Discrete Mathematics 59 (1986) 79–89
North-Holland

QUELQUES UTILISATIONS DE LA STRUCTION

A. HERTZ
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse

Received 30 January 1984
Revised 31 January 1985

La struction est un algorithme permettant de déterminer le nombre de stabilité $\alpha(G)$ d'un graphe. Nous présenterons d'abord une nouvelle réduction inspirée par cet algorithme. Puis nous donnerons un algorithme polynomial pour les graphes sand griffe se basant à la fois sur celui de N. Sbihi et sur la struction. Nous donnerons finalement une struction modifiée et polynomiale pour des sous-classes de graphes sans griffe.

1. Introduction

Les méthodes de calcul pseudo-Boolean ont inspiré une approche nouvelle pour déterminer le nombre de stabilité d'un graphe. L'idée générale est de transformer un graphe de telle manière qu'à chaque étape, son nombre de stabilité diminue d'une unité (c.f. [2]). Une réduction du nombre de stabilité d'une unité (STability number RedUCTION) a été appelée une *struction.* Sauf avis contraire, nous dirons toujours que la struction transforme un graphe G en un graphe G' de telle sorte que $\alpha(G') = \alpha(G) - 1$.

Plan de l'article

Dans cet article, nous proposons quelques variations sur la struction qui fournissent un nouvel algorithme polynomial donnant $\alpha(G)$ pour des graphes sans griffe; des algorithmes plus spécialisés sont donnés pour des sous-classes de graphes sans griffe. (Une griffe est un graphe d'arêtes $[a, b]$, $[a, c]$, $[a, d]$).

La plupart des notations et des termes de la théorie des graphes que nous utiliserons dans ce travail sont ceux de Berge [1]. Mais précisons encore quelques notations utilisées par la suite:

$[x, y]$ signifie que les sommets x et y sont reliés.

$\overline{[x, y]}$ signifie que les sommets x et y ne sont pas reliés. (Ceci sera représenté par un traitillé entre x et y).

$A - B$ représente $A - \{A \cap B\}$, par abus de notation.

Soit $G = (V, E)$ un graphe, nous noterons par $G - x$ le sous-graphe induit par $V - \{x\}$.

Soient $G = (V, E)$ un graphe et $G' = (V', E')$ un sous-graphe; soit $x \in V - V'$ et $A \subseteq V - V'$.

– nous noterons par $G' + x$ le sous-graphe de G induit par $V' \cup \{x\}$,

– nous noterons par $G' + A$ le sous-graphe de G induit par $V' \cup A$.

$\Gamma(k) = \{i/[i, k] \in E\}$ représente le voisinage du sommet k.

$\Gamma(A) = \{i/[i, k] \in E,\ i \notin A$ et $k \in A\}$ représente le voisinage d'un ensemble A.

$\Gamma_0(k) = \Gamma(k) - \Gamma(0) - \{0\}$.

Nous noterons toujours par S et S' les ensembles stables de cardinalité maximale, dans G et G', sauf avis contraire.

Rappelons l'algorithme général pour la struction d'un graphe (c.f. [2]) (construction du graphe G' à partir du graphe G).

(a) Soit 0 un sommet arbitraire de G. Soit $\Gamma(0) = \{1, \ldots, p\}$ l'ensemble de ses voisins tandis que $\{p+1, \ldots, n\}$ est l'ensemble des autres sommets;

(b) $V' = \{p+1, \ldots, n\} \cup \{(i, j)/\overline{[i, j]}$ et $i < j \leqslant p\}$,

(c) $E' = \{[(i, j), r]/[i, r]$ ou/et $[j, r] \in E\} \cup \{[i, j]/i > p, j > p, [i, j] \in E\}$
$\cup \{[(i, j), (i, k)]/[j, k] \in E\} \cup \{[(i, j), (k, l)]/i \neq k\}$

Nous dirons que la struction est centrée sur le sommet 0.

Les sommets de V' du type (i, j) avec $i < j \leqslant p$ et $\overline{[i, j]}$ seront appelés *nouveaux sommets*.

Nous noterons $(x, \cdot)$ la couche associée au sommet x, c'est-à-dire l'ensemble des nouveaux sommets ayant x comme premier sommet.

