JOURNAL OF ALGEBRA 30, 436–443 (1974)

Gruppen mit abelschen 2-Sylow Durchschnitten

GERNOT STROTH

Department of Mathematics, University of Mainz, Mainz, Germany

Communicated by B. Huppert

Received July 5, 1973

1. EINLEITUNG

In dieser Arbeit sei $\mathfrak{G}$ stets eine endliche einfache Gruppe. Eine Untergruppe $\mathfrak{D}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt ein 2-Sylow Durchschnitt, falls zwei verschiedene 2-Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$ existieren, deren Durchschnitt gerade $\mathfrak{D}$ ist.

Im Jahre 1964 hat Suzuki [6] alle einfachen Gruppen bestimmt, deren 2-Sylow Durchschnitte trivial sind. Im Jahre 1971 hat Mazurow [5] alle einfachen Gruppen bestimmt, in denen der Durchschnitt von 2 verschiedenen 2-Sylowgruppen stets zyklisch ist. Das Ziel dieser Arbeit ist es, diese beiden Ergebnisse zu verallgemeinern. Wir werden einfache Gruppen untersuchen, in denen der Durchschnitt zweier verschiedener 2-Sylowgruppen stets abelsch ist. Eine solche Gruppe wollen wir dann eine (A)-Gruppe nennen.

Das Ziel dieser Arbeit ist der Beweis des folgenden Satzes.

SATZ 1. *Sei $\mathfrak{G}$ eine einfache (A)-Gruppe, so sind die 2-Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$ Diedergruppen oder von der Klasse zwei.*

2. HILFSSÄTZE

DEFINITION 1. Wir nennen $\mathfrak{G}$ eine $(A)^*$-Gruppe, falls $\mathfrak{G}$ die folgenden Eigenschaften hat:

(i) $\mathfrak{G}$ ist eine einfache (A)-Gruppe.

(ii) Es existiert ein nichttrivialer 2-Sylow Durchschnitt.

(iii) Die 2-Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$ sind nicht abelsch.

(iv) Eine 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ enthält keine bezüglich $\mathfrak{G}$ stark abgeschlossene abelsche Untergruppen.

LEMMA 1. *Sei $\mathfrak{G}$ eine einfache (A)-Gruppe aber keine $(A)^*$-Gruppe, so ist eine 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ eine Diedergruppe oder von der Klasse zwei.*

Beweis. Ist (ii) von Definition 1 nicht erfüllt, so folgt die Behauptung mit [6]. Ist (iv) von Definition 1 verletzt, so folgt die Behauptung mit [3].

LEMMA 2. *Ist $\mathfrak{G}$ eine $(A)^*$-Gruppe und I eine Involution in einer 2-Sylowgruppe $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{G}$, so ist der Zentralisator von I in $\mathfrak{T}$ abelsch oder eine 2-Sylowgruppe des Zentralisators von I in $\mathfrak{G}$.*

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{H} = \mathbf{C}_{\mathfrak{T}}(I)$. Ist $\mathfrak{H}$ keine 2-Sylowgruppe des Zentralisators von I in $\mathfrak{G}$, so existiert eine 2-Sylowgruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$, die $\mathfrak{H}$ und eine 2-Sylowgruppe des Zentralisators von I in $\mathfrak{G}$ enthält. Also ist $\mathfrak{H}$ der Durchschnitt von $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{T}$ und somit abelsch.

LEMMA 3. *Sei $\mathfrak{G}$ eine $(A)^*$-Gruppe und $\mathfrak{T}$ eine 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$. Dann gibt es eine Involution I in $\mathfrak{T}$, die nicht im Zentrum von $\mathfrak{T}$ liegt. Man kann I so wählen, daß I in $\mathfrak{G}$ zu einer Involution J aus $\mathbf{Z}(\mathfrak{T})$ konjugiert ist. Weiter ist der Zentralisator von I in $\mathfrak{T}$ abelsch und gleich dem Zentralisator von $\Omega_1(\mathbf{C}_{\mathfrak{T}}(I))$ in $\mathfrak{T}$.*

Beweis. Wegen Definition 1 (iv) gibt es eine Involution I in $\mathfrak{T}$, die nicht in $\mathbf{Z}(\mathfrak{T})$ liegt, aber zu einer Involution J aus dem Zentrum von $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{G}$ konjugiert ist. Nach Lemma 2 ist dann der Zentralisator von I in $\mathfrak{T}$ abelsch. Damit ist auch der zweite Teil des Lemmas bewiesen.

