JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 34, 493–523 (1979)

Formule variationelle d'Hadamard et modèle des variétés différentiables plongées

K. AOMOTO

Department of Mathematics, Faculty of Science, Nagoya University, Furo, Chigusa-ku, Nagoya, Japan

Communicated by Peter D. Lax

Received September 18, 1978

0. Il est connu la fonction de Green du *modèle de cordes (string models)* dans la théorie quantique de champs euclidien de particules élémentaires s'exprime moyennant *fonction de Neumann* dans la théorie potentiel classique relativement aux problèmes aux bords limites. Dans cette article nous allons déduire l'*équation de Schrödinger* y associée comme une application des formules variationelle d'Hadamard. Celles-ci qui sont regardées comme "*condition d'intégrabilité*" de déformation des domaines envisagés (voir [11]) peuvent être aussi regardées comme *équation d'Hamilton–Jacobi*. Ce modèle sera généralisé au modèle de "variétés différentiables plongées dans un espace euclidien de dimension plus élevée" au lieu de celui de "cordes" qui est actuellement utilisé dans les physiques. La démonstration des formules de variation d'Hadamard des fonctions de Green et Neumann étant délicate si le domaine ni s'acroit ni décroit monotonnement, dans Sections 1–3 nous allons les démontrer au moyen de continuation analytique des solutions des équations intégrales de Fredholm associées aus problèmes aux bords limites dans le sens d'Hilbert (*déformation des équations intégrales de Fredholm*). Dans Section 4 une généralisation des formules d'Hadamard sera obtenue dans le cas des formes différentielles (voir aussi [15]). Dans Section 5 les équations de Schrödinger du modèle de variétés différentiables plongées seront obtenues à la manière rigoureuse.

L'auteur est très reconnaissant d'avoir discuté avec Prof. K. Kikkawa et aussi Prof. D. Fujiwara.

1. LE PROBLÈME AUX BORDS LIMITES AU SENS D'HILBERT

Soit X une variété C^∞ compacte Riemannienne de dimension l, munie de la métrique $ds^2 = \sum_{i,j=1}^{l} g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ par rapport aux coordonnées locales $(x^1,$

0022-1236/79/120493-31$02.00/0

$x^2, \ldots, x^l$) et à bord C^∞ ∂X. Soit X un domaine fermé de X à bord C^∞ $M = \partial X^-$ qui ne rencontre jamais ∂X tel que X soit la réunion des deux domaines X^+ et X^- avec $X^+ \cap X^- = \partial X^-$ et $\partial X^+ = \partial X \perp\!\!\!\perp \partial X^-$ (somme disjointe). On note par $\Delta = \sum_{i,j=1}^{l} (1/g^{1/2})(\partial/\partial x^i)(g^{1/2} g^{ij}(\partial/\partial x^j))$ l'opérateur de Laplace-Beltrami dans X avec l'élément de volume $g^{1/2}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^l$.

Soit $E(x, y)$ une fonction élémentaire dans X, de source y, de l'opérateur $(-\Delta + s)$ pour $s > 0$ telle que $E(x, y)$ s'annule pour $x \in \partial X$

$$E(x, y)]_{\partial X} = 0$$

et (1.1)

$$(-\Delta + s)\, E(x, y) = Y(x, y)$$

où $Y(x, y)$ désigne la mesure de Dirac en y. On sait que la fonction $E(x, y)$ est symétrique. Pour $u^\pm(x) \in C^\infty(X^\pm)$ on désignera par $\partial u^\pm(\xi)/\partial \nu_\xi^\pm$ les dérivées normales extérieure et intérieure en $\xi \in \partial X^-$ par rapport à la paire $(X^-, \partial X^-)$, et par $\partial u(\xi)/\partial \nu_\xi$ si $u = u^\pm$, $x \in X^\pm$ et $\partial u^+(\xi)/\partial \nu_\xi^- = \partial u^-(\xi)/\partial \nu_\xi^-$.

Considerons les trois problèmes suivants: *Etant donné un nombre* $\lambda \in \mathbb{C}$, *est-ce-qu'ils existent deux fonctions* $u^\pm(x)$ *satisfaisant* $(-\Delta + s)\, u^\pm(x) = 0$, $s > 0$ *dans* X^-, $X^- - \{y\}$ *respectivement telles que*

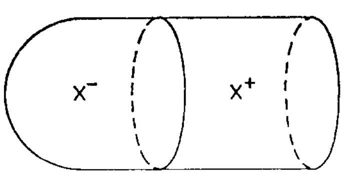
$$\begin{gathered} u^+]_{\partial X} = 0, \\ u^+(x) \textit{ est } C^\infty \textit{ dans } X^+, \\ u^-(x) - E(x, y) \textit{ est } C^\infty \textit{ dans } X^- \textit{ et que} \end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered} u^+(\xi) = u^-(\xi) \cdot (1 + \lambda)/(1 - \lambda), \\ \partial u^+(\xi)/\partial \nu_\xi^+ = \partial u^-(\xi)/\partial \nu_\xi^- \qquad \textit{dans} \quad \partial X^-. \end{gathered} \tag{1.3}$$

On conviendra de dire ce problème I_λ. A la manière analogue, au lieu de (1.3), considerons

$$\begin{gathered} u^+(\xi) = u^-(\xi), \\ \partial u^+(\xi)/\partial \nu_\xi^+ = \partial u^-(\xi)/\partial \nu_\xi^- \cdot (1 - \lambda)/(1 + \lambda). \end{gathered} \tag{1.4}$$

On dira ceci I_λ^*. Considerons aussi le problème suivant dit II_0^*;



$$
\begin{aligned}
\Delta u^+ &= 0 \qquad \textit{dans } X^+,\\
\Delta u^- &= Y(x, y) \qquad \textit{dans } X^- \textit{ où } y \in X^-\\
u^+]_{\partial X} &= \text{Const},\\
u^+(\xi) &= u^-(\xi) \textit{ et}\\
\partial u^+(\xi)/\partial \nu_\xi^- + \lambda/V &= (1 - \lambda)/(1 + \lambda) \cdot (\partial u^-(\xi)/\partial \nu_\xi^- - \lambda/V)
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

pour $\xi \in \partial X^-$ *où* V *désigne le volume de* ∂X^-.

Dans cette situation on a

LEMME 1. *Les solutions de* I_λ, I_λ^* *et* II_0^* *sont uniques si* $|\lambda| \ll 1$.

Démonstration. On va seulement le démontrer pour I_λ, parce que les autres peuvent être démontrés de la même manière. Supposons que l'on ait deux solutions $u_1^\pm(x)$ et $u_2^\pm(x)$. Alors la différence $v^\pm(x) = u_1^\pm(x) - u_2^\pm(x)$ satisfait à la condition suivante:

$$
\begin{aligned}
v^+(\xi) &= v^-(\xi) \cdot (1 - \lambda)/(1 - \lambda),\\
\partial v^+(\xi)/\partial \nu_\xi^- &= \partial v^-(\xi)/\partial \nu_\xi^- \qquad \text{pour} \quad \xi \in \partial X^-,\\
v^+]_{\partial X} &= 0 \text{ et } v^- \text{ est } C^\infty \text{ dans } X^-.
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Alors les intégrales de Dirichlet dans $X^\pm$, $\mathscr{D}_{X^+}(v^+, v^+)$ et $\mathscr{D}_{X^-}(v^-, v^-)$ sont égales à

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}_{X^\pm}(v^\pm, v^\pm) &= \int_{X^\pm} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial v^\pm}{\partial x^i} \overline{\frac{\partial v^\pm}{\partial x^j}} g^{ij} + s v^\pm \cdot \overline{v^\pm} \right) g^{1/2}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n\\
&= \mp \int_{\partial X^-} \partial v^\pm(\xi)/\partial \nu_\xi \cdot \bar{v}^\pm(\xi)\, dS_\xi ,
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

d'où il vient que

$$
\mathscr{D}_{X^+}(v^+, v^+) = -(1 + \bar{\lambda})/(1 - \bar{\lambda}) \cdot \mathscr{D}_{X^-}(v^-, v^-).
$$

D'autre part $\mathscr{D}_{X^\pm}(v^\pm, v^\pm) \geqslant 0$. Par conséquent $\mathscr{D}_{X^\pm}(v^\pm, v^\pm) = 0$, d'où $v^\pm$ sont constantes. Or $v^+]_{\partial X^-} = 0$ entraine $v^+ = 0$ dans X^+, par suite $v^- = 0$ dans X^-.

PROPOSITION 1. *Si* $|\lambda| \ll 1$, *Problèmes* I_λ *et* I_λ^* *sont résolus moyennant les fonctions* $u^\pm(x) = G^\pm(x, y; \lambda)$ *et* $N^\pm(x, y; \lambda)$ *ayant les expansions qui convergent*:

$$
\begin{aligned}
G^\pm(x, y; \lambda) &= E(x, y) + 2\lambda \int_{\partial X^-} \frac{\partial E(x, \zeta_1)}{\partial \nu_{\zeta_1}} E(\zeta_1, y)\, dS_{\zeta_1}\\
&\quad + \cdots + (2\lambda)^k \int_{(\partial X^-)^k} \frac{\partial E(x, \zeta_1)}{\partial \nu_{\zeta_1}} \frac{\partial E(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial \nu_{\zeta_2}} \cdots \frac{\partial E(\zeta_{k-1}, \zeta_k)}{\partial \nu_{\zeta_k}}\\
&\quad \times E(\zeta_k, y)\, dS_{\zeta_1} \cdots dS_{\zeta_k} + \cdots,
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

$$N^{\pm}(x, y; \lambda) = E(x, y) + 2\lambda \int E(x, \zeta_1) \frac{\partial E(\zeta_1, y)}{\partial \nu_{\zeta_1}} dS_{\zeta_1}$$
$$+ \cdots + (2\lambda)^k \int E(x, \zeta_1) \frac{\partial E(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial \nu_{\zeta_1}} \cdots \frac{\partial E(\zeta_{k-1}, \zeta_k)}{\partial \nu_{\zeta_{k-1}}}$$
$$\times \frac{\partial E(\zeta_k, y)}{\partial \nu_{\zeta_k}} dS_{\zeta_1} \cdots dS_{\zeta_k} + \cdots \tag{1.9}$$

suivant que $x \in X^{\pm}$ et $y \in X^-$. $G(x, y; \lambda)$ et $N(x, y; \lambda)$ sont méromorphes par rapport à λ dans $\mathbb{C}$ et $G^{\pm}(y, x; \lambda) = N^{\pm}(x, y; \lambda)$ d'après la théorie de Fredholm.

Démonstration. On n'a qu'à utiliser les formules fondamentales pour potentiels de couches simple et double suivants:

$$\lim_{\substack{x \to \xi \\ x \in X^{\pm}}} \left(\int \partial E(x, \zeta)/\partial \nu_\zeta \varphi(\zeta)\, dS_\zeta \right)^{\pm} = \int_{\partial X^-} \partial E(\xi, \zeta)/\partial \nu_\zeta \varphi(\zeta)\, dS_\zeta \pm \tfrac{1}{2}\varphi(\xi), \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu_\xi^{\pm}} \int_{\partial X^-} E(\xi, \zeta)\, \varphi(\zeta)\, dS_\zeta = \int_{\partial X^-} \partial E(\xi, \zeta)/\partial \nu_\zeta \cdot \varphi(\zeta)\, dS_\zeta \mp \tfrac{1}{2}\varphi(\xi) \tag{1.11}$$

pour $\varphi \in C^\infty(\partial X^-)$.

De la même manière on a

PROPOSITION 2. *Si $|\lambda| \ll 1$, le Problème II_0^* est résolu moyennant les fonctions*

$$u^{\pm}(x) = N(x, y; \lambda) + 2\lambda/V \int_{\partial X^-} N(x, \zeta; \lambda)\, dS_\zeta$$
$$- 1/V \left\{ \int_{\partial X^-} N(\xi, y; \lambda)\, dS_\xi + 2\lambda/V \int_{\partial X^-} N(\xi, \zeta; \lambda)\, dS_\xi\, dS_\zeta \right\} \tag{1.12}$$

suivant que $x \in X^{\pm}$ et $y \in X^-$.

