View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Elsevier - Publisher Connector

JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS 36, 518-528 (1971)

Sur une Inégalité de Coercivité

J. GOBERT

Institut de Mathématique de l'Université de Liège, Belgique

Submitted by J. L. Lions

We give here the proof of an inequality originally due to K. O. Friedrichs [2]. If Ω is a regular bounded open set of R^n, each vector-valued function $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)$, such that $\operatorname{div} \mathbf{u} \in L^2(\Omega)$ and $\operatorname{rot} \mathbf{u} \in L^2(\Omega)$, belongs to $H^1(\Omega)$, if $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}/\Gamma = 0$ or $\mathbf{n} \wedge \mathbf{u}/\Gamma = 0$, Γ being the boundary of Ω. Moreover, for such $\mathbf{u}$, we have

$$\| \mathbf{u} \|_{H^1(\Omega)} \leqslant C[\| \mathbf{u} \|_{L^2(\Omega)} + \| \operatorname{div} \mathbf{u} \|_{L^2(\Omega)} + \| \operatorname{rot} \mathbf{u} \|_{L^2(\Omega)}],$$

when C does not depend of $\mathbf{u}$.

Nous désignons par Ω un ouvert borné "régulier" de R^n dont la frontière Γ est une variété de dimension $n - 1$ et situé d'un même côté, par rapport à Γ. Dans la suite, $A(D)$ désigne un opérateur matriciel de dérivation du premier ordre à coefficients constants et $\mathring{A}(D)$ sa partie homogène de degré 1. Nous considérons essentiellement les opérateurs divergence et rotationnel. L'opérateur divergence s'écrit $\operatorname{div} = (D_{x_1}, \ldots, D_{x_n})$ tandis que l'opérateur rotationnel est donné par une matrice de $n(n-1)/2$ lignes et n colonnes, qui, sur une même ligne, contient D_{x_i} dans la colonne j et $- D_{x_j}$ dans la colonne i [3].

Ainsi, si $\mathbf{u}$ est dérivable dans Ω,

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} D_{x_i} u_i ,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = (\ldots, D_{x_i} u_j - D_{x_j} u_i ,\ldots), \qquad i, j = 1,\ldots, n.$$

D'une façon générale, ces opérateurs s'appliquent à des vecteurs-fonctions dont la dimension ressort du contexte.

Désignons par $V_A(\Omega)$, l'espace de Hilbert

$$\{\mathbf{u} \in L^2(\Omega) : A(D)\, \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\},$$

muni de sa structure naturelle.

Vu l'hypothèse sur la frontière Γ de Ω, on sait [3] que $C^1(\bar{\Omega})$ est dense dans $V_A(\Omega)$ et de plus, il existe $\mathring{A}(\mathbf{n})\,\mathbf{u}/\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$ tel que

$$(A(D)\,\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} - (\mathbf{u}, A^*(-D)\,\mathbf{v})_{L^2(\Omega)} = \langle \mathring{A}(\mathbf{n})\,\mathbf{u}/\Gamma, \gamma\mathbf{v} \rangle \qquad [5, 6],$$

pour tout $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)$, $\gamma\mathbf{v}$ désignant la trace de $\mathbf{v}$ dans Γ et les crochets désignant la dualité dans $H^{1/2}(\Gamma)$; $\mathbf{n}$ est la normale unitaire à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω.

Si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v} \in C_1(\bar{\Omega})$, alors

$$\langle \mathring{A}(\mathbf{n})\,\mathbf{u}, \gamma\mathbf{v} \rangle = \int_\Gamma \mathring{A}(\mathbf{n})\,\mathbf{u} \cdot \gamma\mathbf{v}\, d\sigma.$$

En particulier, si $A(D) = \operatorname{div}$, $\mathring{A}(\mathbf{n})\,\mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$ tandis que si

$$A(D) = \operatorname{rot}, \qquad \mathring{A}(\mathbf{n})\,\mathbf{u} = \mathbf{n} \Lambda \mathbf{u} = (\ldots, n_i u_j - n_j u_i, \ldots).$$

Désignons par $V(\Omega)$, l'espace de Hilbert

$$\{\mathbf{u} \in L^2(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{u} \in L^2(\Omega), \operatorname{rot} \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\},$$

muni de sa structure naturelle.