DEFINITION 2. Wir nennen einen 2-Sylowdurchschnitt maximal, wenn er in keinem 2-Sylow Durchschnitt echt enthalten ist. Wir definieren nun eine Menge $\mathscr{A}$ als die Menge der maximalen 2-Sylow Durchschnitte $\mathfrak{A}$, für die $\mathbf{Z}(\Omega_1(\mathfrak{S}))$ einer 2-Sylowgruppe $\mathfrak{S}$ von $\mathbf{N}(\mathfrak{A})$ nicht stark abgeschlossen in $\mathfrak{S}$ bezüglich $\mathbf{N}(\mathfrak{A})$ ist.

LEMMA 4. *Die Menge $\mathscr{A}$ ist nicht leer.*

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus Lemma 3.

DEFINITION 3. Eine $(A)^*$-Gruppe nennen wir eine $(A)_1{}^*$-Gruppe, falls eine 2-Sylowgruppe von $\mathbf{N}(\mathfrak{A})$ eine 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ ist, für alle Elemente $\mathfrak{A}$ in $\mathscr{A}$. Ist $\mathfrak{G}$ keine $(A)_1{}^*$-Gruppe, so nennen wir $\mathfrak{G}$ eine $(A)_2{}^*$-Gruppe.

2. DIE STRUKTUR EINER 2-SYLOWGRUPPE IN EINER $(A)_1{}^*$-GRUPPE

LEMMA 5. *Sei $\mathfrak{G}$ eine $(A)_1{}^*$-Gruppe und $\mathfrak{A}$ ein Element aus $\mathscr{A}$. Ist $\mathbf{N}(\mathfrak{A})$ auflösbar, so ist eine 2-Sylowgruppe von $\mathbf{N}(\mathfrak{A})/\mathfrak{A}$ zyklisch oder eine Quaternionengruppe.*

Beweis. Folgt sofort mit [6].

LEMMA 6. *Sei $\mathfrak{G}$ eine $(A)_1{}^*$-Gruppe und $\mathfrak{A}$ ein Element aus $\mathscr{A}$. Ist* $\mathbf{N}(\mathfrak{A})$ *auflösbar, so gibt es eine Involution in $\mathfrak{T}$, die nicht in $\mathfrak{A}$ liegt und die zu einer Involution aus $\mathbf{Z}(\Omega_1(\mathfrak{T}))$ in $\mathfrak{G}$ konjugiert ist. Hierbei ist $\mathfrak{T}$ eine 2-Sylowgruppe von* $\mathbf{N}(\mathfrak{A})$.

Beweis. Sei $\bar{I}$ die Involution in $\mathfrak{T}/\mathfrak{A}$. Dann liegen alle Involutionen in $\mathfrak{T}$, die nicht in $\mathfrak{A}$ liegen, in $\bar{I}$. Nach Definition 1 (iv) gibt es eine Involution in $\bar{I}$.

Sei nun I eine Involution aus $\bar{I}$. Dann muß nach Definition 1 I zu einer Involution aus $\mathfrak{A}$ konjugiert sein. Ist der Zentralisator von I in $\mathfrak{T}$ nicht abelsch, so ist die Behauptung mit Lemma 2 bewiesen. Ist der Zentralisator von I in $\mathfrak{T}$ abelsch, so folgt die Behauptung aus der Tatsache, daß $\mathbf{C}_{\mathfrak{T}}(I)$ nicht zu $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}$ konjugiert sein kann.

LEMMA 7. *Sei $\mathfrak{G}$ eine $(A)_1$-Gruppe, $\mathfrak{T}$ eine 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{A}$ ein Element aus $\mathscr{A}$. Ist* $\mathbf{N}(\mathfrak{A})$ *auflösbar, so ist $\mathfrak{T}$ von der Klasse* 2.

Beweis. Sei I eine Involution in $\mathfrak{T}$, die die Bedingungen von Lemma 6 erfüllt. Da I nicht unter $\mathbf{N}(\mathfrak{T})$ zu einer Involution aus $\mathbf{Z}(\Omega_1(\mathfrak{T}))$ konjugiert ist, ist der Zentralisator von I in $\mathfrak{T}$ abelsch. Dann liegt $\Omega_1(\mathfrak{T})$ im Normalisator von $\mathbf{C}_{\mathfrak{T}}(I)$. Also ist $\mathbf{C}_{\mathfrak{T}}(I)$ ein Element von A und somit normal in $\mathfrak{T}$. Damit ist sofort klar, daß $\mathfrak{A}\mathbf{C}_{\mathfrak{T}}(I)$ gleich $\mathfrak{T}$ sein muß. Also ist $\mathfrak{T}$ von der Klasse 2.

