JOURNAL OF ALGEBRA, 15, 455–472 (1970)

Anneaux et Modules Cohérents*

JEAN-PIERRE SOUBLIN

Faculté des Sciences de Paris,
et 23 rue des Champs-Elyseés, 94 Gentilly (France)

Communicated by J. Dieudonné

Received July 13, 1969

INTRODUCTION

Cet article passe en revue les principaux résultats connus au sujet des anneaux et modules cohérents, et résoud un certain nombre de problèmes à l'aide d'une nouvelle notion, l'uniforme cohérence.

Notre résultat essentiel est négatif: l'anneau des polynômes d'un anneau cohérent n'est pas cohérent en général. Nous construisons aussi un contre-exemple qui démontre qu'une certaine proposition avancée dans un exercice de Bourbaki est inexacte. Comme résultats positifs, nous donnons des critères pour qu'un anneau soit uniformément cohérent, ce qui permet (Prop. 6 ci-dessous) de construire de nombreux anneaux cohérents.

Signalons deux problèmes ouverts:

1. L'anneau $A = K[X, Y, Z]$ des polynômes en trois indéterminées sur un corps commutatif K est-il uniformément cohérent? Cela signifie ceci: pour chaque entier n, existe-t-il un autre entier m (noté $1 \cap_A n$ ci-dessous), tel que l'intersection d'un idéal principal de A avec un idéal de A engendré par n éléments soit un idéal engendrable par m éléments?

2. L'anneau des séries formelles en une infinité d'indéterminées sur K est-il cohérent? (les éléments de cet anneau sont des sommes infinies quelconques de monômes).

Enfin, il resterait à traiter tous les problèmes abordés ici dans le cas particulier des anneaux commutatifs *intègres*. Par exemple, l'anneau des polynômes sur un anneau cohérent intègre est-il cohérent?

* Ce travail fait suite à quatre notes antérieures [12], et à deux exposés du Séminaire d'Algèbre Commutative [9].

1. Préliminaires

Le lecteur que n'intéressent pas les détails techniques peut ne retenir de ce paragraphe que la définition des *uniformisantes de cohérence* ci-dessous, et se reporter aux énoncés des lemmes au fur et à mesure de leur utilisation dans les paragraphes suivants.

Nous nous donnons tout d'abord un module à gauche M sur un anneau non nécessairement commutatif A. *Anneaux et modules seront toujours unitaires.* Les structures canoniques de A-module à gauche et à droite de l'anneau A seront notées A_s et A_d.

La phrase "le module M est engendré par φ éléments" signifie que M est de type fini; de même $A_s{}^\varphi$ est un A-module à gauche libre de rang fini, mais quelconque. Nous notons $\bar{\mathbf{N}}$ l'ensemble ordonné des entiers $\mathbf{N}$ auquel on a adjoint le plus grand élément φ; nous étendons à $\bar{\mathbf{N}}$ l'addition de $\mathbf{N}$ par la convention $n + \varphi = \varphi + n = \varphi$, pour tout $n \in \bar{\mathbf{N}}$. Enfin nous adjoignons à $\bar{\mathbf{N}}$ le plus grand élément ∞.

Soient p, q, m dans $\bar{\mathbf{N}}$. L'écriture $p \cap_M q \leqslant m$ signifiera que l'intersection de tout sous-module de M engendré par p éléments avec tout sous-module de M engendré par q éléments est engendrable par m éléments. Supposons donnés p et q; s'il n'existe pas de $m \in \bar{\mathbf{N}}$ tel que $p \cap_M q \leqslant m$, nous écrirons $p \cap_M q = \infty$; sinon nous noterons $p \cap_M q$, ou simplement $p \cap q$, le plus petit $m \in \bar{\mathbf{N}}$ tel que $p \cap_M q \leqslant m$.

Soient n et k dans $\bar{\mathbf{N}}$. L'écriture $\ker(n \to M) \leqslant k$ signifiera que, quel que soit l'homomorphisme *non nul* $f : A_s{}^n \to M$ de source $A_s{}^n$ et de but M, son noyau $\ker f$ est engendrable par k éléments. Nous définissons comme ci-dessus $\ker(n \to M)$, ou simplement $\ker(n)$, comme un élément de l'ensemble ordonné $\bar{\mathbf{N}} \cup \{\infty\}$.

Les fonctions $(p, q) \mapsto p \cap q$ et $n \mapsto \ker(n)$ seront dites *uniformisantes de cohérence* du module M. Notons que si $\ker(1) < \infty$, l'annulateur de tout élément non nul de M est un idéal à gauche de A engendrable par $\ker(1)$ éléments (et en particulier de type fini). Les uniformisantes sont liées entre elles par les inégalités suivantes:

Lemme 1. *Pour tous p et q dans $\bar{\mathbf{N}}$, on a l'inégalité* $p \cap q \leqslant \ker(p + q)$, *entre éléments de* $\bar{\mathbf{N}} \cup \{\infty\}$.

Lemme 2. *Soit $n \in \bar{\mathbf{N}}$, $n \geqslant 2$. Supposons que* $\ker(1) \leqslant \varphi$ *et que* $1 \cap r \leqslant \varphi$ *pour tout $r \in \mathbf{N}$; alors on a l'inégalité* $\ker(n) \leqslant n \ker(1) + \sum_{r=1}^{n-1} (1 \cap r)$.

La démonstration des lemmes 1 et 2 utilise le lemme suivant:

Lemme 3. *Soit $f : P \oplus Q \to M$ un homomorphisme de modules. On a* *l'égalité* $f(P) \cap f(Q) = f(pr_1(\ker f))$, *où* $pr_1 : P \oplus Q \to P$ *est la projection sur le premier facteur.*

Démonstration du Lemme 3. Si x appartient à $f(P) \cap f(Q)$, il existe $p \in P$ et $q \in Q$ tels que $f(p) = f(q) = x$; on a alors $p - q \in \ker f$, et $x = f(pr_1(p - q))$. Inversement, si x appartient à $f(pr_1(\ker f))$, il existe $y \in \ker f$ tel que $x = f(pr_1(y))$; on a alors $x = f(pr_1(y)) = f(pr_2(-y))$. C.Q.F.D.

Démonstration du Lemme 1. Écartons le cas trivial où les sous-modules de M dont on prend l'intersection sont tous deux nuls. En général, il suffit de faire $P = A_s{}^p$ et $Q = A_s{}^q$ dans le lemme 3.

Démonstration du Lemme 2. Soit $f : L \to M$ un homomorphisme non nul, dont la source L est libre de rang $n + 1$, $n \in \bar{\mathbf{N}}$, $n \geqslant 1$. Il existe une décomposition $L = P \oplus Q$ de L en la somme directe de deux modules libres, de rang 1 et n respectivement, de sorte que la restriction $f|_P$ ne soit pas nulle. Avec les notations du lemme 3, il existe un sous-module S de $\ker f$, engendré par $1 \cap n$ éléments, tel que $f(P) \cap f(Q) = f(pr_1(S))$. On en déduit facilement l'égalité $\ker f = \ker(f|_P) + \ker(f|_Q) + S$ qui prouve que $\ker f$ est engendrable par $\ker(1) + \ker(n) + (1 \cap n)$ éléments, pourvu que la restriction $f|_Q$ ne soit pas nulle. De toute façn on a l'inégalité

$$\ker(n + 1) \leqslant \ker(1) + \ker(n) + (1 \cap n),$$

qui démontre le lemme 2 par récurrence.