Dans la suite on définira les fonctions $G(x, y; \lambda)$, $G(\xi, y; \lambda)$, $G(x, \eta; \lambda)$, $\partial G(\xi, y; \lambda)/\partial \nu_\xi$ et $\partial G(x, \eta; \lambda)/\partial \nu_\eta$ comme suit:

$$\begin{aligned} G(x, y; \lambda) &= G^+(x, y; \lambda), \qquad x \in X^+, \\ &= G^-(x, y; \lambda), \qquad x \in X^-. \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$G(\xi, y; \lambda) = E(\xi, y) + 2\lambda \int_{\partial X^-} \frac{\partial E(\xi, \zeta_1)}{\partial \nu_{\zeta_1}} E(\zeta_1, y)\, dS_{\zeta_1}$$
$$+ \cdots + (2\lambda)^k \int_{(\partial X^-)^k} \frac{\partial E(\xi, \zeta_1)}{\partial \nu_{\zeta_1}} \frac{\partial E(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial \nu_{\zeta_2}} \cdots \frac{\partial E(\zeta_{k-1}, \zeta_k)}{\partial \nu_{\zeta_k}}$$
$$\times E(\zeta_k, y)\, dS_{\zeta_1} \cdots dS_{\zeta_k} + \cdots \qquad (\xi \in \partial X^-), \tag{1.14}$$

$$G(x, \eta; \lambda) = E(x, \eta) + 2\lambda \int_{\partial X^-} \frac{\partial E(x, \zeta_1)}{\partial \nu_{\zeta_1}} E(\zeta_1, y)\, dS_{\zeta_1}$$

$$+ \cdots + (2\lambda)^k \int_{(\partial X^-)^k} \frac{\partial E(x, \zeta_1)}{\partial \nu_{\zeta_1}} \frac{\partial E(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial \nu_{\zeta_2}} \cdots \frac{\partial E(\zeta_{k-1}, \zeta_k)}{\partial \nu_{\zeta_k}}$$

$$\times E(\zeta_k, \eta)\, dS_{\zeta_1} \cdots dS_{\zeta_k} + \cdots \qquad (\eta \in \partial X^-),$$

$$\partial G(\xi, y; \lambda)/\partial \nu_\xi$$

$$= \frac{\partial E(\xi, y)}{\partial \nu_\xi} + 2\lambda \text{ p.f.} \int_{\partial X^-} \frac{\partial^2 E(\xi, \zeta_1)}{\partial \nu_\xi\, \partial \nu_{\zeta_1}} E(\zeta_1, y)\, dS_{\zeta_1}$$

$$+ \cdots + (2\lambda)^k \text{ p.f.} \int_{(\partial X^-)^k} \frac{\partial^2 E(\xi, \zeta_1)}{\partial \nu_\xi\, \partial \nu_{\zeta_1}} \frac{\partial E(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial \nu_{\zeta_2}} \cdots \frac{\partial E(\zeta_{k-1}, \zeta_k)}{\partial \nu_{\zeta_k}}$$

$$\times E(\zeta_k, y)\, dS_{\zeta_1} \cdots dS_{\zeta_k} + \cdots \qquad \text{(pour p.f. voir section 2)}, \tag{1.15}$$

$$\partial G(x, \eta; \lambda)/\partial \nu_\eta = \frac{\partial E(x, \eta)}{\partial \nu_\eta} + 2\lambda \int_{\partial X^-} \frac{\partial E(x, \zeta_1)}{\partial \nu_{\zeta_1}} \frac{\partial E(\zeta_1, \eta)}{\partial \nu_\eta}\, dS_{\zeta_1}$$

$$+ \cdots + (2\lambda)^k \int_{(\partial X^-)^k} \frac{\partial E(x, \zeta_1)}{\partial \nu_{\zeta_1}} \frac{\partial E(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial \nu_{\zeta_2}} \cdots$$

$$\times \frac{\partial E(\zeta_{k-1}, \zeta_k)}{\partial \nu_{\zeta_k}} \frac{\partial E(\zeta_k, \eta)}{\partial \nu_\eta}\, dS_{\zeta_1} \cdots dS_{\zeta_k} + \cdots$$

alors on a, grace à (1.10) et (1.11),

$$\begin{aligned} G^\pm(\xi, y; \lambda)\Big(\equiv \lim_{\substack{x \to \xi \\ x \in X_\pm}} G^\pm(x, y; \lambda)\Big) &= (1 \pm \lambda)\, G(\xi, y; \lambda), \\ G^\pm(x, \eta; \lambda)\Big(\equiv \lim_{\substack{y \to \eta \\ y \in X_\pm}} G(x, y; \lambda)\Big) &= G(x, \eta; \lambda), \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} \partial G^\pm(\xi, y; \lambda)/\partial \nu_\xi{}^\pm &= \partial G(\xi, y; \lambda)/\partial \nu_\xi, \\ \partial G^\pm(x, \eta; \lambda)/\partial \nu_\eta{}^\pm &= (1 \mp \lambda)\, \partial G(x, \eta; \lambda)/\partial \nu_\eta. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Remarque 1. On pose

$$\begin{aligned} G^-(x, y; \lambda) &= E(x, y) + \int_{\partial X^-} \partial E(x, \eta)/\partial \nu_\eta \cdot \varphi(\eta)\, dS_\eta, \\ N^-(x, y; \lambda) &= E(x, y) + \int_{\partial X^-} E(x, \eta) \cdot \psi(\eta)\, dS_\eta. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Alors les deux fonctions $G^{-}(x, y; \lambda)$ et $N^{-}(x, y; \lambda)$ sont obtenues en rèsolvant les équations d'intégrale de Fredholm suivantes:

$$
\begin{aligned}
-\tfrac{1}{2} \cdot \varphi(\xi) + \lambda \int_{\partial X^-} \partial E(\xi, \eta)/\partial \nu_\eta \cdot \varphi(\eta) \, dS_\eta &= -\lambda E(\xi, y), \\
\tfrac{1}{2}\psi(\xi) - \lambda \int_{\partial X^-} \partial E(\xi, \eta)/\partial \nu_\xi \cdot \psi(\eta) \, dS_\eta &= \lambda \, \partial E(\xi, y)/\partial \nu_\xi .
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

Remarque 2. Si $s = 0$, la première partie de (1.19) a la solution unique pour $\lambda = 1$, mais la seconde partie n'en a pas pour $\lambda = -1$. Dans ce dernier cas l'équation intégrale modifiée

$$\tfrac{1}{2} \cdot \psi_0(\xi) + \int_{\partial X^-} \partial E(\xi, \eta)/\partial \nu_\xi \cdot \psi_0(\eta) \, dS_\eta = -\left(\partial E(\xi, y)/\partial \nu_\xi + \frac{1}{V}\right) \tag{1.20}$$

a la solution unique $\psi_0(\xi)$ telle que

$$\int_{\partial X^-} \psi_0(\xi) \, dS_\xi = 0 \tag{1.21}$$

car

$$\int_{\partial X^-} \partial E(\xi, y)/\partial \nu_\xi \, dS_\xi + 1 = 0. \tag{1.22}$$

D'après la théorie de Riesz–Schauder la fonction

$$N_0(x, y) = E(x, y) + \int_{\partial X^-} E(x, \eta) \, \psi_0(\eta) \, dS_\eta \tag{1.23}$$

est égale à

$$\lim_{\lambda \to -1} \left\{ N(x, y; \lambda) + 2\lambda/V \cdot \int_{\partial X^-} N(x, \zeta; \lambda) \, dS_\zeta \right\} \tag{1.24}$$

et satisfait à

$$\partial N_0(\xi, y)/\partial \nu_\xi = -1/V. \tag{1.25}$$

2. La régularisation des intégrales $\int_{\partial X^-} \partial^{p+q} E(\xi, \eta)/\partial \nu_\xi^{\,p} \partial \nu_\eta^{\,q} \varphi(\eta) \, dS_\eta$

Soit

$$
\begin{aligned}
Q\colon (-1, 1) \times M &\to X \\
(t, \xi) &\to q_t(\xi)
\end{aligned}
$$

une famille différentiables de plongements différentiables d'une variété compacte M de dimension $(l-1)$ dans X. Supposons l'image $q_t(M) = M_t$ soit le bord $\partial X_t^- = \partial X^-$ d'un domaine $X_t^- = X^-$ de X, et que la métrique induite $Q^*(ds^2)$ dans $(-1, 1) \times M$ ait l'expression suivante:

$$Q^*(ds^2) = g_{11}(t, \xi)\, dt^2 + \sum_{i,j=1}^{l-1} \bar{g}_{ij}(t, \xi)\, d\xi^i \cdot d\xi^j \tag{2.1}$$

par rapport aux coordonnées locales $(t, \xi^1, \ldots, \xi^{l-1})$ de X où M_t soit défini par $t = \text{Const}$. Alors on a par l'hypothèse

$$g_{11}(t, \xi) \geqslant 0. \tag{2.2}$$

La matrice symétrique $((\bar{g}_{ij}))$ définit la métrique Riemannienne dans $M_t \cdot$ Remarquons que g_{11} n'est pas nécessairement positif.

On note par $\partial \nu_\xi$ la différentielle $\pm g_{11}^{1/2}\, dt$ en $(t, \xi) \in M_t$ suivant que la variation de M_t est la même ou contraire que la direction extérieure de X_t. On conviendra de dire $\delta \nu_\xi$ la "variation infinitesimale normale de M_t." La dérivée normale $\partial/\partial \nu_\xi$ est égale à $\pm 1/g_{11}^{1/2} \cdot \partial/\partial t$ suivant que $\delta \nu_\xi = \pm g_{11}^{1/2}\, dt$. L'opérateur de Laplace–Bertrami alors s'écrit par

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial {\nu_\xi}^2} + H(t, \xi)\, \partial/\partial \nu_\xi + \bar{\Delta}, \tag{2.3}$$

où Δ et $H(t, \xi)$ désignent l'opérateur de Laplace–Bertrami sur M_t et la courbure de moyenne de M_t en ξ. Par consequent,

Lemme 2.1. *Si* $(-\Delta + s)u = 0$, *alors*

$$\partial^2/\partial {\nu_\xi}^2 u = -(H(t, \xi)\, \partial u/\partial \nu_\xi + \bar{\Delta} u - su). \tag{2.4}$$

On désigne par grad u ou $\overline{\text{grad}}\ u$, $u \in C^\infty(X)$ ou $C^\infty(\partial X^-)$ les vecteurs gradients dans X ou M_t respectivement.

Soit $\Gamma(x, y) \geqslant 0$ le carré de la distance entre deux points $x, y \in \mathring{X}$, l'intérieure de X. Alors la fonction élémentaire $E(x, y)$ a la singularité locale comme suit: Pour $k \in Z^+ \cup \{0\}$ quelconque, il existent une suite de fonctions C^∞, $A_j(x, y)$ et $B_j(x, y)$ telles que

$$E(x, y) = (A_0 + A_1 \Gamma + \cdots + A_k \Gamma^k)/\Gamma^{(l-2)/2} + E_1(x, y), \tag{2.5}$$

si l impair et

$$\begin{aligned} E(x, y) = {} & (A_0 + A_1 \Gamma + \cdots + A_k \Gamma^k)/\Gamma^{(l-2)/2} \\ & + (B_0 + B_1 \Gamma + \cdots + B_{k-(l-2)/2} \Gamma^{k-(l-2)/2}) \log \Gamma + E_1(x, y), \end{aligned} \tag{2.6}$$

si l pair. Ici E désigne une fonction C^∞ pour $x \neq y$ et satisfait à $o(\Gamma^{k-(l-2)/2})$ (voir [7]).

On s'intéresse maintenant une régularisation des intégrales

$$\int_{\partial X^-} \partial^{p+q} E(\xi, \eta)/\partial \nu_\xi{}^p \, \partial \nu_\eta{}^q \cdot \varphi(\eta) \, dS_\eta\,, \qquad \varphi \in C^\infty(\partial X^-), \tag{2.7}$$

pour $\xi \in \partial X^-$ et $p, q \geqslant 0$. Pour cela on utilisera la partie finie au sens d'Hadamard–Leray, à-savoir la "complexification des intégrales" et le théorème d'isotopie du à R. Thom que voici (voir [1], [7] ou [10]):

Supposons que dans un voisinage de $\xi \in \partial X^-$, ∂X^- s'écrit relativement aux coordonnées locales $(x^1, x^2,..., x^l)$, ξ correspondant à l'origine,

$$x^1 = h(x^2,..., x^l), \tag{2.8}$$

h étant de classe C^∞, telle que l'on ait

$$h = \sum_{j=2}^{l} \lambda_j (x^j)^2 + O(\rho^3) = \rho^2 \tilde{h}(\rho, \omega), \tag{2.9}$$

où $\tilde{h}(\rho, \omega)$ est C^∞ pour $\rho = |\, x' \,| = [(x^2)^2 + \cdots + (x^l)^2]^{1/2}$ et $\omega^j = x^j/|\, x' \,|$, $l \geqslant j \geqslant 2$. On peut aussi supposer que le carré de distance entre $x = (\sigma, 0,..., 0)$ et $\eta = (\eta^1, \eta^2,..., \eta^l) \in \partial X^-$ a la forme

$$\begin{aligned} \Gamma(x, \eta) &= (\sigma - h(\eta^2,..., \eta^l)) + (\eta^2)^2 + \cdots + (\eta^l)^2 \\ &\quad + O(\{\sigma^2 + (\eta^2)^2 + \cdots + (\eta^l)^2\}^{3/2}) \\ &= (\sigma^2 - \rho^2 \tilde{h}(0, \omega))^2 + \rho^2 + O(\rho^2 + \sigma^2)^{3/2}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

où $\tilde{h}(0, \omega) = \sum_{j=2}^{l} \lambda_j \omega_j{}^2$, de sorte que l'on ait

$$\Gamma(x, \eta) = \Gamma_0(x, \eta) + \Gamma_1(x, \eta) \tag{2.11}$$

où $\Gamma_0(x, \eta)$ désigne $(\sigma - \rho^2 \tilde{h}(0, \omega))^2 + \rho^2$ et $\Gamma_1/\Gamma_0 = O(\Gamma_0^{1/2})$ pour $\Gamma_0 \to 0$.

Considerons d'abord l'intégrale

$$\int_{\partial X^-, |\eta'| \leqslant a} \frac{\partial^q (E(x, \eta) - E_1(x, \eta))}{\partial \nu_\eta{}^q} \varphi(\eta) \, dS_\eta\,, \tag{2.12}$$

où $\varphi \in C^\infty(X^-)$ pour un petit nombre positif a. Celle-ci est une combinaison linéaire des intégrales

$$\int_{\partial X^-, |\eta'| \leqslant a} \Gamma(x, \eta)^{-l/2+1-q} \cdot (\text{fonction } C^\infty) \, dS_\eta \tag{2.18}$$

si l impair, et celle des intégrales (2.13) plus

$$\int_{\partial X^-, |\eta'| \leqslant a} \log \Gamma \cdot (\text{fonction } C^\infty)\, dS_\eta\,, \tag{2.14}$$

si l pair. Elles sont transformées réspectivement, grâce à (2.11), en

$$\int_{\partial X^-, |\eta'| \leqslant a} \Gamma_0(x, \eta)^{-l/2+1-q} \cdot \left\{ \sum_{j=0}^{j_0} \alpha_j(x, \eta)/\Gamma_0(x, \eta)^j + \beta(x, \eta) \right\} dS_\eta \tag{2.15}$$

ou

$$\int_{\partial X^-, |\eta'| \leqslant a} \log \Gamma_0 \cdot \left\{ \sum_{j=0}^{j_0} \alpha_j'(x, \eta)/\Gamma_0(x, \eta)^j + \beta'(x, \eta) \right\} dS_\eta \tag{2.16}$$

pour j_0 assez grand. Ici $\alpha_j(x, \eta)$ et α_j' sont tous C^∞. $\beta(x, \eta)$ et β' sont C^∞ si $x \neq \eta$ et $O(\Gamma_0(x, \eta)^{1+j_0})$.