LEMMA 8. *Sei $\mathfrak{G}$ eine $(A)_1{}^*$-Gruppe, $\mathfrak{T}$ eine 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$, die ein Element $\mathfrak{A}$ aus $\mathscr{A}$ enthält. Ist* $\mathbf{N}(\mathfrak{A})$ *nicht auflösbar, so ist $\mathfrak{T}/\mathfrak{A}$ eine spezielle Gruppe und alle Involutionen von $\mathfrak{T}/\mathfrak{A}$ liegen im Zentrum von $\mathfrak{T}/\mathfrak{A}$.*

Beweis. Folgt sofort mit [6].

LEMMA 9. *Seien $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{A}$ wie in Lemma* 8. *Es gibt eine Involution in $\mathfrak{T}$, die nicht in $\mathfrak{A}$ liegt, deren Zentralisator in $\mathfrak{T}$ eine Element von $\mathscr{A}$ ist.*

Beweis. Sei I eine Involution in $\mathfrak{T}$, die nicht in $\mathfrak{A}$ liegt. Nach Definition 1 (iv) können wir I so wählen, daß I zu einer Involution aus $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}$ konjugiert ist. Setze $\mathfrak{B} = \mathbf{C}_{\mathfrak{T}}(I)$. Ist $\mathfrak{B}$ nicht abelsch, so gibt es eine Gruppe $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{T}$, die ungleich $\mathfrak{A}$ ist, aber zu $\mathfrak{A}$ konjugiert ist. Also gibt es eine Involution J in $\mathfrak{T}$, die nicht in $\mathfrak{A}$ liegt, deren Zentralisator in $\mathfrak{T}$ ein Element aus $\mathscr{A}$ ist. Sei nun $\mathfrak{B}$ abelsch. Dann gibt es eine Involution in $\mathfrak{A}$, deren Zentralisator in $\mathfrak{T}$ gerade $\mathfrak{A}$ ist, die $\mathbf{C}_{\mathfrak{T}}(I)$ normalisiert. Weiter ist $\mathbf{C}_{\mathfrak{A}}(I)$ nicht stark abgeschlossen in einer 2-Sylowgruppe von $\mathbf{N}(\mathbf{C}_{\mathfrak{T}}(I))$ bezüglich $\mathbf{N}(\mathbf{C}_{\mathfrak{T}}(I))$. Also enthält der Normalisator von $\mathbf{C}_{\mathfrak{T}}(I)$ eine Involution J, die zu einer Involution aus $\mathfrak{A}$ unter $\mathbf{N}(\mathbf{C}_{\mathfrak{T}}(I))$ konjugiert ist, oder $\mathbf{C}_{\mathfrak{T}}(I)$ ist aus $\mathscr{A}$. Ist $\mathbf{C}_{\mathfrak{T}}(I)$ nicht aus $\mathscr{A}$, so ist $\mathbf{C}_{\mathfrak{T}}(J)$ aus $\mathscr{A}$.

SATZ 2. *Ist $\mathfrak{G}$ eine $(A)_1$*-Gruppe und $\mathfrak{T}$ eine 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$, so hat $\mathfrak{T}$ die Klasse zwei.*

Beweis. Sei $\mathfrak{A}$ ein Element aus A. Ist $\mathbf{N}(\mathfrak{A})$ auflösbar, so folgt die Behauptung aus Lemma 7. Also können wir $\mathbf{N}(\mathfrak{A})$ als nicht auflösbar annehmen.

Sei I die nach Lemma 9 existierende Involution aus $\mathfrak{T}$, deren Zentralisator in $\mathfrak{T}$ in A liegt. Hätte $\mathfrak{T}/\mathfrak{A}$ Elemente der Ordnung 4, so müßte I ein solches Element modulo $\mathbf{C}_{\mathfrak{A}}(I)$ invertieren, was nicht möglich ist. Also ist $\mathfrak{T}/\mathfrak{A}$ elementar abelsch.