Pour tout $\mathbf{u} \in V(\Omega)$,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}/\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{n} \Lambda \mathbf{u}/\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Désignons encore par $V_1(\Omega)$ (resp. $V_2(\Omega)$), le sous-espace de $V(\Omega)$ tel que

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}/\Gamma = 0 \qquad (\text{resp. } \mathbf{n} \Lambda \mathbf{u}/\Gamma = 0)\,.$$

THÉORÈME. *Les espaces $V_1(\Omega)$ et $V_2(\Omega)$ sont contenus dans $H^1(\Omega)$ et on a*

$$\| \mathbf{u} \|_{H^1(\Omega)} \leqslant C \| \mathbf{u} \|_{V_i(\Omega)}\,,$$

pour tout $\mathbf{u} \in V_i(\Omega)$, $i = 1, 2$, C étant indépendant de $\mathbf{u}$.

Avant de passer à la démonstration du théorème, nous étudions une transformation liée à l'ouvert Ω, qui joue un rôle important dans la suite.

Nous pouvons supposer qu'il existe un ouvert $\omega \supset \Gamma$ tel que par tout $x \in \omega$, il passe une seule normale à Γ portant la distance de x à Γ. En plus, les relations qui à tout $x \in \omega$ associent son symétrique x' sur cette normale par rapport à Γ sont dans $C^2(\omega)$.

Nous désignons ces relations par $x_i' = x_i'(x)$ $(i = 1,..., n)$ ou encore par $x' = x'(x)$ et la matrice jacobienne par $\partial(x')/\partial(x)$.

Nous posons encore $\Omega' = \omega \cap \complement\bar{\Omega}$ et $\Omega'' = \omega \cap \Omega$.

Lemme 1. *La matrice jacobienne est hermitienne dans ω.*

Soit $f(x) = 0$ l'équation de Γ au voisinage d'un point x_0 de Γ. Pour tout x suffisamment voisin de celui-ci, on a

$$f\left[\frac{x + x'(x)}{2}\right] = 0,$$

puisque

$$x_0 = \frac{x + x'(x)}{2} \in \Gamma, \qquad \forall x \in \omega.$$

On en déduit que

$$\operatorname{grad} f(x_0) \cdot D_{x_i} x'(x) = - D_{x_i} f(x_0). \tag{*}$$

Comme d'autre part,

$$\operatorname{grad} f(x_0) = \lambda(x - x'(x)),$$

on obtient

$$(x - x'(x)) \cdot D_{x_i} x' = - (x_i - x_i'(x))$$

et en dérivant cette relation par rapport à x_k $(k \neq i)$, on a

$$- D_{x_k} x' \cdot D_{x_i} x_k' + D_{x_i} x_k' + (x - x'(x)) \cdot D_{x_k} D_{x_i} x' = D_{x_k} x_i'.$$

La même relation obtenue en permutant k et i, retranchée de celle-ci, donne

$$D_{x_i} x_k'(x) = D_{x_k} x_i'(x).$$

Lemme 2. *En tout point $x_0 \in \Gamma$, la matrice jacobienne $\partial(x')/\partial(x)$ admet la valeur propre* 1. *Sa multiplicité est $n - 1$ et les vecteurs propres sont orthogonaux à la normale.*

