JOURNAL OF ALGEBRA **184,** 516–537 (1996)
ARTICLE NO. 0272

Faisceaux caractères sur les groupes non connexes

M. Eftekhari

LAMIFA, Université de Picardie, Jules Verne, 33, rue Saint-Leu, 80029 Amiens Cedex, France

Communicated by J. Tits

INTRODUCTION

Soit G un groupe algébrique réductif connexe sur $\overline{\mathbb{F}}_q$, muni d'une $\mathbb{F}_q$-structure donnée par l'endomorphisme de Frobenius F et soit σ: $G \xrightarrow{\sim} G$ un automorphisme semi-simple, d'ordre fini et commutant à F. Soit T un tore maximal de G, stable par F et par σ et qui est inclus dans un sous-groupe de Borel B stable par σ.

Nous considérons le groupe non connexe $G \rtimes \langle \sigma \rangle$ ou plus précisément la composante connexe $G.\sigma$. Nous démontrons une formule de caractère pour les fonctions caractéristiques des faisceaux pervers sur $G.\sigma$ induits à partir des systémes locaux kummériens et T-équivariants (pour la conjugaison) sur $T.\sigma$. La démonstration suit celle du cas connexe de [Lus2, I, 8.5] ou plutôt la version qu'en donnent Mars et Springer en [MS, 8]. Par la suite nous comparons cette formule avec la formule du caractère pour le foncteur de Deligne-Lusztig généralisé $R_{T.\sigma}^{G.\sigma}$ (voir [DM2]). Nous en déduisons une égalité analogue à celle de [Lus4, 9.2] reliant les fonctions caractéristiques des faisceaux pervers induits à l'induction de Deligne-Lusztig généralisée. Utilisant cette dernière égalité on démontre un analogue partiel de la conjecture de Lusztig dans le cas d'un groupe connexe (démontrée par T. Shoji [Sh1] et [Sh2]) affirmant que les fonctions caractéristiques des faisceaux caractères sont ''essentiellement'' les mêmes que les ''almost-characters.'' Notre analogue concerne les faisceaux caractères unipotents de la série principale.

Dans la deuxième section nous démontrons une formule précisant l'effet de la descente de Shintani $\mathrm{Shi}_{F,\sigma^{-1}F}$ sur les fonctions caractéristiques des faisceaux pervers F-stables et G-équivariants (pour la conjugaison) sur

0021-8693/96 $18.00

$G.\sigma$ (ici σ n'est pas nécessairement semi-simple). Ensuite se servant de cette formule et des résultats du premier section nous démontrons que les foncteurs $R_{T.\sigma}^{G.\sigma}$ et $\mathrm{Shi}_{F,\, \sigma^{-1}F}$ commutent.

I. CALCUL DE LA FORMULE DE CARACTERE

I.0. *Notation*

Soit G un groupe algébrique réductif connexe sur $\overline{\mathbb{F}}_q$. Soit σ un endomorphisme de G. Nous noterons ${}^{\sigma}x$ l'image de $x \in G$ par σ et G^{σ} l'ensemble des points fixes de G par σ. Pour $g \in G$ nous noterons g l'automorphisme ad g de G, ce qui nous aménera à écrire ${}^{g}x$ pour gxg^{-1} et ${}^{g}G'$ pour $gG'g^{-1}$ où $G' \subset G$ est un sous-ensemble de G. Nous noterons par ailleurs $C_G(g)$ le centralisateur de g dans G et $C_G^{\circ}(g)$ sa composante neutre. Pour T un tore maximal de G stable par σ on note $W = N_G(T)/T$ le groupe de Weyl de G et W^{σ} l'ensemble des points de W fixes par σ.

Pour $g \in G$ on note $g = g_s g_u$ la décomposition de Jordan d'un élément de G.

Pour $\mathscr{L}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-système local sur une sous-variété Y de G on note $\mathrm{IC}(\overline{Y}, \mathscr{L})$ le complexe de cohomologie d'intersection de l'adhérance $\overline{Y}$ à coefficient dans $\mathscr{L}$. Si on décale ce complexe de $\dim Y$ on trouve un faisceau pervers sur $\overline{Y}$ qu'on appelle l'extension perverse de $\mathscr{L}$. Pour $y \in Y$ on note $\mathscr{L}_u$ la fibre en y de $\mathscr{L}$. Supposons que G est muni d'une $\mathbb{F}_q$-structure donnée par l'endomorphisme de Frobenius F. Supposons que Y est F-stable et le système local $\mathscr{L}$ est F-stable et muni d'un isomorphisme $\varphi\colon F^*\mathscr{L} \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}$, la fonction caractéristique de $\mathscr{L}$ notée $\chi_{\mathscr{L},\,\varphi}\colon Y^F \to \overline{\mathbb{Q}}_l$ est définie par $\chi_{\mathscr{L},\,\varphi}(y) = \sum_i (-1)^i \mathrm{Trace}(\varphi_y, \mathscr{L}_y)$. On définit de le même manière la fonction caractéristique d'un faisceau pervers F-stable.

I.1

Soit G un groupe algébrique réductif connexe sur $\overline{\mathbb{F}}_q$. Soit L un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique P de G avec la décomposition de Levi $P = U_P \rtimes L$. Un élément h (ou sa classe de conjugaison) d'un groupe semi-simple H est dit isolé si $C_H^{\circ}(h_s)$ n'est contenu dans aucun sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique propre de H. Si H est un groupe réductif on définit une classe isolée de H comme l'image inverse d'une classe isolée par le morphisme $H \to H/Z^{\circ}H$.

Soit Δ une "classe" isolée de L et $\mathscr{F}$ un système local cuspidal sur Δ (pour la définition d'un système local cuspidal voir [Lus1, 2.4]). On note $\Delta_{\mathrm{reg}} = \{l \in \Delta \mid C_G^{\circ}(l_s) \subset L\}$. C'est un ouvert dense de Δ.

Rappelons d'après [Lus2, I, 8.1] le procédé d'induction. Considérons le diagramme suivant:

$$\Delta \xleftarrow{c} \hat{Z} \xrightarrow{\phi} \overline{Z} \xrightarrow{\pi} Z_{L,\Delta}$$

où

$$\hat{Z} = \left\{(g,x) \in G \times G \mid {}^{x^{-1}}g \in \Delta_{\mathrm{reg}}\right\}$$

$$\overline{Z} = \left\{(g,x) \in G \times G/L \mid {}^{x^{-1}}g \in \Delta_{\mathrm{reg}}\right\}$$

$$Z_{L,\Delta} = \bigcup_{x \in G} {}^{x}\Delta_{\mathrm{reg}}$$

$$c(g,x) = {}^{x^{-1}}g; \qquad \phi(g,x) = (g,xL); \qquad \pi(g,xL) = g.$$

Le morphisme c est L-équivariant pour l'action de L sur Δ par conjugaison et l'action de L sur $\hat{Z}$ par la translation sur la deuxième coordonnée. Le système local $c^*\mathscr{F}$ est donc L-équivariant. Le morphisme ϕ est une fibration principale de groupe L, il existe donc un système local bien déterminé $\tilde{\mathscr{F}}$ sur $\overline{Z}$ tel que $\phi^*\tilde{\mathscr{F}} \simeq c^*\mathscr{F}$. Le morphisme π est un revêtement galoisien, d'où $\pi_*(\tilde{\mathscr{F}})$ qu'on note $\mathrm{ind}(\mathscr{F})$ est un système local semi-simple sur $Z_{L,\Delta}$. Notons $M = \mathrm{IC}(\overline{Z}_{L,\Delta}, \mathrm{ind}(\mathscr{F}))[\dim Z_{L,\Delta}]$ le faisceau pervers étendu à G par 0 sur $G - \overline{Z}_{L,\Delta}$.

Définissons d'après [Lus2, II, 8.3] les fonctions de Green. Supposons que la classe isolée Δ soit de la forme $\Delta = Z_L^\circ.C$ où C est une classe unipotente de L. Supposons de plus qu'il existe une $\mathbb{F}_q$-structure sur G donnée par l'endomorphisme de Frobenius F et que L et Δ sont F-stables. Soit $\mathscr{F}_1$ un système local sur C avec un isomorphisme τ_1: $F^*\mathscr{F}_1 \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}_1$. On suppose qu'il existe un système local $\mathscr{F}$ sur Δ tel que $\mathscr{F}_1$ est la restriction de $\mathscr{F}$ à C. On suppose qu'il existe un isomorphisme τ_0: $F^*\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}$ qui étend τ_1. Notons τ': $F^*(\mathrm{ind}(\mathscr{F})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}(\mathscr{F})$ l'isomorphisme obtenu par la remontée de τ_0 à travers le diagramme de l'induction et par τ l'isomorphisme τ: $F^*M \xrightarrow{\sim} M$ qui s'en déduit en passant à l'extension perverse. On définit une fonction sur les élément unipotents de G^F par $Q^G_{L,C,\mathscr{F},\tau_0}(u) = \chi_{M,\tau}(u)$. Cette fonction est bien défini car d'après [Lus2, II, 8.3.2] elle est independente des choix de $\mathscr{F}$ et de τ_0. Ce sont ces fonctions qu'on appelle les fonctions de Green généralisées.

Soit σ un automorphisme d'ordre fini de G. On considère le groupe non connexe $G \rtimes \langle \sigma \rangle$. Soit Σ un sous-ensemble de $G.\sigma$. Suivant [Lus3, 2.3.1] on suppose que le couple (L, Σ) vérifie les conditions suivantes:

(a) Σ normalise L.

(b) Σ est une orbite sous l'action de $Z^\circ(L) \times L$ sur $G.\sigma$ donnée par (z,l): $g \mapsto z.{}^{l}g$.

(c) Pour un (ou tout) $g \in \Sigma$, on a $C_L^\circ(C_L^\circ(g_s)) = Z^\circ(L)$.

LEMME I.1.1. *Pour tout $g \in \Sigma$, $C_G^\circ(C_G^\circ(g_s))$ est un tore de G dont le centralisateur connexe est le plus petit sous-groupe de Levi qui contient $C_G^\circ(g_s)$.*

Démonstration. En effet g_s étant semi-simple, d'après Steinberg [DM2, 1.8] il normalise une paire $(T_1 \subset B_1)$, formée d'un tore maximal T_1 de G et d'un sous-groupe de Borel B_1 contenant T_1. D'après [DM2, 1.8] $C_G^\circ(g_s) \cap T_1 = C_{T_1}^\circ(g_s)$ est un tore maximal du groupe réductif $C_G^\circ(g_s)$ et $C_G^\circ(C_{T_1}^\circ(g_s)) = T_1$. On a $C_G^\circ(C_G^\circ(g_s)) \subset C_G^\circ(C_{T_1}^\circ(g_s)) = T_1$. Le sous-groupe connexe $C_G^\circ(C_G^\circ(g_s))$ de T_1 est donc un sous-tore de T_1. D'autre part $C_G^\circ(C_G^\circ(C_G^\circ(g_s)))$ est un sous-groupe de Levi qui contient $C_G^\circ(g_s)$ et pour tout sous-groupe de Levi L_1 contenant $C_G^\circ(g_s)$ on a $Z^\circ(L_1) \subseteq C_G^\circ(C_G^\circ(g_s))$, i.e., $L_1 \supset C_G^\circ(C_G^\circ(C_G^\circ(g_s)))$. ∎

Nous posons $\Sigma_{\mathrm{reg}} = \{g \in \Sigma \mid C_G^\circ(C_G^\circ(g_s)) = Z^\circ(L)\}$.