Ist $\mathfrak{A}\mathbf{C}_{\mathfrak{T}}(I)$ schon die ganze 2-Sylowgruppe $\mathfrak{T}$, so ist $\mathfrak{T}$ von der Klasse 2. Wir nehmen deshalb an, daß es in $\mathfrak{T}$ noch eine Involution J gibt, die nicht in $\mathfrak{A}\mathbf{C}_{\mathfrak{T}}(I)$ liegt. Diese Involution J ist dann unter $\mathbf{N}(\mathfrak{T})$ zu I und einer Involution in $\mathfrak{A}$ konjugiert. Damit ist dann $\mathfrak{A}$ zu $\mathbf{C}_{\mathfrak{T}}(I)$ unter $\mathbf{N}(\mathfrak{T})$ konjugiert. Das hat nun zur Folge, daß die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{A}$ und in $\mathbf{C}_{\mathfrak{T}}(I)$ liegt. Da $\mathfrak{T}/\mathfrak{A}$ eine Basis von zu I unter $\mathbf{N}(\mathfrak{T})$ konjugierten Involutionen hat, liegt die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{T}$ im Zentrum von $\mathfrak{T}$. Also hat $\mathfrak{T}$ die Klasse zwei.

3. DIE STRUKTUR EINER 2-SYLOWGRUPPE IN EINER $(A)_2$*-GRUPPE

LEMMA 10. *Sei $\mathfrak{G}$ eine $(A)_2$*-Gruppe, $\mathfrak{A}$ ein Element aus $\mathscr{A}$ und $\mathfrak{T}$ eine 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$, die $\mathfrak{A}$ enthält. Weiter sei $\mathbf{N}(\mathfrak{A})$ auflösbar. Dann existiert in $\mathfrak{A}$ ein Normalteiler $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{T}$. Die Faktorgruppe $\mathfrak{T}/\mathfrak{B}$ ist ein zentrales Produkt einer zyklischen Gruppe mit einer Diedergruppe der Ordnung 2^n oder einer Semidiedergruppe der Ordnung 2^n für geeignetes n. Der Zentralisator von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{T}$ enthält eine Diedergruppe der Ordnung 2^{n-1}.*

Beweis. Bezeichne mit $\mathfrak{S}$ eine 2-Sylowgruppe von $\mathbf{N}(\mathfrak{A})$. Nach [6] ist dann $\mathfrak{S}/\mathfrak{A}$ zyklisch oder eine Quaternionengruppe. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{S}$ keine 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$. Somit existiert eine Gruppe $\mathfrak{S}_1$ mit $|\mathfrak{S}_1 : \mathfrak{S}| = 2$. Sei K ein Element aus $\mathfrak{S}_1$, das nicht in $\mathfrak{S}$ liegt. Dann normalisiert K die Gruppe $\Omega_1(\mathfrak{A})$ nicht. Sei $\mathfrak{C}$ die unter K zu $\mathfrak{A}$ konjugierte Untergruppe von $\mathfrak{S}$. Dann gilt, daß $|\Omega_1(\mathfrak{A}) : \Omega_1(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C})| = 2$ ist. Setze $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C} = \mathfrak{B}$. Dann ist $\mathfrak{B}$ normal in $\mathfrak{S}_1$. Weiter ist klar, daß $|\mathfrak{S} : \mathfrak{A}| = 2$ gelten muß. Somit ist $\mathfrak{S}_1/\mathfrak{B}$ ein zentrales Produkt einer zyklischen Gruppe mit einer Diedergruppe der Ordnung 8. Wir zeigen nun durch Induktion, daß eine Untergruppe von $\mathfrak{T}$, deren Index in $\mathfrak{T}$ mindestens 2 ist, $\mathfrak{B}$ zentralisiert. Weiter zeigen wir, daß die Faktorgruppe nach $\mathfrak{B}$ ein zentrales Produkt einer zyklischen Gruppe mit einer Diedergruppe ist.

Für den Induktionsanfang haben wir nur noch zu zeigen, daß $\mathfrak{B}$ im Zentrum von $\mathfrak{S}_1$ liegt, falls $\mathfrak{S}_1$ einen Index größer oder gleich 2 in $\mathfrak{T}$ hat. Klar ist, daß $\mathfrak{B}$ in einer Untergruppe vom Index 2 in $\mathfrak{S}_1$ zentral liegt. Da weder $\mathfrak{A}$ noch $\mathfrak{C}$ von einem Element außerhalb $\mathfrak{S}_1$ normalisiert werden können, muß $\mathfrak{B}$ zentral in $\mathfrak{S}_1$ liegen.