$\Gamma(k, l) = \Gamma(k) \cup \Gamma(l) - \Gamma(0) - \{0\}$ représentera le voisinage du nouveau sommet (k, l).

Nous dirons que la struction est fermée par rapport à une classe de graphes si le graphe G' résultant de la struction appartient à cette même classe à laquelle appartenait G.

2. Une réduction

Réduction $R(1)$

Soient x et y 2 sommets tels que:

- $\overline{[x, y]}$,
- $\overline{[y, z]}$ pour tout $z \in \Gamma(x)$,
- $\Gamma(x) - \{y\} - \Gamma(w)$ est une clique pour tout $w \in \Gamma(y) - \{x\}$.

Alors $\alpha(G') = \alpha(G) - 1$ où

$$G = (V, E) \quad \text{et} \quad G' = (V - \{x, y\}, E \text{ induit} + \{[z, w]/w \in \Gamma(y) - \{x\}, z \in \Gamma(x) - \{y\}\}).$$

Preuve. Opérons une struction sur le graphe G. Choisissons x comme centre; soit y son premier voisin. Soit $z \in \Gamma(x) - \{y\}$.

$(z, \cdot)$ est une sous-couche de $(y, \cdot)$, puisque $\overline{[y, w]}$ pour tout $w \in \Gamma(x)$, si $[(z, w), q]$ avec $q \notin \Gamma(x)$: alors $\overline{[z, q]}$, $[w, q]$, $\overline{[z, w]}$. Donc $\overline{[y, q]}$ car $\{z, w\} \in \Gamma(x) - \{y\} - \Gamma(q)$. Nous avons alors $[(y, w), q]$.

En conclusion la couche $(y, \cdot)$ est au moins aussi avantageuse qu'une autre couche. Nous pouvons donc laisser tomber les autres couches. G' est alors le graphe résultant de cette struction améliorée. □

Remarque 2.1. Considérons la réduction suivante (c.f. [4])

R(2). Soient x et y 2 sommets tels que:
- $[x, y]$,
- $[z, w]$ pour tout $z \in B$, $w \in C$ où

$$A = \Gamma(x) \cap \Gamma(y), \qquad B = \Gamma(x) - \{y\} - A, \qquad C = \Gamma(y) - \{x\} - A.$$

Alors $\alpha(G') = \alpha(G)$ où

$G = (V, E)$ et $G' = (V - \{x\}, E$ induit $- [y, C])$ ou $(V - \{y\}$, E induit $- [x, B])$.

Considérons également l'adjonction suivante

R(3). Soient x, y et z 3 sommets tels que
- $[x, y]$, $\overline{[x, z]}$, $\overline{[y, z]}$,
- $[w, z]$ pour tout $w \in \Gamma(x) - \Gamma(y) - \{y\}$.

Alors $\alpha(G') = \alpha(G)$ où $G = (V, E)$ et $G' = (V, E \cup \{[y, z]\})$.
(justification: si nous opérons une struction sur G ou sur G', centrée sur x, les graphes qui en résultent sont identiques.)

La réduction R(1) peut alors être décomposée de la manière suivante:
- par R(3), rajouter les arêtes manquantes entre $\Gamma(y) - \{x\}$ et $\Gamma(x) - \{y\}$,
- par R(2), ôter x ainsi que toute arête touchant y,
- y étant ainsi isolé, en l'ôtant nous diminuons $\alpha(G)$ d'une unité et obtenons G'.

3. Les graphes sans griffe

3.1. *Introduction*

La recherche du nombre de stabilité dans un graphe sans griffe peut se faire en un temps polynomial. Deux méthodes assez similaires ont été développées par Minty et Sbihi dans [6] et [7]. Nous proposons une méthode basée sur ces procédés et sur la struction qui permet également de résoudre ce même problème en un temps polynomial.

Nous noterons $C(i; j, k, l)$ une griffe d'arêtes $[i, j]$, $[i, k]$, $[i, l]$. Souvent nous abrégerons la notation en $C(;)$ lorsque les numéros des sommets ne nous intéressent pas.