La régularisation de (2.12) est donc revenue aux intrégales suivantes:

$$\int_{|\eta'| \leqslant a} \Gamma_0(x, \eta)^{-l/2+j} \cdot \psi(x, \eta)\, dS_\eta\,, \text{ et} \tag{2.17}$$

$$\int_{|\eta'| \leqslant a} \log \Gamma_0 \cdot \psi(x, \eta)\, dS_\eta\,, \qquad l \text{ pair}, \tag{2.18}$$

pour $\psi(x, \eta)$ C^∞ et j un entier.

Considérons l'espace fibré $\mathscr{E}(\partial X^-)$ sur ∂X^- dont la fibre est isomorphe au produit de la $(l-2)$-sphère S^{l-2} et la droite réelle $\mathbb{R}$ de sorte que l'on ait l'application fibrée de $\mathscr{E}(\partial X^-)$ dans l'espace fibré tangent de ∂X^-, $T(\partial X^-)$ comme suit:

$$\begin{array}{ccc} S^{l-2} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^{l-1} \\ (\omega, \rho) & & \omega\rho \end{array} \tag{2.19}$$

sur chaque fibre. Vu que $dS_\eta = J(\rho, \omega)\, \rho^{l-2} d\rho \cdot d\omega$, $J(\rho, \omega)$ C^∞ dans $\mathscr{E}(\partial X^-)$ et $J(0, \omega) = 1$ les intégrales ci-dessus ont les formes

$$\int_{0 \leqslant \rho \leqslant a, \omega \in S^{l-2}} \{(\sigma - \rho^2 \tilde{h}(0, \omega))^2 + \rho^2\}^{-l/2+j} \cdot \Psi(\rho, \omega)\, \rho^{l-2}\, d\rho \cdot d\omega \tag{2.20}$$

et

$$\int_{0 \leqslant \rho \leqslant a, \omega \in S^{l-2}} \log\{(\sigma - \rho^2 \tilde{h}(0, \omega))^2 + \rho^2\} \cdot \Psi(\rho, \omega)\, \rho^{l-2}\, d\rho \cdot d\omega \tag{2.21}$$

respectivement, où $\Psi(\rho, \omega)$ désigne C^∞. Si $\sigma \neq 0$, les domaines des intégrations peuvent être remplacés par

$$\tfrac{1}{2}\cdot\Big(\int_{\substack{0\leqslant\rho\leqslant a\\ \omega\in S^{l-2}}} \pm \int_{\substack{-a\leqslant\rho\leqslant 0\\ \omega\in S^{l-2}}}\Big) \tag{2.22}$$

suivant l pair ou impair, vu que les intégrales par rapport à ω donnent fonctions paires de ρ.

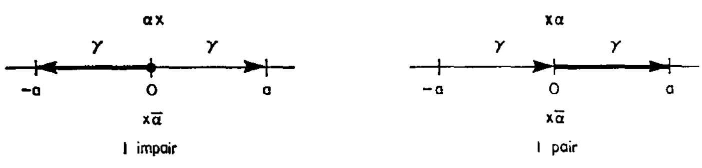
Supposons que l'on ait l'expansion de Taylor de $\psi(\rho, \omega)$, pour $-a \leqslant \rho \leqslant a$ et m assez grand, comme suit:

$$\Psi(\rho, \omega) = \Psi_0 + \Psi_1\,, \tag{2.23}$$

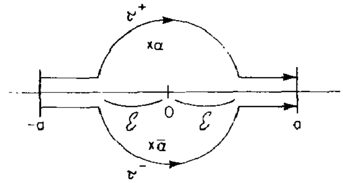
où Ψ_0 désigne $\sum_{\kappa=0}^{2m} d^\kappa\Psi(0, \omega)/d\rho^\kappa \cdot \rho^\kappa/_\kappa!$ Alors la partie des intégrales (2.22) relativement au second terme de (2.23) sont bien définies et assez différentiables par rapport à σ. Définissons une régularisation des intégrales

$$\tfrac{1}{2}\Big(\int_{\substack{0\leqslant\rho\leqslant a\\ \omega\in S^{l-2}}} \pm \int_{\substack{-a\leqslant\rho\leqslant 0\\ \omega\in S^{l-2}}}\Big)\{(\sigma-\rho^2\tilde{h}(0,\omega))^2+\rho^2\}^{-l/2+j}$$
$$\times\,(\Psi-\Psi_1(\rho,\omega))\,\rho^{l-2}\,d\rho\cdot d\omega, \text{ ou} \tag{2.24}$$
$$\tfrac{1}{2}\Big(\int_{\substack{0\leqslant\rho\leqslant a\\ \omega\in S^{l-2}}} + \int_{\substack{-a\leqslant\rho\leqslant 0\\ \omega\in S^{l-2}}}\Big)\log\{(\sigma-\rho^2\tilde{h}(0,\omega))^2+\rho^2\}$$
$$\times\,(\Psi-\Psi_1)\,\rho^{l-2}\,d\rho\cdot d\omega, \tag{2.25}$$

comme suit: Supposons que les deux racines α et $\tilde{\alpha}$ de l'équation $(\sigma-\rho^2\tilde{h}(0,\omega))^2+\rho^2 = 0$ par rapport à ρ qui se trouvent dans un petit voisinage de l'origine sont contenues dans $U_\epsilon = \{|\,\rho\,| < \epsilon\}$. Les intégrations de (2.24) et (2.25) relativement à ρ sont faites le long des chemins γ comme suit:



Soient c^+ et c^- les cycles relatifs $[-a, a] \bmod\{-a, a\}$ qui sont "détournés" de l'origine ainsi que α et $\tilde{\alpha}$ dans le plan complexe supérieur et inférieur respectivement:



$$\mathfrak{c}^+ = [-a, -\epsilon] \cup [\epsilon, a] \cup \{|\rho| = \epsilon, \operatorname{Im} \rho > 0\},$$
$$\mathfrak{c}^- = [-a, -\epsilon] \cup [\epsilon, a] \cup \{|\rho| = \epsilon, \operatorname{Im} \rho < 0\}.$$

Soient $\mathscr{S}$ (ou $\mathscr{S}^*$) le système local (ou dual de $\mathscr{S}$) dans $S^{l-2} \times \{U_{2\epsilon} - \{\alpha, \bar{\alpha}\})$ défini par la représentation linéaire

$$\begin{aligned} &\pi_1(U_{2\epsilon} - \{\alpha, \bar{\alpha}\}) \to \{\pm 1\}, \\ &\pi_1(U_{2\epsilon} - \{\alpha, \bar{\alpha}\}) \to \left\{\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned} \tag{2.26}$$

correspondant aux monodromies des fonctions $\{(\sigma^2 - \rho^2\tilde{h}(0, \omega))^2 + \rho^2\}^{1/2}$ ou $\log\{(\sigma^2 - \rho^2\tilde{h}(0, \omega)) + \rho^2\}$ suivant l impair ou pair. Alors les cycles $S^{l-2} \times (1/2)(\mathfrak{c}^+ + \mathfrak{c}^-)$ définient certains éléments dans $H_{l-1}(S^{l-2} \times (U_{2\epsilon} - \{\alpha, \bar{\alpha}\}, \mathscr{S}^*)$, de sorte que les intégrales

$$\frac{1}{2} \int_{S^{l-2} \times (1/2)(\mathfrak{c}^+ + \mathfrak{c}^-)} \{(\sigma^2 - \rho^2\tilde{h}(0, \omega))^2 + \rho^2\}^{-l/2+j} \cdot (\Phi - \Phi_1)\, \rho^{l-2}\, d\rho \cdot d\omega \tag{2.27}$$

et

$$\frac{1}{2} \int_{S^{l-2} \times (1/2)(\mathfrak{c}^+ + \mathfrak{c}^-)} \log\{(\sigma^2 - \rho^2\tilde{h}(0, \omega))^2 + \rho^2\} \cdot (\Phi - \Phi_1)\, \rho^{l-2}\, d\rho \cdot d\omega \tag{2.28}$$

peuvent être regardées comme "forme bilinéaire" entre cohomologie et homologie (voir [1]):

$$H_{l-1}(S^{l-2} \times (U_{2\epsilon} - \{\alpha, \bar{\alpha}\}), \mathscr{S}^*) \times H^{l-1}(S^{l-2} \times (U_{2\epsilon} - \{\alpha, \bar{\alpha}\}), \mathscr{S}) \to \mathbb{C}. \tag{2.29}$$

Celles-là définissent fonctions analytique de σ à l'origine.

On définit alors la "partie finie" d'intégration de (2.17) et (2.18) que voici:

$$\begin{aligned} \text{p.f.} \int \Gamma_0^{-l/2+j} \psi(x, \eta)\, dS_\eta \\ \rightleftarrows \int \{(\sigma - \rho^2\tilde{h}(0, \omega))^2 + \rho^2\}^{-l/2+j} \\ \times \psi_1(\rho, \omega)\, \rho^{l-2}\, d\rho\, d\omega + \int \{(\sigma - \rho^2\tilde{h}(0, \omega))^2 + \rho^2\}^{-l/2+j} (\psi - \psi_1)\, \rho^{l-2}\, d\rho\, d\omega \end{aligned} \tag{2.30}$$

si l impair ou pair et

$$\text{p.f.} \int \log \Gamma_0 \cdot \psi(x, \eta)\, dS_\eta \equiv \int \log \Gamma_0 \cdot \psi_1 \rho^{l-2}\, d\rho\, d\omega + \int_{S^{l-2}\times(1/2)(c^+ + c^-)} \log \Gamma_0 \cdot (\psi - \psi_1)\, \rho^{l-2}\, d\rho\, d\omega, \tag{2.31}$$

si l pair. Elles sont donc C^∞ par rapport à σ pour $|\sigma|$ petit et ne dépendent pas du choix de a. Par conséquent on a

$$(d/d\sigma)^m \cdot \text{p.f.} \int_{|\eta'|\leqslant a} \Gamma_0(x, \eta)^{-l/2+j} \cdot \psi(x, \eta)\, dS_\eta = \text{p.f.} \int_{|\eta'|\leqslant a} (\partial/\partial\sigma)^m \cdot (\Gamma_0(x, \eta)^{-l/2+j} \cdot \psi(x, \eta))\, dS\eta\,. \tag{2.32}$$

Nous pouvons maintenant définir la régularisation de l'intégrale

$$\int_{\partial X^-} \frac{\partial^q E(x, \eta)}{\partial \nu_\eta{}^q}\, \varphi(x, \eta)\, dS_\eta \tag{2.33}$$

pour x assez proche à ∂X^-.

Définition 2.1. Supposons que (2.33) est une combinaison linéaire des intégrales de type (2.13) ou (2.14). Alors pour un petit nombre positif a, on définit la "partie finie" de (2.33) comme suit:

$$\begin{aligned}\text{p.f.} \int_{\partial X^-} \frac{\partial^q E(x, \eta)}{\partial \nu_\eta{}^q} \cdot \varphi(x, \eta)\, dS_\eta &= \text{p.f.} \int_{S^{l-2}\times\{|\eta'|\leqslant a\}} \Gamma_0^{-l/2+1-q} \left(\sum_{j=0}^{j_0} \alpha_j(x, \eta)/\Gamma_0(x, \eta)^j + \beta(x, \eta)\right) dS_\eta \\ &+ \int_{\partial X^-\cap\{|\eta'|\geqslant a\}} \partial^q E(x, \eta)/\partial \nu_\eta{}^q \cdot \varphi(x, \eta)\, dS, \qquad l \text{ impair, et}\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}\text{p.f.} \int_{\partial X^-} \frac{\partial^q E(x, \eta)}{\partial \nu_\eta{}^q} \cdot \varphi(x, \eta)\, dS_\eta &= \text{p.f.} \int_{S^{l-2}\times\{|\eta'|\leqslant a\}} \Gamma_0^{-l/2+1-q} \left(\sum_{j=0}^{j_0} \alpha_j(x, \eta)/\Gamma_0(x, \eta)^j + \beta(x, \eta)\right) dS_\eta \\ &+ \text{p.f.} \int \log \Gamma_0 \cdot \left(\sum_{j=0}^{j_0} \alpha_j'(x, \eta)/\Gamma_0(x, \eta)^j + \beta'(x, \eta)\right) dS_\eta \\ &+ \int_{\partial X^-\cap\{|\eta'|\geqslant a\}} \frac{\partial^q E(x, \eta)}{\partial \nu_\eta{}^q} \cdot \varphi(x, \eta)\, dS_\eta\,,\end{aligned} \tag{2.35}$$

si l pair où α_j, β, α'_j et β' sont définis par (2.15) et (2.16). Celles-ci ne dépendent ni du choix de j_0 ni celui de a, pourvu que j_0 assez grand et a assez petit.