Sei nun $\mathfrak{S}_{n-1}$ die größte Untergruppe in $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{B}$ zentral in $\mathfrak{S}_{n-1}$ und $\mathfrak{S}_{n-1}/\mathfrak{B}$ ist ein zentrales Produkt einer zyklischen Gruppe mit einer Diedergruppe der Ordnung 2^{n-1}. Ist der Index von $\mathfrak{S}_{n-1}$ in $\mathfrak{T}$ kleiner als 4, so sind wir fertig. Also können wir annehmen, daß der Index von $\mathfrak{S}_{n-1}$ in $\mathfrak{T}$ mindestens 4 ist. Das werden wir zum Widerspruch führen. In $\mathfrak{S}_{n-1}$ gibt es genau zwei Klassen von Untergruppen, die die gleiche Struktur wie $\mathfrak{A}$ haben. Diese beiden Klassen muß ein Element aus $\mathfrak{T}$, das nicht in $\mathfrak{S}_{n-1}$ liegt, verbinden. Da der Index von $\mathfrak{S}_{n-1}$ in $\mathfrak{T}$ mindestens 4 ist, muß das eine Involution sein. Diese muß dann sogar $\mathfrak{B}$ normalisieren. Sei $\mathfrak{T}_1$ die Untergruppe von $\mathfrak{T}$, die $\mathfrak{S}_{n-1}$ und diese Involution enthält. Dann ist $\mathfrak{T}_1/\mathfrak{B}$ ein zentrales Produkt einer zyklischen Gruppe mit einer Diedergruppe. Da der Index von $\mathfrak{T}_1$ in $\mathfrak{T}$ jetzt mindestens 2 ist, folgt wie beim Induktionsanfang, daß $\mathfrak{B}$ zentral in $\mathfrak{T}_1$ liegt. Wir haben somit gezeigt, daß der index von $\mathfrak{S}_{n-1}$ in $\mathfrak{T}$ höchstens 2 ist.

Damit haben wir, daß $\mathfrak{B}$ normal in $\mathfrak{T}$ liegt. Ist $\mathfrak{T}/\mathfrak{B}$ kein zentrales Produkt einer Diedergruppe mit einer zyklischen Gruppe, so folgt sofort aus der Struktur von $\mathfrak{S}_{n-1}$, daß $\mathfrak{T}$ ein zentrales Produkt einer zyklischen Gruppe mit einer Semidiedergruppe sein muß.

LEMMA 11. *Seien die Voraussetzungen wie in Lemma* 10. *Dann gibt es in $\mathfrak{B}$ einen Normalteiler $\mathfrak{B}_1$ von $\mathfrak{T}$ und eine Untergruppe $\mathfrak{S}$ vom Index 2 in $\mathfrak{T}$, die ein direktes Produkt von $\mathfrak{B}_1$ mit einer Gruppe $\mathfrak{D}$, die ihrerseits eine zentrales Produkt einer zyklischen Gruppe mit einer Diedergruppe ist, ist. Sei J die Involution aus dem Zentrum von $\mathfrak{D}$, so gibt es eine Involution I in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, die nicht in der Nebenklasse $\mathfrak{B}_1 J$ liegt und zu J in $\mathfrak{G}$ konjugiert ist.*

Beweis. Setze $\bar{\mathfrak{S}} = \mathbf{C}_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{B})$. Ist $\mathfrak{B}$ nicht zentral in $\mathfrak{T}$, so erfüllt $\bar{\mathfrak{S}}$ die Bedingungen des Lemmas. In diesem Fall setzen wir $\bar{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}$. Ansonsten ist $\mathfrak{B}$ zentral in $\mathfrak{T}$, und wegen der Struktur von $\mathfrak{T}$ ist klar, daß es eine Untergruppe $\mathfrak{S}$ mit den geforderten Eigenschaften gibt.

Da $\mathfrak{D}$ eine Diedergruppe der Ordnung größer oder gleich 8 enthält, folgt, daß J im Zentrum von $\mathfrak{T}$ liegt. Also ist J zu keinem Element aus $\mathbf{Z}(\mathfrak{T})$ ungleich J in $\mathfrak{G}$ konjugiert. Nach Lemma 2 ist dann J zu keiner Involution aus $\mathfrak{B}_1 J$ ungleich J in $\mathfrak{G}$ konjugiert. Wegen Definition 1 (iv) muß dann J zu einer Involution I aus $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, die nicht in $\mathfrak{B}_1 J$ liegt, konjugiert sein.

LEMMA 12. *Die Voraussetzungen seien wie in Lemma* 10. *Dann ist $\mathfrak{T}/\mathfrak{B}_1$ eine Diedergruppe oder Semidiedergruppe der Ordnung 2^n für geeignetes n.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{D}$ aus Lemma 11 eine Diedergruppe ist. Da J nach Lemma 11 zu einer Involution aus $\mathfrak{A}$, die nicht in $\mathfrak{B}_1$ oder

$\mathfrak{B}_1 J$ liegt, konjugiert ist, muß diese Konjugation schon in $\mathbf{N}(\mathfrak{A})$ geschehen. Das ist aber nur dann möglich, falls $\mathfrak{D}$ eine Diedergruppe ist.