Soit $x_0 \in \Gamma$ et $\mathbf{a}$ un vecteur tel que $\mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} f(x_0) = 0$, si $f(x) = 0$ est l'équation de Γ au voisinage de x_0. Il s'agit de prouver que

$$\left(\frac{\partial(x')}{\partial(x_0)} - I\right) \mathbf{a} = 0.$$

Cette condition sera réalisée si le tableau

$$\begin{pmatrix} D_{x_1}f(x_0),\dots, D_{x_n}f(x_0) \\ \dfrac{\partial(x')}{\partial(x_0)} - I \end{pmatrix}$$

est de rang 1, soit donc si tous les déterminants de dimension 2 extraits du tableau

$$\begin{vmatrix} D_{x_1}f(x_0),\dots, D_{x_k}f(x_0),\dots, & D_{x_n}f(x_0) \\ D_{x_1}x_k'(x_0),\dots, D_{x_k}x_k'(x_0) - 1,\dots, & D_{x_n}x_k'(x_0) \end{vmatrix}$$

sont nuls, quel que soit $k = 1,\dots, n$.

Si la normale au point x_0, n'est pas orthogonale au k^e axe de coordonnées, il en est de même au voisinage de x_0. Deux points x et x' images l'un de l'autre sont alors tels que $x_k \neq x_k'$ sauf si $x = x' \in \Gamma$. La surface admet donc l'equation

$$x_k'(x) - x_k = 0,$$

au voisinage de x_0. On a donc

$$\operatorname{grad} f(x_0) = \lambda(D_{x_1}x_k'(x_0),\dots, D_{x_k}x_k'(x_0) - 1,\dots, D_{x_n}x_k'(x_0)),$$

d'où la propriété.

Si, au contraire, la normale en x_0 est orthogonale au k^e axe de coordonnées et si dans tout voisinage de x_0, il existe un point de Γ où cette propriété n'a pas lieu, tous les déterminants considérés sont encore nuls par continuité.

Si enfin, la normale en x_0 et la normale en tout point d'un voisinage de x_0 sont orthogonales au k^e axe, alors, on a $x_k'(x) = x_k$ pour tout $x \in \omega$ suffisamment voisin de x_0. Dès lors, $D_{x_i}x_k'(x) = \delta_{ik}$ et la propriété est encore vraie.

Tous les déterminants de dimension 2 du tableau $\partial(x')/\partial(x_0) - I$ étant nuls, le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants relatifs à la valeur propre 1 est bien $n - 1$. D'ailleurs, il existe $n - 1$ vecteurs indépendants orthogonaux à grad $f(x_0)$.

LEMME 3. *En tout point $x \in \omega$, la matrice jacobienne $\partial(x')/\partial(x)$ admet la valeur propre -1 et les vecteurs propres sont parallèles à la normale passant par x. La matrice jacobienne est donc orthogonale en tout point de Γ.*

Cette propriété résulte du lemme 1 et de la relation (*) établie dans ce lemme. En tenant compte de ce lemme 1, cette relation s'écrit en effet,

$$\operatorname{grad} x_i' \cdot \operatorname{grad} f(x_0) = - D_{x_i}f(x_0)$$

ou encore

$$\frac{\partial(x')}{\partial(x)} \operatorname{grad} f(x_0) = - \operatorname{grad} f(x_0).$$

Passons à présent à la démonstration du théorème annoncé.

Nous démontrons la propriété pour les fonctions de $C_1(\Omega) \cap V_i(\Omega)$ et ensuite la densité de ces fonctions dans $V_i(\Omega)$ $(i = 1, 2)$. En fait, on peut montrer, au prix d'une démonstration assez compliquée et d'après un travail de J. L. Lions non publié, que les fonctions de $C_1(\bar{\Omega}) \cap V_i(\Omega)$ sont denses dans $V_i(\Omega)$.

En utilisant ce résultat, on pourrait simplifier quelque peu la démonstration qui suit.

1. Prolongement de la fonction $\mathbf{u} \in C_1(\Omega) \cap V_i(\Omega)$ dans Ω'

Posons

$$\mathbf{u}'(x) = \pm \frac{\partial(x')}{\partial(x)} \mathbf{u}[x'(x)], \qquad x \in \Omega',$$

où l'on choisit le signe $+$ ou $-$ selon que $i = 1$ ou 2.