Propriété 3.1 (c.f. [2]). *Les nouveaux sommets du graphe G' résultant de la struction d'un graphe G sans griffe forment une clique.*

Propriété 3.2. *Si G est sans griffe et que nous ne prenons qu'une couche de nouveaux sommets, G' sera également sans griffe.*

Propriété 3.3. *Si nous opérons la réduction $R(1)$ sur un graphe G sans griffe, le graphe G' résultant sera lui aussi sans griffe.*

Preuve. Cette réduction est en fait une struction ou nous ne conservons qu'une seule couche. □

3.2. *L'idée*

Soit G un graphe sans griffe et 0 un sommet quelconque que nous considérons comme centre de struction. Notons par G_1 le graphe $G - \{0\} - \Gamma(0)$. Supposons que nous connaissions un ensemble stable de cardinalité maximale dans G_1. Appelons le S_1. Nous savons que dans les graphes sans griffe, les nouveaux sommets forment une clique. De plus, $\alpha(G') = \alpha(G) - 1$ où $G' = G_1 + \{(i, \cdot)/ i \in \Gamma(0)\}$ est le graphe résultant de la struction. Nous avons donc que $\alpha(G) - 2 \leqslant \alpha(G_1) \leqslant \alpha(G) - 1$. En d'autres termes:
- $\alpha(G_1) = \alpha(G')$ ssi $\alpha(G_1) = \alpha(G_1 + (i, \cdot))$ pour tout $i \in \Gamma(0)$,
- $\alpha(G_1) = \alpha(G') - 1$ ssi il existe une couche $(i, \cdot)$ telle que $\alpha(G_1 + (i, \cdot)) = \alpha(G_1) + 1$.

L'idée est la suivante. Etant donné S_1, nous allons chercher un ensemble stable de cardinalité supérieure d'une unité dans $G_1 + (i, \cdot)$ avec $i \in \Gamma(0)$ (graphe sans griffe d'après la Propriété 3.2). Sbihi nous donne un algorithme polynomial pour
- soit déterminer un stable S' de cardinalité $|S_1| + 1$ s'il existe,
- soit assurer qu'il n'en existe pas.

Si'il existe une couche $(i, \cdot)$ permettant l'augmentation, le nouvel ensemble stable dans $G_1 + (i, \cdot)$ contient forcément un nouveau sommet car sinon S_1 n'était pas de cardinalité maximale dans G_1. Soit (i, j) le nouveau sommet appartenant à S'. Nous savons que $\alpha(G_1) = \alpha(G') - 1 = \alpha(G) - 2$. Posons $S = S' - \{(i, j)\} \cup \{i, j\}$. Sinon nous savons que $\alpha(G_1) = \alpha(G') = \alpha(G) - 1$. Prenons $S = S_1 \cup \{0\}$.

Dans les deux cas nous avons déterminé un ensemble stable de cardinalité maximale dans G.

Initialement nous avions supposé connaître un ensemble stable de cardinalité maximale dans G_1. Pour ce faire, il nous suffit de rappliquer l'algorithme au graphe G_1.

Avantages. L'algorithme de Sbihi travaille à chaque fois avec le graphe G initial qui a n sommets; nous n'appliquons son algorithme que sur des graphes ayant au plus $n - 2$ sommets. En fait les graphes traités ont souvent très peu de sommets par rapport au graphe initial. De plus, contrairement à l'algorithme de Sbibi, nous proposons d'augmenter la cardinalité de S d'une *ou de* 2 *unités* à chaque étape.

Désavantage. Il se peut que nous appliquions l'algorithme de Sbihi un plus grand nombre de fois qu'elle ne le fait.

Algorithme proposé

Soit $G=(V, E)$ un graphe quelconque. Supposons que $|V|=n$

(0) $G_0 := G$; $i := 0$

(1) $G_{i+1} := G_i - \{x_i\} - \Gamma(x_i)$ avec $x_i \in V_i$

Si G_{i+1} est une clique alors

$S_{i+1} := \{x\}$ avec x quelconque dans V_{i+1}; $k := 0$; aller à (2)

Sinon $i := i+1$; aller à (1)

(2) $k := k+1$

Si $k \in V_i \cap \Gamma(x_i)$ et si $(k, \cdot)$ n'est pas vide, appliquer Sbihi à $G_{i+1} + (k, \cdot)$

s'il a été possible d'augmenter la cardinalité de S_{i+1}

Soit S' le nouvel ensemble stable

S' contient un nouveau sommet que nous appellerons (k, j)