Les lemmes ci-dessous seront utilisés dans les paragraphes suivants.

Lemme 4. *Soit A un anneau commutatif intègre, et soit f un homomorphisme non nul d'un A-module libre L de rang fini r dans un A-module M sans torsion. Le noyau de f est alors isomorphe à un sous-module d'un A-module libre de rang $r - 1$.*

Démonstration. Soit $L = Ae \oplus Q$ une décomposition de L en somme directe de modules libres de rangs 1 et $r - 1$, de sorte que $f(e) \neq 0$. Le lemme résulte du fait que la restriction π de la seconde projection $Ae \oplus Q \to Q$ à $\ker f$ est injective. En effet, un élément du noyau de π est de la forme ae, où $a \in A$ est tel que $f(ae) = af(e) = 0$; et comme $f(e) \neq 0$ et que M est sans torsion, nous avons $a = 0$, donc $ae = 0$. C.Q.F.D.

Lemme 5. *Soient A un anneau, κ un cardinal. Le A-module à droite $M = A_d{}^\kappa$, produit direct de κ copies de A_d, est plat, si et seulement si la condition suivante $C(\kappa)$ est réalisée:*

$$C(\kappa) \begin{cases} \textit{Quel que soit l'homomorphisme } f : A_s{}^\omega \to A_s, \\ \textit{toute famille de } \kappa \textit{ éléments de } \ker f \textit{ est contenue} \\ \textit{dans un sous-module de type fini de } \ker f. \end{cases}$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que la donnée de f équivaut à la donnée d'une famille finie (b_i), $i \in I$, d'éléments de A; il suffit de prendre pour b_i l'image par f du $i^{ème}$ vecteur d'une base fixe (e_i) de la source de f. D'autre part, la donnée de κ éléments l_k ($k \in K$, card $K = \kappa$) de ker f équivaut à la donnée d'une famille (m_i) d'éléments de M, indexée par I, telle que

$$\sum_i m_i b_i = 0; \tag{1}$$

il suffit de poser $l_k = \sum_i m_{ki} e_i$, pour tout $k \in K$, puis $m_i = (m_{ki})$; la condition (1) exprime en effet que chaque l_k est dans le noyau de f.

Si la condition $C(\kappa)$ est réalisée, il existe un système fini (a_j), $j \in J$, d'éléments de ker f, tel que chaque l_k s'exprime comme combinaison linéaire de ces a_j, soit $l_k = \sum_j x_{kj} a_j$. Posons $a_j = \sum_i a_{ji} e_i$, avec $a_{ji} \in A$. Le fait que chaque a_j appartient à ker f s'écrit

$$\sum_i a_{ji} b_i = 0, \qquad \text{pour tout } j \in J. \tag{2}$$

Posons enfin $x_j = (x_{kj})$. L'égalité $l_k = \sum_j x_{kj} a_j$ se traduit par l'égalité dans M

$$m_i = \sum_j x_j a_{ji}, \qquad \text{pour tout } i \in I. \tag{3}$$

Ainsi, la condition $C(\kappa)$ peut-elle se traduire ainsi: "Si $(m_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ sont deux familles finies d'éléments de M et de A respectivement, telles que (1) ait lieu, il existe un ensemble fini J, une famille $(x_j)_{j \in J}$ d'éléments de M et une famille (a_{ji}) d'éléments de A, $j \in$ J, $i \in I$, tels que (2) et (3) aient lieu.", Or cette condition est l'une des formulations de la platitude de M ([3], I, § 2' Prop. 13, Cor. 1). C.Q.F.D,

LEMME 6. *Soit S l'un des deux anneaux* $\mathbf{Q}[[t, u]]$ *ou* $\mathbf{Q}[t, u]$ *des séries formelles ou des polynômes, en deux variables t et u, à coefficients rationnels. Pour tout entier $\alpha \geqslant 4$, considérons l'ensemble des polynômes de $S[X]$, dont le terme constant est tu^α, et qui sont contenus dans l'intersection des deux idéaux suivants de $S[X]$:*

$$(t - uX)S[X] \qquad et \qquad tu^\alpha S[X] + (t^\alpha - 2u^\alpha)S[X].$$

Alors il existe un polynôme de degré α dans cet ensemble, mais il n'en existe pas de degré moindre.

Démonstration de l'existence. Partons de l'identité de $S[X]$:

$$(t - uX)(t^{\alpha-1} + t^{\alpha-2}uX + t^{\alpha-3}u^2X^2 + \cdots + u^{\alpha-1}X^{\alpha-1}) = t^\alpha - u^\alpha X^\alpha.$$

Multiplions chaque membre par t et remplaçons t^α par $(t^\alpha - 2u^\alpha) + 2u^\alpha$:

$$(t - uX)(2u^\alpha + t^{\alpha-1}uX + t^{\alpha-2}u^2X^2 + \cdots + tu^{\alpha-1}X^{\alpha-1}) + (t - uX)(t^\alpha - 2u^\alpha)$$
$$= t(t^\alpha - 2u^\alpha) + 2tu^\alpha - tu^\alpha X^\alpha,$$

et nous obtenons (à chaque membre) le polynôme désiré:

$$(t - uX)\left(u^\alpha + \frac{t^{\alpha-1}u}{2}X + \frac{t^{\alpha-2}u^2}{2}X^2 + \cdots + \frac{tu^{\alpha-1}}{2}X^{\alpha-1}\right)$$
$$= (t^\alpha - 2u^\alpha)\frac{u}{2}X + tu^\alpha\left(1 - \frac{X^\alpha}{2}\right).$$

Démonstration de l'inexistence. Par l'absurde. Soient donc quatre polynômes P, P', P'' et P''' dans $S[X]$ tels que

$$P(t, u; X) = (t - uX)P'(t, u; X) = tu^\alpha P''(t, u; X) + (t^\alpha - 2u^\alpha)P'''(t, u; X),$$

avec $P(t, u; 0) = tu^\alpha$, et le degré en X de P étant $< \alpha$. On a donc

$$P' = u^\alpha + s_1(t, u)X + \cdots + s_{\alpha-2}(t, u)X^{\alpha-2},$$

où $s_1(t, u), \ldots, s_{\alpha-2}(t, u)$ sont des éléments de $\mathbf{Q}[[t, u]]$ (si $S = \mathbf{Q}[t, u]$ ce résultat vaut aussi, en identifiant $\mathbf{Q}[t, u]$ à un sous-anneau de $\mathbf{Q}[[t, u]]$). Considérons alors $s_1, \ldots, s_{\alpha-2}$ (resp. P, P'' et P'''), comme des séries (resp. des polynômes de séries), à coefficients *réels*, et faisons $t = \sqrt[\alpha]{2}\,u$:

$$P(\sqrt[\alpha]{2}\,u, u; X)$$
$$= (\sqrt[\alpha]{2}\,u - uX)(u^\alpha + s_1(\sqrt[\alpha]{2}\,u, u)\,X + \cdots + s_{\alpha-2}(\sqrt[\alpha]{2}\,u, u)\,X^{\alpha-2})$$
$$= \sqrt[\alpha]{2}\,u^{\alpha+1}P''(\sqrt[\alpha]{2}\,u, u; X).$$