Remarquons que, comme dans le cas des groupes connexes, modulo une condition sur la caractéristique de $\mathbb{F}_q$, les faisceaux caractères de $G.\sigma$ sont tous obtenus par induction de systèmes locaux sur les Σ du type ci-dessus [Lus2, I, 4.4.a].

I.2

Dans toute la suite on s'intéresse au cas où $L = T$ est un tore maximal inclus dans un sous-groupe de Borel B avec la décomposition de Levi $B = U \rtimes T$. On suppose que σ est semi-simple et que T et B sont σ-stables.

LEMME I.2.1. *À conjugaison près par un élément de $N_G(T)$, un couple (T, Σ) vérifiant les conditions (a), (b), (c) ci-dessus et tel que Σ_{reg} est non vide est de la forme $(T, T.\sigma)$.*

Démonstration. D'après le lemme I.1.1 on voit que $\Sigma_{\mathrm{reg}} = \{g \in \Sigma \mid C_G^\circ(g_s) \subset T\}$. Soit $g \in \Sigma_{\mathrm{reg}}$. Comme σ est semi-simple g_u est dans G. Or g_s étant semi-simple, il normalise une paire $(T_1 \subset B_1)$, formée d'un tore maximal T_1 de G et d'un sous-groupe de Borel B_1 contenant T_1. D'après [DM2, 1.8] $C_G(g_s)/C_G^\circ(g_s)$ ne contient que des éléments semi-simples et on a donc $g_u \in C_G^\circ(g_s)$. Comme $C_G^\circ(g_s) \subset T$ on a $g_u = 1$. Ainsi $g = g_s$ est semi-simple et $g \in N_{G.\sigma}(T_1 \subset B_1)$. Comme $C_{T_1}^\circ(g) \subset C_G^\circ(g) \subset T$ on a $T_1 = C_G^\circ(C_{T_1}^\circ(g)) \supset T$. On a donc $T = T_1$. Il existe donc $n \in N_G(T)$ tel que $B_1 = {}^nB$ et on a $n^{-1}gn = t.\sigma$ avec $t \in T$ car l'élément ${}^{n^{-1}}g \in N_{G.\sigma}(T \subset B) = N_G(T \subset B).\sigma = T.\sigma$, L'élément n dépend à priori du choix de $g \in \Sigma_{\mathrm{reg}}$, mais comme Σ est une orbite sous l'action de $T \times T$ par conjugaison et translation, l'élément n ne dépend pas de g. Enfin Σ_{reg} étant ouvert dense dans Σ on a le résultat. ∎

On considère le diagramme d'induction suivant:

$$(T.\sigma)_{\mathrm{reg}} \xleftarrow{\alpha} \hat{Y} \xrightarrow{\beta} \tilde{Y} \xrightarrow{\pi} Y \qquad (*)$$

où

$$\hat{Y} = \left\{ (g, x) \in G.\sigma \times G \,|\, {}^{x^{-1}}g \in (T.\sigma)_{\mathrm{reg}} \right\}$$

$$\tilde{Y} = \left\{ (g, xT) \in G.\sigma \times G/T \,|\, {}^{x^{-1}}g \in (T.\sigma)_{\mathrm{reg}} \right\}$$

$$\alpha(g, x) = {}^{x^{-1}}g;\ \beta(g, x) = (g, xT);\ \pi(g, xT) = g.$$

$Y = \bigcup_{x \in G} {}^{x}(T.\sigma)_{\mathrm{reg}}$ est une sous-variété lisse, irréductible de $G.\sigma$ de dimension $\dim G$.

Un système local $\mathscr{L}_1$ sur T est dit kummérien s'il est de rang un et tel qu'il existe un entier n tel que $\mathscr{L}_1^{\otimes n}$ soit trivial. Soit $\mathscr{L}$ l'image inverse de $\mathscr{L}_1$ par la bijection naturelle $T.\sigma \to T$. C'est un système local sur $T.\sigma$ qu'on appelle kummérien. Supposons de plus que $\mathscr{L}_1$ soit T-équivariant pour l'action de T sur lui-même par σ-conjugaison. Ceci est équivalent de dire que $\mathscr{L}$ est T-équivariant pour l'action de T sur $T.\sigma$ par conjugaison. Par les même raisonnements que dans le diagramme d'induction du cas connexe il existe un système local bien déterminé $\tilde{\mathscr{L}}$ sur $\tilde{Y}$ tel que $\alpha^*(\mathscr{L}|_{(T.\sigma)_r}) \simeq \beta^*(\tilde{\mathscr{L}})$. Le morphisme π est un revêtement galoisien de groupe W^σ (pour $w \in W^\sigma$ de représentant n, l'action sur $\tilde{Y}$ est donnée par $(g, xT) \mapsto (g, xn^{-1}T)$). Le système local $\pi_!(\tilde{\mathscr{L}})$ noté $\mathrm{Ind}(\mathscr{L})$ est donc semi-simple.

On note $K = \mathrm{IC}(\bar{Y}, \mathrm{Ind}\,\mathscr{L})[\dim Y]$ le faisceau pervers sur $G.\sigma$ (notons que d'après [Lus3, 2.3.6] $\bar{Y} = G.\sigma$). Supposons que l'automorphisme σ commute à l'endomorphisme de Frobenius F. Supposons de plus que T et $\mathscr{L}$ soient F-stables avec un isomorphisme φ: $F^*\mathscr{L} \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}$. En remontant φ par le diagramme d'induction on obtient un isomorphisme ϕ': $F^*(\mathrm{Ind}(\mathscr{L})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}(\mathscr{L})$. Prenons l'extension perverse de ϕ' pour en déduire un isomorphisme ϕ: $F^*K \xrightarrow{\sim} K$.

Fixons un élément semi-simple $s \in G^F.\sigma$. Pour tout $x \in G^F$ tel que ${}^{x^{-1}}s \in T.\sigma$, $C^\circ_{{}^xT}(s)$ est un tore maximal F-stable de $C^\circ_G(s)$. On définit le morphisme h_x: $C^\circ_{{}^xT}(s) \mapsto T.\sigma$ par $h_x(t) = {}^{x^{-1}}(st)$. De I.2.2 à I.2.8 nous allons démontrer la formule de caractère suivante:

THÉORÈME I.2.2. *Pour tout $u \in (C^\circ_G(s))^F$ on a,*

$$\chi_{K,\sigma}(su) = \lambda \sum_{\substack{x \in G^F \\ x^{-1}sx \in T.\sigma}} |C^\circ_{{}^xT}(s)^F| Q^{C^0_G(s)}_{C^0_{{}^xT}(s), \{1\}, h_x^*(\mathscr{L})_1, h_x^*(\varphi)_1}(u)$$

où $\lambda = (-1)^{\dim G - \dim C^\circ_G(s)} |C^\circ_G(s)^F|^{-1} \cdot |T^F|^{-1}$.

Commençons par démontrer deux lemmes.

LEMME I.2.3. *Pour* $l = t.\sigma v \in T.\sigma.U$ $(l = l_s l_u)$, l_s *est conjugué par un élément* $u \in U$ *à* $t.\sigma$.

Démonstration. D'après [DM2, 1.3], $l_s \in {}^u(T.\sigma)$ pour un certain $u \in U$. Écrivons $l_s = {}^u(h.\sigma)$, d'où $l_s \in h.\sigma U$. D'autre part $l = t.\sigma v$, d'où $l_s \in t.\sigma U$. On a alors $h = t$ et $l_s = {}^u(t.\sigma)$. ∎

LEMME I.2.4. *Il existe un ouvert* V *de* $C_G^\circ(s)$ *contenant* 1 *et vérifiant les conditions suivantes*:

1. *Pour tout* $g \in C_G^\circ(s)$ *on a* ${}^gV \subset V$.
2. *L'élément* v *appartient à* V *si et seulement si sa partie semi-simple* v_s *appartient à* V (*en particulier, tout élément unipotent de* $C_G^\circ(s)$ *est dans* V).
3. $F(V) = V$.
4. *Pour* $x \in G$, $g \in V$, *si* ${}^{x^{-1}}(sg) \in T.\sigma$ (*resp.* ${}^{x^{-1}}(sg) \in B.\sigma$) *alors* ${}^{x^{-1}}s \in T.\sigma$ (*resp.* ${}^{x^{-1}}s \in B.\sigma$).

Démonstration. On considère $G \rtimes \langle\sigma\rangle$ comme plongé dans $H = GL_n(\overline{\mathbb{F}}_q)$ en tant que sous-groupe fermé défini sur $\mathbb{F}_q$. On considère l'ensemble $V_1 = \{h \in H \mid C_H(h_s) \subset C_H(s)\}$ qui est ouvert dans H et contient s. On pose $V = s^{-1}V_1 \cap C_G^\circ(s)$. C'est un ouvert de $C_G^\circ(s)$ contenant 1 et vérifiant les conditions (1), (2), (3). De plus pour $g \in V$ on a $C_G(sg_s) \subset C_G(s)$.

Vérifions la condition (4). Soient $x \in G$, $g \in V$ tels que ${}^{x^{-1}}(sg) \in T.\sigma$. On a $sg \in {}^x(T.\sigma)$. Si $g = g_s g_u$ est la décomposition de Jordan de g, $sg = (sg_s)g_u$ est la décomposition de Jordan de sg. Comme ${}^x(T.\sigma)$ ne contient que des éléments semi-simples on a $g_u = 1$. D'autre part $sg \in N$ $({}^xT \subset {}^xB)$, d'où ${}^x(T \rtimes \langle\sigma\rangle) \cap C_G^\circ(sg)$ est un tore maximal de $C_G^\circ(sg)$ [DM2, 1.8]. Par hypothèse $g \in C_G^\circ(s)$, il appartient donc à un tore maximal de $C_G^\circ(s)$ car il est semi-simple. Ce tore commute à g et à s, donc est contenu dans $C_G(sg)$ et, étant connexe est contenu dans $C_G^\circ(sg)$. Donc g est un élément de $C_G^\circ(sg)$ qui est central (ceci résulte de l'hypothèse $C_G(sg) \subset C_G(s)$). Donc g appartient à tout tore maximal de $C_G^\circ(sg)$, en particulier $g \in {}^x(T \rtimes \langle\sigma\rangle)$ ce qui implique $s \in {}^x(T \rtimes \langle\sigma\rangle)$.

Soit maintenant $x \in G$, $g \in V$ tel que ${}^{x^{-1}}(sg) \in B.\sigma$. D'après I.2.3, ${}^{x^{-1}}(sg_s)$ est conjugué par $u \in U$ à un élément de $T.\sigma$ On a ${}^{ux^{-1}}(sg_s) \in T.\sigma$. On s'est ramené donc au cas précédent et on a ${}^{ux^{-1}}s \in T.\sigma$. Donc ${}^{x^{-1}}s \in T.\sigma.U$. ∎

Considérons le diagramme commutatif suivant [Lus3, 2.6]:

$$\begin{tikzcd} (T.\sigma)_{\mathrm{reg}} \arrow[d] & \hat{Y} \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & \tilde{Y} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\gamma"'] & Y \arrow[d] \\ T.\sigma & \hat{X} \arrow[l, "\hat{\alpha}"'] \arrow[r, "\hat{\beta}"] & X \arrow[r, "\psi"] & G.\sigma \end{tikzcd} \qquad (**)$$

où

$$\hat{X} = \left\{(g, x) \in G.\sigma \times G \,|\, {}^{x^{-1}}g \in T.\sigma.U\right\}$$

$$X = \left\{(g, xB) \in G.\sigma \times G/B \,|\, {}^{x^{-1}}g \in T.\sigma.U\right\}.$$

$\psi(g, xB) = g$ et $\hat{\alpha}(g, x) =$ composante dans $T.\sigma$ de ${}^{x^{-1}}g$. Les flèches verticales sont les injections évidentes. Notons que d'après [Lus3, 2.3.6] l'adhérence de Y est $G.\sigma$.