Par consequent on a

PROPOSITION 3. *Si $\varphi \in C^\infty(\partial X^-)$, on a*

$$(d/d\sigma)^p \cdot \text{p.f.} \int_{\partial X^-} \frac{\partial^q E(x, \eta)}{\partial \nu_\eta{}^q} \cdot \varphi(\eta)\, dS_\eta \Big]_{\sigma=0}$$

$$= \text{p.f.} \int_{\partial X^-} \frac{\partial^{p+q} E(\xi, \eta)}{\partial \nu_\xi{}^p\, \partial \nu_\eta{}^q} \varphi(\eta)\, dS_\eta\,, \qquad p \geqslant 0. \tag{2.36}$$

Celles-ci sont C^∞ par rapport à $\xi \in \partial X^-$. On a évidemment

$$\text{p.f.} \int_{\partial X^-} E(\xi, \eta)\, \varphi(\eta)\, dS_\eta = \int_{\partial X^-} E(\xi, \eta)\, \varphi(\eta)\, dS_\eta\,, \tag{2.37}$$

$$\text{p.f.} \int_{\partial X^-} \frac{\partial E(\xi, \eta)}{\partial \nu_\eta} \cdot \varphi(\eta)\, dS_\eta = \int_{\partial X^-} \frac{\partial E(\xi, \eta)}{\partial \nu_\eta} \cdot \varphi(\eta)\, dS_\eta\,. \tag{2.38}$$

Remarque 1. Soient $D_\xi{}^\pm(M, a)$ les deux mêmes disques fermés dans M, de centre $\xi \in M$ et de rayon a, et $S_\xi(M, a)$ le bord de $D_\xi{}^+(M, a)$. Considerons le CW-complex

$$\tilde{M} = \bigcup_{\xi \in M} \{(M - D_\xi{}^+(M, a)) \cup (M - D_\xi{}^-(M, a)) \cup (S_\xi(M, a) \times [-a, a])\}$$

obtenue par l'identification naturelle

$$S_\xi(M, a) \times \{a\} \rightleftarrows \partial(M - D_\xi{}^+(M, a)),$$
$$S_\xi(M, a) \times \{-a\} \rightleftarrows \partial(M - D_\xi{}^-(M, a)).$$

Soit $\tilde{M}_\mathbb{C}$ la complexification partielle de $\tilde{M}$ par l'extension de l'intervalle $[-a, a]$ au plan complex $\mathbb{C}$. On note par π la projection naturelle de $\tilde{M}_\mathbb{C}$ sur M. Les systèmes locaux $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}^*$ sont définis sur chaque fibre $\pi^{-1}(\xi)$ et ne dépendent pas de ξ. Alors la "partie finie" (2.34) et (2.35) n'est autre chose qu'une paire de dualité entre $H_*(\pi^{-1}(\xi) - S_\xi(M, a) \times \{0\}, \mathscr{S}^*)$ et $H^*(\pi^{-1}(\xi) - S_\xi(M, \alpha) \times \{0\}, \mathscr{S})$.

D'après le théorème d'isotopie de R. Thom (voir [12] et [13]) on a

PROPOSITION 4.

$$\text{p.f.} \int_{\partial X_t^-} \frac{\partial^{p+q} E(\xi, \eta)}{\partial \nu_\xi{}^p\, \partial \nu_\eta{}^q} \cdot \varphi_t(\eta)\, dS_\eta$$

est C^∞ relativement à $(\xi, t) \in M \times (-1, 1)$ pourvu que $\varphi_t(\eta)$ est C^∞.

3. Démonstration de la formule d'Hadamard

Considerons la variation δ définie par $dt \otimes \partial/\partial t = \delta\nu_\xi \otimes \partial/\partial\nu_\xi$, le long du champs de vecteur $\partial/\partial t$ dans $(-1, 1) \times M$. On a évidemment

$$\delta dS_\xi = H(\xi)\, \delta\nu_\xi\, dS_\xi\,, \tag{3.1}$$

où $H(\xi)$ désigne la courbure de moyenne de ∂X_t^- en ξ. La proposition 4 entraine immédiatement le

Lemme 3.1. *Sous la même hypothèse que dans la Proposition précédente*

$$\begin{aligned}
&\delta \text{ p.f.} \int_{\partial X_t^-} \frac{\partial^{p+q} E(\xi, \eta)}{\partial\nu_\xi^p\, \partial\nu_\eta^q} \cdot \varphi_t(\eta)\, dS_\eta \\
&= \text{p.f.} \int_{\partial X_t^-} \frac{\partial^{p+q+1} E(\xi, \eta)}{\partial\nu_\xi^{p+1}\, \partial\nu_\eta^q} \cdot \varphi_t(\eta)\, \delta\nu_\xi\, dS \\
&\quad + \text{p.f.} \int_{\partial X_t^-} \frac{\partial^{p+q+1} E(\xi, \eta)}{\partial\nu_\xi^p\, \partial\nu_\eta^{q+1}} \cdot \varphi_t(\eta)\, \delta\nu_\eta\, dS_\eta \\
&\quad + \text{p.f.} \int_{\partial X_t^-} \frac{\partial^{p+q} E(\xi, \eta)}{\partial\nu_\xi^p\, \partial\nu_\eta^q} \cdot \delta\varphi_t(\eta)\, dS_\eta \\
&\quad + \text{p.f.} \int_{\partial X_t^-} \frac{\partial^{p+q} E(\xi, \eta)}{\partial\nu_\xi^p\, \partial\nu_\eta^q} \cdot \varphi_t(\eta)\, H(\eta)\, \delta\nu_\eta\, dS_\eta\,.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Remarque 3.1. La fonction $E(x, y)$ étant symétrique, on a pour $x, y \in X^-$,

$$\int_{\partial X^-} \frac{\partial E(x, \zeta)}{\partial\nu_\zeta} \cdot E(\zeta, y)\, dS_\zeta = \int_{\partial X^-} E(x, \zeta) \cdot \frac{\partial E(\zeta, y)}{\partial\nu_\zeta}\, dS_\zeta\,. \tag{3.3}$$

Ceci entraine les suivants:

$$\int_{\partial X^-} \frac{\partial E(\xi, \zeta)}{\partial\nu_\zeta} \cdot E(\zeta, \eta)\, dS_\zeta = \int_{\partial X^-} E(\xi, \zeta) \cdot \frac{\partial E(\zeta, \eta)}{\partial\nu_\zeta}\, dS_\zeta\,, \tag{3.4}$$

$$\text{p.f.} \int_{\partial X^-} \frac{\partial^2 E(\xi, \zeta)}{\partial\nu_\xi\, \partial\nu_\zeta} \cdot E(\zeta, \eta)\, dS_\zeta = \int_{\partial X^-} \frac{\partial E(\xi, \zeta)}{\partial\nu_\xi} \frac{\partial E(\zeta, \eta)}{\partial\nu_\zeta}\, dS_\zeta\,, \tag{3.5}$$

$$\text{p.f.} \int_{\partial X^-} \frac{\partial^2 E(\xi, \zeta)}{\partial\nu_\xi\, \partial\nu_\zeta} \cdot \frac{\partial E(\zeta, \eta)}{\partial\nu_\eta}\, dS_\zeta = \text{p.f.} \int_{\partial X^-} \frac{\partial E(\xi, \zeta)}{\partial\nu_\xi} \frac{\partial^2 E(\zeta, \eta)}{\partial\nu_\zeta\, \partial\nu_\eta}\, dS_\zeta\,. \tag{3.6}$$

PROPOSITION 5. *On a la formule de variation*

$$\delta\left(\int_{(\partial X_t^-)^{m-1}} \frac{\partial E(x, \zeta_1)}{\partial \nu_{\zeta_1}} \frac{\partial E(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial \nu_{\zeta_2}} \cdots \frac{\partial E(\zeta_{m-2}, \zeta_{m-1})}{\partial \nu_{\zeta_{m-1}}} E(\zeta_{m-1}, y)\, dS_{\zeta_1} \cdots dS_{\zeta_{m-1}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m-2} \text{p.f.} \int_{(\partial X_t^-)^{m-1}} \frac{\partial E(x, \zeta_1)}{\partial \nu_{\zeta_1}} \cdots \frac{\partial^2 E(\zeta_i, \zeta_{i+1})}{\partial \nu_{\zeta_i}\, \partial \nu_{\zeta_{i+1}}} \cdots \frac{\partial E(\zeta_{m-2}, \zeta_{m-1})}{\partial \nu_{\zeta_{m-1}}}$$

$$\times E(\zeta_{m-1}, y) \cdot \delta\nu_{\zeta_i} \cdot dS_{\zeta_1} \cdots dS_{\zeta_{m-1}} + \int_{(\partial X_t^-)^{m-1}} \frac{\partial E(x, \zeta_1)}{\partial \nu_{\zeta_1}} \cdots$$

$$\times \frac{\partial E(\zeta_{m-2}, \zeta_{m-1})}{\partial \nu_{\zeta_{m-1}}} \frac{\partial E(\zeta_{m-1}, y)}{\partial \nu_{\zeta_{m-1}}} \cdot \delta\nu_{\zeta_{m-1}}\, dS_{\zeta_1} \cdots dS_{\zeta_{m-1}}$$

$$+ \sum_{i=2}^{m-1} \text{p.f.} \int_{(\partial X_t^-)^{m-1}} \frac{\partial E(x, \zeta_1)}{\partial \nu_{\zeta_1}} \cdots \frac{\partial E(\zeta_{i-2}, \zeta_{i-1})}{\partial \nu_{\zeta_{i-1}}} \cdot \overline{\text{grad}}_{\zeta_i} E(\zeta_{i-1}, \zeta_i)$$

$$\times \overline{\text{grad}}_{\zeta_i} \frac{\partial E(\zeta_i, \zeta_{i+1})}{\partial \nu_{\zeta_{i+1}}} \cdot \frac{\partial E(\zeta_{i+1}, \zeta_{i+2})}{\partial \nu_{\zeta_{i+2}}} \cdots \frac{\partial E(\zeta_{m-2}, \zeta_{m-1})}{\partial \nu_{\zeta_{m-1}}} E(\zeta_{m-1}, y)$$

$$\times \delta\nu_{\zeta_i} \cdot dS_{\zeta_1} \cdots dS_{\zeta_{m-1}} + \text{p.f.} \int_{(\partial X_t^-)^{m-1}} \overline{\text{grad}}_{\zeta_1} E(x, \zeta_1)$$

$$\times \overline{\text{grad}}_{\zeta_1} \frac{\partial E(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial \nu_{\zeta_2}} \cdot \frac{\partial E(\zeta_2, \zeta_3)}{\partial \nu_{\zeta_3}} \cdots$$

$$\times \frac{\partial E(\zeta_{m-2}, \zeta_{m-1})}{\partial \nu_{\zeta_{m-1}}} E(\zeta_{m-1}, y)\, \delta\nu_{\zeta_1}\, dS_{\zeta_1} \cdots dS_{\zeta_{m-1}}. \tag{3.7}$$

Démonstration. Le premier membre de (3.7) est égal à

$$\sum_{i=1}^{m-2} \text{p.f.} \int_{(\partial X_t^-)^{m-1}} \frac{\partial E(x, \zeta_1)}{\partial \nu_{\zeta_1}} \cdots \frac{\partial^2 E(\zeta_i, \zeta_{i+1})}{\partial \nu_{\zeta_i}\, \partial \nu_{\zeta_{i+1}}} \cdots \frac{\partial E(\zeta_{m-2}, \zeta_{m-1})}{\partial \nu_{\zeta_{m-1}}} E(\zeta_{m-1}, y)$$

$$\times \delta\nu_{\zeta_i}\, dS_{\zeta_1} \cdots dS_{\zeta_{m-1}} + \int_{(\partial X_t^-)^{m-1}} \frac{\partial E(x, \zeta_1)}{\partial \nu_{\zeta_1}} \cdots \frac{\partial E(\zeta_{m-2}, \zeta_{m-1})}{\partial \nu_{\zeta_{m-1}}}$$

$$\times \frac{\partial E(\zeta_{m-1}, y)}{\partial \nu_{\zeta_{m-1}}} \delta\nu_{\zeta_{m-1}} \cdot dS_{\zeta_1} \cdots dS_{\zeta_{m-1}} + \sum_{i=2}^{m-1} \text{p.f.} \int_{(\partial X_t^-)^{m-1}} \frac{\partial E(x, \zeta_1)}{\partial \nu_{\zeta_1}}$$

$$\times \frac{\partial E(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial \nu_{\zeta_2}} \cdots \frac{\partial^2 E(\zeta_{i-1}, \zeta_i)}{\partial \nu_{\zeta_i}^2} \cdots E(\zeta_{m-1}, y) \cdot \delta\nu_{\zeta_i}\, dS_{\zeta_1} \cdots dS_{\zeta_{m-1}}$$

$$+ \int_{(\partial X_t^-)^{m-1}} \frac{\partial^2 E(x, \zeta_1)}{\partial \nu_{\zeta_1}^2} \frac{\partial E(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial \nu_{\zeta_2}} \cdots \frac{\partial E(\zeta_{m-2}, \zeta_{m-1})}{\partial \nu_{\zeta_{m-1}}} E(\zeta_{m-1}, y)$$

$$\times \delta\nu_{\zeta_1}\, dS_{\zeta_1} \cdots dS_{\zeta_{m-1}} + \sum_{i=1}^{m-1} \int_{(\partial X_t^-)^{m-1}} \frac{\partial E(x, \zeta_1)}{\partial \nu_{\zeta_1}} \frac{\partial E(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial \nu_{\zeta_2}} \cdots$$

$$\times \frac{\partial E(\zeta_{m-2}, \zeta_{m-1})}{\partial \nu_{\zeta_{m-1}}} E(\zeta_{m-1}, y) \cdot \delta\nu_{\zeta_i}\, H(\zeta_i)\, dS_{\zeta_1}\, dS_{\zeta_2} \cdots dS_{\zeta_{m-1}}. \tag{3.8}$$

D'autre part d'après Lemme 2.1 on a

$$\frac{\partial^2 E(x,\zeta)}{\partial \nu_\zeta^{\,2}} = {}^-H(\zeta)\cdot \partial/\partial\nu_\zeta\, E(x,\zeta) - \bar{\Delta}_\zeta\, E(x,\zeta) + sE(x,\zeta). \tag{3.9}$$

Par consequent, pour $\varphi \in C^\infty(\partial X_t^-)$, on a

$$\begin{aligned} &\text{p.f.} \int_{\partial X^-} \bar{\Delta}_\zeta E(\xi,\zeta)\cdot\varphi(\zeta)\, dS_\zeta \\ &\qquad = -\text{p.f.} \int_{\partial X^-} \overline{\text{grad}}_\zeta\, E(\xi,\zeta)\cdot \overline{\text{grad}}_\zeta\, \varphi(\zeta)\, dS_\zeta\,, \end{aligned} \tag{3.10}$$

d'où la proposition.

