)|$ ist und sucht, diese Hallgruppen einzeln zu charakterisieren. Wir folgen diesem Ansatz und zerlegen außerdem noch G in charakteristische direkte Komponenten $G = G_1 \times \cdots \times G_n$. Dabei ist G_i eine abelsche p_i-Gruppe, p_i eine Primzahl für $i = 1,..., n - 1$, und G_n besitzt keinen charakteristischen direkten abelschen Faktor. Da $\mathrm{Aut}(G) \cong \mathrm{Aut}(G_1) \times \cdots \times \mathrm{Aut}(G_n)$ ist, ist auch $F(\mathrm{Aut}(G)) \cong F(\mathrm{Aut}(G_1)) \times \cdots \times F(\mathrm{Aut}(G_n))$. Es reicht also, $F(\mathrm{Aut}(G_i))$ für jedes i einzeln zu charakterisieren.

SATZ 1. *Sei G eine abelsche p-Gruppe, B die p'-Hallgruppe von $F(\mathrm{Aut}(G))$. Ist G nicht vom Typ $(2, 2)$ oder $(3, 3)$, so gilt: $B = Z(\mathrm{Aut}(G))_{p'}$, B ist zyklisch von der Ordnung $(p - 1)$, und B besteht aus homogenen Potenzautomorphismen. Ist G vom Typ $(2, 2)$, so ist B zyklisch von der Ordnung 3, und ist G vom Typ $(3, 3)$, so ist B isomorph zur Quaternionengruppe der Ordnung 8.*

Eine Charakterisierung der p-Sylowgruppe von $F(\mathrm{Aut}(G))$ ergibt sich für G aus Satz 1 aus dem folgenden allgemeineren Ergebnis, das [9, Satz 2 Teil (a)] verallgemeinert.

SATZ 2. *Sei $F(G)$ eine p-Gruppe. Dann ist die p-Sylowgruppe A von $F(\mathrm{Aut}(G))$ die Stabilitätsgruppe aller $\mathrm{Aut}(G)$-Kompositionsreihen von G. Ist dabei G von d Elementen erzeugt, so ist $|A|$ ein Teiler von $|F(G)|^d$.*

Dabei stabilisiert eine Automorphismengruppe A eine Kette $1 = U_0 < U_1 < \cdots < U_n = G$, wenn A jede Restklasse von U_{i-1} in U_i fest läßt für $i = 1, \ldots, n$. Die größte dieser Automorphismengruppen ist die Stabilitätsgruppe der Kette.

Es bleibt nun noch der Fall zu betrachten, daß G keinen charakteristischen direkten abelschen Faktor besitzt. Aus dem nachfolgenden Satz ergibt sich, daß dann die π'-Hallgruppe von $F(\mathrm{Aut}(G))$ trivial ist, d.h. $F(\mathrm{Aut}(G))$ ist wiederum eine π-Gruppe.

SATZ 3. *Sei B die π'-Hallgruppe von $F(\mathrm{Aut}(G))$. Dann ist $G = C_G(B) \times [G, B]$, wobei $[G, B] = [G, B, B]$ abelsch ist. Die beiden direkten Faktoren $C_G(B)$ und $[G, B]$ sind charakteristisch in G.*

Damit ist die π'-Hallgruppe von $F(\mathrm{Aut}(G))$ charakterisiert. Leider können wir für eine Gruppe G ohne charakteristischen direkten abelschen Faktor keine allgemeine Charakterisierung für $F(\mathrm{Aut}(G)) = F(\mathrm{Aut}(G))_\pi$ angeben. Wir haben allgemein nur folgende Ergebnisse.

SATZ 4. *$F(\mathrm{Aut}(G))$ stabilisiert jede $\mathrm{Aut}(G)$-Kompositionsreihe von $G/Z(G)$ und von G'.*

SATZ 5. *Besitzt G keinen direkten abelschen Faktor, so liegt die Gruppe $C_{\mathrm{Aut}(G)}(G/Z(G))$ der zentralen Automorphismen in $F(\mathrm{Aut}(G))$. Insbesondere hat dann die Stabilitätsgruppe einer $\mathrm{Aut}(G)$-Kompositionsreihe von $G/Z(G)$ höchstens nilpotente Länge 2. Ist G dabei von d Elementen erzeugt, so gelten folgende Abschätzungen: $|\mathrm{Hom}(G/G', Z(G))| \cdot |F(G)/Z_2(G)|$ teilt $|F(\mathrm{Aut}(G))|$ und $|F(\mathrm{Aut}(G))|$ teilt $|\mathrm{Hom}(G/G', Z(G))| \cdot |F(G)/Z(G)|^d$.*

Unter einigen schärferen Voraussetzungen erhalten wir jedoch eine Charakterisierung von $F(\mathrm{Aut}(G))$.