La sous-variété $\gamma(\tilde{Y})$ de X est isomorphe à la sous-variété ouverte $\psi^{-1}(Y)$ de X. On peut donc considérer le faisceau pervers $\tilde{K} = \mathrm{IC}(\tilde{Y}, \tilde{\mathscr{L}})[\dim G]$ sur X. On a alors $\hat{\beta}^*(\tilde{K}) \simeq \hat{\alpha}^*(\mathscr{L})[\dim G]$. D'après [Lus3, 2.6], $\psi_!(\tilde{K})$ est un faisceau pervers sur $G.\sigma$, canoniquement isomorphe à K.

Posons $X_V = \psi^{-1}(sV) = \{(sg, xB) \in X \mid g \in V\}$ et $\mathscr{M} = \{x \in G \,|\, {}^{x^{-1}}s \in T.\sigma\}$. Les groupes $C_G^\circ(s)$ et T agissent respectivement par multiplication à gauche et à droite sur $\mathscr{M}$. L'ensemble des doubles classes est fini: Il existe $n \in G$ tel que $s \in {}^n(T.\sigma)$. Appelons M l'ensemble translaté de $\mathscr{M}$ à droite par n^{-1}. On a des actions de $C_G^\circ(s)$ à gauche et de ${}^nT$ à droite sur M et il y a bijection entre ces doubles classes. On peut donc supposer que $s \in T \rtimes \langle\sigma\rangle$. Dans ce cas $\mathscr{M}$ est l'ensemble des ${}^x(T \rtimes \langle\sigma\rangle)$ contenant s, i.e., c'est l'ensemble des "tores" (en utilisant la terminologie de [DM2, déf. 1.2]) qui contiennent s. D'après [DM2, 1.8] ce dernier ensemble est en bijection avec l'ensemble des tores maximaux de $C_G^\circ(s)$. Les classes à gauche sont donc les éléments de $N_{C_G^\circ(s)}(C^\circ_{C_T^\circ(s)}(s))$, d'où les doubles classes sont contenues dans le groupe de Weyle de $C_G^\circ(s)$.

On note Γ l'ensemble de ces doubles classes. De manière analogue on pose $\hat{\mathscr{M}} = \{x \in G \,|\, {}^{x^{-1}}s \in T.\sigma.U\}$. Les groupes $C_G^\circ(s)$ et B agissent respectivement par translation à gauche et à droite sur $\hat{\mathscr{M}}$ et on note $\hat{\Gamma}$ l'ensemble des doubles classes. Montrons que l'application évidente de Γ dans $\hat{\Gamma}$ est une bijection:

Elle est injective car deux classes de Γ qui ont même image dans $\hat{\Gamma}$ proviennent de deux éléments x et xu (pour un $u \in U$) de $\mathscr{M}$. Il faut voir que les classes de x et xu dans Γ sont les mêmes. Par hypothèse on a ${}^{u^{-1}x^{-1}}s \in T.\sigma$ et ${}^{x^{-1}}s \in T.\sigma$. Donc $u^{-1} \cdot {}^{(x^{-1}sx)}u \in T$, ou ${}^{(x^{-1}sx)}u = u$. Ceci signifie que ${}^{x}u$ commute à s. D'après [DM2, 1.8], $C_G(s)/C^\circ_G(s)$ ne contient que des éléments semi-simples; ${}^{x}u$ étant unipotent, appartient donc à $C^\circ_G(s)$. Écrivons $xu = {}^{x}ux$, les classes de x et de xu dans Γ sont donc les mêmes.

Elle est surjective car pour $x \in \hat{\mathscr{M}}$; on a $s \in {}^{x}(B.\sigma)$, d'après (I.2.3) s est conjugué sous ${}^{x}U$ à un élément de ${}^{x}(T.\sigma)$; donc en modifiant x par U à droite on obtient un élément de $\mathscr{M}$. Par cette bijection, à $\mathscr{O} \in \Gamma$ on associe $\hat{\mathscr{O}} \in \hat{\Gamma}$.

Pour $\hat{\mathscr{O}} \in \hat{\Gamma}$ on pose $X_{V,\hat{\mathscr{O}}} = \{(sg, xB) \in X_V \mid x \in \hat{\mathscr{O}}\}$. Montrons que les $X_{V,\hat{\mathscr{O}}}$ forment une partition de X_V et que chque $X_{V,\hat{\mathscr{O}}}$ est une composante connexe de$X$. En effet d'après la condition (4) de lemme I.2.4 les $X_{V,\hat{\mathscr{O}}}$ couvrent X_V. Les orbites de $C^\circ_G(s)$ sur $\{xB \in G/B \mid {}^{x^{-1}}s \in T.\sigma.U\}$ sont connexes. Ce sont des variétés complètes, donc fermées. Le nombre de ces orbites est fini, elles sont donc ouvertes, d'où l'assertion.

Pour chaque $\mathscr{O}$, on choisit un représentant $x_\mathscr{O} \in \mathscr{O}$ tel que $F(x_\mathscr{O}) = x_{F(\mathscr{O})}$ (si l'orbite n'est pas F-stable ceci est toujours possible et si l'orbite est F-estable on peut choisir un représentant F-stable car $C^\circ_G(s) \times T$ est connexe). Rappelons que ${}^{x_\mathscr{O}^{-1}}s \in T.\sigma$, d'où on déduit que $s \in N_{G.\sigma}({}^{x_\mathscr{O}}T \subset {}^{x_\mathscr{O}}B)$. D'après [DM2, 1.8], $C^\circ_{{}^{x_\mathscr{O}}T}(s)$ est un tore maximal de $C^\circ_G(s)$ inclus dans le sous-groupe de Borel $C^\circ_{{}^{x_\mathscr{O}}B}(s)$. Notons $h_\mathscr{O} := h_{x_\mathscr{O}}$ (rappelons que $h_\mathscr{O}$: $C^\circ_{{}^{x_\mathscr{O}}T}(s) \to T.\sigma$ définie par $h_\mathscr{O}(t) = {}^{x_\mathscr{O}^{-1}}(st)$). Le système local $h^*_\mathscr{O}(\mathscr{L})$ est un système local kummérien sur $C^\circ_{{}^{x_\mathscr{O}}T}(s)$. On a le diagramme commutatif suivant analogue pour les groupes connexes du diagramme $(**)$ (voir [Lus2, II, 8.2]).

$$\begin{tikzcd}
\left(C^\circ_{{}^{x_\mathscr{O}}T}(s)\right)_{\mathrm{reg}} \arrow[d] & \hat{Y}_\mathscr{O} \arrow[l, "\alpha'"'] \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, dash] & \tilde{Y}_\mathscr{O} \arrow[r, "\pi_\mathscr{O}"] \arrow[d, "\gamma'"'] & Y_\mathscr{O} \arrow[d, dash] \\
C^\circ_{{}^{x_\mathscr{O}}T}(s) \arrow[r, "\hat{\alpha}'"] & \hat{X}_\mathscr{O} \arrow[r, "\tilde{\beta}'"] & X_\mathscr{O} \arrow[r, "\psi_\mathscr{O}"] & C^\circ_G(s)
\end{tikzcd}$$

où la première ligne est le diagramme d'induction du cas connexe appliqué au groupe $C^\circ_G(s)$ et les flèches verticales sont des injections.

$$\hat{X}_\mathscr{O} = \left\{(g, x) \in C^\circ_G(s) \times C^\circ_G(s) \mid {}^{x^{-1}}g \in C^\circ_{{}^{x_\mathscr{O}}B}(s)\right\}$$

$$X_\mathscr{O} = \left\{(g, xC^\circ_{{}^{x_\mathscr{O}}B}(s)) \in C^\circ_G(s) \times \left(C^\circ_G(s)/C^\circ_{{}^{x_\mathscr{O}}B}(s)\right) \mid {}^{x^{-1}}g \in C^\circ_{{}^{x_\mathscr{O}}B}(s)\right\}.$$

Le morphisme $\psi_\mathscr{O}$ est la projection sur la première composante et $\hat{\alpha}'(g, x) =$ la composante sur $C^\circ_{{}^{x_\mathscr{O}}T}(s)$ de ${}^{x^{-1}}g$. Il existe un système local irréductible $\tilde{\mathscr{L}}_\mathscr{O}$ sur $\tilde{Y}_\mathscr{O}$ tel que $\alpha'^*(h^*_\mathscr{O}(\mathscr{L})|_{(C^\circ_{{}^{x_\mathscr{O}}T}(s))_{\mathrm{reg}}}) \simeq \beta'^*(\tilde{\mathscr{L}}_\mathscr{O})$. Le morphisme γ' induit un isomorphisme entre les variétés $\tilde{Y}_\mathscr{O}$ et $\psi_\mathscr{O}^{-1}(Y_\mathscr{O})$. On peut donc considérer le faisceau pervers $\tilde{K}_\mathscr{O} = \mathrm{IC}(\bar{\tilde{Y}}_\mathscr{O}, \tilde{\mathscr{K}}_\mathscr{O})[\dim C^\circ_G(s)]$ sur

$X_{\mathscr{O}}$. On a alors un isomorphisme $\hat{\beta}'^*(\tilde{K}_{\mathscr{O}}) \simeq \hat{\alpha}'^*(h^*_{\mathscr{O}}(\mathscr{L}))[\dim C^\circ_G(s)]$. Notons $K_{\mathscr{O}} = \mathrm{IC}(C^\circ_G(s), \mathrm{ind}(h^*_{\mathscr{Q}}(\mathscr{L}))$. D'après [Lus2, II, 8.2.3] il y a un isomorphisme canonique $(\psi_{\mathscr{O}})_*(\tilde{K}_{\mathscr{O}}) \simeq K_{\mathscr{O}}$.

Soit j: $V \to sV$ l'isomorphisme évident. Démontrons le théorème suivant.

THÉORÈME I.2.5. $j^*(K|_{sV}) = \bigoplus_{\mathscr{O} \in \Gamma} (K_{\mathscr{O}})|_V[\dim G - \dim C^\circ_G(s)]$.

Démonstration. Posons $X'_{V,\mathscr{O}} = \psi^{-1}_{\mathscr{O}}(V) = \{(g, xC^\circ_{^{x_{\mathscr{O}}}B}(s)) \in X_{\mathscr{O}} \mid g \in V\}$ et démontrons que le morphisme f: $X'_{V,\hat{\mathscr{O}}} \to X_{V,\hat{\mathscr{O}}}$ défini par $f(g, xC^\circ_{^{x_{\mathscr{O}}}B}(s)) = (sg, xx_{\mathscr{O}}B)$ est un isomorphisme.

L'application f est bien définie, car l'élément ${}^{x_{\mathscr{O}}^{-1}x^{-1}}(sg) = {}^{x_{\mathscr{O}}^{-1}}(s.{}^{x^{-1}}g)$ appartient à ${}^{x_{\mathscr{O}}^{-1}}(sC^\circ_{^{x_{\mathscr{O}}}B}(s))$, qui est contenu dans ${}^{x_{\mathscr{O}}^{-1}}(s).B$, lui-même contenu dans $T.\sigma.B = B.\sigma$.