La combinaison des deux Propositions 1 et 5 donne

THÉORÈME 1.

$$\begin{aligned} \delta G(x,y;\lambda) = 2\lambda \Big[&\int_{\partial X_t^-} \frac{\partial G(x,\zeta;\lambda)}{\partial\nu_\zeta}\, \frac{\partial G(\zeta,y;\lambda)}{\partial\nu_\zeta}\, \delta\nu_\zeta\, dS_\zeta \\ &+ \int_{\partial X_t^-} \overline{\text{grad}}_\zeta\, G(x,\zeta;\lambda)\cdot \overline{\text{grad}}_\zeta\, G(\zeta,y;\lambda)\, \delta\nu_\zeta\, dS_\zeta \\ &+ s\int_{\partial X_t^-} G(x,\zeta;\lambda)\cdot G(\zeta,y;\lambda)\, \delta\nu_\zeta\, dS_\zeta \Big] \quad et \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} \delta N(x,y;\lambda) = 2\lambda \Big[&\int_{\partial X_t^-} \frac{\partial N(x,\zeta;\lambda)}{\partial\nu_\zeta}\, \frac{\partial N(\zeta,y;\lambda)}{\partial\nu_\zeta}\, \delta\nu_\zeta\, dS_\zeta \\ &+ \int_{\partial X_t^-} \overline{\text{grad}}_\zeta\, N(x,\zeta;\lambda)\cdot \overline{\text{grad}}_\zeta\, N(\zeta,y;\lambda)\, \delta\nu_\zeta\, dS_\zeta \\ &+ s\int_{\partial X_t^-} N(x,\zeta;\lambda)\, N(\zeta,y;\lambda)\, \delta\nu_\zeta\, dS_\zeta \Big]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Démonstration. $G(x,y;\lambda)$ ou $N(x,y;\lambda)$ étant méromorphe en $\lambda \in \mathbb{C}$, on n'a qu'à démontrer Théorème 1 pour $|\lambda| \ll 1$. Si $|\lambda| \ll 1$, $G(x,y;\lambda)$ ou $N(x,y;\lambda)$ a l'expansion (1.8) ou (1.9) comme séries de puissance en λ. On applique la formule (3.7) pour chaque terme, d'où le théorème.

D'après la théorie classique de potentiel les Problèmes I_λ et I_λ^* sont uniquement résolus. $G^-(x,y;\lambda)$ et $N^-(x,y;\lambda)$ sont donc holomorphes en $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$ respectivement. De plus les fonctions $G^-(x,y;1)$ et $N^-(x,y;-1)$ $(s > 0)$

donnent les fonctions de Green et Neumann $G(x, y)$ et $N(x, y)$, satisfaisant aux conditions aux limites suivantes respectivement:

$$\begin{aligned} G(x, y)]_{\partial X^-} &= 0, \\ (-\Delta + s)\, G(x, y) &= Y(x, y), \qquad s \geqslant 0, \quad \text{et} \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(\xi, y)}{\partial \nu_\xi} &= 0, \qquad \xi \in \partial X^-, \\ (-\Delta + s)\, N(x, y) &= Y(x, y), \qquad s > 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

En vue des formules (1.10) et (1.11) il vient

$$\begin{gathered} G(x, \eta; 1) = G(x, \eta) = G(\xi, y) = 0, \qquad \xi, \eta \in \partial X^-, \\ 2\,\frac{\partial G(x, \eta; 1)}{\partial \nu_\eta} = \frac{\partial G(x, \eta)}{\partial \nu_\eta^-}, \\ \frac{\partial G(\xi, y; 1)}{\partial \nu_\xi} = \frac{\partial G(\xi, y)}{\partial \nu_\xi^-} \quad \text{et} \end{gathered} \tag{3.15}$$

$$\begin{gathered} N(\xi, y; -1) = N(\xi, y), \qquad \xi \in \partial X^-, \\ N(x, \eta; -1) = 2N(x, \eta), \qquad \eta \in \partial X^-, \\ \frac{\partial N(x, \eta; -1)}{\partial \nu_\eta} = \frac{\partial N(x, \eta)}{\partial \nu_\eta^-} = \frac{\partial N(\xi, y)}{\partial \nu_\xi^-} = 0. \end{gathered} \tag{3.16}$$

Par conséquent on a la formule classique d'Hadamard (voir [2]), grace à (3.11) et (3.12):

THÉORÈME 2.

$$\delta G(x, y) = \int_{\partial X^-} \frac{\partial G(x, \zeta)}{\partial \nu_\zeta} \cdot \frac{\partial G(\zeta, y)}{\partial \nu_\zeta}\, \delta \nu_\zeta\, dS_\zeta, \qquad s \geqslant 0, \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} -\delta N(x, y) = {} & \int_{\partial X^-} \overline{\operatorname{grad}_\zeta}\, N(x, \zeta) \cdot \overline{\operatorname{grad}_\zeta}\, N(\zeta, y)\, \delta\nu_\zeta\, dS_\zeta \\ & + s \int_{\partial X^-} N(x, \zeta) \cdot N(\zeta, y)\, \delta\nu_\zeta\, dS_\zeta, \qquad s > 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Dans le cas ou $s = 0$, la fonction de Neumann $N_0(x, y)$ satisfaisant aux condition aux limites:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_0(\xi, y)}{\partial \nu_\xi} &= -1/V, \\ \int_{\partial X^-} N_0(\xi, y)\, dS_\xi &= 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

s'exprime de la forme suivante, en vertue du Remarque 2,

$$N_0(x, y) = \lim_{\lambda\to-1} \Big[N(x, y; \lambda) + 2\lambda/V \cdot \int_{\partial X^-} N(x, \zeta; \lambda)\, dS_\zeta$$
$$- 1/V \int_{\partial X^-} N(\zeta, y; \lambda)\, dS_\zeta + 2\lambda/V \cdot \int_{(\partial X^-)^2} N(\xi, \zeta; \lambda)\, dS_\xi\, dS_\zeta\Big]. \tag{3.20}$$

Par consequent,

THÉORÈME 3. *Si $s = 0$, on a*

$$-\delta N(x, y) = \int_{\partial X^-} \overline{\mathrm{grad}_\zeta}\, N(x, \zeta) \cdot \overline{\mathrm{grad}_\zeta}\, N(\zeta, y)\, \delta\nu_\zeta\, dS_\zeta$$
$$- 1/V \cdot \int_{\partial X^-} \delta\nu_\zeta\, dS_\zeta. \tag{3.21}$$

En prenant les valeurs aux limites $x \to \xi$, et $y \to \eta$, $\xi, \eta \in \partial X^-$, on a

THÉORÈME 2′.

$$\delta G(\xi, \eta) = \text{p.f.} \int_{\partial X^-} \frac{\partial G(\xi, \zeta)}{\partial \nu_\zeta} \cdot \frac{\partial G(\zeta, \eta)}{\partial \nu_\zeta}\, \delta\nu_\zeta\, dS_\zeta$$
$$+ \frac{\partial G(\xi, \eta)}{\partial \nu_\xi}\, \delta\nu_\xi + \frac{\partial G(\xi, \eta)}{\partial \nu_\eta}\, \delta\nu_\eta, \qquad s \geqslant 0, \tag{3.22}$$

$$-\delta N(\xi, \eta) = \text{p.f.} \int_{\partial X^-} \overline{\mathrm{grad}_\zeta}\, N(\xi, \zeta) \cdot \overline{\mathrm{grad}_\zeta}\, N(\zeta, \eta)\, \delta\nu_\zeta\, dS_\zeta$$
$$+ s \int_{\partial X^-} N(\xi, \zeta) \cdot N(\zeta, \eta)\, \delta\nu_\zeta\, dS_\zeta, \qquad s > 0, \tag{3.23}$$

et

THÉORÈME 3. *Si $s = 0$,*

$$-\delta N_0(\xi, \eta) = \text{p.f.} \int_{\partial X_t^-} \overline{\mathrm{grad}_\zeta}\, N(\xi, \zeta) \cdot \overline{\mathrm{grad}_\zeta}\, N(\zeta, \eta)\, \delta\nu_\zeta\, dS_\zeta$$
$$- 1/V \int_{\partial X^-} \delta\nu_\zeta\, dS_\zeta - (1/V) \cdot \delta\nu_\zeta - (1/V) \cdot \delta\nu_\eta. \tag{3.24}$$

4. UNE GÉNÉRALISATION DANS L'ESPACE DES FORMES DIFFÉRENTIELLES

Dans ce qui suit on suivera les formalités de l'article de P. E. Conner [3]. On désigne par $\Omega^{\cdot}(X)$ l'algèbre de de Rham, de formes différentielles dans X

et par Δ l'opérateur de Laplace $dd^* + d^*d$, où d^* désigne l'adjoint de la dérivée extérieure d. Une forme quelconque φ de $\Omega^{\cdot}(X)$ s'écrit moyennant les coordonnées locales $(x^1, x^2, \ldots, x^l)$ avec $x^1 = t$, $x^1 = \xi^2, \ldots, x^l = \xi^{l-1}$, relativement à ∂X_t^- dans Section 2:

$$\varphi = dt \wedge \varphi' + \varphi''$$

où φ' et φ'' ne contient pas dt. On désigne alors par $\nu\varphi = dt \wedge \varphi'$ (composante normale), $\tau\varphi = \varphi''$ (composante tangente), $\varphi/d\nu = \varphi'$ et $\partial\varphi/\partial\nu = d\varphi/d\nu$ (dérivée normale). On utilise les notations $\bar{*}$, $\bar{d}$, $\bar{d}^*$ et $\bar{\Delta} = \bar{d} \cdot \bar{d}^* + \bar{d}^* \cdot \bar{d}$ par rapport à la métrique induite dans ∂X_t^-. On note par $\check{\Omega}^{\cdot}(X, X) = \sum_{p=0}^{n} \check{\Omega}^p(X, X)$ le dual de $\Omega^{\cdot}(X) \bar{\otimes} \Omega^{\cdot}(X)$, à-savoir, l'espace des bi-formes de courants dans X.

Soit $E(x, y) \in \check{\Omega}^{\cdot}(X, X)$ la forme de Green dans X satisfaisant aux propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} (\Delta_x + s)\, E(x, y) &= Y(x, y), \\ \nu_x E(x, y) \,|_{\partial X} &= \tau_x E(x, y) \,|_{\partial X} = 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

pour $y \in X$ fixé, où $Y(x, y)$ désigne la mesure de Dirac $\in \check{\Omega}^{\cdot}(X, X)$ (voir [9]). Dans ce cas-là on a la formule de Green:

$$\begin{aligned} &\int_{\partial X^-} \varphi(x) \wedge *_x\, d_x E(x, y) - \int_{X^-} d_x^* \varphi \wedge *_x E(x, y) \\ &\quad - \int_{X^-} E(x, y) \wedge *_x\, d_x(\varphi) + \int_{X^-} d_x^* E(x, y) \wedge *_x \varphi = -\varphi(y), \end{aligned} \tag{4.2}$$

pour $\varphi \in \Omega^{\cdot}(X^-)$ quelconque. On considère les formes de Green G_{I}–G_{VI} associées aux six problèmes aux limites suivantes dans le domaine X^-:

$$(\Delta_x + s)\, G(x, y) = Y(x, y), \qquad G(x, y) - E(x, y) \tag{4.3}$$

est de classe C^∞ avec les conditions aux limites:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) && \tau_x G(x, y) \,|_{\partial X^-} = \nu_x G(x, y) \,|_{\partial X^-} = 0, \\ &(\mathrm{II}) && \nu_x G(x, y) \,|_{\partial X^-} = \nu_x\, d_x G(x, y) \,|_{\partial X^-} = 0, \\ &(\mathrm{II}^*) && \tau_x G(x, y) \,|_{\partial X^-} = d_x^* G(x, y) \,|_{\partial X^-} = 0, \\ &(\mathrm{III}) && \tau_x G(x, y) \,|_{\partial X^-} = \nu_x\, d_x G(x, y) \,|_{\partial X^-} = 0, \\ &(\mathrm{III}^*) && \nu_x G(x, y) \,|_{\partial X^-} = d_x^* G(x, y) \,|_{\partial X^-} = 0, \\ &(\mathrm{IV}) && d_x^* G(x, y) \,|_{\partial X^-} = \nu_x\, d_x G(x, y) \,|_{\partial X^-} = 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Définissons les formes de série de Neumann $G_{\mathrm{I}}(x, y; \lambda)$ et $G_{\mathrm{II}}(x, y; \lambda) \in \check{\Omega}^p(X, X)$ analogues aux fonctions $G(x, y; \lambda)$ et $N(x, y; \lambda)$ dans Section 1 comme suit (voir [3]):