Comme $u^{\alpha+1}$ divise le dernier membre, et que u^2 ne divise pas $\sqrt[\alpha]{2}\,u - uX$, u^α doit diviser $s_1(\sqrt[\alpha]{2}\,u, u), \ldots, s_{\alpha-2}(\sqrt[\alpha]{2}\,u, u)$: il existe des séries $s_1', \ldots, s_{\alpha-2}'$ de $\mathbf{R}[[U]]$ (c'est-à-dire à coefficients réels) telles que $s_i(\sqrt[\alpha]{2}\,u, u) = u^\alpha s_i'(u)$, $1 \leqslant i \leqslant \alpha - 2$. On obtient alors

$$(\sqrt[\alpha]{2} - X)(1 + s_1'(u)\,X + \cdots + s_{\alpha-2}'(u)\,X^{\alpha-2}) = \sqrt[\alpha]{2}\,P''(\sqrt[\alpha]{2}\,u, u; X).$$

Mais $P''(0, 0; X)$ est un polynôme de $\mathbf{Q}[X]$, si bien que tous les coefficients de $(\sqrt[\alpha]{2} - X)(1 + s_1'(0)\,X + \cdots + s_{\alpha-2}'(0)\,X^{\alpha-2})$ sont dans $\sqrt[\alpha]{2}\,\mathbf{Q}$. Ceci implique que $s_{\alpha-2}'(0) \in \sqrt[\alpha]{2}\,\mathbf{Q}$ et que $-s_{\alpha-3}'(0) + \sqrt[\alpha]{2}\,s_{\alpha-2}'(0) \in \sqrt[\alpha]{2}\,\mathbf{Q}$, donc que $s_{\alpha-3}'(0) \in \sqrt[\alpha]{2}\,\mathbf{Q} + \sqrt[\alpha]{2^2}\,\mathbf{Q}$, etc.; et par récurrence, on montre, en posant $s_0'(0) = 1$, que, pour $2 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, $s_{\alpha-\beta}'(0) \in \sqrt[\alpha]{2}\,\mathbf{Q} + \sqrt[\alpha]{2^2}\,\mathbf{Q} + \cdots + \sqrt[\alpha]{2^{\beta-1}}\,\mathbf{Q}$. Or $s_0'(0) = 1 \in \sqrt[\alpha]{2}\,\mathbf{Q} + \sqrt[\alpha]{2^2}\,\mathbf{Q} + \cdots + \sqrt[\alpha]{2^{\alpha-1}}\,\mathbf{Q}$ est faux. C.Q.F.D.

Lemme 7. *Soit D un anneau de valuation, ou un anneau principal. Soit $A = D[[X]]$ l'anneau des séries formelles sur D en l'indéterminée X. Soit K un sous-module de type fini d'un A-module libre L, tel que, pour tout $l \in L$, la relation $Xl \in K$ implique $l \in K$. Alors K est un A-module libre.*

Démonstration. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de L. A chaque $l = \sum a_i e_i$ de L ($a_i \in A = D[[X]]$) associons $l(0) = \sum a_i(0) e_i$; lorsque l décrit K, $l(0)$ décrit le sous-module $K(0)$ du D-module libre $L(0)$ de base (e_i). Comme K, le module $K(0)$ est de type fini et sans torsion; il est donc libre ([3], VI, § 3). Soit $(k_j(0))$ une base (finie) de $K(0)$, avec $k_j \in K$.

Montrons d'abord que (k_j) est un système de générateurs du A-module K. En effet, si $k \in K$, $k(0)$ s'exprime comme combinaison linéaire, à coefficients d_{j1} dans D, de la base $(k_j(0))$ de $K(0)$, soit $k(0) = \sum_j d_{j1} k_j(0)$. Il existe donc $k_1 \in L$ tel que $k - \sum_j d_{j1} k_j = X k_1$. On a $X k_1 \in K$, et partant $k_1 \in K$. En procédant par récurrence sur n, on peut donc écrire $k - \sum_j d_{jn} k_j = X^n k_n$, où d_{jn} est un polynôme en X, de degré $< n$, à coefficients dans D, et où $k_n \in K$. En passant à la limite, on trouve $k = \sum_j d_{j\infty} k_j$, où $d_{j\infty} \in D[[X]] = A$.

Montrons maintenant que (k_j) est une *base* de K. Soit donc $\sum_j a_j k_j$ une relation entre les k_j, à coefficients a_j non tous nuls. Soit n le plus petit des ordres des séries a_j qui ne sont pas nulles. Nous avons $a_j = X^n a_j'$, l'une des séries a_j' étant de coefficient constant $a_j'(0)$ non nul. De la relation $\sum_j a_j' k_j = 0$, on tire $\sum_j a_j'(0) k_j(0) = 0$, qui contredit le fait que $(k_j(0))$ est une base du D-module $K(0)$. C.Q.F.D.

Corollaire. *Soit D un anneau principal ou de valuation, $A = D[[X]]$ l'anneau des séries formelles sur D. Tout A-module projectif de type fini est libre.*

Remarque. Lorsque D est principal, un résultat de Bass [2] permet d'en déduire que tout A-module projectif est libre. Ceci est à rapprocher du résultat analogue de Seshadri [11].

2. Modules Uniformement Coherents

Dans [3] (I, § 2, exerc. 11 et 12), un module *pseudo-cohérent* est défini commme étant un module dont tout sous-module de type fini est de présentation finie. Autrement dit, on doit avoir $\ker(\varphi \to M) \leqslant \varphi$. D'après le lemme 1, on en tire $\varphi \cap_M \varphi \leqslant \varphi$. Inversement, si $\varphi \cap \varphi \leqslant \varphi$, ou même simplement si $1 \cap \varphi \leqslant \varphi$, on en tire $\ker(\varphi) \leqslant \varphi$, pourvu que $\ker(1) \leqslant \varphi$; il suffit d'appliquer le lemme 2 pour tout $n \in \mathbf{N}$. Enonçons:

Proposition 1. *Un module à gauche M sur un anneau A est pseudo-cohérent si, et seulement si, l'intersection de tout sous-module monogène de M*

avec un sous-module de type fini est de type fini, et que l'annulateur de tout élément de M est un idéal à gauche de type fini. S'il en est ainsi, l'intersection de deux sous-modules de type fini de M est de type fini.