Posons $S_i := S' - \{(k, j)\} \cup \{k, j\}$; $k := n+1$

Si $k \geqslant n$:

- Si $k = n$ poser $S_i := S_{i+1} \cup \{x_i\}$
- $i := i-1$
- Si $i = -1$ STOP
- Sinon $k := 0$; aller à (2)

Sinon $(k < n)$ aller à (2)

4. Quelques lemmes

Dans ce chapitre nous énoncerons sans démonstration quelques lemmes qui sont utiles pour montrer la fermeture de certaines classes de graphes par rapport à la struction.

Dans chacun des lemmes nous supposerons qu'il existe un sous-graphe connexe H dans le graphe G' résultant de la struction d'un graphe G. H sera supposé induit sur un ensemble de sommets que nous appellerons V. Nous noterons toujours par P l'ensemble des nouveaux sommets contenus dans V.

Par abus de langage:

– lorsque nous dirons qu'un graphe G contient un sous-graphe H, cela signifiera qu'il existe dans G un sous graphe H' isomorphe à H;

– lorsque nous partagerons le graphe H en deux sous-graphes A et B, nous confondrons ces 2 sous-graphes avec leur ensemble de sommets.

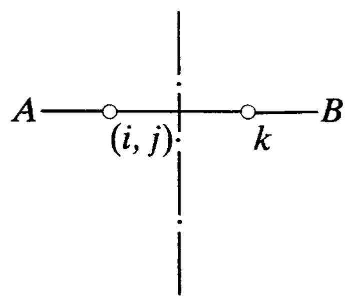
Lemme 1 (c.f. [8]). *Si:*

- *pour tout $v \in V - P$ il existe $w \in P$ tel que $\overline{[v, w]}$;*
- *tous les nouveaux sommets sont dans une même couche $(i, \cdot)$.*

Alors G contient aussi le sous-graphe H.

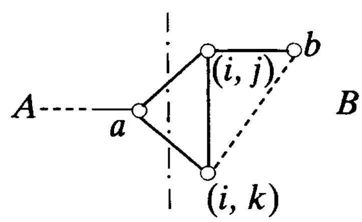
Lemme 2. *Si*:
- *G est sans griffe*;
- $|P| = 1$ *avec* $P = \{(i, j)\}$;
- *il existe* $k \in V - P$ *tel que* $[(i, j), k]$ *est un isthme qui déconnecte* H *en* 2 *sous-graphes* A *et* B. *Supposons que* $(i, j) \in A$ *et que* $k \in B$;
- A *ou/et* B *est une chaîne (éventuellement à un sommet).*

Alors G *contient aussi le sous-graphe* H.



Lemme 3. *Si*:
- *G est sans griffe*;
- $|P| = 2$ *avec* $P = \{(i, j), (i, k)\}$;
- *il existe un sommet* $a \in V$ *tel que* $\{[a, (i, j)], [a, (i, k)]\}$ *est une coupe qui partage* H *en* 2 *sous-graphes* A *et* B. *Supposons que* $a \in A$ *et que* $\{(i, j), (i, k)\} \in B$;
- A *est une chaîne (éventuellement à un sommet)*;
- *il existe un sommet* $b \in B - \{(i, j), (i, k)\}$ *tel que* $[b, (i, j)]$ *ou (exclusif)* $[b, (i, k)]$.

Alors G *contient aussi le sous-graphe* H.



5. Des sous-classes des graphes sans griffe

Nous savons que la struction résoudrait le problème de la recherche du nombre de stabilité dans un graphe quelconque en un temps polynomial, si le nombre de sommets ne pouvait pas augmenter d'une étape à l'autre. Pour éviter cette explosion, une première idée consiste à condenser chaque couche en 1 ou 0 nouveau sommet. Nous trouvons dans [3] un algorithme pour les graphes sans CN utilisant astucieusement cette idée.

Une deuxième idée consiste à ne conserver qu'une seule couche.

Une troisième idée consiste à ne conserver que 2 couches $(i, \cdot)$ et $(j, \cdot)$ avec $[\overline{i, j}]$ et $i < j$.

Dans la suite, nous avons cherché à exploiter ces deux dernières idées.