On a $\mathbf{u}'(x) \in C_1(\Omega')$ et dans Ω',

$$\begin{aligned} \pm \operatorname{div} \mathbf{u}'(x) &= \sum_{i=1}^{n} D_{x_i}\{\operatorname{grad} x_i' \cdot \mathbf{u}[x'(x)]\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{grad} D_{x_i} x_i') \cdot \mathbf{u}[x'(x)] \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} D_{x_j} x_i' D_{x_i} x_k' \right) [D_{x_k'} u_j]_{x'(x)} . \end{aligned}$$

Vu la symétrie de la matrice jacobienne dans ω et l'orthogonalité de la matrice jacobienne sur Γ, cette relation peut s'écrire

$$\begin{aligned} \pm \operatorname{div} \mathbf{u}'(x) &= \mathbf{a}(x) \cdot \mathbf{u}[x'(x)] + [\operatorname{div} \mathbf{u}]_{x'(x)} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} C_{jk}(x) \, [D_{x_k'} u_j(x')]_{x'(x)} \end{aligned}$$

où $| \mathbf{a}(x)| \leqslant C$ dans $\bar{\Omega}'$ et où $C_{jk}(x) \in C_0(\bar{\Omega}')$ avec $C_{jk}(x) = 0$ si $x \in \Gamma$.

En utilisant la relation

$$\mathbf{u}(x') = \pm \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \mathbf{u}'[x(x')],$$

on peut finalement écrire cette relation sous la forme

$$\pm \operatorname{div} \mathbf{u}'(x) \pm \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} C'_{jk}(x) \, D_{x_k} u_j'(x) = \mathbf{a}'(x) \cdot \mathbf{u}[x'(x)] + [\operatorname{div} \mathbf{u}]_{x'(x)} \, ,$$

où les $\mathbf{a}'$ et C'_{jk} satisfont aux même conditions que les $\mathbf{a}$ et C_{jk}, donnés ci-dessus.

Considérons à présent les expressions $D_{x_i} u_j'(x) - D_{x_j} u_i'(x)$, $i, j = 1,..., n$.

Vu la symétrie de la matrice jacobienne, on obtient aisément, pour tout $x \in \Omega'$,

$$\begin{aligned} &\pm (D_{x_i} u_j'(x) - D_{x_j} u_i'(x)) \\ &= \sum_{k,l} (D_{x_k} x_j' D_{x_l} x_i' - D_{x_k} x_i' D_{x_l} x_j') \, [D_{x_l'} u_k]_{x'(x)} \\ &= \sum_{\substack{k,l \\ k<l}} (D_{x_k} x_j' D_{x_l} x_i' - D_{x_k} x_i' D_{x_l} x_j') \, (D_{x_l'} u_k - D_{x_l'} u_l)_{x'(x)} \, . \end{aligned}$$

On a donc

$$\pm \operatorname{rot} \mathbf{u}'(x) = B(x) \, [\operatorname{rot} \mathbf{u}(x')]_{x'(x)} \, ,$$

où $B(x)$ désigne une matrice dont les éléments sont bornés dans $\bar{\Omega}'$.

2. Prolongement des opérateurs div et rot

Posons $\tilde{C}_{jk}(x) = 0$, si $x \in \Omega$, $\tilde{C}_{jk}(x) = C_{jk}(x)$, si $x \in \bar{\Omega}'$.

On a

$$\tilde{C}_{jk}(x) \in C_0(\bar{\Omega} \cup \Omega') \cap H^1(\bar{\Omega} \cup \Omega').$$

De même, posons $\tilde{\mathbf{u}}(x) = \mathbf{u}(x)$ si $x \in \Omega$, $\tilde{\mathbf{u}}(x) = \mathbf{u}'(x)$ si $x \in \Omega'$ et considérons l'opérateur

$$\begin{pmatrix} A(x, D) \\ \operatorname{rot} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{div} + \left(\sum_k \tilde{C}_{1k}(x) \, D_{x_k}, ..., \sum_k \tilde{C}_{nk}(x) \, D_{x_k} \right) \\ \operatorname{rot} \end{pmatrix} = \mathscr{A}(x, D).$$

Cet opérateur est elliptique dans $\bar{\Omega} \cup \Omega'$. Si $\tilde{\mathbf{u}}(x) \in L^2(\bar{\Omega} \cup \Omega')$ avec $\mathscr{A}(x, D) \, \tilde{\mathbf{u}} \in L^2(\bar{\Omega} \cup \Omega')$, alors $\tilde{\mathbf{u}} \in H^1_{\text{loc}}(\bar{\Omega} \cup \Omega')$ et dès lors $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ [1].