SATZ 6. *Sei $Z(G) \leqslant \Phi(G)$ oder $G' \geqslant \Psi(G)$, wobei $\Psi(G) = \langle U \mid U \leqslant G$, U minimal nichttrivial oder $|U| = 4\rangle$ das erweiterte Frattinidual ist. Dann ist jeweils $F(\mathrm{Aut}(G))$ die Stabilitätsgruppe aller $\mathrm{Aut}(G)$-Kompositionsreihen von G.*

Darüberhinaus liefert auch Satz 2 ein entsprechendes Ergebnis.

Abschließend behandeln wir noch eine Folgerung aus Satz 5, die sich nicht auf eine Charakterisierung von $F(\mathrm{Aut}(G))$ bezieht.

SATZ 7. *G besitze keinen direkten abelschen Faktor. Ist dann $C_G(F(G)) \leqslant F(G)$, so ist auch $C_{\mathrm{Aut}(G)}(F(\mathrm{Aut}(G))) \leqslant F(\mathrm{Aut}(G))$.*

Die Klasse aller Gruppen, deren Fittinggruppe ihren Zentralisator enthält, ist eine Fittingklasse und gleich der Klasse aller Gruppen, deren größter auflösbarer Normalteiler seinen Zentralisator enthält. Daher ergibt sich aus Satz 7 als Folgerung

KOROLLAR 8. *Sei* $N \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$, *wobei* G *eine auflösbare Gruppe ohne direkten abelschen Faktor ist. Dann ist* $C_N(F(N)) \leqslant F(N)$ *und* $C_N(S(N)) \leqslant S(N)$, *wobei* $S(N)$ *der größte auflösbare Normalteiler von* N *ist.*

Die Definitionen und Bezeichnungen sind Standard, siehe etwa Huppert's Buch [4].

2. ABELSCHE GRUPPEN

Beweis von Satz 1. Sei zunächst G eine homogene abelsche p-Gruppe vom Typ $(p^n, \ldots, p^n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann läßt sich $\mathrm{Aut}(G)$ als die Gruppe aller $d \times d$-Matrizen über $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ darstellen, deren Determinante modulo p nicht kongruent Null ist. Nach Shoda [10, Satz 7] besitzt $\mathrm{Aut}(G)$ eine Kette $N_1 > N_2 > \cdots > N_n = 1$ von Normalteilern, wobei N_i gerade aus den Automorphismen besteht, die $\Omega_i(G)$ zentralisieren. Es ist G/N_1 isomorph zu $GL(d, p)$ und N_i/N_{i+1} elementarabelsch von der Ordnung p^{d^2} für $i = 1, \ldots, n-1$, insgesamt $|N_1| = p^{(n-1)d^2} = |\Phi(G)|^d$. Da $|\mathrm{Aut}(G)/N_i| = |\mathrm{Aut}\,\Omega_i(G)|$ ist, läßt sich jeder Automorphismus von $\Omega_i(G)$ auf ganz G fortsetzen.

Die $p-1$ Elemente von $Z(GL(d, p))$ entsprechen den homogenen Potenzautomorphismen von $\Omega_1(G)$. Für diese lassen sich Fortsetzungen auf ganz G angeben, die in $Z(\mathrm{Aut}(G))$ liegen: Die $p-1$ Automorphismen $\alpha(m)$, die jedes $g \in G$ auf g^m abbilden, wobei $0 < m < p$ ist. Die Gruppe $P(G)$ der homogenen Potenzautomorphismen deckt also die Faktorgruppe $Z(\mathrm{Aut}(G)/N_1) \cong Z(GL(d, p))$, es ist sogar $P(G)_{p'} \cong P(G)N_1/N_1 \cong Z(GL(d, p))$ zyklisch von der Ordnung $p-1$. Für $(p^n, \ldots, p^n) \notin \{(2^n, 2^n), (3^n, 3^n)\}$ ist $Z(GL(d, p)) = F(GL(d, p))$, also

$$P(G)_{p'} \leqslant F(\mathrm{Aut}(G))_{p'} \cong F(\mathrm{Aut}(G))/N_1 \leqslant Z(\mathrm{Aut}(G)/N_1) \cong P(G)_{p'}\,.$$