Soit G'' le graphe résultant d'une struction modifiée, alors que G' était le graphe habituel: chaque démonstration sera divisée en 3 points:

(a) Montrer que $\alpha(G'') = \alpha(G')$.

(b) Montrer que la classe est fermée par rapport à l'algorithme modifié.

(c) Montrer que le nombre de sommets diminue à chaque étape.

Nous donnons tout d'abord un algorithme se basant sur une struction modifiée dans laquelle nous ne conservons qu'une seule couche de nouveaux sommets.

Algorithme polynomial pour la détermination du nombre de stabilité dans les graphes sans C, H ni F (c.f. Fig. 1)

A chaque étape, effectuer une struction en ne prenant qu'une seule couche. La couche choisie sera celle d'un nouveau sommet (i, j) tel que $\Gamma(k, l) \not\subset \Gamma(i, j)$ pour tout autre nouveau sommet (k, l). Elle sera obtenue en prenant le sommet i comme premier voisin du centre de struction 0. (Nous aurons donc (i, k) pour tout $k \in \Gamma(0) - \Gamma(i)$).

Esquisse de justification

a. Les graphes G'' obtenus après ces structions modifiées sont des sous-graphes des graphes G' habituels. Nous avons donc $\alpha(G'') \leqslant \alpha(G') = \alpha(G) - 1$.

Soit S un ensemble stable de cardinalité maximale dans G. Cherchons un ensemble stable S' dans G'' tel que $|S| = |S'| + 1$. Soit 0 le sommet sur lequel nous opérons une struction. Soit (i, j) le nouveau sommet qui a déterminé le choix de la couche.

a.1. $|(\Gamma(0) \cup \{0\}) \cap S| = 1$: choisissons $S' = S - ((\Gamma(0) \cup \{0\}) \cap S)$.

a.2. $|\Gamma(0) \cap S| = 2$: trois cas sont à considérer.

a.2.1. $i \in \Gamma(0) \cap S$: soit k le deuxième sommet de l'intersection. Nous pouvons choisir $S' = S - \{i, k\} \cup \{(i, k)\}$.

a.2.2. $\Gamma(0) \cap S = \{j, k\}$, avec $k \neq i$: nous avons $[i, k]$ pour éviter $C(0; i, j, k)$. Si $\overline{[i, m]}$ pour tout autre sommet $m \in S - \{k\}$, choisissons $S' = S - \{k, j\} \cup \{(i, j)\}$. Sinon soit $m \in S - \{k\}$ tel que $[i, m]$. Comme $\Gamma(j, k) \not\subset \Gamma(i, j)$, il existe un sommet n tel que $[k, n]$, $\overline{[i, n]}$, $\overline{[j, n]}$. Si $\overline{[n, p]}$ pour tout $p \in S - \{k\}$, choisissons

$C(1; 2, 3, 4)$ $H(1; 2, 3, 4, 5; 6; 7, 8)$ $F(1, 2, 3; 4; 5; 6, 7)$

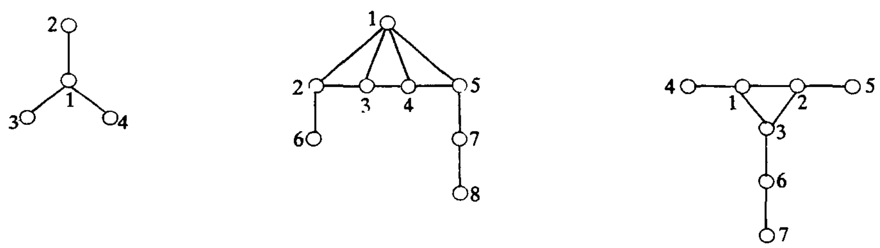


Fig. 1

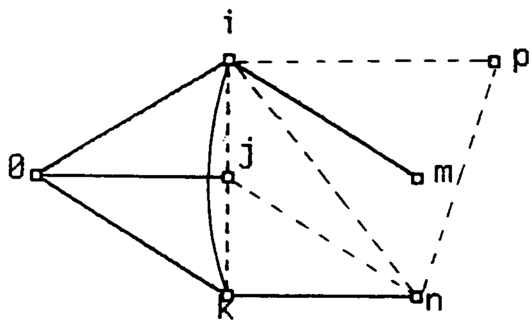


Fig. 2

$S' = S - \{j, k, m\} \cup \{n, (i, j)\}$, puisque $\overline{[i, p]}$ pour éviter $C(i; k, m, p)$ (c.f. Fig. 2). Sinon, soit $p \in S - \{k, m\}$ tel que $[n, p]$. Comme $\overline{[n, m]}$ pour éviter $C(n; k, m, p)$, nous avons donc $F(0, i, k; j; m; n, p)$.