Pour la surjectivité soit $(sg, yB) \in X_{V,\hat{\mathscr{O}}}$. Comme $y \in \hat{\mathscr{O}}$ on peut prendre y de la forme $xx_{\mathscr{O}}$ avec $x \in C^\circ_G(s)$ (x est unique à multiplication à droite par les éléments de ${}^{x_{\mathscr{O}}}B$ près. On utilise les mêmes propriétés que plus haut

pour démontrer que ${}^{x^{-1}}g \in {}^{x_{\mathscr{O}}}B$. De plus ${}^{x^{-1}}g \in C^\circ_G(s)$ et comme $s \in N_{G.\sigma}({}^{x_{\mathscr{O}}}T \subset {}^{x_{\mathscr{O}}B})$ on en déduit que ${}^{x^{-1}}g \in C^\circ_{^{x_{\mathscr{O}}}B}(s)$ [DM2, 1.8]. L'injectivité est évidente. L'application inverse se déduit du morphisme de variétés qui au sous-group de borel ${}^{xx_{\mathscr{O}}}B$ associe le sous-groupe de Borel ${}^{xx_{\mathscr{O}}}B \cap C^\circ_G(s)$ de $C^\circ_G(s)$.

On considère le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
C^\circ_{^{x_{\mathscr{O}}}T}(s) \arrow[d, "h_{\mathscr{O}}"'] & \hat{X}_{\mathscr{O}} \arrow[l, "\hat{\alpha}'"'] \arrow[r, "\hat{\beta}'"] \arrow[d, "\delta"] & X_{\mathscr{O}} \arrow[r, "\psi_{\mathscr{O}}"] \arrow[d, "\delta'"] & C^\circ_G(s) \arrow[d, "j"] \\
T.\sigma & \hat{X} \arrow[l, "\hat{\alpha}"'] \arrow[r, "\hat{\beta}"] & X \arrow[r, "\psi"] & G.\sigma
\end{tikzcd} \qquad (***)$$

où les flèches verticales sont des plongements et $\delta(g, x) = (sg, xx_{\mathscr{O}})$, $\delta'(g,x(C^\circ_{^{x_{\mathscr{O}}}B}(s)) = (sg, xx_{\mathscr{O}}B)$, $j(g) = sg$.

La commutativité des deux carrés de droite est évidente. Pour le carré de gauche soit $(g, x) \in \hat{X}_{\mathscr{O}}$, on a ${}^{x^{-1}}g \in C^\circ_{^{x_{\mathscr{O}}}B}(s)$. Écrivons ${}^{x^{-1}}g = t.u$ on a $h_{\mathscr{O}}(t) = {}^{x_{\mathscr{O}}^{-1}}(st)$. Pour $y \in T.\sigma.U$ notons $p_{T.\sigma}(y)$ la composante de y dans $T.\sigma$. On a $p_{T.\sigma}({}^{x_{\mathscr{O}}^{-1}x^{-1}}(sg)) = p_{T.\sigma}({}^{x_{\mathscr{O}}^{-1}}(stu)) = {}^{x_{\mathscr{O}}^{-1}}(p_{^{x_{\mathscr{O}}}(T.\sigma)}(stu)) = {}^{x_{\mathscr{O}}^{-1}}(st)$ (rappelons que $t \in C^\circ_{^{x_{\mathscr{O}}}T}(s)$).

On restreint la première ligne à l'ouvert V. Le morphisme δ' induit l'isomorphisme f: $X'_{V,\hat{\mathscr{O}}} \to X_{V,\hat{\mathscr{O}}}$. Nous avons $K|_{sV} = \psi_!(\tilde{K}|_{X_V})$ (appliquer le théorème de changement de base pour un morphisme propre au carré cartésien formé par ψ et les deux plongements $X_V \hookrightarrow X$ et $sV \hookrightarrow G.\sigma$). Par un raisonnement analogue on a $K_{\mathscr{O}}|_V = \psi_{\mathscr{O}!}(\tilde{K}_{\mathscr{O}}|_{X'_{V,\hat{\mathscr{O}}}})$. On a un isomorphisme $f^*(\tilde{K}|_{X_{V,\hat{\mathscr{O}}}})[\dim C^\circ_G(s) - \dim G] \simeq \tilde{K}_{\mathscr{O}}|_{X'_{V,\hat{\mathscr{O}}}}$. Appliquons le théorème de changement de base au carré commutatif suivant pour finir la démonstration.

$$\begin{tikzcd} \coprod_{\mathscr{O}\in\Gamma} X'_{V,\mathscr{O}} \arrow[r, "\coprod_{\mathscr{O}} \psi_{\mathscr{O}}"] \arrow[d, "\iota"'] & V \arrow[d, "j"] \\ X_V \arrow[r, "\psi"'] & sV \end{tikzcd}$$ ■

On pose $\tilde{Y}_V = \tilde{Y} \cap X_V$, $\tilde{Y}_{V,\mathscr{O}} = \tilde{Y} \cap X_{V,\hat{\mathscr{O}}}$. Comme $X_{V,\hat{\mathscr{O}}}$ est ouvert et fermé dans X_V, il en est de même pour $\tilde{Y}_{V,\mathscr{O}}$ par rapport à $\tilde{Y}_V$. Démontrons le lemme suivant:

LEMME I.2.6. (i) *$\tilde{Y}_{V,\mathscr{O}}$ est non vide.*

(ii) *$\tilde{Y}_{V,\mathscr{O}}$ est un ouvert dense de $X_{V,\hat{\mathscr{O}}}$, $\tilde{Y}_V$ est un ouvert dense de X_V et $Y \cap sV$ est un ouvert dense de sV.*

Démonstration. Démontrons que $s^{-1} \cdot {}^{x_{\mathscr{O}}}(T.\sigma)_{\mathrm{reg}}$ est un ouvert dense de ${}^{x_{\mathscr{O}}}T$. Il suffit de démontrer l'inclusion et comme $(T.\sigma)_{\mathrm{reg}}$ est un ouvert dense de $T.\sigma$ le résultat en découle. Pour démontrer l'inclusion utilisons $s^{-1} \in {}^{x_{\mathscr{O}}}(\sigma^{-1}T)$: comme $s \in {}^{x_{\mathscr{O}}}(T.\sigma)$ et ${}^{x_{\mathscr{O}}}(T.\sigma)_{\mathrm{reg}} \subset {}^{x_{\mathscr{O}}}(T.\sigma)$ on a $s^{-1} \cdot {}^{x_{\mathscr{O}}}(T.\sigma)_{\mathrm{reg}} \subset {}^{x_{\mathscr{O}}}T$.

Démontrons que l'intersection de cet ouvert avec $C^{\circ}_{{}^{x_{\mathscr{O}}}T}(s)$ est un ouvert non vide de $C^{\circ}_{{}^{x_{\mathscr{O}}}T}(s)$, donc dense.

Rappelons la propriété suivante [DM2, 1.8]: soit $g \in G \rtimes \langle \sigma \rangle$ un élément semi-simple normalisant une paire $(T \subset B)$, formée d'un tore maximal de G et d'un sous-groupe de Borel B contenant T. Si α est une racine de G relativement à T, si $\lambda \mapsto x_\alpha(\lambda)$ est le sous-groupe à un paramètre correspondant, et si i est le plus petit entier tel que ${}^{g^i}\alpha = \alpha$, on définit $C_{g,\alpha} \in \overline{\mathbb{F}}_q$ par ${}^{g^i}x_\alpha(\lambda) = x_\alpha(C_{g,\alpha}\lambda)$. Alors il existe une surjection naturelle de l'ensemble des orbites sous g vérifiant la condition $C_{g,\alpha} = \pm 1$, sur l'ensemble des racines de $C^{\circ}_G(g)$ relativement à $C^{\circ}_T(g)$. Cette surjection est bijective et tous les $C_{g,\alpha}$ valent 1, sauf si le diagramme de Dynkin de G possède k composantes de type A_{2n} permutées circulairement par g où g^k agit par ‘‘retournement’’ de chacune de ces composantes. Alors, pour toute racine α telle que $\alpha + {}^{g^k}\alpha$ soit une racine les orbites de α et de $\alpha + {}^{g^k}\alpha$ ont même image et $C_{g,\alpha} = -C_{g,\alpha+{}^{g^k}\alpha}$. De plus les $(\alpha + {}^{g}\alpha + \cdots + {}^{g^{i-1}}\alpha)|_{C^{\circ}_T(g)}$ sont des multiples entiers des racines de $C^{\circ}_G(g)$.

Quitte à conjuguer par $x_{\mathscr{O}}^{-1}$ on peut supposer $s \in T.\sigma$. Nous sommes donc ramenés à montrer qu'il existe $t \in C^{\circ}_T(s)$ tel que $st \in (T.\sigma)_{\mathrm{reg}}$, i.e., $C^{\circ}_G(st) \subset T$.

Prenons $t \in C^{\circ}_T(s)$, l'élément st est semi-simple et normalise la paire $(T \subset B)$. On utilise la propriété ci-dessus pour le groupe $C^{\circ}_G(st)$. Appelons admissible les $C_{s,\alpha}$ prenant les valeurs ± 1 sous les conditions de la propriété ci-dessus. On veut donc trouver $t \in C_T^\circ(s)$ tel que pour toute racine α, $C_{st,\alpha}$ ne soit pas admissible, ce qui implique $C_G^\circ(st) = C_T^\circ(st) \subset T$. Or $C_{st,\alpha} = C_{s,\alpha}.\alpha(t).{}^s\alpha(t)\ldots{}^{s^{i-1}}\alpha(t)$. Distinguons deux cas:

(1) $(\alpha + {}^s\alpha + \cdots + {}^{s^{i-1}}\alpha)|_{C_T^\circ(s)} \neq 0$, c'est donc un caractère de $C_T^\circ(s)$ et on peut trouver $t \in C_T^\circ(s)$ tel que pour toute racine α (nombre fini), $\alpha(t).{}^s\alpha(t)\ldots{}^{s^{i-1}}\alpha(t) \neq C_{s,\alpha}^{-1}$. Par conséquent, $C_{st,\alpha}$ n'est pas admissible.

(2) $(\alpha + {}^s\alpha + \cdots + {}^{s^{i-1}}\alpha)|_{C_T^\circ(s)} = 0$. Démontrons alors que $C_{s,\alpha}$ n'est pas admissible. En effet si $C_{s,\alpha}$ était admissible, $(\alpha + {}^s\alpha + \cdots + {}^{s^{i-1}}\alpha)|_{C_T^\circ(s)}$ serait un multiple entier d'une racine de $C_G^\circ(s)$, donc non identiquement nul. Par conséquent $C_{st,\alpha} = C_{s,\alpha}$ n'est pas admissible dans ce cas.

D'autre part, l'intersection de V avec $C^\circ_{{}^{x_\mathscr{O}}T}(s)$ est un ouvert non vide (il contient l'élément neutre), donc dense. Ces deux ouverts denses de $C^\circ_{{}^{x_\mathscr{O}}T}(s)$ se coupent en un point g, d'où $g \in s^{-1}.{}^{x_\mathscr{O}}(T.\sigma)_{\text{reg}}$, i.e., ${}^{x_\mathscr{O}^{-1}}(sg) \in (T.\sigma)_{\text{reg}}$. Le partie (i) est ainsi démontré.

Démontrons le premier point de (ii): rappelons que $X_{V,\hat{\mathscr{O}}}$ est isomorphe à $X'_{V,\hat{\mathrm{O}}} = \psi_\mathscr{O}^{-1}(V)$ ouvert dense de la variété irréductible $X'_\mathscr{O}$, qui est donc irréductible, $\tilde{Y}_{V,\mathscr{O}}$ est un ouvert non vide de $X_{V,\hat{\mathscr{O}}}$ irréductible donc dense. Le deuxième point de (ii) se déduit du premier. Pour le troisième point de (ii) remarquons que V est un ouvert non vide de $C_G^\circ(s)$ donc irréductible; d'après (i), $Y \cap sV$ est un ouvert non vide de sV irréductible, donc dense. ∎

On pose $Y_{V,\mathscr{O}} = \pi(\tilde{Y}_{V,\mathscr{O}})$. On a $Y \cap sV = \bigcup_\mathscr{O} Y_{V,\mathscr{O}}$ et les $Y_{V,\mathscr{O}}$ sont irréductibles et fermés dans $Y \cap sV$. On a $Y_{V,\mathscr{O}} \cap Y_{V,\mathscr{O}'} \neq \emptyset$ si et seulement si $\mathscr{O}$ et $\mathscr{O}'$ sont dans la même orbite pour l'action de W^σ sur Γ et dans ce cas $Y_{V,\mathscr{O}} = Y_{V,\mathscr{O}'}$.