Daher ist dann $F(\mathrm{Aut}(G))_{p'} = P(G)_{p'} = Z(\mathrm{Aut}(G))_{p'}$. Sei nun G vom Typ $(2^n, 2^n)$. Für $n = 1$ ist $G \cong Z_2 \times Z_2$ und $F(\mathrm{Aut}(G)) \cong Z_3$ wie behauptet. Ist $n > 1$, so ist $|F(\mathrm{Aut}(G))_{p'}|$ ein Teiler von 3. Wäre $|F(\mathrm{Aut}(G))_{p'}| = 3$, so hätte $\mathrm{Aut}(G)$ genau eine 3-Sylowgruppe der Ordnung 3. Nun sind aber $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ vier verschiedene Elemente der Ordnung 3, die nicht in einer 3-Sylowgruppe liegen können. Daher ist $F(\mathrm{Aut}(G))_{p'} = 1$. Sei endlich G vom Typ $(3^n, 3^n)$. Für $n = 1$ ist $G \cong Z_3 \times Z_3$ und

$F(\mathrm{Aut}(G)) \cong Q_8$. Ist $n > 1$, so ist zunächst $Z_2 \cong N_1P(G)/N_1 \leqslant F(\mathrm{Aut}(G))/N_1 \leqslant F(\mathrm{Aut}(G)/N_1) \cong Q_8$. Da in $GL(2, 3)$ kein Normalteiler echt zwischen $Z(GL(2, 3))$ und $F(GL(2, 3))$ liegt, brauchen wir nur zu zeigen, daß $F(\mathrm{Aut}(G))/N_1$ nicht zu Q_8 isomorph sein kann. Jede 2-Sylowgruppe S von $\mathrm{Aut}(G)$ ist isomorph zu einer 2-Sylowgruppe P von $GL(2, 3)$. Nun ist in P nur eine Untergruppe vom Typ Q_8 enthalten. Wäre $F(\mathrm{Aut}(G))_2$ isomorph zu Q_8, so wäre sie die einzige Untergruppe dieses Typs von S und ebenso aller zu S konjugierten Untergruppen. Dann wäre in $\mathrm{Aut}(G)$ genau eine Untergruppe vom Typ Q_8 enthalten.

Insbesondere hat dann $\mathrm{Aut}(G)/N_2 \cong \mathrm{Aut}(\Omega_2(G))$ nur eine Untergruppe vom Typ der Quaternionengruppe. Wir brauchen also nur für den Fall $n = 2$ einen Widerspruch zu finden: Hier ist

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 2\\2 & 7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7 & 2\\2 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 7\\7 & 7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7 & 7\\7 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\8 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 8\\1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

eine Quaternionengruppe, die von $\left(\begin{smallmatrix}8 & 8\\2 & 1\end{smallmatrix}\right)$ nicht normalisiert wird.

Sei nun G eine nicht homogene abelsche p-Gruppe, $G = H_1 \times \cdots \times H_r$ eine direkte Zerlegung in homogene Komponenten H_i vom Typ $(p^i, \ldots_{n_i}, p^i)$, $n_i > 0$. Ist A die p-Sylowgruppe von $F(\mathrm{Aut}(G))$, so ist $\mathrm{Aut}(G)/A \cong \prod_{i=1}^r GL(n_i, p)$, siehe [10, Satz 7(B)]. Setzen wir $N = \bigcap_{i=1}^r N_{\mathrm{Aut}(G)}(H_i)$, und bezeichnen wir mit K die p-Sylowgruppe von $F(N)$, so ist auch $N/K \cong \prod_{i=1}^r GL(n_i, p)$. Da $A \cap N \leqslant K$ ist, folgt $\mathrm{Aut}(G) = AN$, und N enthält zu jedem Primteiler $q \neq p$ von $\mathrm{Aut}(G)$ eine q-Sylowgruppe von $\mathrm{Aut}(G)$.