LEMMA 13. *Die Involution J aus Lemma* 11 *hat genau* 3 *Konjugierte in* $\mathfrak{A}$.

Beweis. Sei I die Involution aus Lemma 11, die zu J konjugiert ist. Dann ist J auch zu der Involution JI konjugiert. Wir müssen also zeigen, daß dies alle Konjugierte von J sind.

Da J zu keiner Involution aus $\mathfrak{B}_1$ konjugiert ist, und da LI mit L aus $\mathfrak{B}_1$ immer zu LJI in $\mathbf{C}(\mathfrak{B}_1)$ konjugiert ist, folgt die Behauptung durch einfaches Nachrechnen.

LEMMA 14. *Die Voraussetzungen seien wie in Lemma* 10. *Dann ist eine* 2-*Sylowgruppe von* $\mathfrak{G}$ *isomorph zu einer Diedergruppe der Ordnung* 2^n *für geeignetes* n.

Beweis. Klar ist, daß $\mathbf{N}(\mathfrak{A})/\mathbf{C}(\mathfrak{A})$ ein normales 2-Komplement $\mathfrak{N}$ hat. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}$ den Zentralisator von J in $\mathfrak{N}$. Nach Lemma 13 zentralisiert $\mathfrak{M}$ auch die Involution I. Nach [4, Theorem 2.3, Seite 177] ist dann $\mathfrak{A} = \mathbf{C}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{M}) \times [\mathfrak{M}, \mathfrak{A}]$. Man sieht leicht, daß $[\mathfrak{M}, \mathfrak{A}]$ in $\mathfrak{B}_1$ liegen muß. Wir setzen zur Abkürzung $\mathfrak{B}_2 = [\mathfrak{M}, \mathfrak{A}]$. Weiter sei $\mathfrak{B}_2$ ungleich 1.

Ist $\mathfrak{T}/\mathfrak{B}_1$ isomorph zu einer Semidiedergruppe, so hat $\mathfrak{G}$ nur eine Konjugiertenklasse von 2-Sylow Durchschnitten aus $\mathscr{A}$. Dann ist $\mathfrak{B}_2$ stark abgeschlossen in $\mathfrak{T}$ bezüglich $\mathfrak{G}$. Das widerspricht aber Definition 1 (iv).

Sei nun $\mathfrak{T}/\mathfrak{B}_1$ isomorph zu einer Diedergruppe. Bezeichne mit $\mathfrak{A}_1$ einen Vertreter der zweiten Konjugiertenklasse von 2-Sylow Durchschnitten. Klar ist, daß $\mathfrak{B}_2$ in $\mathfrak{A}_1$ enthalten ist. Da die Anzahl der Konjugierten eines Elementes aus $\mathfrak{B}_2$ stets ungerade ist, folgt, daß $\mathfrak{B}_2$ im Zentrum von $\mathfrak{T}$ liegt. Sei nun L eine Involution aus $\mathfrak{B}_2$, die zu einer Involution L_1 aus $\mathfrak{A}_1$, die nicht in $\langle \mathfrak{B}_1, J \rangle$ liegt, konjugiert ist. Dann ist L schon im Zentralisator von J zu L_1 konjugiert. Da aber L_1 zu $L_1 J$ konjugiert ist, ist dann auch L zu LJ konjugiert. Das widerspricht aber der Tatsache, daß $\mathfrak{B}_2$ in $\mathbf{N}(\mathfrak{A})$ stark abgeschlossen ist. Also ist auch jetzt $\mathfrak{B}_2$ in $\mathfrak{T}$ bezüglich $\mathfrak{G}$ stark abgeschlossen.

Wir haben somit gezeigt, daß $\mathfrak{B}_2$ gleich 1 sein muß. Das bedeutet, daß $\mathbf{N}(\mathfrak{A})/\mathbf{C}(\mathfrak{A})$ zur $\sum_3$ isomorph ist. Nun lassen wir die $\sum_3$ auf $\mathfrak{A}$ operieren. Dann gibt es zu $\langle I, J \rangle$ ein Komplement. Wir sehen wieder, daß dieses Komplement 1 sein muß.

Aus unseren Betrachtungen folgt, daß $\mathfrak{T}$ eine Diedergruppe oder eine Semidiedergruppe sein muß. Mit den Ergebnissen aus [2] folgt dann, daß $\mathfrak{T}$ eine Diedergruppe ist.