Lemme I.2.7. *$Y_{V,\mathscr{O}}$ est un ouvert de $sY_\mathscr{O}$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que si $sg \in Y_{V,\mathscr{O}}$, alors $g \in Y_\mathscr{O}$. Nous avons alors $x \in C_G^\circ(s)$ tel que ${}^{x_\mathscr{O}^{-1}x^{-1}}(sg) \in (T.\sigma)_{\text{reg}}$ et il faut démontrer que ${}^{x^{-1}}g \in (C^\circ_{{}^{x_\mathscr{O}}T}(s))_{\text{reg}}$. Or ${}^{x_\mathscr{O}^{-1}x^{-1}}(sg) \in (T.\sigma)_{\text{reg}} \Leftrightarrow C_G^\circ({}^{x_\mathscr{O}^{-1}x^{-1}}(sg)) \subset T \Leftrightarrow C_G^\circ({}^{x^{-1}}(sg)) \subset {}^{x_\mathscr{O}}T$. D'où $C^\circ_{C_G^\circ(s)}({}^{x^{-1}}(sg)) = C^\circ_{C_G^\circ(s)}({}^{x^{-1}}g) \subset {}^{x_\mathscr{O}}T$ et le lemme s'ensuit. ∎

Maintenant dans le diagramme $(***)$, restreignons la deuxième ligne à $Y_{V,\mathscr{O}}$. On prend l'image inverse par j de $Y_{V,\mathscr{O}}$ qui est un ouvert de $Y_\mathscr{O} \cap V$. On prend par ailleurs l'image inverse de $\tilde{Y}_{V,\mathscr{O}}$ par δ' et on a le carré commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{\mathcal{O}\in\Gamma} \sigma'^{-1}\big(\tilde{Y}_{V,\mathcal{O}}\big) \arrow[r, "\coprod_{\mathcal{O}\in\Gamma}\pi_{\mathcal{O}}"] \arrow[d, "\iota"'] & j^{-1}(Y\cap sV) \arrow[d, "j"] \\
Y_V \arrow[r, "\pi"] & Y\cap sV
\end{tikzcd}$$

À partir de ce carré commutatif et du théorème de changement de base on obtient comme dans [MS, 8.2.7]:

Proposition I.2.8. $j^*(\mathrm{Ind}(\mathscr{L})|_{Y\cap sV}) \simeq \bigoplus_{\mathcal{O}\in\Gamma} \mathrm{Ind}(h^*_{\mathcal{O}}(\mathscr{L}))|_{j^{-1}(y\cap sV)}$.

La restriction à droite signifie la restriction à $Y_{\mathcal{O}} \cap j^{-1}(Y\cap sV)$ étendue par zéro sur les autres composantes de $j^{-1}(Y\cap sV)$. Notons qu'on peut réécrire cette proposition $j^*(K|_{Y\cap sV}) \simeq \bigoplus_{\mathcal{O}\in\Gamma} K_{\mathcal{O}}|_{j^{-1}(y\cap sV)}[\dim G - \dim C^\circ_G(s)]$. L'isomorphisme du théorème I.2.5 est donc l'extension perverse de celle de la proposition I.2.8.

L'isomorphisme $h^*_{\mathcal{O}}(\varphi)$: $F^*(h^*_{\mathcal{O}}(\mathscr{L})) \xrightarrow{\sim} h^*_{\mathcal{O}}(\mathscr{L})$ induit un isomorphisme $\phi'_{\mathcal{O}}$: $F^*(\mathrm{ind}(h^*_{\mathcal{O}}(\mathscr{L}))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}(h^*_{\mathcal{O}}(\mathscr{L}))$. Par extension perverse on obtient un isomoprhisme $\phi_{\mathcal{O}}$: $F^*K_{\mathcal{O}} \xrightarrow{\sim} K_{\mathcal{O}}$. L'isomorphisme de la proposition I.2.8 est compatible avec ϕ' et $\phi'_{\mathcal{O}}$. Il en est donc de même de l'isomorphisme du théorème I.2.5 par rapport aux ϕ: $F^*(K) \xrightarrow{\sim} K$ et $\phi_{\mathcal{O}}$. Ainsi nous avons un carré commutatif formé par les deux isomorphismes ϕ, $\phi_{\mathcal{O}}$ et l'isomorphisme du théorème I.2.5. Pour un u unipotent commutant à s (donc dans V), on prend les fibres en u dans ce carré commutatif au niveau des faisceaux de cohomologies pour obtenir:

$$\chi_{K,\phi}(su) = \bigoplus_{\substack{\mathcal{O}\in\Gamma\\ F(\mathcal{O})=\mathcal{O}}} (-1)^{\dim G-\dim C^\circ_G(s)}\chi_{K_{\mathcal{O}},\phi_{\mathcal{O}}}(u).$$

Démontrons que $|\mathcal{O}^F| = |C^\circ_G(s)^F|.|T^F|.|C^\circ_{{}^{x_{\mathcal{O}}}T}(s)^F|^{-1}$: Il y a bijection entre les doubles classes $C^\circ_G(s)\setminus\{x\in G\,|\,{}^{x^{-1}}s\in T.\sigma\}/T$ et les doubles classes $C^\circ_G(s)\setminus\{xx_{\mathcal{O}}^{-1}\in G\,|\,{}^{x_{\mathcal{O}}x^{-1}}s\in {}^{x_{\mathcal{O}}}(T.\sigma)\}/{}^{x_{\mathcal{O}}}T$. L'orbite $\mathcal{O}$ correspond par cette bijection à l'orbite de 1. $|\mathcal{O}^F| = |(\text{classe de } 1)^F| = |\{x.t\,|\,x\in C^\circ_G(s)^F, t\in {}^{x_{\mathcal{O}}}T)^F\}|\,/\,|\{x\in C^\circ_{{}^{x_{\mathcal{O}}}T}(s)^F\}|$, d'où le résultat. Ceci termine la démonstration de I.2.2.

I.3. *Une application de la formule du caractère*

Considérons $x\in G^F$ tel que ${}^{x^{-1}}s\in T.\sigma$. Notons $Q^{C^\circ_G(s)}_{C^\circ_{{}^xT}(s)}$ la fonction de Green définie par le foncteur de Deligne-Lusztig (c'est la restriction aux éléments unipotents de G^F de $R^{C^\circ_G(s)}_{C^\circ_{{}^xT}(s)}\theta$ et est indépendant de caractère θ de $C^\circ_{{}^xT}(s)$).

HYPOTHÈSE I.3.1. *Nous supposons l'égalité suivante vérifiée*

$$Q^{C^\circ_G(s)}_{C^\circ_{{}^xT}(s),\{1\},\, h_x^*(\mathscr{L})_1,\, h_x^*(\varphi)_1}(u)$$
$$= (-1)^{\dim C^\circ_{{}^xT}(s)} |C^\circ_{{}^xT}(s)^F|^{-1} Q^{C^\circ_G(s)}_{C^\circ_{{}^xT}(s)}(u) \,.\, \chi_{h_x^*(\mathscr{L}),\, h_x^*(\varphi)}(1).$$

Lusztig a démontré [Lus3, 1.14] que l'hypothèse I.3.1 est satisfaite pour q assez grand. Remarquons que dans [Lus3, 1.14] $\mathscr{L} = \overline{\mathbb{Q}}_l$, mais par [Lus2, II, 8.3.2] la fonction de Green ne dépend pas du système local choisi sur le tore.

Digne et Michel ont défini le foncteur de Deligne-Lusztig $R^{G.\sigma}_{T.\sigma}$ (voir [DM2]).

THÉORÈME I.3.2. *Sous l'hypothèse* I.3.1, *on a*

$$R^{G.\sigma}_{T.\sigma}(\chi_{\mathscr{L},\varphi}) = (-1)^{\dim T} \chi_{K,\phi}.$$

Démonstration. D'après [DM, 2.10 (iii)], on a pour $g \in G^F.\sigma$ de décomposition de Jordan $g = su$,

$$R^{G.\sigma}_{T.\sigma}(\chi_{\mathscr{L},\varphi})(su) = |T^F|^{-1} |C^\circ_G(s)^F|^{-1} \sum_{\substack{x \in G^F \\ x^{-1}sx \in T.\sigma}} Q^{C^\circ_G(s)}_{C^\circ_{{}^xT}(s)}(u)\, \chi_{\mathscr{L},\varphi}(x^{-1}sx).$$

Comparons cette formule avec la formule de I.2.2 compte tenu de l'hypothèse I.3.1. Notons $U_1 = {}^xU \cap C^\circ_G(s)$ le radical unipotent de ${}^xB \cap C^\circ_G(s)$, comme $\dim C^\circ_G(s) = 2\dim(v) + \dim C^\circ_{{}^xT}(s)$ on a $(-1)^{\dim G - \dim C^\circ_G(s) + \dim C^\circ_{{}^xT}(s)} = (-1)^{\dim G} = (-1)^{\dim T}$. On obtient le résultat cherché. ∎

I.4. "*Almost-characters*" *et faisceaux caractères de* $G.\sigma$ *de la série principale*

Nous démontrons maintenant un analogue partiel de la conjecture de Lusztig pour les groupes connexes dans le cas des groupes non connexes.

Reconsidérons le diagramme d'induction $(*)$.

$$(T.\sigma)_r \xleftarrow{\alpha} \hat{Y} \xrightarrow{\beta} \tilde{Y} \xrightarrow{\pi} Y.$$

Notons $\mathscr{W} = \{w \in W^\sigma / w^*(\mathscr{L}) \simeq \mathscr{L}\}$.

Pour $w \in \mathscr{W}$, soit $\gamma_w\colon \tilde{Y} \to \tilde{Y}$ défini par $\gamma_w(g, xT) = (g, xn^{-1}T)$, où n est un représentant dans $N_G(T)$ de w. Soit $\mathscr{A}_w = \operatorname{Hom}(\tilde{\mathscr{L}} \to \gamma_w^*(\tilde{\mathscr{L}}))$. C'est un $\overline{\mathbb{Q}}_l$-espace vectoriel de dimension 1 car $\tilde{\mathscr{L}}$ est un système local irréductible, isomorphe à son image inverse par γ_w. Comme $\pi_*\gamma_w^*(\tilde{\mathscr{L}}) = \mathrm{id}^*\pi_*(\tilde{\mathscr{L}}) = \pi_*(\tilde{\mathscr{L}})$ on a une application linéaire $\mathscr{A}_w \to \operatorname{End}(\pi_*(\tilde{\mathscr{L}}))$. Ceci induit une injection d'algèbres entre l'algèbre $\mathscr{A} = \bigoplus_{w \in \mathscr{W}} \mathscr{A}_w$ (la multiplication est telle que $\mathscr{A}_w.\mathscr{A}_x = \mathscr{A}_{wx}$) et l'algèbre $\mathrm{End}(\pi_*(\tilde{\mathscr{L}}))$. De plus π est un revêtement galoisien de groupe W^σ. Le système local $\pi_*(\tilde{\mathscr{L}})$ est donc semi-simple et la dimension de $\mathrm{End}(\pi_*(\tilde{\mathscr{L}}))$ est égale au nombre des $w \in W^\sigma$ tels que $\gamma_w^*(\tilde{\mathscr{L}}) \simeq \tilde{\mathscr{L}}$. L'injection ci-dessus est donc un isomorphisme d'algèbres.