Daher liegt B in N, natürlich dann auch in $F(N)_{p'} \cong \prod_{i=1}^r F(\mathrm{Aut}(H_i))_{p'}$. Da G nicht homogen ist, existiert eine homogene Komponente H_j mit $j > 1$. Auf H_j induziert B daher nach dem ersten Teil des Beweises eine zyklische Gruppe homogener Potenzautomorphismen. Wir zeigen zunächst, daß B auf H_j treu operiert. Sei dazu $H_i \neq H_j$ eine weitere homogene Komponente, $y \in \Omega_1(H_i)$. Multiplikation aller Elemente der Ordnung p^j von H_j mit y ergibt einen Automotphismus α von G, der $G/\Phi(G)$ zentralisiert, also in A liegt. Da $[A, B] = 1$ ist, gilt für jedes $\beta \in C_B(H_j)$ und ein Element x der Ordnung p^j von H_j, $xy = x^\alpha = x^{\beta\alpha} = x^{\alpha\beta} = (xy)^\beta = xy^\beta$ also $y^\beta = y$. Daher zentralisiert β auch $\Omega_1(H_i)$. Da $C_{\mathrm{Aut}(H_i)}(\Omega_1(H_i))$ eine p-Gruppe aber B eine p'-Gruppe ist, zentralisiert β ganz H_i. Da H_i beliebig gewählt werden konnte, operiert B also treu auf H_j, ist also zyklisch von einer Ordnung, die $p - 1$ teilt. Nun induzieren die $p - 1$ Element $\alpha(m)$ von $P(G)$, die jedes $g \in G$ auf g^m abbilden, wobei $0 < m < p$ ist, auf $\Omega_1(G)$ alle Automorphismen aus $Z(\mathrm{Aut}(\Omega_1(G))) \cong Z_{p-1}$. Daher ist $p - 1$ ein Teiler von $|P(G)|$ und von $|F(\mathrm{Aut}(G))|$, also von $|B|$. Daher ist $B \leqslant P(G)$ zyklisch von der Ordnung $p - 1$. Damit ist Satz 1 bewiesen.

3. Stabilitätsgruppen nichtabelscher Gruppen

Wir stellen hier einige Verallgemeinerungen bekannter Hilfssätze zusammen, die auch von unabhängigem Interesse sein dürften.

Hilfssatz 1. (a) *Ist $N \trianglelefteq G$ und $A \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$, so ist $[N, A] \trianglelefteq G$. Ist N unter A invariant, so auch $[N, A]$.*

(b) *Sind $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ und $A \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$, so ist $[N_1N_2, A] = [N_1, A][N_2, A]$.*

(c) *Sind $N_1, N_2 \leqslant G$, $A \leqslant \mathrm{Aut}(G)$ und $M \trianglelefteq G$, M unter A invariant und zwei der Untergruppen $[N_1, A, N_2]$, $[N_2, A, N_1]$ und $[N_1, N_2, A]$ in M enthalten, dann ist auch die dritte in M enthalten.*

Beweis. (a) Sei $n \in N$, $\alpha \in A$ und $g \in G$. Dann ist $[n, \alpha]^g = (n^{-1}n^{\alpha})^g = n^{-g}n^{\alpha g} = n^{-g}n^{g\alpha^{\bar{g}}} = n_1^{-1}n_1^{\alpha_1} = [n_1, \alpha_1]$, wobei $n_1 = n^g \in N$ und $\alpha_1 = \alpha^{\bar{g}}$, das Bild von α unter der Konjugation durch den inneren Automorphismus $\bar{g}$ von G, in A enthalten ist. Analog folgt auch die zweite Aussage.

(b) Ist $n_1 \in N_1$, $n_2 \in N_2$ und $\alpha \in A$, so ist $[n_1n_2, \alpha] = [n_1, \alpha]^{n_2}[n_2, \alpha]$ nach (a) in $[N_1, A][N_2, A]$ enthalten. Die andere Inklusion ist trivial.

(c) Im semidirekten Produkt GA wenden wir das 3-Untergruppen-Lemma [4, III, 1.10] an und erhalten die Behauptung.

Hilfssatz 2. *Eine Automorphismengruppe A von G stabilisiere eine Kette $N = N_0 \geqslant N_1 \geqslant \cdots \geqslant N_r = 1$, wobei jedes N_i in G normal ist. Dann stabilisiert A auch die Kette $G = C_0 \geqslant C_1 \geqslant \cdots \geqslant C_r = C_G(N)$, wobei $C_j = \bigcap_{i=1}^{r} C_G(N_{i-1}/N_{i+j-1})$ ist, mit $N_k = N_r$ für $k \geqslant r$.*

Beweis. Für $i = 1, \ldots, r$ ist $[N_i, C_j, A] \leqslant [N_{i+j}, A] \leqslant N_{i+j+1}$ und $[N_i, A, C_j] \leqslant [N_{i+1}, C_j] \leqslant N_{i+j+1}$. Nach Hilfssatz 1(c) ist dann auch $[C_j, A, N_i] \leqslant N_{i+j+1}$. Daher liegt $[C_j, A]$ in C_{j+1} für jedes j.