On va effectivement prouver que

$$\mathscr{A}(x, D)\,\tilde{\mathbf{u}}(x)\begin{cases} = \begin{pmatrix}\operatorname{div}\mathbf{u}\\ \operatorname{rot}\mathbf{u}\end{pmatrix} & \text{dans } \Omega \\ = \begin{pmatrix}\operatorname{div}\mathbf{u}' + \sum\limits_{j,k} C'_{jk}(x)\, D_{x_k} u_j' \\ \operatorname{rot}\mathbf{u}'(x)\end{pmatrix} & \\ = \begin{pmatrix}\mathbf{a}'(x)\cdot\mathbf{u}[x'(x)] + [\operatorname{div}\mathbf{u}]_{x'(x)} \\ B(x)\,[\operatorname{rot}\mathbf{u}]_{x'(x)}\end{pmatrix} & \text{dans } \Omega', \end{cases}$$

d'où son appartenance à $L^2(\bar{\Omega} \cup \Omega')$ et l'inégalité

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C[\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{rot}\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}],$$

où C ne dépendant pas de $\mathbf{u} \in C_1(\Omega) \cap V_i(\Omega)$.

Pour établir ce fait, il suffit de prouver que

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}(x)/\Gamma = A(x, \mathbf{n})\,\mathbf{u}'(x)/\Gamma \qquad \text{et} \qquad \mathbf{n}\Lambda\mathbf{u}(x)/\Gamma = \mathbf{n}\Lambda\mathbf{u}'(x)/\Gamma.$$

Considérons $\mathbf{u}_m \in C_1(\bar{\Omega})$ avec $\mathbf{u}_m \xrightarrow[V(\Omega)]{} \mathbf{u}$.

Alors, la suite $\mathbf{u}_m'$ associée à la suite $\mathbf{u}_m$ selon le processus décrit en 1, converge vers $\mathbf{u}'$ dans $V_{\mathscr{A}}(\Omega')$ associé à l'opérateur $\mathscr{A}(x, D)$, considéré dans Ω'. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} A(x, \mathbf{n})\,\mathbf{u}'(x)/\Gamma &= \lim_{H^{-1/2}(\Gamma)} A(x, \mathbf{n})\,\mathbf{u}_m'(x)/\Gamma \\ &= \lim_{H^{-1/2}(\Gamma)} \mathbf{n}\cdot\left[\pm\frac{\partial(x')}{\partial(x)}\mathbf{u}_m(x)\right]\Big/\Gamma = \lim_{H^{-1/2}(\Gamma)} \pm\frac{\partial(x')}{\partial(x)}\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_m(x)/\Gamma \\ &= \mp\lim_{H^{-1/2}(\Gamma)} \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_m(x)/\Gamma = \mp\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}/\Gamma = \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}/\Gamma, \end{aligned}$$

en tenant compte du fait que $\tilde{C}_{jk}(x) = 0$ et $x'(x) = x$ si $x \in \Gamma$, que $\mathbf{n}$ est un vecteur propre de la matrice jacobienne, de valeur propre -1 et que $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}/\Gamma = 0$ dans le cas $i = 1$, c'est-à-dire dans le cas où on considère le signe "supérieur."