Remarquons que K étant l'extension perverse de $\pi_*(\tilde{\mathscr{L}})$, on a $\mathrm{End}(K) = \mathrm{End}(\pi_*(\tilde{\mathscr{L}}))$. Pour $w \in \mathscr{W}$ choisissons un vecteur non nul θ_w de $\mathscr{A}_w$.

Supposons que $\mathscr{L}$ est F-stable et muni d'un isomorphisme φ: $F^*\mathscr{L} \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}$. Ceci induit un isomorphisme ϕ: $F^*K \xrightarrow{\sim} K$.

Pour une composante F-stable A de K, notons φ_A: $F^*A \xrightarrow{\sim} A$. Définissons l'isomorphisme σ_A de $\mathrm{Hom}(A, K)$ par $\sigma_A(v) = \phi \circ F^*(v) \circ \varphi_A^{-1}$. Définissons aussi les isomorphismes $\bigoplus_A \mathrm{Hom}(A, K) \otimes A \simeq K$ donné sur une composante de la somme par $v \otimes a \mapsto v(a)$ où la somme porte sur toutes les composantes irréductibles de K et $\bigoplus_A \mathrm{Hom}(A, K) \otimes F^*A \simeq F^*K$ donné sur une composante par $v \otimes b \mapsto F^*(v)(b)$. Par ces deux derniers isomorphismes ϕ correspond à $\sigma_A \otimes \varphi_A$.

Remarquons maintenant que $V_A = \mathrm{Hom}(A, K)$ est un $\mathscr{A}$-module irréductible (l'action est définie par $w.v = (\theta_w)^{-1} \circ v$). Si on change ϕ en $\theta_w \circ \phi$, $\sigma_A \otimes \varphi_A$ change en $\theta_w \circ \sigma_A \otimes \varphi_A$ et par les mêmes raisonnements qu'en [Lus2, II, 10.4.5] on prouve

$$\chi_{A,\varphi_A} = |\mathscr{W}|^{-1} \sum_{w \in \mathscr{W}} \mathrm{Trace}\Big((\theta_w \circ \sigma_A)^{-1}, V_A\Big) \chi_{k,\theta_w \circ \phi}.$$

Pour $z \in G$ vérifiant $z^{-1}\,{}^F z = n^{-1}$ (n un représentant de w) notons $\mathscr{L}^w = \mathrm{ad}(z^{-1})^*(\mathscr{L})$ muni de l'isomorphisme de Frobenius $\varphi^w = \mathrm{ad}(z^{-1})^*(\varphi)$. Notons K^w l'induit de $\mathscr{L}^w$ muni de l'isomorphisme de Frobenius ϕ^w obtenu à partir de φ^w. Par les mêmes raisonnements qu'en [Lus2, II, 10.6.1] on prouve que $\chi_{K,\theta_w \circ \phi} = \chi_{K^w,\phi^w}$ et donc

$$\chi_{A,\varphi_A} = |\mathscr{W}|^{-1} \sum_{w \in \mathscr{W}} \mathrm{Trace}\Big((\theta_w \circ \sigma_A)^{-1}, V_A\Big) \chi_{K^w,\phi^w}.$$

Remarquons qu'en remplaçant φ_A par la restriction de ϕ, on a $\sigma_A = \mathrm{id}$.

Supposons maintenant que $\mathscr{L} = \overline{\mathbb{Q}_l}$. On a $\mathscr{W} = W^\sigma$ et $\pi_*(\overline{\mathbb{Q}_l}) = \bigoplus_{E \in \hat{W}^\sigma} E \otimes \mathscr{L}_E$. Un des systèmes locaux $\mathscr{L}_E$ est le système local trivial. Choisissons les éléments de base θ_w de façon à ce qu'ils agissent par l'identité sur ce système local trivial. On aura alors $\theta_w \theta_x = \theta_{wx}$. On a alors un isomorphisme d'algèbre entre $\overline{\mathbb{Q}_l}[W^\sigma]$ et $\mathscr{A}$ en envoyant w sur θ_w. La décomposition $K = \bigoplus_E E \otimes A_E$ correspond à la décomposition $K \simeq$

$\bigoplus_A V_A \otimes A$ et on a la formule

$$\chi_{A_E,\,\varphi_{A_E}} = |W^\sigma|^{-1} \sum_{w \in W^\sigma} \mathrm{Trace}(w, E)\, \chi_{K^w,\,\phi^w}.$$

D'après le théorème I.3.2, $\chi_{K^w,\,\phi^w} = (-1)^{\dim T} R^{G.\sigma}_{T_w.\sigma}(\mathrm{id})$. Définissons enfin d'après [DM2, 5.1] l'almost-character associé à E par $R_E = |W^\sigma|^{-1} \sum_{w \in W^\sigma} \mathrm{Trace}(w, E) R^{G.\sigma}_{T_w.\sigma}(\mathrm{id})$. D'où

PROPOSITION I.4.1. *Pour q assez grand, $\chi_{A_E,\,\varphi_E} = (-1)^{\dim T} R_E$.*

II. DESCENTE DE SHINTANI DES FAISCEAUX CARACTERES

II.1

Soit H un groupe fini et $\langle F \rangle$ un groupe engendré par F agissant sur H. Soit Γ le produit semi-direct $H \rtimes \langle F \rangle$. On notera $k \mapsto {}^F h$ l'action de F sur H.

Définition II.1.1. Deux éléments $h, k \in H$ sont F-conjugués dans H si hF et kF sont conjugués dans Γ.

Dans ce cas hF et kF seront conjugués par un élément de H. Nous noterons $H/\sim F$ l'ensemble des classes de F-conjugaison dans H. On appelle fonction de F-classe sur H, une fonction constante sur les classes de F-conjugaison. On peut identifier ces fonctions aux restrictions des fonctions centrales sur Γ à la tranche $H.F$.

On applique ceci au cas suivant: soit G un groupe réductif, connexe sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ avec deux $\mathbb{F}_q$-structures données par des morphismes de Frobenius F_1, F_2. Supposons de plus que $F_1F_2 = F_2F_1$. Nous pouvons alors considérer $G^{F_1}/\sim F_2$ et $G^{F_2}/\sim F_1$. Rappelons que le morphisme de Lang, $G \to G$ donné par $x \mapsto x^{-1}.{}^F x$ est surjectif. De plus $x^{-1}.{}^{F_2}x$ appartient à G^{F_1} si et seulement si $x.{}^{F_1}x^{-1}$ appartient à G^{F_2}. On a le résultat suivant [DM1, 7.2]

PROPOSITION II.1.2. *L'application n_{F_1/F_2}: $G^{F_1}/\sim F_2 \to G^{F_2}/\sim F_1$ donnée par $n_{F_1/F_2}(x^{-1}.{}^{F_2}x) = x.{}^{F_1}x^{-1}$ est une bijection.*

Par composition avec cette bijection nous obtenons une application des fonctions de F_1-classe sur G^{F_2} dans les fonctions de F_2-classe sur G^{F_1}. C'est cette application qu'on appelle la descente de Shintani notée Sh_{F_2/F_1}. Par la suite nous considérerons une variante de cette descent définie par $\mathrm{Shi}_{F_2/F_1} = \mathrm{Sh}_{F_2/F_1} \circ i'$, où i' est l'application $i'(f)(x) = f(x^{-1})$.

II.2

Soit G un groupe algébrique, connexe et X une variété algébrique muni d'une action de G. Notons $m: G \times X \to X$ l'action de G sur X définie par $m(g, x) = g.x$ et soit $p_2: G \times X \to X$ la deuxième projection. Soit A un faisceau pervers irréductible, G-équivariant sur X. On a un isomorphisme d'équivariance $\xi: p_2^* A[\dim G] \xrightarrow{\sim} m^*[\dim G]$.

Soit $h: X \to G \times X$ défini par $h(x) = (1, x)$; notons que $m \circ h = p_2 \circ h = \mathrm{id}$. Nous imposons à ξ de vérifier $h^*(\xi) = \mathrm{id}$ (remarquons que $p_2 \circ h = m \circ h = \mathrm{id}$). D'après le lemme suivant cette condition détermine ξ de manière unique.

Lemme II.2.1. *Soit A un faisceau pervers, G-équivariant sur X (A n'est pas nécessairement irréductible). La condition $h^*(\xi) = \mathrm{id}$ détermine ξ de manière unique.*

Démonstration. Soit $\xi': p_2^* A[\dim G] \xrightarrow{\sim} m^* A[\dim G]$ tel que $h^*(\xi') = \mathrm{id}$. Considérons alors $\xi \circ \xi'^{-1}$: $m^* A[\dim G] \xrightarrow{\sim} m^* A[\dim G]$. Le morphisme m est lisse de fibres connexes isomorphes à G. Le foncteur $m^*[\dim G]$ est donc pleinement fidèle. Il existe donc un morphisme $f: A \to A$ tel que $m^*(f) = \xi \circ \xi'^{-1}$. Comme $f = h^* m^*(f) = h^*(\xi \circ \xi'^{-1}) = \mathrm{id}$ on en déduit que $m^*(f) = \xi \circ \xi'^{-1} = \mathrm{id}$, d'où le lemme. ∎

Lemme II.2.2. *Pour tout g_1, $g_2 \in G$ et tout $x \in X$ fixé nous avons la formule $\xi_{g_1 g_2, x} = \xi_{g_1, g_2.x} \circ \xi_{g_2, x}$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer l'égalité suivante:

$$(j \times \mathrm{id}_X)^*(\xi) = (\mathrm{id}_G \times m)^*(\xi) \circ (p_2 \times \mathrm{id}_X)^*(\xi) \tag{1}$$

où j, $p_2: G \times G \to G$ sont respectivement le morphisme produit et la deuxième projection. Ainsi la fibre au point (g_1, g_2, x) donne la solution. Notons que le morphisme de droite de (1) est bien défini car $(m \circ (p_2 \times \mathrm{id}_X) = p_2 \circ (\mathrm{id}_G \times m))$.

Les isomorphismes des deux côtés de (1) sont entre les mêmes faisceaux pervers irréductibles (les morphismes intervenant sont tous lisses de fibres connexes de dimension $\dim G$, d'où l'irréductibilité et $p_2 \circ (p_2 \times \mathrm{id}_X) = p_2 \circ (j \times \mathrm{id}_X)$ et $m \circ (\mathrm{id}_G \times m) = m \circ (j \times \mathrm{id}_X)$ prouvent que ce sont les mêmes faisceaux pervers). L'isomorphisme à gauche de (1) doit être donc μ fois celui de droite, pour un certain $\mu \in \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$. Il suffit de démontrer que $\mu = 1$.

Pour ceci on applique le foncteur $(\mathrm{id}_G \times h)^*$ aux deux côtés de (1) et on utilise les trois égalités $(j \times \mathrm{id}_X) \circ (\mathrm{id}_G \times h) = \mathrm{id}_{G \times X}$; $(\mathrm{id}_G \times m) \circ (\mathrm{id}_G \times h) = \mathrm{id}_{G \times X}$; $(\pi_2 \circ \mathrm{id}_X) \circ (\mathrm{id}_G \times h) = h \circ p_2$ et le fait que $h^*(\xi) = \mathrm{id}$ pour trouver que $\mu = 1$. Remarquons qu'on a la même formule au niveau de chque faisceau de cohomologie. ∎

Soit G et σ comme en I.1. Notons $m: G \times G.\sigma \to G.\sigma$ l'action de G sur $G.\sigma$ par conjugaison et par $p_2: G \times G.\sigma \to G.\sigma$ la deuxième projection. Soit A un faisceau pervers irréductible, G-équivariant sur $G.\sigma$. On a l'isomorphisme d'équivariance (pour l'action de G par conjugaison) ξ: $p_2^*A \xrightarrow{\sim} m^*A$ fixé comme en II.2.1.