a.2.3. $\Gamma(0) \cap S = \{k, l\}$ (avec $\{k, l\} \cap \{i, j\} = \emptyset$): sans perte de généralité, supposons $[k, i]$ pout éviter $C(0; i, k, l)$.

a.2.3.1. Supposons $[i, l]$. Nous avons alors $\overline{[i, m]}$ pour tout $m \in S - \{k, l\}$ pour éviter $C(i; k, l, m)$. Si $\overline{[j, m]}$ pour tout $m \in S - \{k, l\}$, choisissons $S' = S - \{k, l\} \cup \{(i, j)\}$. Sinon, soit $m \in S - \{k, l\}$ tel que $[j, m]$. Comme $\Gamma(k, l) \not\subset \Gamma(i, j)$, il existe un sommet n tel que $\overline{[i, n]}$, $\overline{[j, n]}$, $[k, n]$ ou/et $[l, n]$. Sans perte de généralité, supposons $[k, n]$. Nous avons alors $\overline{[j, k]}$ pour éviter $C(k; i, j, n)$ et donc $[j, l]$ pour éviter $C(0; j, k, l)$. Si $\overline{[p, n]}$ pour tout $p \in S - \{k, l, m\}$, choisissons $S' = S - \{k, l, m\} \cup \{n, (i, j)\}$, puisque $\overline{[i, p]}$ pour éviter $C(i; k, l, p)$ et $\overline{[j, p]}$ pout éviter $C(j; l, m, p)$ (c.f. Fig. 3). Sinon, soit $p \in S - \{k, l, m\}$ tel que $[p, n]$. Nous avons $\overline{[j, p]}$ et $\overline{[i, p]}$ comme ci-dessus, $\overline{[n, m]}$ pour éviter $C(n; k, m, p)$ et $\overline{[n, l]}$ pour éviter $C(n; k, l, p)$. Nous obtenons ainsi $H(0; j, l, i, k; m; n, p)$.

a.2.3.2. Supposons $\overline{[i, l]}$. Nous avons donc $[j, l]$ pour éviter $C(0; j, i, l)$. Si $\overline{[i, m]}$ pour tout $m \in S - \{k\}$, choisissons $S' = S - \{k, l\} \cup \{(i, l)\}$. Sinon, soit $m \in S - \{k\}$ tel que $[i, m]$. Pour tout $p \in S - \{k, m\}$, nous avons $\overline{[i, p]}$ pour éviter $C(i; k, m, p)$. Comme $\Gamma(k, l) \not\subset \Gamma(i, j)$, il existe un sommet n tel que $\overline{[i, n]}$, $\overline{[j, n]}$, $[k, n]$ ou/et $[l, n]$.

a.2.3.2.1. Supposons $[k, n]$. Nous avons donc $\overline{[k, j]}$ pour éviter $C(k; i, j, n)$. Si $S = \{k, l, m\}$, choisissons $S' = \{n, (i, j)\}$. Sinon soit $p \in S - \{k, l, m\}$. Nous avons $\overline{[p, n]}$ car $[p, n]$ nous impliquerait $\overline{[m, n]}$ pour éviter $C(n; k, m, p)$ et $\overline{[n, l]}$ pour