On trouvera dans [3] les deux propositions suivantes:

PROPOSITION 2. *Toute somme directe de modules pseudo-cohérents est pseudo-cohérente. Si deux termes d'une petite suite exacte sont des modules* cohérents, *c'est-à-dire pseudo-cohérents et de type fini, il en est de même du troisième terme.*

PROPOSITION 3. *Soient E et F deux modules cohérents sur un anneau commutatif A. Le A-module* $\hom(E, F)$ *est cohérent.*

PROPOSITION 4. *Soit S un système multiplicatif d'un anneau commutatif A. Si M est un A-module pseudo-cohérent, le $S^{-1}(A)$-module de fractions $S^{-1}(M)$ est pseudo-cohérent.*

Pour cette dernière proposition, voir Harris [7]. Définissons maintenant la notion d'*uniforme cohérence* annoncée dans l'introduction:

PROPOSITION 5. *Soit M un module. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *pour tout* $n \in \mathbf{N}$, $\ker(n \to M) \in \mathbf{N}$ (*i.e.*, $< \varphi$);

(ii) $\ker(1 \to M) \in \mathbf{N}$, *et pour tout* $r \in \mathbf{N}$, $(1 \cap_M r) \in \mathbf{N}$.

Si ces propriétés sont vérifiées, on a $(p \cap_M q) \in \mathbf{N}$ pour tous p, $q \in \mathbf{N}$, et nous dirons que M est uniformément *pseudo-cohérent. Si de plus M est de type fini, M sera dit* uniformément cohérent.

Cette proposition résulte des lemmes 1 et 2. Tout module uniformément pseudo-cohérent est pseudo-cohérent.

PROPOSITION 6. *Soit I un ensemble, et pour chaque $i \in I$, un anneau A_i et un A_i-module à gauche M_i. Supposons la famille (M_i) uniformément cohérente, c'est-à-dire que, pour chaque $n \in \mathbf{N}$, la borne supérieure*

$$s(n) = \sup_{i \in I}(\ker(n \to M_i))$$

est un entier (fini). Le module à gauche $\prod_{i \in I} M_i$ sur l'anneau $\prod_{i \in I} A_i$ est alors uniformément pseudo-cohérent, et $\ker(n \to \prod_{i \in I} M_i) \leqslant \sup(n, s(n))$.

En effet, si $f_i : (A_i)_s{}^n \to (A_i)_s)$ est un A_i-homomorphisme, nul ou non, le noyau de f_i est engendrable par n ou $s(n)$ éléments. Il en est donc de même du noyau de tout $\prod A_i$-homomorphisme $(\prod f_i)$: $(\prod A_i)_s{}^n \to (\prod A_i)_s$.

Remarque. Si $\mathbf{F}$ est un filtre sur un ensemble non vide I, et G un groupe abélien, désignons par $G^{\mathbf{F}}$ le quotient du groupe G^I (applications de I dans G) par le sous-groupe des applications qui s'annulent sur un élément de $\mathbf{F}$. On vérifie de suite que si M est un A-module uniformément cohérent, $M^{\mathbf{F}}$ est un $A^{\mathbf{F}}$-module uniformément cohérent, avec l'uniformisante $\ker(n \to M^{\mathbf{F}}) \leqslant \sup(n, \ker(n \to M))$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. En particulier, toute ultrapuissance d'un module uniformément cohérent est un module uniformément cohérent (sur l'ultrapuissance correspondante de l'anneau). En prenant pour $\mathbf{F}$ le filtre le moins fin sur I, $\mathbf{F} = \{I\}$, nous retrouvons ainsi une conséquence immédiate de la proposition 6: "Si M est un A-module uniformément cohérent, il en est de même du A^I-module M^I". Cela établit le "seulement si" de la proposition ci-dessous.

PROPOSITION 7. *Un module à gauche M sur un anneau A est uniformément (pseudo-)cohérent si, et seulement si, le $A^{\mathbf{N}}$-module à gauche $M^{\mathbf{N}}$ est (pseudo-) cohérent* [non nécessairement uniformément, à priori du moins: cf. Prop. 6].

Il reste à montrer que si M n'est pas uniformément cohérent, alors $M^{\mathbf{N}}$ n'est pas cohérent. Sous cette hypothèse en effet, on peut trouver un entier n, et une suite $f_i : A_s{}^n \to M$ d'homomorphismes, $i \in \mathbf{N}$, tels que $\ker f_i$ ne soit pas engendrable par i éléments, et le noyau du $A^{\mathbf{N}}$-morphisme $(f_i)_{i \in N} : (A^{\mathbf{N}})_s{}^n \to M^{\mathbf{N}}$ n'est pas de type fini.

La proposition 7 permet d'étendre aux modules uniformément cohérents certaines des propriétés des modules cohérents; par exemple, la proposition 2 nous donne:

PROPOSITION 8. *Si deux termes d'une petite suite exacte sont des modules uniformément cohérents, il en est de même du troisième.*

3. Anneaux Cohérents et Modules Plats

DÉFINITION 1. *Un anneau A est dit* cohérent à gauche *si le A-module A_s est cohérent, autrement dit, si tout idéal à gauche de type fini est de présentation finie.*

Un anneau intègre A est donc cohérent (sous-entendu: à gauche) si l'intersection de tout idéal principal et de tout idéal de type fini est de type fini (Prop. 1); si l'anneau n'est pas intègre, il faut ajouter la condition $\ker(1 \to A_s) \leqslant \varphi$ qui signifie que l'annulateur de tout élément est une idéal de type fini.

Comme anneaux cohérents, citons déjà les anneaux noethériens et les anneaux de valuation.

PROPOSITION 9. *Sur un anneau cohérent, tout module projectif est pseudo-cohérent, tout module de présentation finie est cohérent.*

En effet tout module libre L est pseudo-cohérent (Prop. 2), et tout sous-module P de L est pseudo-cohérent. Si P et L sont de type fini, L/P est cohérent (Prop. 2). C.Q.F.D.

PROPOSITION 10. *Un anneau A est noethérien à gauche si, et seulement si, tout module à gauche sur A est pseudo-cohérent.*

Démonstration. Si A est noethérien, tout module de type fini est bien de présentation finie. Inversement, s'il en est ainsi, pour tout idéal à gauche $\mathbf{I}$ de A, le module $A_s/\mathbf{I}$ est de présentation finie, ce qui signifie que $\mathbf{I}$ est de type fini. C.Q.F.D.

La première assertion de la proposition ci-dessous résulte de la proposition 4; pour la deuxième assertion, voir [7].