Hilfssatz 3. *Ein Normalteiler A von $\mathrm{Aut}(G)$ stabilisiere eine Kette $G = G_0 \geqslant \cdots \geqslant G_r = Z(G)$ von Normalteilern von G. Dann stabilisiert A auch die Kette $G' = N_0 \geqslant N_1 \geqslant \cdots \geqslant N_{2r} = 1$, wobei $N_n = \prod_{i+j=n} [G_i, G_j]$ für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist.*

Beweis. Nach Hilfssatz 1 ist $[N_n, A] = [\prod_{i+j=n} [G_i, G_j], A] = \prod_{i+j=n} [G_i, G_j, A] \leqslant \prod_{i+j=n} [G_i, A, G_j][G_j, A, G_i] \leqslant \prod_{i+j=n} [G_{i+1}, G_j][G_{j+1}, G_i] = \prod_{i+j=n+1} [G_i, G_j] = N_{n+1}$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Der hier wiedergegebene Beweis von Hilfssatz 3 stammt von Dr. H. Laue, dem ich dafür herzlich danken möchte. Mein ursprünglicher Beweis beruhte auf einer komplizierter aufgebauten Kette von Normalteilern N_i.

Nach Schmid [8, Satz 3.1] stabilisiert eine Automorphismengruppe mit einer Kette von $G/\Phi(G)$ auch eine Kette von ganz G. Wir werden dies Ergebnis benötigen, sowie auch die folgende Dualisierung.

HILFSSATZ 4. *Eine Automorphismengruppe A stabilisiere eine Kette $\Psi(G) = N_0 \geqslant N_1 \geqslant \cdots \geqslant N_r = 1$ von Normalteilern von G. Dann stabilisiert A eine Kette von ganz G.*

Beweis. Nach Hilfssatz 2 stabilisiert A eine Kette von $G/C_G(\Psi(G))$, es reicht daher zu zeigen, daß A auch eine Kette von $C_G(\Psi(G))$ stabilisiert. Nun ist $C_G(\Psi(G))$ nach [4, IV, 5.5] nilpotent, wir brauchen daher nur zu zeigen, daß A in jeder Sylowgruppe eine Kette stabilisiert. Ist $P \in \mathrm{Syl}_p(C_G(\Psi(G)))$, so ist $\Omega_e(P) \leqslant \Psi(G)$, wobei $e = 1$ für $p \neq 2$ und $e = 2$ für $p = 2$ ist. Da A eine Kette von $\Psi(G)$ stabilisiert und $\Omega_e(P)$ unter A invariant ist, stabilisiert A auch eine Kette von $\Omega_e(P)$. Also ist $A/C_A(\Omega_e(P))$ eine p-Gruppe. Nach [4, 3, IV, 5.12] ist auch $C_A(\Omega_e(P))/C_A(P)$ eine p-Gruppe. Also induziert A auf P eine p-Automorphismengruppe $A/C_A(P)$. Im semidirekten Produkt von P mit $A/C_A(P)$ existiert dann eine Zentralreihe, die durch P läuft. Daher stabilisiert A eine Kette von P und schließlich eine von ganz G.

Bemerkung. Aus Hilfssatz 4 folgt sofort, daß ein Normalteiler U von G nilpotent ist, wenn $[\Psi(G), U, \ldots, U] = 1$ ist. Ist insbesondere $\Psi(G) \leqslant Z_\infty(G)$, so ist G nilpotent. Diese Folgerung ist dual zu dem bekannten Ergebnis von Gaschütz [2, Satz 10], daß ein Normalteiler N von G nilpotent ist, wenn $N/(N \cap \Phi(G))$ nilpotent ist, wenn also $[G, N, \ldots, N] \leqslant \Phi(G)$ ist.

4. $F(\mathrm{Aut}(G))$ ALS STABILISIERENDE AUTOMORPHISMENGRUPPE

Bekanntlich läßt sich die Fittinggruppe einer Gruppe als Stabilitätsgruppe aller Hauptreihen der Gruppe charakterisieren, siehe z.B. [4, III, 4.3]. Daher stabilisiert $F(\mathrm{Aut}(G))$ alle $\mathrm{Aut}(G)$-Kompositionsreihen von $\mathrm{In}(G)$, und damit alle $\mathrm{Aut}(G)$-Kompositionsreihen von $G/Z(G)$. Nach Hilfssatz 2 stabilisiert $F(\mathrm{Aut}(G))$ dann auch eine und damit alle $\mathrm{Aut}(G)$-Kompositionsreihen von G'. Wir haben also Satz 4 bewiesen.

Mit [8, Satz 3.1] und Hilfssatz 4 erhalten wir dann jeweils unter den Voraussetzungen von Satz 6, daß $F(\mathrm{Aut}(G))$ eine Kette von G stabilisiert. Nun ist $F(\mathrm{Aut}(G))$ normal in $\mathrm{Aut}(G)$, daher sind alle Kommutatoren $[G, F(\mathrm{Aut}(G)), \ldots_n, F(\mathrm{Aut}(G))]$ für $n \in \mathbb{N}$ charakteristisch in G. Also stabilisiert $F(\mathrm{Aut}(G))$ eine und damit jede $\mathrm{Aut}(G)$-Kompositionsreihe von G. Umgekehrt ist jede Stabilitätsgruppe einer $\mathrm{Aut}(G)$-Kompositionsreihe bekanntlich nilpotent und normal in $\mathrm{Aut}(G)$, siehe [4, III, 2.9]. Wir haben damit Satz 6 bewiesen.