LEMMA 15. *Sei* $\mathfrak{G}$ *eine* $(A)_2$*-*Gruppe und* $\mathfrak{A}$ *ein Element aus* $\mathscr{A}$. *Ist* $\mathbf{N}(\mathfrak{A})$ *nicht auflösbar und* 2^n *der genaue* 2-*Anteil der Ordnung von* $\mathbf{N}(\mathfrak{A})$, *so ist* 2^{n+1} *der genaue* 2-*Anteil der Ordnung von* $\mathfrak{G}$.

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{S}$ eine 2-Sylowgruppe von $\mathbf{N}(\mathfrak{A})$. Nach den Ergebnissen von [6] ist dann $\mathfrak{S}/\mathfrak{A}$ speziell. Weiter liegen alle Involutionen von $\mathfrak{S}/\mathfrak{A}$ im Zentrum von $\mathfrak{S}/\mathfrak{A}$ und sind unter $\mathbf{N}(\mathfrak{A})$ konjugiert. Da $\mathfrak{G}$ eine $(A)_2{}^*$-Gruppe ist, ist $\mathfrak{S}$ keine 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$. Sei $\mathfrak{T}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ mit $|\mathfrak{T} : \mathfrak{S}| = 2$. Wir müssen zeigen, daß $\mathfrak{T}$ eine 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ ist. Dazu genügt es offenbar zu zeigen, daß es in $\mathfrak{S}$ genau ein Konjugiertes von $\mathfrak{A}$ ungleich $\mathfrak{A}$ gibt.

Sei $\mathfrak{B}$ die unter $\mathfrak{T}$ zu $\mathfrak{A}$ konjugierte Untergruppe von $\mathfrak{S}$ ungleich $\mathfrak{A}$. Um die Behauptung zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{A}\mathfrak{B}/\mathfrak{A}$ gleich den Zentrum von $\mathfrak{S}/\mathfrak{A}$ ist. Sei q die Ordnung von $\mathbf{Z}(\mathfrak{S}/\mathfrak{A})$, so genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{A}/(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$ die Ordnung q hat. Da $\mathfrak{G}$ eine $(A)_2{}^*$-Gruppe ist, gibt es in $\mathfrak{A}$ eine Involution I, die nicht in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ liegt. Diese Involution können wir so wählen, daß sie in das Zentrum von $\Omega_1(\mathfrak{S})$ unter $\mathbf{N}(\mathfrak{A})$ konjugiert ist. Eine solche Involution hat in $\mathbf{N}(\mathfrak{A})$ einen Zentralisator, der 2-abgeschlossen ist.

Es gibt also eine Untergruppe $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}$, die die gleiche Ordnung wie $\mathbf{Z}(\Omega_1(\mathfrak{S}))$ hat. Diese Gruppe $\mathfrak{C}$ ist zu $\mathbf{Z}(\Omega_1(\mathfrak{S}))$ unter $\mathbf{N}(\mathfrak{A})$ konjugiert, enthält I und hat einen Durchschnitt $\mathfrak{D}$ mit $\mathbf{Z}(\Omega_1(\mathfrak{S}))$. Für alle Involutionen in $\mathfrak{D}$ gilt, daß der Zentralisator im $\mathbf{N}(\mathfrak{A})$ nicht 2-abgeschlossen ist. Klar ist, daß $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ auch den Durchschnitt $\mathfrak{D}$ hat. Wir zeigen nun, daß die Ordnung von $\mathfrak{C}(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})/(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$ gerade q ist.

Die Gruppe $\mathbf{N}(\mathfrak{A})/\mathfrak{A}$ enthält nach [6] eine Untergruppe isomorph zu $\mathbf{Sz}(\mathbf{q})$, $\mathbf{L}_2(\mathbf{q})$ oder $\mathbf{U}_3(\mathbf{q})$. Diese Untergruppe wollen wir mit $\mathfrak{U}$ bezeichnen. Sei nun die Ordnung von $\mathfrak{C}(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})/(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})$ kleiner als q. Dann gibt es ein Element K in $\mathfrak{U}$, welches $\mathbf{Z}(\Omega_1(\mathfrak{S}))$ zentralisiert, und eine Ordnung hat, die $q - 1$ teilt. Also können wir annehmen, daß I zu einer Involution aus $\mathbf{Z}(\Omega_1(\mathfrak{S}))$ unter dem Normalisator von $\langle K \rangle$ in $\mathfrak{U}$ konjugiert ist. Dann ist auch $\mathfrak{C}$ zu $\mathbf{Z}(\Omega_1(\mathfrak{S}))$ unter $\mathbf{N}(\langle K \rangle)$ in $\mathfrak{U}$ konjugiert. Also zentralisiert das Element K die Gruppe $\mathbf{Z}(\Omega_1(\mathfrak{S}))\mathfrak{C}$. Diese Gruppe enthält eine in $\mathfrak{U}$ normale Untergruppe $\mathfrak{B}$, die I enthält. Wegen der Struktur von $\mathfrak{U}$ folgt dann, daß $\mathfrak{U}$ die Gruppe $\mathfrak{B}$ zentralisiert. Das widerspricht der Tatsache, daß der Zentralizator von I in $\mathfrak{U}$ 2-abgeschlossen ist. Also haben wir, daß die Ordnung von $\mathfrak{C}(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B})/(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B})$ gleich q ist. Damit ist das Lemma bewiesen.