De la même façon,

$$\begin{aligned} \mathbf{n}\Lambda\mathbf{u}'(x)/\Gamma &= \pm\lim_{H^{-1/2}(\Gamma)} \operatorname{rot}(\mathbf{n})\frac{\partial(x')}{\partial(x)}\mathbf{u}_m(x)/\Gamma \\ &= \pm\lim_{H^{-1/2}(\Gamma)} \left[\frac{\partial(x')}{\partial(x)}\operatorname{rot}^*(\mathbf{n})\right]^*\mathbf{u}_m(x)/\Gamma \\ &= \pm\lim_{H^{-1/2}(\Gamma)} \operatorname{rot}(\mathbf{n})\,\mathbf{u}_m(x)/\Gamma = \pm\operatorname{rot}(\mathbf{n})\,\mathbf{u}/\Gamma \\ &= \mathbf{n}\Lambda\mathbf{u}/\Gamma, \end{aligned}$$

en tenant compte du fait que les vecteurs colonnes de la matrice rot* ($\mathbf{n}$) sont orthogonaux à $\mathbf{n}$ et sont donc des vecteurs propres de $\partial(x')/\partial(x)$ de valeur propre égale à 1 et que $\mathbf{n}\Lambda\mathbf{u}/\Gamma = 0$ dans le cas $i = 2$, c'est-à-dire le cas où on considère le signe "inférieur."

3. Démonstration des théorèmes de densité

Nous démontrons ici la densité de $C_1(\Omega) \cap V_i(\Omega)$ dans $V_i(\Omega)$, $(i = 1, 2)$. Les démonstrations des deux théorèmes sont parallèles.

(a) *Si* $\mathbf{u} \in V_1(\Omega)$ *est tel que* $(\mathbf{u}, \mathbf{w}_0)_{V(\Omega)} = 0$ *pour tout* $\mathbf{w}_0 \in C_1(\Omega) \cap V_1(\Omega)$, *alors* $\mathbf{u} = 0$.

Comme $C_1(\bar{\Omega})$ est dense dans $V(\Omega)$, il suffit de prouver que $(\mathbf{u}, \mathbf{w})_{V(\Omega)} = 0$, pour tout $\mathbf{w} \in C_1(\bar{\Omega})$. Effectivement, nous allons montrer que tout $\mathbf{w} \in C_1(\bar{\Omega})$ peut s'écrire $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ où $(\mathbf{u}, \mathbf{w}_1)_{V(\Omega)} = 0$ parce que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}/\Gamma = 0$ et où $(\mathbf{u}, \mathbf{w}_2)_{V(\Omega)} = 0$ parce que $\mathbf{w}_2 \in C_1(\Omega) \cap V_1(\Omega)$.

Dans ce but, considérons la solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta v_0 = v_0\,, & v_0 \in H^1(\Omega) \\ \dfrac{dv_0}{dn}\Big/\Gamma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}/\Gamma, & \mathbf{w} \in C_1(\bar{\Omega}). \end{cases}$$

Cette fonction $v_0 \in C_\infty(\Omega)$.

D'une part,

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}, \operatorname{grad} v_0)_{V(\Omega)} &= (\mathbf{u}, \operatorname{grad} v_0)_{L^2(\Omega)} + (\operatorname{div} \mathbf{u}, \Delta v_0)_{L^2(\Omega)} \\ &= (\mathbf{u}, \operatorname{grad} v_0)_{L^2(\Omega)} + (\operatorname{div} \mathbf{u}, v_0)_{L^2(\Omega)} = 0\end{aligned}$$

puisque $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}/\Gamma = 0$, et d'autre part,

$$\mathbf{w} - \operatorname{grad} v_0 \in C_1(\Omega) \cap V_1(\Omega)$$

puisque

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{w} - \operatorname{grad} v_0)/\Gamma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}/\Gamma - \frac{dv_0}{dn}\Big/\Gamma = 0.$$

La décomposition

$$\mathbf{w} = \operatorname{grad} v_0 + (\mathbf{w} - \operatorname{grad} v_0)$$

répond donc à la question.

A remarquer que $v_0 \in C_\infty(\bar{\Omega})$, ce qui prouve donc que $C_\infty(\bar{\Omega}) \cap V_1(\Omega)$ est dense dans $V_1(\Omega)$.