Da $[\mathrm{In}(G), F(\mathrm{Aut}(G))] \leqslant \mathrm{In}(G) \cap F(\mathrm{Aut}(G)) = F(\mathrm{In}(G))$ ist, zentralisiert $F(\mathrm{Aut}(G))$ die Faktorgruppe $G/F(G)$. Ist nun $F(G)$ eine p-Gruppe, so stabilisiert die p-Sylowgruppe A von $F(\mathrm{Aut}(G))$ außerdem eine Kette von $F(G)$. Da A normal in $\mathrm{Aut}(G)$ ist, stabilisiert A eine (also jede) $\mathrm{Aut}(G)$-Kompositionsreihe von G. Andererseits ist die Stabilitätsgruppe einer $\mathrm{Aut}(G)$-Kompositionsreihe von G ein p-Normalteiler von $\mathrm{Aut}(G)$, siehe [7, Lemma 5]. Damit ist A in Satz 2 charakterisiert. Die Ordnungsabschätzung dort ergibt sich nun durch eine einfache Induktion aus [5, Proposition 1.1].

Wir kommen nun zum Beweis von Satz 3. Es ist $[\mathrm{In}(G), B] \leqslant \mathrm{In}(G) \cap F(\mathrm{Aut}(G)) \cap B = F(\mathrm{In}(G)) \cap B = 1$, also ist $[G, B] \leqslant Z(G)$. Wegen $(|B|, |Z(G)|) = 1$ ist nach Glauberman [3, Corollary 3] dann $G = [G, B]\, C_G(B)$ und $[G, B, B] = [G, B]$. Da $[G, B] \leqslant Z(G)$ ist, ist $[G, B, B] \leqslant [Z(G), B] \leqslant [G, B]$, also $[G, B] = [Z(G), B]$. Da $Z(G)$ abelsch ist, ist $Z(G) = [Z(G), B] \times C_{Z(G)}(B)$, siehe [4, III, 13.4]. Daher ist

$$[G, B] \cap C_G(B) = [Z(G), B] \cap Z(G) \cap C_G(B) = 1.$$

Wir erhalten also $G = [G, B] \times C_G(B)$. Da B normal in $\mathrm{Aut}(G)$ ist, sind $[G, B]$ und $C_G(B)$ charakteristisch in G. Damit ist Satz 3 bewiesen.

5. Gruppen ohne direkten abelschen Faktor

Hat G keinen direkten abelschen Faktor, so existiert nach Adney und Yen [1] eine Bijektion zwischen $C_{\mathrm{Aut}(G)}(G/Z(G))$ und $\mathrm{Hom}(G/G', Z(G))$. Dabei definiert $f \in \mathrm{Hom}(G/G', Z(G))$ durch $\sigma_f : g \mapsto gf(g)$ ein $\sigma_f \in C_{\mathrm{Aut}(G)}(G/Z(G))$, während $\alpha \in C_{\mathrm{Aut}(G)}(G/Z(G))$ durch $f_\alpha : g \mapsto g^{-1}g^\alpha$ ein $f_\alpha \in \mathrm{Hom}(G/G', Z(G))$ definiert. Ist $G/G' = G_{p_1}/G' \times \cdots \times G_{p_r}/G'$ und $Z(G) = Z_{p_1} \times \cdots \times Z_{p_r}$ jeweils die Zerlegung in das direkte Produkt der p_i-Sylowgruppen, wobei p_i alle Primteiler von $|G|$ durchläuft, so läßt sich jedes $f \in \mathrm{Hom}(G/G', Z(G))$ als r-Tupel $(f_1, \ldots, f_r)$ mit $f_i \in \mathrm{Hom}(G_{p_i}/G', Z_{p_i})$ schreiben. Dann definiert $(1, \ldots, f_i, \ldots, 1)$ einen Automorphismus α_i von G, der G/Z_{p_i} zentralisiert und umgekehrt. Wir erhalten so eine Bijektion zwischen $C_{\mathrm{Aut}(G)}(G/Z_{p_i})$ und $\mathrm{Hom}(G_{p_i}/G', Z_{p_i})$. Daher ist $|C_{\mathrm{Aut}(G)}(G/Z_{p_i})| = |\mathrm{Hom}(G_{p_i}/G', Z_{p_i})|$ eine p_i-Potenz, und $\prod_{i=1}^{r} C_{\mathrm{Aut}(G)}(G/Z_{p_i})$ ist nilpotent. Nun ist $\prod_{i=1}^{r} C_{\mathrm{Aut}(G)}(G/Z_{p_i}) \leqslant C_{\mathrm{Aut}(G)}(G/Z(G))$ und $|\prod_{i=1}^{r} C_{\mathrm{Aut}(G)}(G/Z_{p_i})| = \prod_{i=1}^{r} |\mathrm{Hom}(G_{p_i}/G', Z_{p_i})| = |\mathrm{Hom}(G/G', Z(G))| = |C_{\mathrm{Aut}(G)}(G/Z(G))|$, also $C_{\mathrm{Aut}(G)}(G/Z(G))$ nilpotent. Da die Gruppe der zentralen Automorphismen normal in der Automorphismengruppe ist, liegt sie in $F(\mathrm{Aut}(G))$. Also wird $|F(\mathrm{Aut}(G))|$ von $|F(\mathrm{In}(G))\, C_{\mathrm{Aut}(G)}(G/Z(G))| = |F(G)/Z_2(G)| \cdot |\mathrm{Hom}(G/G', Z(G))|$ geteilt. Andererseits ist die von $F(\mathrm{Aut}(G))$ auf $G/Z(G)$ induzierte