PROPOSITION 11. *Soit A un anneau commutatif et cohérent. Tout anneau $S^{-1}(A)$ de fractions de A est cohérent. Si de plus A est intègre, toute extension intègrale finie de A est cohérente.*

PROPOSITION 12. *Pour un anneau A les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *A est cohérent à gauche;*

(ii) *tout produit direct de A-modules à droite plats est plat;*

(iii) *tout produit direct de copies de A_d est un A-module à droite plat.*

Pour une démonstration, voir Chase [5]. On peut remplacer la condition (iii) par "le module à droite A_d^A est plat". En effet de deux choses l'une, ou A est fini, ou il est infini. S'il est fini, il est noethérien (et cohérent) à gauche. S'il est infini, il est équipotent à A_s^{φ}; et si de plus la module $M = A_d^A$ est plat, il résulte du lemme 5 (condition C (Card A)) que le noyau de tout homomorphisme $A_s^{\varphi} \to A_s$ est de type fini, c'est-à-dire que A est cohérent à gauche.

Par contre, contrairement à ce qu'annonce Bourbaki (implication $\gamma \to \alpha$ de l'exercice 12 de [3], I, §2), on ne peut pas remplacer la condition (iii) par "le module $A_d^{\mathbf{N}}$ est plat", comme va le prouver le contre-exemple suivant.

Contre-Exemple (Je remercie J. P. SERRE qui a aidé à sa construction)

Nous partons d'un ensemble totalement ordonné Σ, non vide, n'ayant pas de plus grand élément, et dont toute partie dénombrable est majorée: par exemple les ordinaux dénombrables. Puis nous munissons le groupe abélien $\Gamma = \mathbf{Z}^{(\Sigma)}$ de la relation d'ordre lexicographique. L'ensemble Γ^+ des éléments strictement positifs de ce groupe ordonné n'est pas vide, n'a pas de plus petit élément, et toute partie dénombrable de Γ^+ est minorée dans Γ^+.

Soit V un anneau de valuation ayant Γ pour groupe des ordres; puis choisissons $\alpha \in \Gamma^+$, et soit $\mathbf{A}$ l'idéal de V des éléments x dont l'ordre $v(x)$ est $> \alpha$. Enfin nous posons $A = V/\mathscr{A}$. Nous allons montrer que A est le contre-exemple recherché, c'est-à-dire n'est pas cohérent, quoique le A-module $A_d^{\mathbf{N}}$ soit plat.

Remarquons tout d'abord que A est un anneau local, dont les idéaux sont totalement ordonnés par inclusion, et dont les seuls idéaux de type fini sont les idéaux principaux; on a donc l'égalité

$$\varphi \bigcap_{A_s} \varphi = 1. \tag{4}$$

Cependant si a est un élément de V tel que $v(a) = \alpha$, alors $\bar{a} = a + \mathbf{A}$ est un élément non nul de A, dont l'annulateur est l'idéal maximal de A, qui n'est pas de type fini, puisque Γ^- n'a pas de plus petit élément. Ainsi nous avons

$$\ker(1 \to A_s) = \infty, \tag{5}$$

ce qui prouve que l'anneau A n'est pas cohérent.

Il reste à montrer que le A-module à droite $A_d^{\mathbf{N}}$ est plat, c'est-à-dire (Lemme 5), que, quel que soit l'homomorphisme $\bar{f} : A_s{}^{\varphi} \to A_s$, toute *suite* $(\overline{s_k})_{k \geq 0}$ d'éléments de $\ker \bar{f}$ est contenue dans un sous-A-module de $\ker \bar{f}$. Cet A-homomorphisme $\bar{f}$ provient, par passage au quotient, d'un V-homomorphisme $f : V_s{}^{\varphi} \to V_s$; et il existe un idéal principal xV de V, contenant $\mathbf{A}$ et la suite des $f(s_k)$: il suffit que l'ordre $v(x)$ de x soit un minorant positif des ordres des $f(s_k)$. La suite $(\overline{s_k})$ est alors contenue dans le sous-A-module $\overline{f^1(xV)}$ qui, lui-même, est contenu dans $\overline{f^1(\mathbf{A})} = \ker \bar{f}$. Il suffit donc de démontrer que $f^1(xV)$ est un V-module de type fini.

Or $f^1(xV)$ est le noyau de l'application composée $V^n \xrightarrow{f} V \to V/(xV)$. Ce noyau est de type fini, parce-que le V-module $V/(xV)$ est cohérent, comme module de présentation finie sur l'anneau (de valuation) cohérent V (Prop. 9). C.Q.F.D.

Proposition 13. *Tout anneau* absolument plat (*c'est-à-dire sur lequel tout module est plat*) *est cohérent à gauche* (*et à droite*).

Les propriétés élémentaires des anneaux absolument plats sont indiquées dans Bourbaki ([3], I, §2, exerc. 16, 17 et 18) qui les appelle anneaux *réguliers au sens de Von Neuman*. La proposition 13 est une conséquence immédiate de la proposition 12. Il résulte aussi de la propriété (iii) de la proposition 12, que si un anneau A est intègre et que tout A-module sans torsion est plat, alors A

est cohérent. Cela s'applique aux anneaux principaux et aux anneaux de valuation.

La proposition "Un module M sur un anneau commutatif A est cohérent si, et seulement si, ses localisés $M_{\mathbf{M}}$ sont $A_{\mathbf{M}}$-cohérents, pour tout idéal maximal $\mathbf{M}$ de A" est fausse, en dépit de la proposition 4. Sinon, comme les localisés d'un anneau absolument plat sont des corps, tout module de type fini sur un tel anneau serait cohérent, et (Prop. 10) tout anneau absolument plat serait noethérien; ce qui est faux (prendre un produit infini de corps).

De même, malgré la proposition 2 (sommes directes), *la limite inductive filtrante de modules cohérents n'est pas pseudo-cohérente*, en général. Sinon, sur un anneau cohérent, tout module plat serait pseudo-cohérent, comme limite inductive de modules libres de rang fini (cf. [8]), lesquels sont cohérents (Prop. 9). Et nous retombons sur la même absurdité: tout anneau absolument plat serait noethérien.

Cela montre aussi que *sur un anneau cohérent, les modules plats ne sont pas pseudo-cohérents*, en général, contrairement à ce qui a lieu pour les modules projectifs (Prop. 9).

4. Anneaux Uniformement Coherents

Définition 2. *Un anneau A est dit* uniformément cohérent à gauche *si le A-module A_s est uniformément cohérent* (*Prop.* 5).

Autrement dit, il doit exister une fonction *entière* (i.e., de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$) $\ker(\cdot \to A)$, telle que le noyau de tout homomorphisme non nul $A_s{}^n \to A_s$ puisse être engendré par $\ker(n \to A)$ éléments, pour $n \in \mathbf{N}$. Si l'anneau est intègre, on peut dire aussi (Prop. 5) qu'il doit exister une fonction entière $(1 \cap \cdot)$ telle que l'intersection d'un idéal principal de A avec un idéal engendré par r éléments soit engendrable par $1 \cap r$ éléments, pour tout $r \in \mathbf{N}$; si l'anneau n'est pas intègre, il faut aussi qu'il existe un entier $\ker(1)$ tel que l'annulateur (à gauche) de tout élément non nul de A soit engendrable par $\ker(1)$ éléments.