(b) *Si* $\mathbf{u} \in V_2(\Omega)$ *est tel que* $(\mathbf{u}, \mathbf{w}_0)_{V(\Omega)} = 0$ *pour tout* $\mathbf{w}_0 \in C_1(\Omega) \cap V_2(\Omega)$, *alors* $\mathbf{u} = 0$.

Il suffit encore de prouver que $(\mathbf{u}, \mathbf{w})_{V(\Omega)} = 0$, pour tout $\mathbf{w} \in C_1(\bar{\Omega})$.

On va montrer cette fois que tout $\mathbf{w} \in C_1(\bar{\Omega})$ peut s'écrire

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 ,$$

où $(\mathbf{u}, \mathbf{w}_1)_{V(\Omega)} = 0$, parce que $\mathbf{n}\Lambda\mathbf{u}/\Gamma = 0$ et $(\mathbf{u}, \mathbf{w}_2)_{V(\Omega)} = 0$, parce que $\mathbf{w}_2 \in C_1(\Omega) \cap V_2(\Omega)$.

Désignons par $V^*(\Omega)$, l'espace de Hilbert

$$\{\mathbf{v} \in L^2(\Omega) : \operatorname{rot}^* (-D)\, \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\},$$

muni de sa structure naturelle. Pour $\mathbf{v} \in V^*(\Omega)$, on peut définir $\operatorname{rot}^* (-\mathbf{n})\, \mathbf{v}/\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$, tel que, si $\mathbf{w} \in H^{1/2}(\Gamma)$,

$$|\langle \operatorname{rot}^*(-\mathbf{n})\, \mathbf{v}/\Gamma, \mathbf{w}\rangle| \leqslant C \, \| \mathbf{v} \|_{V^*(\Omega)} \, \| \mathbf{w} \|_{H^{1/2}(\Gamma)} \, .$$

Dès lors, pour $\mathbf{w}$ donné dans $C_1(\bar{\Omega})$, la fonctionnelle $\langle \operatorname{rot}^* (-\mathbf{n})\, \mathbf{v}/\Gamma, \gamma\mathbf{w}\rangle$ est bornée sur $V^*(\Omega)$ et il existe $\mathbf{v}_0 \in V^*(\Omega)$ tel que

$$\langle \operatorname{rot}^*(-\mathbf{n})\, \bar{\mathbf{v}}/\Gamma, \gamma\mathbf{w}\rangle = (\mathbf{v}\ \ , \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} + (\operatorname{rot}^*(-D)\, \mathbf{v}_0 \, , \operatorname{rot}^*(-D)\, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} \, ,$$

pour tout $\mathbf{v} \in V^*(\Omega)$.

De plus, si $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)$, alors

$$\langle \operatorname{rot}^*(-\mathbf{n})\, \bar{\mathbf{v}}/\Gamma, \gamma\mathbf{w}\rangle = -\langle \operatorname{rot}(\mathbf{n})\, \mathbf{w}/\Gamma, \gamma\bar{\mathbf{v}}\rangle.$$

En faisant $\mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi} \in D(\Omega)$, cette relation montre que

$$\operatorname{rot}(D) \operatorname{rot}^*(-D)\, \mathbf{v}_0 = -\mathbf{v}_0$$

et par suite (cf. appendice ci-dessous) $\Delta\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0$ et $\mathbf{v}_0 \in C_\infty(\Omega)$.

Dès lors, si $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{rot}^*(-\mathbf{n})\, \bar{\mathbf{v}}/\Gamma, \gamma\mathbf{w}\rangle &= -(\operatorname{rot}(D) \operatorname{rot}^*(-D)\, \mathbf{v}_0 \, , \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + (\operatorname{rot}^*(-D)\, \mathbf{v}_0 \, , \operatorname{rot}^*(-D)\, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} \\ &= -\langle \operatorname{rot}(\mathbf{n}) \operatorname{rot}^*(-D)\, \mathbf{v}_0/\Gamma, \overline{\gamma\mathbf{v}}\rangle.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\operatorname{rot}(\mathbf{n})\, \mathbf{w}/\Gamma = \operatorname{rot}(\mathbf{n}) \operatorname{rot}^*(-D)\, \mathbf{v}_0/\Gamma$$