Automorphismengruppe nach Satz 4 eine Stabilitätsgruppe. Wie im Beweis zu Satz 2 folgt nun mit Induktion aus [5, Proposition 1.1], daß $|F(\mathrm{Aut}(G))/C_{\mathrm{Aut}(G)}(G/Z(G))|$ ein Teiler von $|F(G)/Z(G)|^d$ ist. Insgesamt folgt daraus, daß $|F(\mathrm{Aut}(G))|$ ein Teiler von $|\mathrm{Hom}(G/G', Z(G))| \cdot |F(G)/Z(G)|^d$ ist. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Sei nun G ohne direkten abelschen Faktor und $C_G(F(G)) \leqslant F(G)$. Wir wollen zeigen, daß dann auch $C_{\mathrm{Aut}(G)}(F(\mathrm{Aut}(G))) \leqslant F(\mathrm{Aut}(G))$ ist. Dazu zeigen wir zunächst, daß $C_G(F(G)/Z(G)) \leqslant F(G)$ ist. $C_G(F(G)/Z(G))$ induziert auf $F(G)$ eine abelsche Automorphismengruppe, also ist $C_G(F(G)/Z(G))/C_G(F(G))$ abelsch. Nach unserer Voraussetzung ist $C_G(F(G)) = Z(F(G))$ ebenfalls abelsch. Daher ist $C_G(F(G)/Z(G))$ auflösbar. Nun ist $F(G)/Z(G) = F(G/Z(G))$, und $C_{G/Z(G)}(F(G/Z(G)))F(G/Z(G))/F(G/Z(G))$ enthält keinen auflösbaren nichttrivialen Normalteiler, siehe [4, III, 4.2]. Also ist $C_G(F(G)/Z(G))/Z(G)$ in $F(G)/Z(G)$ enthalten. Wir setzen $C = C_{\mathrm{Aut}(G)}(F(\mathrm{Aut}(G)))$ und zeigen nun, daß C in $F(\mathrm{Aut}(G))$ liegt. C zentralisiert mit $F(\mathrm{In}(G))$ auch $F(G)/Z(G)$, nach Hilfssatz 2 also auch $G/C_G(F(G)/Z(G))$. Da $C_G(F(G)/Z(G))$ in $F(G)$ liegt, zentralisiert C also auch $G/F(G)$, induziert daher auf $G/Z(G)$ eine abelsche Automorphismengruppe. Nun ist $C_{\mathrm{Aut}(G)}(G/Z(G))$ nach Satz 5 nilpotent, also C auflösbar. Wie oben folgt daraus $C \leqslant F(\mathrm{Aut}(G))$, wie in Satz 7 behauptet.

Wir zeigen nun zunächst, daß genau dann $C_G(F(G)) \leqslant F(G)$ gilt, wenn $C_G(S(G)) \leqslant S(G)$ gilt. Trivialerweise folgt aus $C_G(F(G)) \leqslant F(G)$ auch $C_G(S(G)) \leqslant C_G(F(G)) \leqslant F(G) \leqslant S(G)$. Sei nun umgekehrt $C_G(S(G)) \leqslant S(G)$. Nach Hilfssatz 2 zentralisiert $C_G(F(G))$ mit $F(G)$ auch $S(G)/C_{S(G)}(F(G))$, also auch $S(G)/F(G)$. Daher ist $C_G(F(G))/C_G(S(G))$ abelsch. Zusammen mit der Voraussetzung folgt, daß $C_G(F(G))$ auflösbar ist. Wiederum nach [4, III, 4.2] liegt daher $C_G(F(G))$ in $F(G)$.