$$G_{\mathrm{I}}^{\pm}(x, y; \lambda) = E(x, y) + \sum_{m=0}^{\infty} (2\lambda)^{m+1} \int_{(\partial X^-)^{m-1} \ni (z_0, z_1, \ldots, z_m)} (E(z_0, y), *_{z_0} E(z_0, y))$$
$$\wedge \begin{pmatrix} *_{z_0} d_{z_0} E(z_0, z_1), & *_{z_1} *_{z_0} d_{z_0} E(z_0, z_1) \\ \epsilon\, d_{z_0}^* E(z_0, z_1), & \epsilon \cdot *_{z_1} \cdot d_{z_0}^* E(z_0, z_1) \end{pmatrix} \wedge \cdots \wedge \begin{pmatrix} *_{z_m} d_{z_m} E(z_m, x) \\ \epsilon\, d_{z_m}^* E(z_m, x) \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

où $\epsilon = (-1)^{lp+l+1}$, et

$$G_{\mathrm{II}}^{\pm}(x, y; \lambda) = E(x, y) + \sum_{m=0}^{\infty} (2\lambda)^{m+1}$$
$$\times \int_{(\partial X^-)^{m+1} \ni (z_0, z_1, \ldots, z_m)} (-E(z_m, x), d_{z_m}^* E(z_m, x))$$
$$\wedge \begin{pmatrix} -*_{z_m} d_{z_m}^* E(z_{m-1}, z_m), & *_{z_m} d_{z_m}^* d_{z_{m-1}}^* E(z_{m-1}, z_m) \\ -*_{z_m} E(z_{m-1}, z_m), & *_{z_m} d_{z_{m-1}}^* E(z_{m-1}, z_m) \end{pmatrix}$$
$$\wedge \cdots \wedge \begin{pmatrix} -*_{z_1} d_{z_1}^* E(z_0, z_1), & *_{z_1} d_{z_1}^* d_{z_0}^* E(z_0, z_1) \\ -*_{z_1} E(z_0, z_1), & *_{z_1} d_{z_0}^* E(z_0, z_1) \end{pmatrix}$$
$$\wedge \begin{pmatrix} *_{z_0} d_{z_0} E(z_0, y) \\ *_{z_0} E(z_0, y) \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

suivant que $x \in X^{\pm}$ et $y \in X^-$. Ce que celles-ci sont méromorphes en $\lambda \in \mathbb{C}$ découle immédiatement des deux lemmes suivants dus à D. F. G. Duff, D. C. Spencer et P. E. Conner (voir [3]):

Lemme 4.1. *$G_{\mathrm{I}}^-(x, y; \lambda)$ s'exprime de la forme:*

$$G_{\mathrm{I}}^-(x, y; \lambda) = E(x, y) + \int_{\partial X^-} \alpha(z, y) \wedge *_z d_z E(z, x)$$
$$+ \int_{\partial X^-} d_z^* E(z, x) \wedge *_z \beta(z, y), \tag{4.7}$$

où $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$ satisfont au système des équations intégrales:

$$-\lambda\tau_x *_x E(x, y)]_{x=\xi} = +\tfrac{1}{2}\tau_x *_x \beta(x, y)]_{x=\xi} + \lambda \int_{\partial X^-} \alpha(z, y) \wedge \tau_x *_x *_z d_z E(z, x)\Big]_{x=\xi}$$
$$+ \lambda \int_{\partial X^-} d_z^* E(z, x) \wedge \tau_x *_x *_z \beta(z, y)\Big]_{x=\xi}, \tag{4.8}$$

et

$$-\lambda\tau_x E(x, y)]_{x=\xi} = -\tfrac{1}{2}\tau_x \alpha(x, y)]_{x=\xi} + \lambda \int_{\partial X^-} \tau_x \alpha(z, y) \wedge *_z d_z E(z, x)\Big]_{x=\xi}$$
$$+ \lambda \int_{\partial X^-} \tau_x d_z^* E(z, x) \wedge *_z \beta(z, y)\Big]_{x=\xi}. \tag{4.9}$$

De même manière on a

LEMME 4.2. *$G_{\mathrm{II}}^-(x, y; \lambda)$ s'exprime de la forme:*

$$G_{\mathrm{II}}^-(x, y; \lambda) = E(x, y) + \int_{\partial X^-} d_z^* E(z, x) \wedge *_z \beta(z, y)$$
$$+ \int_{\partial X^-} E(z, x) \wedge *_z d_z \alpha(z, y), \tag{4.10}$$

où $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$ satisfont au système des équations intégrales:

$$-\lambda\tau_x *_x E(x, y)]_{x=\xi} = +\tfrac{1}{2}\tau_x *_x \beta(x, y)]_{x=\xi} + \lambda \int_{\partial X^-} \tau_x *_x d_z^* E(z, x) \wedge *_z \beta(z, y)\Big]_{x=\xi}$$
$$+ \lambda \int_{\partial X^-} \tau_x *_x E(z, x) \wedge *_z d_z \alpha(z, y), \tag{4.11}$$

et

$$-\lambda\nu_x d_x E(x, y)]_{x=\xi} = \tfrac{1}{2}\nu_x d_x \alpha(x, y)]_{x=\xi} + \lambda \int_{\partial X^-} \nu_x d_x d_z^* E(z, x) \wedge *_z \beta(z, y)$$
$$+ \lambda \int_{\partial X^-} \nu_x d_x E(z, x) \wedge *_z d_z \alpha(z, y)\Big]_{x=\xi}. \tag{4.12}$$

Démonstration. On a qu'à utiliser les formules pour potentiels de coucle simple our double suivants:

$$\lim_{\substack{x\to\xi \\ x\in X_\pm}} \int_{\partial X^-} \alpha(z, y) \wedge *_z d_z E(z, x)$$
$$= \pm\tfrac{1}{2}\tau_x \alpha(x, y)]_{x=\xi} + \int_{\partial X^-} \alpha(z, y) \wedge \tau_x *_z d_z E(z, x)\Big]_{x=\xi}, \tag{4.13}$$

$$\lim_{\substack{x\to\xi\\ x\in X_\pm}} \int_{\partial X^-} *_x\, d_z^* E(z,x) \wedge *_z\beta(z,y)$$
$$= \pm\tfrac{1}{2}\tau_x *_x \beta(x,y)]_{x=\xi} + \int_{\partial X^-} \tau_x *_x\, d_z^* E(z,x) \wedge *_z\beta(z,y)\Big]_{x=\xi}, \quad \text{et}$$
$$(4.14)$$

$$\lim_{\substack{x\to\xi\\ x\in X_\pm}} \int_{\partial X^-} \nu_x\, d_x E(z,x) \wedge *_z\, d_z\alpha(z,y)$$
$$= \pm\nu_x\, d_x\alpha(x,y)]_{x=\xi} + \int_{\partial X^-} \nu_x\, d_x E(z,x) \wedge *_z\, d_z\alpha(z,y)\Big]_{x=\xi}. \qquad (4.15)$$

Les valeurs aux bords limites de $G_{\mathrm{I}}^-(x,y;\lambda)$ et $G_{\mathrm{II}}^-(x,y;\lambda)$ satisfont aux propriétés suivantes:

$$\begin{aligned}
\tau_x G_{\mathrm{I}}^{\pm}(x,y;\lambda)]_{x=\xi} &= (1\pm\lambda)\,\tau_\xi G_{\mathrm{I}}(\xi,y;\lambda),\\
\nu_x G_{\mathrm{I}}^{\pm}(x,y;\lambda)]_{x=\xi} &= (1\pm\lambda)\,\nu_\xi G_{\mathrm{I}}(\xi,y;\lambda),\\
\tau_x\, d_x G_{\mathrm{I}}^{+}(x,y;\lambda)]_{x=\xi} &= \tau_x\, d_x G_{\mathrm{I}}^{-}(x,y;\lambda)]_{x=\xi} \quad \text{et}\\
\nu_x\, d_x G_{\mathrm{I}}^{+}(x,y;\lambda)]_{x=\xi} &= \nu_x\, d_x G_{\mathrm{I}}^{-}(x,y;\lambda)]_{x=\xi}
\end{aligned}$$

et (4.16)

$$\begin{aligned}
\nu_x G_{\mathrm{II}}^{\pm}(x,y;\lambda)]_{x=\xi} &= (1\pm\lambda)\,\nu_\xi G_{\mathrm{II}}(\xi,y;\lambda),\\
\nu_x\, d_x G_{\mathrm{II}}^{\pm}(x,y;\lambda)]_{x=\xi} &= (1\pm\lambda)(\nu d)_\xi\, G_{\mathrm{II}}(\xi,y;\lambda),\\
\tau_x G_{\mathrm{II}}^{+}(x,y;\lambda)]_{x=\xi} &= \tau_x G_{\mathrm{II}}^{-}(x,y;\lambda)]_{x=\xi},\\
\tau_x\, d_x G_{\mathrm{II}}^{+}(x,y;\lambda)]_{x=\xi} &= \tau_x\, d_x G_{\mathrm{II}}^{-}(x,y;\lambda)]_{x=\xi}
\end{aligned}$$

où $(\tau_\xi G_{\mathrm{I}}(\xi,y;\lambda),\ \nu_\xi G_{\mathrm{I}}(\xi,y;\lambda))$ et $(\nu_\xi G_{\mathrm{II}}(\xi,y;\lambda),\ (\nu d)_\xi G_{\mathrm{II}}(\xi,y;\lambda))$ sont définis comme suit:

$$\begin{aligned}
&(\tau_\xi G_{\mathrm{I}}(\xi,y;\lambda),\ \nu_\xi G_{\mathrm{I}}(\xi,y;\lambda))\\
&\quad= (\tau_x E(x,y)]_{x=\xi},\ \nu_x E(x,y)]_{x=\xi})\\
&\qquad+ \sum_{m=0}^{\infty} (2\lambda)^{m+1} \int_{(\partial X^-)^{m+1}} (E(z_0,y),\ *_{z_0}E(z_0,y))\\
&\qquad\wedge \begin{pmatrix} *_{z_0}\, d_{z_0}E(z_0,z_1), & *_{z_1}*_{z_0}\, d_{z_0}E(z_0,z_1)\\ \epsilon\, d_{z_0}^* E(z,z), & *_{z_1}\, d_{z_0}^* E(z_0,z_1)\end{pmatrix}\\
&\qquad\wedge\cdots\wedge \begin{pmatrix} \tau_x *_{z_m}\, d_{z_m}E(z_m,x)]_{x=\xi}, & \nu_x *_{z_m}\, d_{z_m}E(z_m,x)]_{x=\xi}\\ \tau_x\, d_{z_m}^* E(z_m,x)]_{x=\xi}, & \nu_x\, d_{z_m}^* E(z_m,x)]_{x=\xi}\end{pmatrix}, \quad (4.14)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{pmatrix} \nu_\xi G_{\mathrm{II}}(\xi, y; \lambda) \\ (\nu d)_\xi\, G_{\mathrm{II}}(\xi, y; \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_x E(x, y)]_{x=\xi} \\ \nu_x\, d_x E(x, y)]_{x=\xi} \end{pmatrix} + \sum_{m=0}^{\infty} (2\lambda)^{m+1}$$

$$\times \begin{pmatrix} -\nu_x E(z_m\,, x)]_{x=\xi}\,, & d^*_{z_m} E(z_m\,, x)]_{x=\xi} \\ -\nu_x\, d_x E(z_m\,, x)]_{x=\xi}\,, & d^*_{z_m} E(z_m\,, x)]_{x=\xi} \end{pmatrix}$$

$$\wedge \cdots \wedge \begin{pmatrix} -*_{z_m} d^*_{z_m} E(z_{m-1}\,, z_m), & *_{z_m} d^*_{z_m} d^*_{z_{m-1}} E(z_{m-1}\,, z_m) \\ -*_{z_m} E(z_{m-1}\,, z_m), & *_{z_m} d^*_{z_{m-1}} E(z_{m-1}\,, z_m) \end{pmatrix}$$

$$\wedge \begin{pmatrix} -*_{z_1} d^*_{z_1} E(z_0\,, z_1), & *_{z_1} d^*_{z_1} d^*_{z_0} E(z_0\,, z_1) \\ -*_{z_1} E(z_0\,, z_1), & *_{z_1} d^*_{z_0} E(z_0\,, z_1) \end{pmatrix}$$

$$\wedge \begin{pmatrix} *_{z_0} d_{z_0} E(z_0\,, y) \\ *_{z_0} E(z_0\,, y) \end{pmatrix}$$

respectivement. En particulier $G_{\mathrm{I}}^-(x, y; \lambda)$ et $G_{\mathrm{II}}^-(x, y; \lambda)$ sont holomorphes en $\lambda = 1$. $G_{\mathrm{I}}^-(x, y; 1)$ et $G_{\mathrm{II}}^-(x, y; 1)$ ainsi coïncident avec les formes de Green $G_{\mathrm{I}}(x, y)$ et $G_{\mathrm{II}}(x, y)$ des Problèmes I et II respectivement.