Supposons qu'on dispose d'une $\mathbb{F}_q$-structure sur G et que l'endomorphisme de Frobenius correspondant F: $G \to G$ commute à σ. On dispose alors d'un autre endomorphisme de Frobenius $\sigma^{-1}F$: $G \to G$. On considère la bijection $i \circ n_{\sigma^{-1}F/F}$ où i est le morphisme d'inversion dans G et $n_{\sigma^{-1}F/F}$ est comme dans II.1.2 entre les classes de F-conjugaison de $G^{\sigma^{-1}F}$ notées $G^{\sigma^{-1}F}/\sim F$ et identifiés aux classes de conjugaison de $G^{\sigma^{-1}F}.\sigma$ et les $(\sigma^{-1}F)^{-1}$-classes de G^F notées $G^F/\sim(\sigma^{-1}F)^{-1}$ et identifiés aux classes de conjugaisons de $G^F.\sigma$. On a donc l'opérateur $\mathrm{Shi}_{F/\sigma^{-1}F}$ comme en II.1.

Soit donc A un faisceau pervers G-équivariant et F-stable sur $G.\sigma$ muni d'un isomorphisme φ_F: $F^*A \xrightarrow{\sim} A$. Notons alors qu'on dispose d'un autre isomorphisme $\varphi_{\sigma F}$: $(\sigma^{-1})^*F^*A \xrightarrow{\sim} A$ donné par $\varphi_{\sigma F} = \varphi_F \circ F^*j^*(\xi)^{-1}$, où j: $G.\sigma \to G \times G.\sigma$ est donnée par $j(x.\sigma) = ({}^{\sigma^{-1}}x, x.\sigma)$. On a $m \circ j = \sigma^{-1}$ et $p_2 \circ j = \mathrm{id}$.

THÉORÈME II.2.3. *Soit A un faisceau pervers F-stable, irréductible et G-équivariant sur $G.\sigma$, muni des deux isomorphismes φ_F: $F^*A \xrightarrow{\sim} A$ et $\varphi_{\sigma F}$: $(\sigma^{-1})^*F^*A \xrightarrow{\sim} A$ comme ci-dessus, alors* $\mathrm{Shi}_{F/\sigma^{-1}F}(\chi_{A,\varphi_F}) = \chi_{A,\varphi_{\sigma F}}$.

Démonstration. On considère les deux applications de Lang f_1 et f_2 de $G \to G.\sigma$ avec $f_1(g) = g^{-1}.{}^F g\sigma$ et $f_2(g) = {}^{\sigma^{-1}F}g g^{-1}.\sigma$. On définit par ailleurs k: $G \to G \times G.\sigma$ par $k(g) = ({}^{\sigma^{-1}F}g, g^{-1}\,{}^F g.\sigma)$; on a alors $m \circ k = f_2$ et $p_2 \circ k = f_1$. On considère le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc}
p_2^*A & & m^*A \\
\uparrow{\scriptstyle p_2^*(\varphi_{\sigma F})} & & \uparrow{\scriptstyle m^*(\varphi_F)} \\
p_2^*F^*(\sigma^{-1})^*A & \xrightarrow[F^*(\xi)\circ p_2^*F^*j^*(\xi)^{-1}]{} & m^*F^*A
\end{array}$$

Ce diagramme définit un isomorphisme d entre p_2^*A et m^*A; On vérifie que $h^*(d) = \mathrm{id}$ car $m \circ h = p_2 \circ h = \mathrm{id}$ et $h^*(\xi) = \mathrm{id}$. Ainsi d'aprés l'unicité de ξ on a $d = \xi$. Maintenant on applique le foncteur k^* à ce diagramme et on utilise le fait que $p_2 \circ k = f_1$ et $m \circ k = f_2$; on obtient le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc}
f_1^*A & \xrightarrow{k^*(\xi)} & f_2^*A \\
\uparrow{\scriptstyle f_1^*(\varphi_{\sigma F})} & & \uparrow{\scriptstyle f_2^*(\varphi_F)} \\
f_1^*F^*(\sigma^{-1})^*A & \xrightarrow[k^*F^*(\xi)\circ f_1^*F^*j^*(\xi)^{-1}]{} & f_2^*F^*A
\end{array}$$

Pour chaque $i \in \mathbb{Z}$ on prend les fibres du diagramme induit sur les i'ième faisceaux de cohomologies en un point $x\sigma \in G.\sigma$ tel que $y = x^{-1}\,{}^{F}x \in G^{\sigma^{-1}F}xx^{-1} \in G^{F}$). On a le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \mathscr{H}^{i}A_{y\sigma} \arrow[r, "\xi_{\sigma^{-1}F_{x,y\sigma}}"] & \mathscr{H}^{i}A_{\sigma^{-1}F_{xx^{-1}\sigma}} \\ \mathscr{H}^{i}A_{y\sigma} \arrow[u, "(\varphi_{\sigma F})_{y\sigma}"] \arrow[r, "\xi_{\sigma^{-1}F^{2}_{x,F_{y\sigma}}} \circ \xi^{-1}_{\sigma^{-1}F_{y,F_{y\sigma}}}"'] & \mathscr{H}^{i}A_{\sigma^{-1}F_{xx^{-1}\sigma}} \arrow[u, "(\varphi_{F})_{\sigma^{-1}F_{xx^{-1}\sigma}}"'] \end{tikzcd}$$

Nous avons donc

$$(\varphi_{\sigma F})_{y\sigma} = \xi^{-1}_{\sigma^{-1}F_{x,y\sigma}} \circ (\varphi_{F})_{\sigma^{-1}F_{xx^{-1}\sigma}} \circ \xi_{\sigma^{-1}F^{2}_{x,F_{y\sigma}}} \circ \xi^{-1}_{y,{}^{F}y\sigma}.$$

Remarquons que ${}^{\sigma^{-1}F^{2}}x = {}^{\sigma^{-1}F}xy$ car on a posé $y = x^{-1}\,F_{x}$. Nous utilisons le lemme de II.2.2 pour écrire

$$(\varphi_{\sigma F})_{y\sigma} = \xi^{-1}_{\sigma^{-1}F_{x,y\sigma}} \circ (\varphi_{F})_{\sigma^{-1}F_{xx^{-1}\sigma}} \circ \left(\xi_{\sigma^{-1}F_{x,y^{F}y\sigma y^{-1}}} \circ \xi_{y,{}^{F}y\sigma}\right) \circ \xi^{-1}_{y,{}^{F}y\sigma}$$

Or $y^{F}y\sigma^{-1}y^{-1} = y\sigma^{-1}$ d'où

$$(\varphi_{\sigma F})_{y\sigma} = \xi^{-1}_{\sigma^{-1}F_{x,y\sigma}} \circ (\varphi_{F})_{\sigma^{-1}F_{xx^{-1}\sigma}} \circ \xi^{\sigma^{-1}F}{}_{x,y\sigma} \circ \xi_{y,{}^{F}y\sigma} \circ \xi^{-1}_{y,{}^{F}y\sigma}$$

$$(\varphi_{\sigma F})_{y\sigma} = \xi^{-1}_{\sigma^{-1}F_{x,y\sigma}} \circ (\varphi_{F})_{\sigma^{-1}F_{xx^{-1}\sigma}} \circ \xi^{\sigma^{-1}F}{}_{x,y\sigma}.$$

D'où en prenant les traces des deux côtés aux niveau des faisceaux de cohomologies on a $\mathrm{Shi}_{F/\sigma^{-1}F}(\chi_{A,\varphi_F}) = \chi_{A,\varphi_{\sigma F}}$. $\blacksquare$

COROLLAIRE II.2.4. *Soit A un faisceau caractère F-stable sur G, muni d'un isomorphisme φ: $A \xrightarrow{\sim} F^{*}A$ et fixons l'isomorphisme d'équivariance ξ comme en* II.2.1; *nous avons* $\mathrm{Shi}_{F/F}(\chi_{A,\varphi}) = \mu.\chi_{A,\varphi}$ *où $\mu \in \overline{\mathbb{Q}}_l^{\times}$ est donné par $\xi_{y,y} = \mu.\mathrm{id}$ pour un point $y \in G$ (le scalaire μ est indépendant du point y choisi) (voir aussi* [Sh1, 3]).

II.2. Commutation de Shi$_{F/\sigma^{-1}F}$ avec $R^{G.\sigma}_{T.\sigma}$

Soit T un tore maximal du groupe G. Soit $\mathscr{L}$ un système local kummérien sur T et σ un automorphisme d'ordre fini de G stabilisant T. Supposons que $\mathscr{L}$ est T-équivariant pour l'action de T sur lui-même par σ-conjugaison. Notons $\mathbb{Z}_{(p)}$ l'anneau des nombres rationnels dont le dénominateur est premier à p et X le groupe des caractères de T. Soit $\overline{X} = (\mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} X)/(1 \otimes_{\mathbb{Z}} X)$. On fixe un isomorphisme ψ de groupe des racines de l'unité dans $\overline{\mathbb{F}}_q$ sur le groupe des racines de l'unité d'ordre premier à p dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$.

Pour chaque entier n premier à p on considère le revètement galoisien $T \to T$ $(t \mapsto t^n)$ de groupe de Galois ${}_nT = \{t \in T \mid t^n = 1\}$. Un caractère $x \in X$ définit par restriction un caractère de ${}_nT$ qui se relève en une représentation du groupe fondamental de T et qui correspond donc à un système local kummérien $\mathscr{L}_{x/n}$ sur T. D'après [MS, 2.1.4] et son corollaire $\alpha \mapsto \mathscr{L}_\alpha$ dèfinit un isomorphisme entre $\overline{X}$ et l'ensemble des systèmes locaux kummérien sur T. Remarquons que par cet isomorphisme le système local trivial $\overline{\mathbb{Q}}_l$ s'envoie sur l'élément neutre de $\overline{X}$ (c-à-d sur zéro).

Soit $\mathscr{L}$ un système local kummérien sur T et σ un automorphisme d'ordre fini de G stabilisant T. Soit $\mathscr{L}$ indexé par $x/n \in \overline{X}$. Notons que σ agit sur $\overline{X}$ par $x/n \mapsto (x \circ \sigma)/n$. Nous démontrons la proposition suivante.

Proposition II.3.1. *Pour $\mathscr{L}$ comme ci-dessus les assertions suivantes sont équivalentes*:

(a) $\sigma^*\mathscr{L} \simeq \mathscr{L}$.

(b) $(x \circ \sigma - x) \in n.X$

(c) *$\mathscr{L}$ est T-équivariant pour l'action α de T sur lui-même par t: $k \mapsto tk^\sigma(t^{-1})$.*

Démonstration. De manière générale soit $f\colon T \to S$ un morphisme entre deux tores T et S. Nous en déduisons un morphisme $\bar{f}\colon \overline{X}_S \to \overline{X}_T$ et un morphisme $\hat{f}\colon \pi(T,1) \to \pi(S,1)$ entre les groupes fondamentaux. Si $\mathscr{L}_\xi$ est un système local sur S pour $\xi \in \overline{X}_S$, il correspond à une représentation ρ de $\pi(S,1)$. Le système local $f^*(\mathscr{L})$ sur T correspond alors à la représentation $\rho \circ \hat{f}$ de $\pi(T,1)$. On a donc $f^*(\mathscr{L}_\xi) = \mathscr{L}_{\bar{f}(\xi)}$.