Par exemple, les corps, les anneaux principaux, les anneaux de valuation sont uniformément cohérents, avec les uniformisantes de cohérence $p \cap q = 1$ ($p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$) et $\ker(1) = 0$ (cette dernière égalité signifie simplement que l'anneau est intègre); on en déduit (Lemme 2) $\ker(n) = n - 1$ ($n \geqslant 1$). Les anneaux commutatifs absolument plats sont uniformément cohérents, et $\ker(1) \leqslant 1, p \cap q = 1$.

Tout anneau uniformément cohérent est cohérent.

La condition sur les annulateurs, $\ker(1) \in \mathbf{N}$, est indispensable. En effet le *contre-exemple A* du §2 est tel que $1 \cap_A r = 1$, pour tout $r \geqslant 1$ (égalité (4)), et n'est même pas cohérent (égalité (5)). Ce même contre-exemple $A = V/\mathbf{A}$

montre que le quotient d'un anneau uniformément cohérent peut ne pas être cohérent.

PROPOSITION 14. *Soit K un anneau, et A un autre anneau qui est en même temps un K-module à gauche satisfaisant l'identité $k(ab) = (ka)b$ pour tous $k \in K$, $a \in A$, $b \in A$. Si le K-module A est (uniformément) cohérent, l'anneau A est (uniformément) cohérent à gauche.*

Démonstration. Soit n un entier, $f : A_s^n \to A_s$ un A-homomorphisme; f est aussi un K-homomorphisme. Soit m le cardinal d'un système fini de générateurs de ${}_KA$ (A considéré comme K-module). On peut trouver un K-homomorphisme surjectif $g : K_s^{mn} \to ({}_KA)^n$. Le K-module $\ker(f \circ g)$ est engendrable par $\ker(mn \to {}_KA)$ éléments, ainsi que le K-module $\ker f = g(\ker(f \circ g))$. A fortiori, $\ker f$ est engendrable par $\ker(mn \to {}_KA)$ en tant que A-module à gauche. C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1. *Soit K un anneau (uniformément) cohérent à gauche, $\mathbf{I}$ un idéal bilatère de K, de type fini en tant qu'idéal à gauche. L'anneau quotient $A = K/\mathbf{I}$ est alors (uniformément) cohérent à gauche.*

En effet, les propositions 2 ou 8 montrent que A est un K-module cohérent, ou uniformément cohérent.

COROLLAIRE 2. *Soit M un module (uniformément) cohérent sur un anneau commutatif K. L'anneau $A = \hom_K(M, M)$ des endomorphismes de M est (uniformément) cohérent à gauche.*

On utilise la proposition 3, et, dans le cas uniforme, la proposition 7.

COROLLAIRE 3. *Soient K un anneau (uniformément) cohérent à gauche, n un entier. L'anneau A des matrices carrées, ou triangulaires supérieures, d'ordre n et à coefficients dans K, est (uniformément) cohérent à gauche.*

Les propositions 2 et 8 montrent en effet que le K-module A est (uniformément) cohérent.

THÉORÈME 1. *L'anneau $A = D[[X]]$ des séries formelles, en une indéterminée X, sur un anneau principal D, est uniformément cohérent; plus précisément on a* $\ker(n) = n - 1$ $(n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 1)$, *et* $p \cap q \leqslant p + q - 1$ $(p \in \mathbf{N},\ q \in \mathbf{N},\ p + q \neq 0)$.

Démonstration. Soit L un A-module libre de rang fini $n \geqslant 1$, et soit $f : L \to A_s$ un homomorphisme non nul, de noyau K. Si $l \in L$, et que $Xl \in K$, alors $l \in K$; de plus K est de type fini, parce que A est noethérien. D'après le lemme 7, K est libre.

Le module libre K est isomorphe à un sous-module de A^{n-1} (Lemme 4). Il est donc de rang $\leqslant n - 1$. D'où l'uniformisante $\ker(n \to A) = n - 1$; l'autre uniformisante découle du lemme 1.

COROLLAIRE. *L'anneau des séries formelles $K[[X, Y]]$ en deux indéterminées, sur un corps commutatif K, est uniformément cohérent.*

Il suffit en effet de faire $D = K[[Y]]$ dans le théorème 1.

Il ne semble pas que tout anneau commutatif noethérien soit uniformément cohérent; pour un contre-exemple, j'ai déjà dit dans l'introduction que $\mathbf{Q}[X, Y, Z]$ est un candidat raisonnable, $\mathbf{Q}[[X, Y, Z]]$ aussi. Par contre, les anneaux $\mathbf{Q}[[X, Y]]$ et $\mathbf{Q}[X, Y]$ sont uniformément cohérents (corollaire ci-dessus, et corollaire 2 du théorème 2 ci-dessous).

THÉORÈME 2. *Soit A un anneau commutatif dont la dimension homologique globale* gld A *est* $\leqslant 2$, *et tel que tout A-module projectif soit libre; alors A est cohérent, et même uniformément cohérent. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a* $\ker(n \to A) \leqslant n$, *et même* $\ker(n \to A) = n - 1$ *si A est intègre.*

Démonstration. Soit $f : L \to A$ un A-homomorphisme non nul, dont la source L est libre de rang $n \geqslant 1$. Comme gld $A \leqslant 2$, la suite exacte $0 \to \ker f \to L \xrightarrow{f} A \to A/f(L) \to 0$ prouve que $\ker f$ est projectif, donc libre, donc de rang $\leqslant n$.

Si A est intègre, $\ker f$ est un sous-module libre de A^{n-1} (Lemme 4), et $\ker(n) = n - 1$ (la valeur $n - 1$ est en effet atteinte par la projection canonique $A^n = A^{n-1} \oplus A \to A$).

COROLLAIRE 1. *L'anneau des polynômes $D[X]$, en une indéterminée, sur un anneau principal D est uniformément cohérent.*

En effet, d'après [11] et [2], tout $D[X]$-module projectif est libre, et $\operatorname{gld}(D[X]) = 1 + \operatorname{gld} D \leqslant 1 + 1$.

COROLLAIRE 2. *L'anneau des polynômes $K[X, Y]$ en deux indéterminées sur un corps commutatif K est uniformément cohérent, avec les uniformisantes* $\ker(n) = n - 1$, $p \cap q \leqslant p + q - 1$.

Nous retrouvons ainsi $1 \cap 1 = 1$, qui tient à ce que cet anneau est factoriel. Nous avons $1 \cap r = r$, mais nous ignorons la valeur exacte de $p \cap q$, en général.

PROPOSITION 15. *Une condition suffisante pour qu'un anneau commutatif et* *cohérent A soit uniformément cohérent, est que sa dimension homologique* faible *globale* wgd A *soit* $\leqslant 2$, *et que tout module projectif* de type fini *soit libre.*

La notion de dimension faible (ou "Tor-dimension") a été introduite par Cartan et Eilenberg ([4], Chap. VI, exerc. 3): on l'obtient en remplaçant "Ext" par "Tor," projectif par plat, anneau semi-simple par anneau absolument plat, etc. Comme un module projectif est plat, la dimension faible globale est inférieure (parfois strictement) à la dimension homologique globale ordinaire: la proposition 15 est une généralisation du théorème 2.