ou encore

$$\mathbf{n}\Lambda(\mathbf{w} - \operatorname{rot}^*(-D)\, \mathbf{v}_0)/\Gamma = 0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}, \operatorname{rot}^*(-D)\,\mathbf{v}_0)_{V(\Omega)} &= (\mathbf{u}, \operatorname{rot}^*(-D)\,\mathbf{v}_0)_{L^2(\Omega)} + (\operatorname{rot}\mathbf{u}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}^*(-D)\,\mathbf{v}_0)_{L^2(\Omega)} \\ &= (\mathbf{u}, \operatorname{rot}^*(-D)\,\mathbf{v}_0)_{L^2(\Omega)} - (\operatorname{rot}\mathbf{u}, \mathbf{v}_0)_{L^2(\Omega)} = 0\end{aligned}$$

puisque $\mathbf{n}\Lambda\mathbf{u}/\Gamma = 0$ et que div $\operatorname{rot}^* \equiv 0$.

La décomposition

$$\mathbf{w} = \operatorname{rot}^*(-D)\,\mathbf{v}_0 + (\mathbf{w} - \operatorname{rot}^*(-D)\,\mathbf{v}_0)$$

répond donc à la question.

Appendice

Il est facile de voir que

$$\Delta_n I_n = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \operatorname{rot}^*(-D)\operatorname{rot}(D),$$

où Δ_n est le laplacien à n dimensions et I_n la matrice identité dans C^n.

La relation que nous utilisons plus haut est la suivante

$$\Delta_n I_{\frac{n(n-1)}{2}} = A(D) - \operatorname{rot} D \operatorname{rot}^*(-D),$$

où $A(D)\operatorname{rot} D \equiv 0$.

Cette relation est plus difficile à démontrer. Il est d'ailleurs vraisemblable que $A(D) = B^*(D)\,B(D)$, avec $B \operatorname{rot} \equiv 0$.

Ainsi, pour $n = 2$, $A(D) = 0$; pour $n = 3$, $B = \operatorname{div}$; pour $n = 4$

$$B = \begin{pmatrix} & & & -D_{x_4} & D_{x_3} & -D_{x_2} \\ & D_{x_4} & -D_{x_3} & & & D_{x_1} \\ -D_{x_4} & & D_{x_2} & & -D_{x_1} & \\ D_{x_3} & -D_{x_2} & & D_{x_1} & & \end{pmatrix}.$$

En langage de polynôme caractéristique, la première relation s'écrit

$$|\,x\,|^2 I_m = \langle x, x\rangle + \operatorname{rot}^*(x)\operatorname{rot}(x),$$

où $\langle x, x\rangle$ est la matrice d'éléments $x_i x_j$ et elle se vérifie aisément.

Démontrer la seconde revient à prouver que

$$|x|^2 \operatorname{rot}(x) = \operatorname{rot}(x) \operatorname{rot}^*(x) \operatorname{rot}(x)$$

ou encore, vu la première relation, que

$$\operatorname{rot}(x) \langle x, x \rangle = 0,$$

ce qu'il est aisé de vérifier.

Références

1. S. Agmon, The L^p approach to the Dirichlet problem, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* 13 (1959), 49–92.
2. K. O. Friedrichs, Differential forms on Riemannian manifolds, *Comm. Pure Appl. Math.* 8 (1955), 551–590.
3. J. Gobert, Opérateurs matriciels de dérivation elliptiques et Problèmes aux limites, *Mém. Soc. Roy. Sci. Liège* 6 (1961), fasc. 2, 1–147.
4. L. Hörmander, An interior regularity of the solutions of partial differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 11 (1958), 197–218.
5. J. L. Lions et E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes II, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 11 (1961), 137–178.
6. J. L. Lions et E. Magenes, "Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications," Vol. 1, Dunod, Paris, 1968.