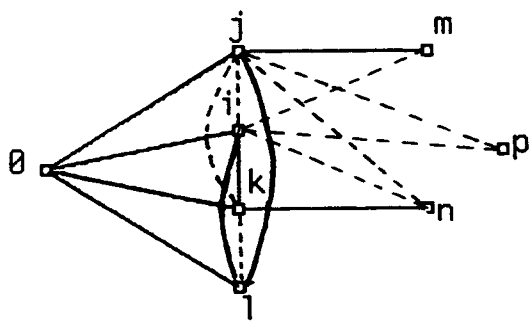


Fig 3

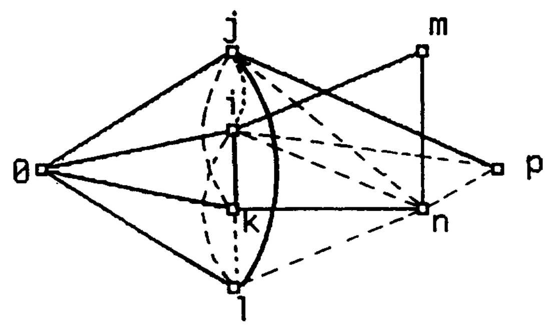


Fig. 4

éviter $C(n; l, k, p)$, ce qui nous donnerait $F(0, i, k; l; m; n, p)$. Si $\overline{[j, p]}$ pour tout $p \in S - \{k, l, m\}$, choisissons $S' = S - \{k, l, m\} \cup \{n, (i, j)\}$. Soit donc $p \in S - \{k, l, m\}$ tel que $[j, p]$. Nous avons $[n, m]$ pout éviter $F(i, k, 0; m; n; j, p)$ et donc $\overline{[n, l]}$ pour éviter $C(n; k, l, m)$. Nous pouvons donc choisir $S' = S \dot{-} \{k, m\} \cup \{(i, l)\}$ (c.f. Fig. 4).

a.2.3.2.2. Supposons $\overline{[k, n]}$. Nous avons alors forcément $[l, n]$ par choix du sommet n. Si $\overline{[j, k]}$, comme $\Gamma(j, k) \not\subset \Gamma(i, j)$, il existe un sommet q tel que $[q, k]$, $\overline{[q, i]}$, $\overline{[q, j]}$ et nous sommes ainsi ramenés au cas précédent $(n \leftrightarrow q)$. Supposons donc $[j, k]$. Nous avons $\overline{[j, m]}$ pour éviter $C(j; k, l, m)$. Pour tout $p \in S - \{k, l, m\}$, $\overline{[i, p]}$ pour éviter $C(i; k, m, p)$, $\overline{[j, p]}$ pour éviter $C(j; k, l, p)$ et $\overline{[n, p]}$ pour éviter $H(0; i, k, j, l; m; n, p)$. Choisissons donc $S' = S - \{k, l, m\} \cup \{n, (i, j)\}$ (c.f. Fig. 5).

Ainsi, $\alpha(G'') \geqslant \alpha(G) - 1$. Nous pouvons donc conclure à l'égalité.

b. Montrons encore que si G est sans $C(;)$, $H(;;;)$ ni $F(;;;)$, G'' l'est aussi. Soit P l'ensemble des nouveaux sommets apparaissant dans un sous-graphe interdit. Lorsque $P = \{a\}$, nous poserons que $a = (i, j)$; lorsque $P = \{a, b\}$, nous poserons que $a = (i, j)$ et $b = (i, k)$.

b.1. Comme G est sans $C(;)$ et que nous ne prenons qu'une seule couche, G'' est sans $C(;)$ d'après la Propriété 3.2.

b.2. Supposons que G'' contient $F(1, 2, 3; 4; 5; 6, 7)$.

b.2.1. $P = \{1\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{6\}$ ou $\{7\}$: G contenait $F(;;;)$ par le Lemme 2.

b.2.2. $P = \{1, 4\}$, $\{3, 6\}$, $\{6, 7\}$ ou $\{1, 2, 3\}$: G contenait $F(;;;)$ par le Lemme 1.

b.2.3. $P = \{1, 2\}$ ou $\{1, 3\}$: G contenait $F(;;;)$ par le Lemme 3.