La démonstration de la proposition 15 débute comme celle du théorème 2, mais ici, la suite exacte $0 \to \ker f \to L \to A \to A/f(L) \to 0$ prouve seulement la platitude de $\ker f$. L'anneau A étant supposé cohérent, le module libre L est cohérent (Prop. 9) et $\ker f$ est de type fini, donc de présentation finie. Le module $\ker f$ est donc projectif comme module plat de présentation finie (cf. [5]), ce qui nous ramène à la démonstration du théorème 2.

THÉORÈME 3. *Tout anneau commutatif noethérien de dimension homologique globale* $\leqslant 2$ *est uniformément cohérent. Pour tout entier n on a* $\ker(n) \leqslant n + 2$, *et même* $\ker(n) \leqslant n + 1$ *si l'anneau est intègre.*

Démonstration. Comme précédemment, nous partons d'un A-homomorphisme non nul $f: L \to A$ (A est l'anneau, L est libre de rang fini $n \geqslant 1$), et nous montrons que son noyau K est projectif de type fini. Si A est intègre, K est sous-module d'un module libre M de rang $n - 1$ (Lemme 4). Pour tout idéal maximal $\mathbf{M}$ de A, le localisé $K_{\mathbf{M}}$ de K en $\mathbf{M}$ est un $A_{\mathbf{M}}$-module libre de rang fini $r_{\mathbf{M}}$. Comme K est un sous-module de L (respectivement de M, si A est intègre), $K_{\mathbf{M}}$ s'identifie à un sous-$A_{\mathbf{M}}$ module de $L_{\mathbf{M}}$ (resp. de $M_{\mathbf{M}}$), qui est libre de rang n (resp. de rang $n - 1$). Donc $r_{\mathbf{M}} \leqslant n$ (resp. $r_{\mathbf{M}} \leqslant n - 1$). Dans [6], Forster a démontré qu'un module projectif de type fini K sur un anneau noethérien A peut être engendré par $(d + \sup(r_{\mathbf{M}}))$ éléments, où d désigne la dimension de A au sens de Krull, et où la borne supérieure des $r_{\mathbf{M}}$ est prise pour tous les idéaux maximaux $\mathbf{M}$ de A. J. P. Serre a démontré dans [10] que pour un anneau noethérien A de dimension homologique globale finie, on l'égalité des dimensions: $d = \operatorname{gld} A$. Ici, nous avons donc $d \leqslant 2$, et $\sup(r_{\mathbf{M}}) \leqslant n$ (resp. $\leqslant n - 1$); K peut donc être engendré par $n + 2$ (resp. $n + 1$) éléments. C.Q.F.D.

COROLLAIRE. *Soit D un anneau principal, P l'anneau des polynômes sur D, S un système multiplicatif de P. L'anneau de fractions $A = S^{-1}(P)$ est uniformément cohérent.*

En effet A est noethérien, et d'après [1], $\operatorname{gld} A \leqslant \operatorname{gld} P = 2$. Ce corollaire s'applique à l'anneau $\mathbf{\Lambda}$ des "scalaires médiaux" de [13].

5. Polynomes sur un Anneau Cohérent

Soit A un anneau dont l'anneau $A[X]$ des polynômes est cohérent. Alors $A \simeq A[X]/(X)$ est cohérent (Prop. 14, Cor. 1). Quant à la réciproque, nous montrons dans ce paragraphe que, sauf dans certains cas simples, l'anneau des polynômes $A[X]$ d'un anneau *uniformément* cohérent A peut ne pas être cohérent. Nous montrons aussi un cas où A et $A[X]$ sont uniformément cohérents, sans que l'anneau des séries formelles $A[[X]]$ soit cohérent.

Proposition 16. *Pour que tout anneau de polynômes sur un anneau donné A soit cohérent, il suffit que tout anneau de polynômes en un nombre fini d'indéterminées (à coefficients dans A) soit cohérent.*

Il suffit de remarquer que tout idéal de type fini, dans un anneau de polynômes, ne fait intervenir, dans ses générateurs, qu'un nombre fini d'indéterminées.

Corollaire. *L'anneau des polynômes en une famille infinie dénombrable d'indéterminées sur un anneau commutatif noethérien est cohérent (mais non noethérien).*

La proposition suivante, dont la démonstration est esquissée dans [12] (I, th. 22), est l'un des rares exemples où nous sachions dire qu'un anneau de polynômes est cohérent, lorsque l'anneau des coefficients est d'un certain type (non noethérien).

Proposition 17. *L'anneau des polynômes $A[X]$ en une indéterminée, à coefficients dans un anneau commutatif absolument plat A, est cohérent.*

Proposition 18. *Soit $A = \prod_{\alpha \in N} S_\alpha$ l'anneau produit direct d'une famille dénombrable de copies de l'anneau $S = \mathbf{Q}[[t, u]]$ des séries formelles en deux indéterminées à coefficients rationnels. L'anneau A est uniformément cohérent, avec les uniformisantes* $\ker(n) = n$, $p \cap q \leqslant p + q - 1$; *$A$ n'a pas d'éléments nilpotents; A est isomorphe à l'anneau $P[[t, u]]$ des séries formelles en deux indéterminées sur l'anneau absolument plat $P = \mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$. Malgré toutes ces propriétés de A, l'anneau $A[X]$ des polynômes en une indéterminée et à coefficients dans A n'est pas cohérent.*

Cette proposition vaut (ainsi que la démonstration qui suit) en remplaçant $\mathbf{Q}[[t, u]]$ par $\mathbf{Q}[t, u]$, sauf en ce qui concerne l'isomorphisme de A avec $P[[t, u]]$.

Démonstration. Le produit d'anneaux absolument plats $\mathbf{Q}^{\mathbf{N}} = P$ est absolument plat. L'isomorphisme $A \simeq P[[t, u]]$ est évident, ainsi que l'absence de nilpotents dans A (il n'y en a pas dans S). L'anneau S est uniformément cohérent (Th. 1, Cor. et Th. 2, Cor. 2), avec les uniformisantes $\ker(n) = n - 1$ et $p \cap q \leqslant p + q - 1$. D'après la proposition 6, l'anneau produit A est uniformément cohérent, et, pour tout $n \geqslant 1$, $\ker(n) \leqslant \sup(n, n - 1) = n$. On constate directement que $\ker(n)$ *égale* n, et que $p \cap_A q \leqslant p + q - 1$.

Montrons maintenant que $A[X]$ n'est pas cohérent. Soient a, b, c, d les éléments de A dont les $\alpha^{\text{ièmes}}$ coordonnées sont, respectivement: t, $-u$, tu^α, $t^\alpha - 2u^\alpha$; et soit $\mathbf{I}$ l'intersection des deux idéaux suivants de $A[X]$: $(a + bX)A[X]$ et $cA[X] + dA[X]$.