Satz 3. *Ist $\mathfrak{G}$ eine $(A)_2{}^*$-Gruppe, so ist die 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ eine Diedergruppe.*

Beweis. Sei $\mathfrak{A}$ ein Element aus $\mathscr{A}$. Ist $\mathbf{N}(\mathfrak{A})$ auflösbar, so sind wir nach Lemma 14 fertig. Also können wir $\mathbf{N}(\mathfrak{A})$ nicht auflösbar annehmen.

Sei $\mathfrak{S}$ eine 2-Sylowgruppe von $\mathbf{N}(\mathfrak{A})$ und $\mathfrak{T}$ eine 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$, die $\mathfrak{S}$ enthält. Nach Lemma 15 ist dann der Index von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{T}$ gleich 2. Sei L ein Element aus $\mathfrak{T}$, das nicht in $\mathfrak{S}$ liegt. Wir nehmen weiterhin an, daß L zu einem Element aus $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{G}$ konjugiert ist. Da $\mathfrak{S}$ charakteristisch in $\mathfrak{T}$ liegt, ist der Zentralisator von L in $\mathfrak{T}$ ein maximaler 2-Sylow Durchschnitt. Nach [1, Theorem 4.11, Seite 235] ist dann L zu einem Element aus $\mathbf{C}_{\mathfrak{S}}(L)$ konjugiert. Wegen der Struktur von $\mathfrak{T}$ ist klar, daß alle Involutionen, die L zentralisieren, in $\mathbf{Z}(\mathfrak{T})$ liegen. Wählen wir nun $\mathfrak{A}$ aus $\mathscr{A}$ von minimaler Ordnung, so folgt, daß $\mathbf{C}_{\mathfrak{T}}(L)$ nicht in $\mathscr{A}$ liegt. Also ist insbesondere L keine Involution. Wir haben somit, daß L zu einem Element J aus $\mathbf{C}_{\mathfrak{S}}(L)$, das nicht im Zentrum von $\mathfrak{T}$ liegt, konjugiert ist. Dieses Element J ist aber zu einem Element RJ mit R aus $\mathbf{Z}(\mathfrak{T})$ konjugiert. Dann ist aber eine 2-Sylowgruppe des Zentralisators von $L\mathbf{Z}(\mathfrak{T})$ größer als eine 2-Sylowgruppe von $\mathbf{C}(L)$. Das ergibt, daß $\mathbf{C}_{\mathfrak{T}}(L)$ eine 2-Sylowgruppe von $\mathbf{C}_{\mathfrak{G}}(L)$ ist. Damit ist dann L zu keinem Element aus $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{G}$ konjugiert. Mit einem Satz von Grün folgt nun, daß $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe vom Index 2 hat. Also ist $\mathfrak{G}$ keine $(A)_2{}^*$-Gruppe.

LITERATUR

1. J. L. ALPERIN, Sylow intersections and fusion, *J. Algebra* **6** (1967), 222–241.
2. J. L. ALPERIN, R. BRAUER, UND D. GORENSTEIN, Finite groups with quasi-dihedral and wreathed Sylow 2-subgroups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **151** (1970), 1–262.
3. D. GOLDSCHMIDT, 2-fusion in finite groups, *Notices Amer. Math. Soc.* **20** (1973), 92.
4. D. GORENSTEIN, "Finite Groups," Harper and Row, New York, 1968.
5. V. D. MAZUROW, Finite simple groups with cyclic intersections of Sylow 2-subgroups, *Algebra i Logika* **10** (1971), 188–198.
6. M. SUZUKI, Finite groups of even order in which Sylow 2-subgroups are independent, *Ann. of Math.* **80** (1964), 58–77.