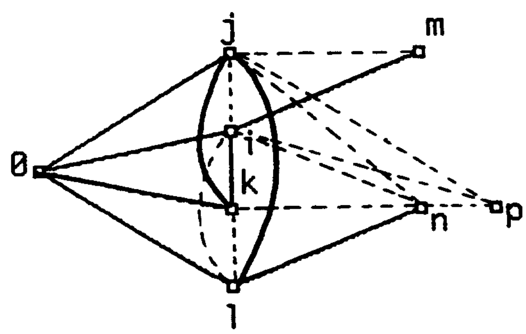


Fig. 5

$C(1;2,3,4)$ $B(1;2,3;4,5;6;7)$ $I(1,2,3;4;5,6,7)$

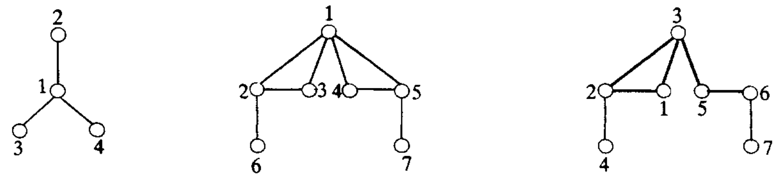


Fig. 6

b.3. Supposons que G'' contient $H(1;2,3,4,5;6;7,8)$. En examinant tous les cas possibles et en se basant sur les lemmes 1, 2, et 3 ainsi que sur le fait que G est sans $C(;)$ ni $F(;;;)$, nous obtenons une contradiction.
c. L'algorithme est polynomial puisque $|V''| \leq |V| - 2$. □

En exploitant l'idée consistant à ne conserver que 2 couches de nouveaux sommets, nous obtenons un algorithme pour une autre sous-classe des graphes sans griffe.

Algorithme polynomial pour la détermination du nombre de stabilité dans les graphes sans *C*, *B* ni *I* (c.f. Fig. 6)

A chaque étape, effectuer une struction en ne prenant que deux couches. Soit (i,j) un nouveau sommet tel que $(|\Gamma_0(i)| + |\Gamma_0(j)|) \leq (|\Gamma_0(k)| + |\Gamma_0(l)|)$ pour tout autre nouveau sommet (k,l). Nous choisirons les couches $(i,\cdot)$ et $(j,\cdot)$ en prenant i et j comme premiers voisins du centre de struction 0.

Esquisse de justification

Le lecteur trouvera dans [5] une démonstration complète des parties **a** et **b**. Nous ne donnons ici que les lignes directrices de la partie **a**.

Soit (i,j) le nouveau sommet qui a déterminé le choix des couches:
a.1. $|(\Gamma(0) \cup \{0\}) \cap S| = 1$: choisissons $S' = S - ((\Gamma(0) \cup \{0\}) \cap S)$.
a.2. $\Gamma(0) \cap S = \{k,l\}$, $k < l$: 2 cas sont à considérer.
a.2.1. $\{k,l\} \cap \{i,j\} \neq \emptyset$: choisissons $S' = S - \{k,l\} \cup \{(k,l)\}$.
a.2.2. $\{k,l\} \cap \{i,j\} = \emptyset$: supposons $[i,k]$ pour éviter $C(0;i,k,l)$. En examinant les cas avec $[i,l]$ ou $\overline{[i,l]}$ nous obtenons des ensembles S' satisfaisants.

c. L'algorithme est polynomial. En effet, soit $k \in \Gamma(0) - \{i,j\}$. Nous ne pouvons pas avoir $\overline{[i,k]}$ et $\overline{[j,k]}$ à la fois car sinon nous aurions $C(0;i,j,k)$. Ainsi $|V''| \leq |V| - 2$.

Bibliographie

[1] C. Berge, Graphes et Hypergraphes (Dunod, Paris, 1970).
[2] Ch. Ebenegger, P.L. Hammer and D. de Werra, Pseudo-boolean functions and stability of graphs, Ann. Discrete Math., à paraître.

[3] P.L. Hammer, N.V.R. Mahadev and D. de Werra, The Struction of a Graph: Application to CN-free Graphs, CORR 83–21 (1983), University of Waterloo.
[4] P.L. Hammer, Communication privée.
[5] A. Hertz, La Struction, Détermination du nombre de stabilité d'un graphe, Travail de diplôme, EPFL (Janvier 84).
[6] G.J. Minty, On maximal independent sets of vertices in claw-free graphs, Indiana University.
[7] N. Sbihi, Algorithme de recherche d'un stable de cardinalité maximum dans un graphe sans étoile, Discrete Math. 29 (1980) 53–76.
[8] D. de Werra, On some properties of the struction of a graph, SIAM J. Algebraic Discrete Methods 5 (1984) 239–243.