Nun zeigen wir, daß die Klasse $\mathscr{K}$ aller Gruppen, deren Fittinggruppe ihren Zentralisator enthält, eine Fittingklasse ist. Sei dazu $G \in \mathscr{K}$ und $N \lhd G$. Wir setzen $C = C_N(F(N))$. Dann ist $[F(G), C] \leqslant F(G) \cap C = F(G) \cap N \cap C = F(N) \cap C \leqslant Z(C)$, also $[F(G), C, C] = 1$. Daher ist $C/C_C(F(G))$ abelsch und C auflösbar. Daher liegt wie oben C in $F(N)$. Seien nun N_1 und N_2 Normalteiler einer Gruppe H und $N_i \in \mathscr{K}$, $i = 1, 2$. Wir müssen zeigen, daß $C_{N_1N_2}(F(N_1N_2)) \leqslant F(N_1N_2)$ ist. Wir können uns dabei auf den Fall $N_1N_2 = H$ beschränken. Dann ist $F(N_1)F(N_2) \leqslant F(H)$, also $C_H(F(H)) \leqslant C_H(F(N_i))$ und $C_H(F(H)) \cap N_i \leqslant F(N_i)$ für $i = 1, 2$. Daher ist $C_{N_1}(F(H))\, C_{N_2}(F(H)) \leqslant F(H)$. Wir brauchen nun nur zu zeigen, daß $C_H(F(H))/C_{N_1}(F(H))\, C_{N_2}(F(H))$ auflösbar ist, um aus der Auflösbarkeit von $C_H(F(H))$ dann die Behauptung zu erhalten. Nun ist aber $AB \cap BC \cap AC/(A \cap B)(A \cap C)(B \cap C)$ abelsch für je drei Normalteiler A, B, C einer Gruppe, siehe [6, Theorem 4]. Mit $A = N_1$, $B = N_2$ und $C = C_H(F(H))$ ist $N_1N_2 \cap N_2C_H(F(H)) \cap N_1C_H(F(H))/(N_1 \cap N_2)\, C_{N_1}$

$(F(H))\, C_{N_2}(F(H))$ abelsch. Daher ist auch $(N_1 \cap N_2) C_H(F(H))/(N_1 \cap N_2)$ $C_{N_1}(F(H)\, C_{N_2} F(H)$ abelsch. Diese Faktorgruppe ist isomorph zu

$$\begin{aligned} &C_H(F(H)/(C_H(F(H)) \cap (N_1 \cap N_2)\, C_{N_1}(F(H))\, C_{N_2}(F(H))) \\ &\quad = C_H(F(H))/((N_1 \cap N_2 \cap C_H(F(H)))\, C_{N_1}(F(H))\, C_{N_2}(F(H))) \\ &\quad = C_H(F(H))/C_{N_1}(F(H))\, C_{N_2}(F(H)), \end{aligned}$$

und unsere Behauptung folgt.

Da bekanntlich in auflösbaren Gruppen die Fittinggruppe ihren Zentralisator enthält, ergibt sich nun Korollar 8 aus Satz 7.

Literatur

1. J. Adney and Ti Yen, Automorphisms of a p-group, *Illinois J. Math.* **9** (1965), 137–143.
2. W. Gaschütz, Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen, *Math. Z.* **58** (1953), 160–170.
3. G. Glauberman, Fixed points in groups with operator groups, *Math. Z.* **84** (1964), 120–125.
4. B. Huppert, "Endliche Gruppen," Vol. I, Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1967.
5. R. Laue, On outer automorphism groups, *Math. Z.*, to appear.
6. O. Ore, Structures and group theory, I, *Duke Math. J.* **3** (1937), 149–173.
7. P. Schmid, Über die Stabilitätsgruppen der Untergruppenreihen einer endlichen Gruppe, *Math. Z.* **123** (1971), 674–686.
8. P. Schmid, Nilpotente Gruppen und Stabilitätsgruppen, *Math. Ann.* **202** (1973), 57–69.
9. P. Schmid, Über den größten nilpotenten Normalteiler der Automorphismengruppe einer endlichen Gruppe, *J. Algebra* **25** (1973), 165–171.
10. K. Shoda, Über die Automorphismen einer endlichen abelschen Gruppe, *Math. Ann.* **100** (1928), 674–686.