On applique ceci à notre situation. $\sigma^*(\mathscr{L}) \simeq \mathscr{L} \Leftrightarrow \mathscr{L}_{(x\circ\sigma)/n} \simeq \mathscr{L}_{x/n} \Leftrightarrow (x \circ \sigma)/n - x/n \in X \Leftrightarrow (x \circ \sigma) - x \in n.X$. Ceci démontre l'équivalence (a) $\Leftrightarrow$ (b).

Pour démontrer l'équivalence entre (b) et (c) notons $\mathscr{L}_0$ le système local trivial sur T. L'assertion (c) équivaut à l'existance d'un isomorphisme entre les systèmes locaux $\mathscr{L}_{x\circ\alpha/n}$ et $\mathscr{L}_0 \boxtimes \mathscr{L}_{x/n}$. Ceci équivaut à ce que les caractères $x \circ \alpha$ et $(0,x)$ de $T \times T$ soient égaux (modulo $X \times nX$), i.e., qu'ils existent des caractère y et z de T tel que pour tout $(t,k) \in T \times T$ on ait $(x \circ \alpha)(t,k) - 0(t).(x)(k) = n.y(t).z(k)$. Ceci est équivalent à ce qu'il existe un caractère y de T tel que pour tout $t \in T$ on ait $x(t^\sigma(t^{-1})) = n.y(t)$ et cette assertion est (b).

Corollaire II.3.2. *Les fonctions caractéristiques $\chi_{\mathscr{L},\varphi}$ (φ: $F^*\mathscr{L} \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}$ tel que $\varphi_1 = \mathrm{id}$) des systèmes locaux kummériens F-stable sur T et équivariants pour l'action de T sur lui-même par σ-conjugaison forment une base des fonctions de σ-classe sur T^F.*

Démonstration. Ceci provient de (II.3.1) et du fait que les $\chi_{\mathscr{L},\varphi}$ comme dans l'énoncé sans la condition d'équivariance sont les caractères irréductibles de T^F. ∎

Nous donnons une application du théorème I.3.2 et de II.2.3. Démontrons d'abord le lemme général suivant:

Soient X et Y deux variétés algébriques munies des action d'un groupe algébrique connexe sur un corps algébriquement clos. Notons m et m' ces actions. Notons par ailleurs p_2 et p_2' les deuxième projections.

LEMME II.3.3. *Soit f: $X \to Y$ un morphisme G-équivariant entre deux G-variétés algébriques. Soient A un faisceau pervers G-équivariant sur X et B un faisceau pervers G-équivariant sur Y. On a*

(1) *Pour tout i les ${}^pH^i f_!(A)$ sont G-équivariants.*

(2) *Pour tout i les ${}^pH^i f^*(B)$ sont G-équivariants.*

Démonstration. On a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \\
G \times X \arrow[u, "m"] \arrow[r, "\mathrm{id}\times f"] \arrow[d, "p_2"'] & G \times Y \arrow[u, "m'"'] \arrow[d, "p_2'"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

Notons $d = \dim(G)$. Par hypothèse $m^*[d]A \simeq p_2^*[d]A$. Le morphisme m étant lisse de fibres de dimension d on a $m^*[d] = m^![-d](d)$ où (d) est le "twist" de Tate. On a donc $m^![-d]A \simeq p_2^*[d]A$. Le paire adjointe $(m_![d], m^![-d\})$ nous donne $A \simeq m_![d]p_2^*[d]A$. Appliquons $f_!$ à cet isomorphisme et utilisons $f_!m_1[d] = m'_![d](\mathrm{id}\times f)_!$ pour obtenir $f_!A \simeq m'_![d](\mathrm{id}\times f)_! p_2^*[d]A$. Le carré inférieur est cartésien, d'après le théorème de changement de base pour un morphisme lisse on a, $(\mathrm{id}\times f)_!$ $p_2^*[d]A \simeq p_2'^*[d]f_!A$, d'où $f_!A \simeq m'_![d]p_2'^*[d]f_!A$. Par adjonction $m'^*[d]f_!A \simeq p_2'^*[d]f_!A$. Enfin on applique le foncteur ${}^pH^i$ qui commute aux $m'^*[d]$ et $p_2'^*[d]$, d'où (1).

La démonstration de (2) est triviale. ∎

Définissons le morphisme j: $G.\sigma \to G \times G.\sigma$ par $j(g.\sigma) = ({}^{\sigma^{-1}}g, g.\sigma)$. Fixons l'isomorphisme d'équivariance ξ sur $K := \mathrm{IC}(G.\sigma, \mathrm{Ind}(\mathscr{L}))$ (pour l'action de G sur $G.\sigma$ par conjugaison) comme dans le lemme II.2.1 et notons $\phi' = \phi \circ F^*j^*(\xi)^{-1}$. De la même manière fixons l'isomorphisme d'équivariance ζ sur le système local $\mathscr{L}$ et notons $\varphi' = \varphi \circ F^*j^*(\zeta)^{-1}$ où

j est la restriction à T. Démontrons le théorème suivant affirmant que la descente de Shintani $\mathrm{Shi}_{F/\sigma^{-1}F}$ commute au foncteur de Deligne-Lusztig généralisé $R^{G.\sigma}_{T.\sigma}$:

THÉORÈME II.3.4. *Pour q assex grand,* $\mathrm{Shi}_{F/\sigma^{-1}F}(R^{G.\sigma}_{T.\sigma}(\chi_{\mathscr{L},\varphi})) = R^{G.\sigma}_{T.\sigma}(\chi_{\mathscr{L},\varphi'})$.

Démonstration. D'après II.2.3 $\mathrm{Shi}_{F/\sigma^{-1}F}(\chi_{K,\phi}) = \chi_{K,\phi'}$. D'après le théorème I.3.2, il suffit donc de démontrer $\chi_{K,\phi'} = R^{G.\sigma}_{T.\sigma}(\chi_{\mathscr{L},\varphi'})$. Autrement dit sachant que l'isomorphisme ϕ est induit par l'isomorphisme φ il faut démontrer que l'isomorphisme ϕ' est induit par φ'.

Reconsidérons le diagramme d'induction $(*)$ de section I

$$(T.\sigma)_{\mathrm{reg}} \xleftarrow{\alpha} \hat{Y} \xrightarrow{\beta} \tilde{Y} \xrightarrow{\pi} Y.$$

Le groupe $G \times T$ agit sur les variétés de ce diagramme par:

Sur $(T.\sigma)_{\mathrm{reg}}$ par (g,t): $T' \mapsto {}^t t'$

Sur $\hat{Y}$ par (g,t): $(g',x) \mapsto ({}^g g', gxt^{-1})$

Sur $\tilde{Y}$ par (g,t): $(g',xT) \mapsto ({}^g g', gxT)$

Sur G par (g,x): $g' \mapsto {}^g g'$.

Le diagramme suivant montre que les morphismes de diagramme d'induction sont équivariants par rapport à ces actions.

$$T \times (T.\sigma)_r \xleftarrow{\overline{\alpha}} G \times T \times \hat{Y} \xrightarrow{\overline{\beta}} G \times \tilde{Y} \xrightarrow{\overline{\pi}} G \times Y$$

où

$$\overline{\alpha}(g,t,y) = (t,\alpha(y)); \qquad \overline{\beta}(g,t,y) = (g,\beta(y));$$

$$\overline{\pi}(g,y) = (g,\pi(y)).$$

Utilisant le lemme II.3.3 et le fait que $\overline{\beta}$ est lisse de fibre isomorphe à T, donc $\overline{\beta}^*$ est pleinement fidèle, on a une flèche unique $\tilde{\zeta}$ tel que $\overline{\beta}^*(\tilde{\zeta}) = \overline{\alpha}^*(\zeta) := \hat{\zeta}$. On vérifie façilement que $\pi_!(\tilde{\zeta}) = \xi$. Considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
(T.\sigma)_t \arrow[d, "j"] & \hat{Y} \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\hat{j}"] & \tilde{Y} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\tilde{j}"] & Y \arrow[d, "j"] \\
T \times (T.\sigma)_r & G \times T \times \hat{Y} \arrow[l, "\overline{\alpha}"'] \arrow[r, "\overline{\beta}"] & G \times \tilde{Y} \arrow[r, "\overline{\pi}"] & G \times Y
\end{tikzcd}$$

où

$$\hat{j}(g.\sigma,x) = \left({}^{\sigma^{-1}}g, {}^{\sigma^{-1}}(x^{-1}g^{\sigma}x), (g.\sigma,x)\right);$$

$$\tilde{j}(g.\sigma,xT) = \left({}^{\sigma^{-1}}g, (g.\sigma,xT)\right).$$

$\alpha^* j^*(\zeta) = \hat{j}^*(\hat{\zeta})$. Avec le carré du milieu on a $\beta^* \tilde{j}^*(\tilde{\zeta}) = \hat{j}^* \overline{\beta}^*(\tilde{\zeta}) = \hat{j}^*(\hat{\zeta})$. D'où l'image inverse par β de $\tilde{j}^*(\tilde{\zeta})$ est $\hat{j}^*(\hat{\zeta})$. Le carré de droite est cartésien et en appliquant le théorème de changement de base on conclut que la remontée par le diagramme d'induction de $j^*(\zeta)$ est égale à $j^*(\xi)$. Par le même genre d'arguments et avec un diagramme commutatif basé sur le morphisme de Frobenius on démontre que $F^* j^*(\zeta)^{-1}$ se remonte en $F^* j^*(\xi)^{-1}$. On en déduit que ϕ' est induit par φ'. Le théorème est ainsi démontré. ∎

Remarque. Le fait que $\mathrm{Shi}_{F/\sigma^{-1}F}$ commute à $R_{T.\sigma}^{G.\sigma}$ a été prouvé sans hypothèse sur q mais sous l'hypothèse de caractéristique p bonne dans [D].

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[D] F. Digne, ‘‘Descente de Shintani et descente des scalairs,’’ Publication du LAMIFA, 1995.

[DM1] F. Digne et J. Michel, Fonctions L des variétés de Deligne-Lusztig et descente de Shintani, *Bull. Soc. Math. France Mém.* (*Nouvelle Sér.*) **20** (1985).

[DM2] F. Digne et J. Michel, Groupes réductifs non connexes, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (*4*) **27** (1994), 345−406.

[Lus1] G. Lusztig, Intersection cohomology complexes on a reductive group, *Invent. Math.* **75** (1984) 205−272.

[Lus2] G. Lusztig, Character sheaves, I, *Adv. in Math.* **56** (1985), 193−237; Character sheaves, II, **57** (1985), 226−265; Character sheaves, III, **57** (1985), 266−315; Character sheaves, IV, **59** (1986), 1−63; Character sheaves, V, **61** (1986), 103−155.

[Lus3] G. Lusztig, Introduction to character sheaves, Arcata conference on representations of finite groups, *Proc. Sympos. Pure Math.* **47**, No. 1 (1987), 165−179.

[Lus4] G. Lusztig, Green functions and character sheaves, *Ann. of Math.* **131** (1990), 355−407.

(MS) J. G. M. Mars et T. A. Springer, Character sheaves, *Astérisque* **173–174** (1989).

(Sh1) T. Shoji, Character sheaves and almost-characters of reductive groups, I, *Adv. in Math.* **111** (1995), 244−313.

(Sh2) T. Shoji, Character sheaves and almost-characters of reductive groups, II, *Adv. in. Math.* **111** (1995), 313−354.