De la même manière que dans Section 2, on a une généralisation des formules de variation d'Hadamard comme suit:

Pour la variation du bord ∂X_t^-, $\delta\nu_\xi \otimes \partial/\partial\nu_\xi = dt \otimes \partial/\partial t$, on obtient

THÉORÈME 1. *Si $G(x, y; \lambda)$ est un de G_{I} et G_{II} on a*

$$\begin{aligned} \delta G(x, y; \lambda) = \lambda \Big[\int_{\partial X^-} & \frac{1}{d\nu_z} (d_z G(x, z; \lambda) \wedge *_z\, d_z G(z, y; \lambda))\, \delta\nu_z \\ & + \int_{\partial X^-} \frac{1}{d\nu_z} (d^*_z G(x, z; \lambda) \wedge *_z\, d_z G(z, y; \lambda))\, \delta\nu_z \\ & + s \int_{\partial X^-} \frac{1}{d\nu_z} (G(x, z; \lambda) \wedge *_z\, d_z G(z, y; \lambda)\, \delta\nu_z \Big]. \end{aligned} \tag{4.19}$$

En particulier on a

THÉORÈME 2.

$$\begin{aligned} \delta G_{\mathrm{I}}(x, y) = \Big[\int_{\partial X^-} & \frac{\partial}{\partial\nu_\zeta} G_{\mathrm{I}}(x, \zeta) \wedge \bar{*}_\zeta \frac{\partial}{\partial\nu_\zeta} G_{\mathrm{I}}(\zeta, y)\, \delta\nu_\zeta \\ & + \int \frac{\partial}{\partial\nu_\zeta} \frac{d}{d\nu_\zeta} G_{\mathrm{I}}(x, \zeta) \wedge \bar{*}_\zeta \frac{\partial}{\partial\nu_\zeta} \frac{d}{d\nu_\zeta} G_{\mathrm{I}}(\zeta, y)\, \delta\nu_\zeta \Big] \end{aligned} \tag{4.20}$$

et

$$-\delta G_{\mathrm{II}}(x, y) = \Big[\int \bar{d}_\zeta G_{\mathrm{II}}(x, \zeta) \wedge \bar{*}_\zeta \bar{d}_\zeta G_{\mathrm{II}}(\zeta, y)\, \delta\nu_\zeta + \int \bar{d}_\zeta^* G_{\mathrm{II}}(x, \zeta) \wedge \bar{*}_\zeta \bar{d}_\zeta^* G_{\mathrm{II}}(\zeta, y)\, \delta\nu_\zeta + s \int G_{\mathrm{II}}(x, \zeta) \wedge \bar{*} G_{\mathrm{II}}(\zeta, y)\, \delta\nu_\zeta\Big]. \tag{4.21}$$

5. Dans la suite on supposera que X soit un espace euclidien de dimension l. Soit W une variété compacte C^∞ à bord C^∞, ∂W, telle que $(W, \partial W) \supset ([\alpha, \beta] \times M, \beta \times M)$ avec $\partial W = \beta \times M$. On fera l'hypothèse suivante pour un plongement différentiable $Q\colon W \to X$,

$[H, 1]$ *Dans* $[\alpha, \beta] \times M$ *la métrique induite* $Q^*\, ds^2$ *a la forme*

$$Q^*\, ds^2 = (dt)^2 + \sum_{i,j=1}^{l-1} \bar{g}_{ij}(t, \xi)\, d\xi^i \cdot d\xi^j, \tag{5.1}$$

où chaque $M_t \cong t \times M$ *est défini par* $t =$ *Const. telle que* $(\partial/t)\, g^{1/2} = 0$, *autrement dit la courbure de moyenne* $H(\xi)$ *s'annule partout dans* M_t, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Ceci correspond à la condition de "light cone gauge" dans le modèle des cordes (voir [8, p. 1112]). On désignera par W_t la variété compacte C^∞ dans W dont le bord est M_t. Le volume de M_t ne dépend pas de t, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ par l'hypothèse. Il sera noté par V.

Soit $\check{X}$ le dual de X avec du produit intérieur $\langle\ ,\ \rangle$ et $C^\infty(M, \check{X})$ (ou $C_0^\infty(M, \check{X})$) l'espace des applications différentiables P de M dans $\check{X}$ (telles que $\int_M P \circ q_t^{-1}\, dS_\xi = 0$ respectivement). Soit $N_0(\xi, \eta)$ la restriction à M_t de la fonction de Neumann $N_0(x, y)$ satisfaisant aux propriétés (3.19). Elle est C^∞ par rapport à t, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Considerons la fonctionnelle $\mathscr{G}(P, t)$ sur $C^\infty(M, \check{X})$ comme suit:

$$\mathscr{G}(P, t) = \exp\Big[-\tfrac{1}{2}\int_{M_t \times M_t} N_0(\xi, \eta)\langle P \circ q_t^{-1}(\xi), P \circ q_t^{-1}(\eta)\rangle\, dS_\xi\, dS_\eta\Big]. \tag{5.2}$$

Celle-ci est analogue à celle de Green dans la théorie quantique de champs du modèle de cordes. Nous conviendrons de la dire "*fonction de Green dans le modèle des variétés C^∞ plongées*" (voir [6, p. 2293] et aussi [8, p. 1117]).

La différentiation de (5.2) par rapport à t donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{G}(P, t)}{\partial t} &= \partial/\partial t \cdot \exp\Big[-\tfrac{1}{2}\int_{M_t \times M_t} N_0(\xi, \eta)\langle P \circ q_t^{-1}(\xi), P \circ q_t^{-1}(\eta)\rangle\, dS_\xi \cdot dS_\eta\Big] \\ &= \partial/\partial t \exp\Big[-\tfrac{1}{2}\int_{M_t \times M_t} N_0(\xi, \eta) \\ &\qquad \times \langle P \circ q_t^{-1}(\xi), (P \circ q_t^{-1}(\eta) - P \circ q_t^{-1}(\xi))\rangle\, dS_\xi\, dS_\eta\Big]\end{aligned}$$

$$= \mathscr{G}(P, t) \Big[-\tfrac{1}{2} \text{ p.f.} \int_{M_t \times M_t} \partial/\partial t \, N_0(\xi, \eta)$$

$$\times \langle P \circ q_t^{-1}(\xi)(P \circ q_t^{-1}(\eta) - P \circ q_t^{-1}(\xi) \rangle \, dS_\xi \, dS_\eta$$

$$- \tfrac{1}{2} \int_{M_t \times M_t} N_0(\xi, \eta) \langle P \circ q_t^{-1}(\xi) \cdot P \circ q_t^{-1}(\eta) \rangle (H(\xi) + H(\eta)) \, dS_\xi \, dS_\eta \Big]$$

$$= \mathscr{G}(P, t) \Big[-\tfrac{1}{2} \text{ p.f.} \int_{M_t \times M_t} \partial/\partial t \, N_0(\xi, \eta)$$

$$\times \langle P \circ q_t^{-1}(\xi)(P \circ q_t^{-1}(\eta) - P \circ q_t^{-1}(\xi) \rangle \, dS_\xi \, dS_\eta \Big] \tag{5.3}$$

car $H(\xi)$ et $H(\eta) = 0$. D'autre part conformement à (3.24) dans Théorème 3′ on obtient

$$-\partial/\partial t \cdot N_0(\xi, \eta) = \text{p.f.} \int_{M_t} \overline{\text{grad}}_\zeta \, N_0(\xi, \zeta) \cdot \overline{\text{grad}}_\zeta \, N_0(\zeta, \eta) \, dS_\zeta - \frac{1}{V} \tag{5.4}$$

ce qui entraine:

$$\frac{\partial \mathscr{G}(P, t)}{\partial t} = \mathscr{G}(P, t) \Big[\tfrac{1}{2} \text{ p.f.} \int_{M_t \times M_t} dS_\xi \, dS_\eta$$

$$\times \Big[\text{p.f.} \int_{M_t} \overline{\text{grad}}_\zeta \, N_0(\xi, \zeta) \cdot \overline{\text{grad}}_\zeta \, N_0(\eta, \zeta) \, dS_\zeta - \frac{1}{V} \Big]$$

$$\times \langle P \circ q_t^{-1}(\xi) \cdot (P \circ q_t^{-1}(\eta) - P \circ q_t^{-1}(\xi)) \rangle \Big]. \tag{5.5}$$

Le second membre se récrit de la manière suivante:

$$\Big[\tfrac{1}{2} \int_{M_t} dS_\xi \lim_{\eta \to \xi} \overline{\text{grad}}_\xi \, \overline{\text{grad}}_\eta \left\langle \frac{\delta^2}{\delta P \circ q_t^{-1}(\xi) \, \delta P \circ q_t^{-1}(\eta)} \right\rangle$$

$$+ N_0(\xi, \eta) - \frac{1}{2V} \left\langle \left(\int_{M_t} P \circ q_t^{-1}(\xi) \, dS_\xi \right)^2 \right\rangle + \tfrac{1}{2} \int_{M_t} \langle (P \circ q_t^{-1}(\xi))^2 \rangle \, dS_\xi \Big]. \tag{5.6}$$

On remarque l'opérateur Laplacien pour $\mathscr{G}$,

$$\int_{M_t} dS_\xi \left\langle \left(\overline{\text{grad}}_\xi \frac{\delta}{\delta P \circ q_t^{-1}(\xi)} \right)^2 \right\rangle \mathscr{G}(P, t) \tag{5.7}$$

n'est pas bien défini, car $\lim_{\eta \to \xi} N_0(\xi, \eta) = \infty$. On définit sa renormalisation:

Définition 5.1. On note par

$$\int_{M_t} dS_\xi : \left\langle \left(\overline{\text{grad}}_\xi \frac{\delta}{\delta P \circ q_t^{-1}(\xi)} \right)^2 \right\rangle :$$

l'opérateur régularisé

$$\int_{M_t} dS_\xi \lim_{\eta\to\xi} \overline{\mathrm{grad}}_\xi\, \overline{\mathrm{grad}}_\eta \left(\left\langle \frac{\delta^2}{\delta P \circ q_t^{-1}(\xi)\, \delta P \circ q_t^{-1}(\eta)} \right\rangle + N_0(\xi, \eta)\right). \tag{5.8}$$

(5.6) entraine immédiatement

THÉORÈME 6.

$$\frac{\partial \mathscr{G}(P, t)}{\partial t} = \left[\tfrac{1}{2} \int dS_\xi : \left\langle \left(\overline{\mathrm{grad}}_\xi \frac{\delta}{\delta P \circ q_t^{-1}(\xi)}\right)^2 \right\rangle : \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2V} \left\langle \left(\int_{M_t} P \circ q_t^{-1}(\xi)\, dS_\xi\right)^2 \right\rangle + \tfrac{1}{2} \int_{M_t} \langle (P \circ q_t^{-1}(\xi))^2 \rangle\, dS_\xi \right] \mathscr{G}_{\mathrm{reg}}(P, t). \tag{5.9}$$

Pour éviter la régularisation de l'opérateur de Laplace on pose

$$N_{\mathrm{sing}}(\xi, \eta) = 2 \left\{ E(\xi, \eta) + \sum_{k=1}^{l} (-2)^k E(\xi, \zeta_1) \frac{\partial E(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial \nu_{\zeta_1}} \cdots \right.$$

$$\left. \frac{\partial E(\zeta_k, \eta)}{\partial \nu_{\zeta_k}} dS_{\zeta_1} \cdots dS_{\zeta_k} \right\}. \tag{5.10}$$

(Remarque que cette fonction est symétrique à cause de (3.3)–(3.6)). La fonction $N_{\mathrm{reg}}(\xi, \eta) = N_0(\xi, \eta) - N_{\mathrm{sing}}(\xi, \eta)$ est alors C^1 dans $M_t \times M_t$. La formule de variation de $N_{\mathrm{reg}}(\xi, \eta)$ s'écrit comme

$$\frac{\partial N_{\mathrm{reg}}(\xi, \eta)}{\partial t} = \frac{1}{V} - \int_{M_t} \overline{\mathrm{grad}}_\zeta N_{\mathrm{reg}}(\xi, \zeta) \cdot \overline{\mathrm{grad}}_\zeta N_{\mathrm{reg}}(\eta, \zeta)\, dS_\zeta$$

$$- \text{p.f.} \int_{M_t} \overline{\mathrm{grad}}_\zeta N_{\mathrm{sing}}(\xi, \zeta) \cdot \overline{\mathrm{grad}}_\zeta N_{\mathrm{reg}}(\eta, \zeta)\, dS_\zeta \tag{5.11}$$

$$- \text{p.f.} \int_{M_t} \overline{\mathrm{grad}}_\zeta N_{\mathrm{reg}}(\xi, \zeta) \cdot \overline{\mathrm{grad}}_\zeta N_{\mathrm{sing}}(\eta, \zeta)\, dS_\zeta - K(\xi, \eta),$$

où $K(\xi, \eta)$ désigne

$$\text{p.f.} \int_{M_t} \overline{\mathrm{grad}}_\zeta N_{\mathrm{sing}}(\xi, \zeta) \cdot \overline{\mathrm{grad}}_\zeta N_{\mathrm{sing}}(\eta, \zeta)\, dS_\zeta + \frac{\partial N_{\mathrm{sing}}(\xi, \eta)}{\partial t}. \tag{5.12}$$

On définit alors la fonctionnelle de Green régularisée $\mathscr{G}_{\mathrm{reg}}(P, t)$ de la forme suivante:

$$\mathscr{G}_{\mathrm{reg}}(P, t) = \frac{\exp\left[-\tfrac{1}{2} \int_{M_t \times M_t} N_{\mathrm{reg}}(\xi, \eta) \langle P \circ q_t^{-1}(\xi) P \circ q_t^{-1}(\eta) \rangle\, dS_\xi\, dS_\eta\right]}{\exp\left[\tfrac{1}{2} \int_c^t dt \int_{M_t} \overline{\mathrm{grad}}_\xi\, \overline{\mathrm{grad}}_\xi N_{\mathrm{reg}}(\xi, \xi)\, dS_\xi\right]} \tag{5.13}$$

où c désigne un nombre positif constant tel que $t > c$. Par suite de manère analogue à Théorème 6, on obtient

THÉORÈME 6'.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{G}_{\text{reg}}}{\partial t} = \Big[\tfrac{1}{2} \int_{M_t} dS_\zeta \Big\langle \Big(\overline{\operatorname{grad}}_\zeta \frac{\delta}{\delta P \circ q_t^{-1}(\zeta)} \Big)^2 \Big\rangle \\ - 2 \text{ p.f.} \int_{M_t} dS_\zeta \int_{M_t} \overline{\operatorname{grad}}_\zeta N_{\text{sing}}(\xi, \zeta) \\ \times \Big\langle P \circ q_t^{-1}(\xi)\, dS_\xi\,, \overline{\operatorname{grad}}_\zeta \frac{\delta}{\delta P \circ q_t^{-1}(\zeta)} \Big\rangle \\ + K(\xi, \eta) \langle P \circ q_t^{-1}(\xi) \cdot P \circ q_t^{-1}(\eta) \rangle\, dS_\xi\, dS_\eta \Big] \mathscr{G}_{\text{reg}}, \quad (5.14)\end{aligned}$$

où $K(\xi, \eta)$ est donné par (5.12).