Si $A[X]$ était cohérent, $\mathbf{I}$ serait de type fini, comme intersection d'idéaux de type fini. L'idéal $\mathbf{I}_\infty$ de A des termes constants des polynômes de $\mathbf{I}$ serait alors de type fini. Mais nous avons $\mathbf{I}_\infty = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathbf{I}_n$, où $\mathbf{I}_n$ est l'idéal de A des termes constants des polynômes de $\mathbf{I}$ de degré $\leqslant n$. La suite croissante d'idéaux de A, ${}_0\mathbf{I} \subset \mathbf{I}_1 \subset \cdots \subset \cdots \subset \mathbf{I}_n \subset \cdots$, serait donc stationnaire. Ceci est impossible, car le lemme 6 montre que pour tout $\alpha \geqslant 4$, l'élément de A dont la $\alpha^{\text{ième}}$ coordonnée est tu^α, les autres étant nulles, est dans $\mathbf{I}_\alpha$, mais non dans $\mathbf{I}_{\alpha-1}$. C.Q.F.D.

PROPOSITION 19. *Soit A l'anneau des suites stationnaires de rationnels (sous-anneau de $\mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$); A et $A[X]$ sont uniformément cohérents, mais $A[[X]]$ n'est pas cohérent.*

Démonstration. Les anneaux $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}[X]$, A et $A[X]$ admettent l'uniformisante $\varphi \cap \varphi = 1$, ce qui, compte-tenu de leur intègrité, prouve que ce sont des anneaux uniformément cohérents (de plus A est absolument plat, cf. Prop. 17).

Pour démontrer que $A[[X]]$ n'est pas cohérent, on constate que l'annulateur de l'élément $\sum_{n \geqslant 1} e_n X^n$ de $A[[X]]$ n'est pas de type fini, où e_n désigne l'élément suivant de A:

$$(1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots),\ n \text{ fois le nombre } 1.$$

En effet, cet annulateur est la réunion de la suite strictement croissante des idéaux $\epsilon_n A[[X]]$, où ϵ_n désigne l'élément suivant de A:

$$(0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots),\ n \text{ fois le nombre } 1.$$

Les considérations qui suivent sont limitées au cas commutatif, mais cela n'est pas nécessaire. Soit (A_i, f_{ji}) un système inductif filtrant d'anneaux commutatifs. Nous dirons que $A = \varinjlim A_i$ est *limite plate* des A_i, si, pour $i \leqslant j$, A_j est un A_i-module plat (au moyen de $f_{ji} : A_i \to A_j$). La proposition suivante est dans [3]:

PROPOSITION 20. *Une limite plate d'anneaux cohérents est un anneau cohérent.*

Considérons maintenant la "transformation" qui, à un anneau (commutatif) A associe $A[X]$, à un A-module M associe $M[X] = \bigoplus_{n \in N} MX^n$, et enfin à un morphisme f d'anneaux ou de modules associe $f[X]$ défini par

$$f[X]\left(\sum_n x_n X^n\right) = \sum_n f(x_n)\, X^n.$$

En considérant que $M[X]$ est un $A[X]$-module, avec la loi externe

$$\left(\sum_p a_p X^p\right)\left(\sum_q m_q X^q\right) = \sum_{n \in N} \left(\sum_{p-q=n} a_p m_q\right) X^n,$$

on obtient, pour A fixé, un foncteur $M \mapsto M[X]$ de la catégorie des A-modules dans celle des $A[X]$-modules. Ce foncteur est exact, il commute aux limites inductives, il transforme un module libre de rang fini $A_s{}^n$ en un module libre de rang fini $(A[X])_s{}^n$. Ce foncteur transforme donc un module plat en un module plat ([8], Cor. 1.5, p. 86).

Si l'anneau A est une limite plate d'anneaux A_i, l'anneau de polynômes $A[X]$ est donc limite plate des $A_i[X]$. Si tous les A_i sont noethériens, $A[X]$ est limite plate des anneaux noethériens $A_i[X]$; puis $A[X, Y]$ est limite plate des anneaux noethériens $A_i[X, Y]$, etc.

PROPOSITION 21. *Soit A une limite plate d'anneaux noethériens (commutatifs). Tout anneau de polynômes $A[(X_l)_{l \in L}]$, en un nombre quelconque d'indéterminées X_l, à coefficients dans A, est limite plate d'anneaux noethériens, donc cohérent.*

En effet, $A[(X_l)_{l \in L}]$ est limite inductive plate des $A[(X_l)_{l \in K}]$, où K décrit l'ensemble des parties finies de L. Chacun de ces $A[(X_l)_{l \in K}]$ est limite plate d'anneaux noethériens $A_i[(X_l)_{l \in K}]$, et nous utilisons la transitivité des limites inductives pour conclure.

La proposition ci-dessus, et l'existence d'un anneau uniformément cohérent A dont l'anneau des polynômes $A[X]$ n'est pas cohérent (Prop. 18), prouvent qu'il existe des anneaux cohérents, et même uniformément cohérents, qui ne peuvent pas être écrits comme limites inductives plates d'anneaux noethériens.

REFERENCES

1. M. AUSLANDER AND D. BUCHSBAUM, Homological dimension in local rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **85** (1957), 390–395.
2. H. BASS, Big projective modules are free, *Illinois J. Math.* **7** (1963), 24–31.

3. N. Bourbaki, Algèbre Commutative: I. Modules plats, II. Localisation, VI. Valuations, *Act. Sci. Ind.* (1961).
4. H. Cartan and S. Eilenberg, "Homological Algebra," Princeton Univ. Pres, Princeton, N. J., 1956.
5. S. U. Chase, Direct products of modules, *Trans. Amer. Math. Soc.* **97** (1960), 457–473.
6. O. Forster, Ueber die Anzahl der Erzeugenden eines Ideals in einem Noetherschen Ring, *Math. Z.* 84 (1964), 80–87.
7. M. E. Harris, Some results on coherent rings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **17** (1966), 474–479.
8. D. Lazard, Autour de la platitude, *Bull. Soc. Math. France* **97** (1969), 81–128.
9. P. Samuel, "Séminaire d'Algèbre Commutative," 1968–69, Paris, Secrétariat mathématique.
10. J.-P. Serre, Sur la dimension homologique des anneaux et modules noethériens, *Proc. Symp. Alg. Numb. Theory Tokyo* (1956), 175–189.
11. C. S. Seshadri, Triviality of vector bundles over the affine space K^2, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **44** (1958), 456–458.
12. J.-P. Soublin, Notes aux *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A* **267** (1968), Anneaux cohérents, p. 183–186; Anneaux uniformément cohérents, p. 205–208; Un anneau cohérent dont l'anneau des polynômes n'est pas cohérent, p. 241–243; Conditions suffisantes pour qu'un anneau soit uniformément cohérent, p. 497–499.
13. J.-P. Soublin, "Étude algébrique de la notion de moyenne," Thèse, Paris (à paraître).