Problème. Les équations (5.9) *et* (5.14) *peuvent etre regardées comme équations de chaleur.* Il semble intéressant de se poser la question si les fonctionnelles $\mathscr{G}$ ou $\mathscr{G}_{\text{reg}}$ ont les propriétés analogues aux noyau de Gauss. Plus exactement, soit $W \cong [\alpha, \beta] \times M \cong [\alpha, \beta] \times M$ avec $\partial W \cong M_\beta - M_\alpha$. Moyennant la fonction de Neumann $N_0(x, y)$ on considère la fonctionnelle suivante:

$$\begin{aligned}&\mathscr{G}(P_1, t_1 ; P_2, t_2) \\ &= \exp \Big[-\tfrac{1}{2} \int_{M_{t_1} \times M_{t_1}} N_0(\xi, \eta) \langle P_1 \circ q_{t_1}^{-1}(\xi) \cdot P_1 \circ q_{t_1}^{-1}(\eta) \rangle\, dS_\xi\, dS_\eta \\ &\quad - \int_{M_{t_1} \times M_{t_2}} N_0(\xi, \eta) \langle P_1 \circ q_{t_1}^{-1}(\xi) \cdot P_2 \circ q_{t_2}^{-1}(\eta) \rangle\, dS_\xi\, dS_\eta \\ &\quad - \tfrac{1}{2} \int_{(M_{t_2})^2} N_0(\xi, \eta) \langle P_1 \circ q_t^{-1}(\xi) \cdot P_2 \circ q_t^{-1}(\eta) \rangle\, dS_\xi\, dS_\eta \Big]. \qquad (5.15)\end{aligned}$$

La première question à poser est la suivante: *Soit t_1 fixé. Est-ce qu'il existent une mesure convenable maix fixée $\mathscr{D}P$ dans un espace fixé Ξ contenant $C_0^\infty(M, \check{X})$ et une fonction positive C^∞ $U(t_1, t_2)$ dans $\alpha \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \beta$, telles que*

$$\lim_{t_2 \to t_1} \int_\Xi \frac{\mathscr{G}(\mathbf{P}_1, t_1 ; \mathbf{P}_2, t_2)}{U(t_1, t_2)} \Phi(P_1)\, \mathscr{D}P_1 = \Phi(P_2) \qquad (5.16)$$

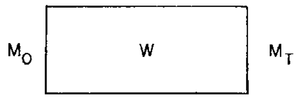
pour une fonctionnelle quelconque au moins polynomiale Φ sur Ξ?

La deuxième est la suivante: *Est-ce qu'elle a la propriété d'être transitive*:

$$\int_\Xi \frac{\mathscr{G}(P_2, t_2 ; P_3, t_3)}{U(t_2, t_3)} \frac{\mathscr{G}(P_3, t_3 ; P_1, t_1)}{U(t_3, t_1)} \mathscr{D}P_3 = \frac{\mathscr{G}(P_2, t_2 ; P_1, t_1)}{U(t_2, t_1)} \;? \qquad (5.17)$$

Exemple. En particulier soit $W = [0, T] \times M$ de la métrique de produit par rapport à $(t, \xi) \in [0, T] \times M$,

$$Q^* \, ds^2 = (dt)^2 + \sum_{i,j=1}^{l-1} g_{ij}(\xi) \, d\xi^i \cdot d\xi^j, \tag{5.18}$$



alors la fonction de Neumann $N_0(x, y)$ de $\Delta = \partial^2/\partial t^2 + \bar{\Delta}$, satisfaisant à la condition aux limites:

$$\frac{\partial N_0(\xi, y)}{\partial \nu_\xi} = \frac{1}{2V} \quad \text{dans} \quad M_0 = 0 \times M,$$

$$\frac{\partial N_0(\xi, y)}{\partial \nu_\xi} = -\frac{1}{2V} \quad \text{dans} \quad M_T = T \times M,$$

$$\int_{M_t} N_0(\xi, y) \, dS_\xi + \int_{M_0} N_0(\xi, y) \, dS_\xi = 0. \tag{5.19}$$

Soit $\{u_m(\xi)\}$ $m = 0, 1, 2, 3,\ldots$ une suite orthonormale des fonctions propres de $-\bar{\Delta}$ dans M avec les valeurs propres λ_m, $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$. Alors $N_0(x, y)$ s'écrit comme:

$$\begin{aligned} N_0(t, \xi; t', \xi') &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \lambda_m^{1/2} t' \operatorname{ch} \lambda_m^{1/2}(T - t)}{\lambda_m^{1/2} \operatorname{sh} \lambda_m^{1/2} T} u_m(\xi) \, u_m(\xi') \\ &\quad + \frac{1}{2V}\left(t' - t + \frac{T}{2}\right), \qquad t \geqslant t' \quad \text{et} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \lambda_m^{1/2} t \operatorname{ch} \lambda_m^{1/2}(T - t')}{\lambda_m^{1/2} \operatorname{sh} \lambda_m^{1/2} T} + \frac{1}{2V}\left(t - t' + \frac{T}{2}\right), \qquad t \leqslant t', \end{aligned} \tag{5.20}$$

pour $x = (t, \xi)$ et $y = (t', \xi')$, de sorte que l'on ait

$$\begin{aligned} N_0(T, \xi; T, \xi') &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \lambda_m^{1/2} T}{\lambda_m^{1/2} \operatorname{sh} \lambda_m^{1/2} T} u_m(\xi) \cdot u_m(\xi') + \frac{T}{4V} \\ &= N_{\mathrm{reg}}(T, \xi; T, \xi') + N_{\mathrm{sing}}(T, \xi; T, \xi'), \end{aligned} \tag{5.21}$$

où on pose

$$N_{\text{reg}}(T, \xi; T, \xi') = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_m^{1/2}T}}{\lambda_m^{1/2} \operatorname{sh} \lambda_m^{1/2} T} u_m(\xi) \cdot u_m(\xi') + T/4V, \quad \text{et}$$
$$N_{\text{sing}}(T, \xi; T, \xi') = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_m(\xi) \cdot u_m(\xi')}{\lambda_m^{1/2}}. \tag{5.22}$$

Alors $N_{\text{reg}}(T, \xi; T, \xi')$ est C^∞, et la trace de $\overline{\text{grad}}_\xi\, \overline{\text{grad}}_\eta\, N_{\text{reg}}(\xi, \eta)$: $C_0^\infty(M, \check{X}) \to C_0^\infty(M, \check{X})$ est égale à

$$\operatorname{tr}(\overline{\text{grad}}\, \overline{\text{grad}}\, N_{\text{reg}}) = l \sum 2e^{-2\lambda_m^{1/2}T}/(1 - e^{-2\lambda_m^{1/2}T})$$
$$= d/dT \left\{ \log \bigcup_{m=1}^{\infty} (1 - e^{-2\lambda_m^{1/2}T}) \right\}. \tag{5.23}$$

L'équation de variation pour $N_0(T, \xi; T, \xi')$ s'exprime

$$\frac{dN_{\text{reg}}(T, \xi; T, \xi')}{dT} = -\int_M \overline{\text{grad}}_\zeta\, N_{\text{reg}}(T, \xi; T, \zeta) \cdot \overline{\text{grad}}_\zeta\, N_{\text{reg}}(T, \zeta; T, \xi')\, dS_\zeta$$
$$- 2(-\Delta_\xi)^{1/2}\, N(T, \xi; T, \xi') + 1/4V. \tag{5.24}$$

On définit une régularisation de $\mathscr{G}_{\text{reg}}(P_1, t_1; P_2, t_2)$ comme suit:

$$\mathscr{G}_{\text{reg}}(P_1, t_1; P_2, t_2)$$
$$= \frac{\exp\left[-\frac{1}{2} \int_M N_{\text{reg}}(T, \xi; T, \xi') \langle P(\xi) \cdot P(\xi') \rangle\, dS_\xi\, dS_{\xi}\right]}{\prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{-2\lambda_m^{1/2}T})^{l/2}} \tag{5.25}$$

alors on a finalement:

Théorème 7 (Equation de Nambu renormalisée).

$$\frac{d\mathscr{G}_{\text{reg}}(P_1, t_1; P_2, t_2)}{dt_2} = \left[\frac{1}{2} \int_M dS_\xi \left(\left\langle \overline{\text{grad}}_\xi \frac{\delta}{\delta P_2(\xi)} \right)^2 \right\rangle\right.$$
$$\left. + \int_M dS_\xi (-\Delta_\xi)^{1/2} \frac{\delta}{\delta P_2(\xi)} - 1/8V\right]$$
$$\times\, \mathscr{G}_{\text{reg}}(P_1, t_1; P_2, t_2). \tag{5.26}$$

Celle-ci est exactement une version euclidienne de l'équation de Schrödinger dans le modèle de cordes si $l = 1$. Il ne semble pas que nos problèmes ont résolus même dans ce cas.

Remarque 5.1. La fonctionnelle quadratique $\gamma(P, t)$ sur $C_0^\infty(M, \check{X})$ suivante

$$\gamma(P, t) = \tfrac{1}{2} \int N_0(\xi, \eta)\langle P \circ q_t^{-1}(\xi), P \circ q_t^{-1}(\eta)\rangle \, dS_\xi \, dS_\eta \tag{5.27}$$

est égale à la valeur stationnaire de l'intégrale de Dirichlet $\mathscr{D}_{X_t^-}(v^-, v^-)$ par rapport à $v^- \in C^\infty(X^-, \check{X})$ telle que $v^-]_{\partial X_t^-} = P \circ q_t^{-1}$. Elle définit certain Lagrangean de la méchanique classique considerée dans $C^\infty(M, \check{X})$, de sorte que $\gamma(P, t)$ satisfait à l'équation d'Hamilton–Jacobi que voici:

$$\frac{\partial \gamma(P, t)}{\partial t} + H\left(t, \gamma, \frac{\delta \gamma}{\delta P \circ q_t^{-1}(\xi)}\right) = 0, \tag{5.28}$$

où H désigne la fonctionnelle

$$\tfrac{1}{2} \int_M \left\langle \overline{\mathrm{grad}}_\xi \frac{\delta \gamma}{\delta P \circ q_t^{-1}(\xi)} \cdot \overline{\mathrm{grad}}_\xi \frac{\delta \gamma}{\delta P \circ q_t^{-1}(\xi)} \right\rangle dS_\xi \, .$$

Autrement dit, la formule d'Hadamard (5.4) n'est autre chose que l'équation d'Hamilton–Jacobi.

Added in proof. Récemment, dans une série des articles, M. Sato, M. Jimbo et T. Miwa ont établi la théorie de déformation reliée au problème de Riemann–Hilbert pour équations de champs quantiques holonomiques. Comme ils ont remarqués, notre théorie de variation est étroitement lié à celle-ci. Voir le suivant: M. Jimbo and T. Miwa, Studies in holonomic quantum fields, XIII, *Proc. Japan Acad. A* **55** (1979), 115–120.

Références

1. K. Aomoto, Les équations aux différences linéaires et les intégrales des fonctions multiformes, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **22**, No. 3 (1975), 271–297.
2. S. Bergmann and M. Schiffer, Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics, 1953.
3. P. E. Conner, The Neumann's problem for differential forms on Riemannian manifolds, *Mem. Amer. Math. Soc.*, No. 20 (1956).
4. D. Fujiwara, M. Tanikawa, and Sh. Yukita, The spectrum for the Laplacian and boundary perturbation, *Proc. Japan Acad.*, *A* **54** (1978), 87–91.
5. P. R. Garabedian, "Partial Differential Equations," Wiley, New York, 1963.
6. J. L. Gervais and B. Sakita, Functional integral approach to dual resonance theory, *Phys. Rev.* **4**, No. 8 (1972), 2291–2308.
7. J. Hadamard, "Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques," Hermann, Paris, 1932.
8. M. Kaku and K. Kikkawa, Field theory of relativistic strings. I. Trees, *Phys. Rev. D* **10**, No. 4 (1974), 1110–1133.
9. K. Kodaira, Harmonic fields in Riemannian manifolds, *Ann. of Math.* **50** (1949), 587–665.

10. J. Leray, Un complément au théorème de N. Nilsson sur les intégrales de formes différentielles à support singulier algébrique, *Bull. Soc. Math. France* **95** (1967), 313–374.
11. P. Levy, "Problèmes concrets d'anslyse fonctionnelle," Paris, Gauthier–Villars, 1951.
12. F. Pham, "Introduction à l'étude topologique des singularités de Landau," Gauthier–Villars, 1967.
13. R. Thom, Ensembles et morphismes stratifiés, *Bull. Amer. Math. Soc.* **75**, No. 2 (1969), 240–284.
14. N. P. Vekua, "Systems of Singular Integral Equations," Noordhoff, Groningen, 1967.
15. D. Fujiwara and Sh. Ozawa, The Hadamard variational formula for the Green Functions of some normal elliptic boundary value problems, *Proc. Japan. Acad. Ser. A* **54**, No. 8 (1978), 215–220.