J. Math. Pures Appl. 79, 9 (2000) 855–862

SÉRIES DE TAYLOR ET SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES UNIVERSELLES AU SENS DE MENCHOFF

J.-P. KAHANE [a], **V. NESTORIDIS** [b]

[a] *Université de Paris-Sud, Mathématiques, 91405, Orsay Cedex, France*
[b] *Département des Mathématiques, Université d'Athènes, Panepistimiopolis, 15784, Athènes, Grèce*

Manuscrit reçu le 29 Avril 2000

RÉSUMÉ. – Le résultat principal de cet article est qu'il existe une série trigonométrique universelle au sens de Menchoff qui est la restriction au cercle unité d'une série de Taylor dont les coefficients tendent vers zéro.

Il nous a paru bon, avant de présenter ce résultat et ses variantes, de récapituler des éléments connus de la théorie des séries trigonométrique universelles et de celle des séries de Taylor universelles. © 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Mots Clés: Séries trigonométriques universelles, Séries de Taylor, Propriété générique, Approximation polynômiale

ABSTRACT. – Here is the principal result: there exists a trigonometric series of the Taylor type, with coefficients tending to zero, and universal in the sense of Menšov. The article recapitulates known results on universal trigonometric series and universal Taylor series before presenting the main result and its developments. © 2000 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Keywords: Universal trigonometric series, Taylor series, Generic property, Polynomial approximation

AMS classification: 42A, 30B30

1. Récapitulation

Les séries trigonométriques universelles ont été découvertes par D. Menchoff ([17,1]). Il s'agit de séries trigonométriques :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

telles que toute fonction mesurable 2π-périodique (réelle ou complexe, selon que l'on se borne à des coefficients réels ou que l'on autorise les coefficients complexes) soit limite presque partout d'une suite convenable de sommes partielles :

$$f(t) = \lim_{j\to\infty} S_{N(j)}(t),$$

avec

$$S_N(t) = \sum_{n=0}^{N} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Il sera plus commode, dans la suite, d'écrire la série sous la forme

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$$

et les sommes partielles sous la forme

$$S_N(t) = \sum_{-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}.$$

Sauf mention du contraire, les fonctions et les coefficients auront des valeurs complexes.

Les principaux théorèmes de Menchoff sont les suivants :

M1. Il existe des séries trigonométriques universelles.

M2. Toute série trigonométrique est la somme de deux séries trigonométriques universelles.

M3. Il existe des séries trigonométriques universelles dont les coefficients tendent vers zéro.

M4. Toute série trigonométrique dont les coefficients tendent vers zéro est la somme de deux séries trigonométriques universelles dont les coefficients tendent vers zéro.

Il est commode, pour les obtenir et pour les généraliser, d'utiliser le théoréme des catégories de Baire dans un espace convenable. Nous nous limiterons a des espaces métriques complets X et nous dirons qu'une propriété est quasi-sûre dans X, ou qu'elle a lieu pour quasi tout élément de X, si elle est valable sur un G_δ dense (c'est à dire, d'aprés le théoréme de Baire, sur une intersection dénombrable d'ouverts denses dans X).

Prenons d'abord pour X l'espace de toutes les séries trigonométriques à coefficients complexes, qui est isomorphe à l'espace produit $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. *Quasi toute série trigonométrique est universelle au sens de Menchoff* ([6,9]) ; M1 et M2 en résultent immediatement. On peut d'ailleurs parler d'universalité en des sens différents. *Quasi toute série trigonométrique a les propriétés suivantes* : (a) *toute fonction continue* 2π*-périodique est limite ponctuelle, et uniforme sur tout intervalle* $[0, 2\pi - a]$ $(a > 0)$*, d'une suite convenable de sommes partielles* ; (b) *toute fonction* 2π*-périodique de la première classe de Baire est limite ponctuelle d'une suite convenable de sommes partielles* ; (c) *pour toute mesure de probabilité* μ *sur* $[0, 2\pi]$*, quasi toute fonction borélienne* 2π*-périodique est limite* μ*-presque partout d'une suite convenable de sommes partielles* [9].

Restreignons-nous aux séries trigonométriques de la forme $\sum_{n\in\Lambda} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$, où Λ est une partie infinie donnée de $\mathbb{Z}$. *Tous les énoncés précédents sont valables pour ces séries, à la condition que le systéme* $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\}_{n\in\Lambda}$ *soit total dans tous les espaces* $L^2(I)$, $|I| < 2\pi$ (I désigne un intervalle, $|I|$ sa longueur).

L'idée générale de ces propositions, qui est aussi l'idée des preuves, est que tout ce qui est approchable par des polynômes trigonométriques est aussi approchable, quasi-sûrement, par des sommes partielles.

C'est la même idée qui s'applique aux séries de Taylor, en remplaçant naturellement "polynômes trigonométriques" par "polynômes". Il y a plusieurs notions de séries de Taylor universelles, correspondant a différents espaces X ($X =$ espaces de toutes les séries de Taylor ; $X =$ espaces des séries de Taylor convergentes dans le disque $|\zeta| \leqslant 1$; $X =$ espaces des séries de

Taylor convergentes dans le disque $|\zeta| < 1$). L'universalité exprime le fait que, quasi-sûrement, les sommes partielles permettent d'approcher uniformément tout ce qu'il est possible d'espérer ([2,12,18,19,14]). Attardons nous sur le dernier exemple, des séries de Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n \quad \bigl(|\zeta| < 1\bigr)$$

qui représentent des fonctions holomorphes dans le disque $D = \{\zeta\colon\ |\zeta| < 1\}$. Dans ce cas, l'espace X est isomorphe a $H(D)$, l'espace de ces fonctions holomorphes muni de la convergence uniforme sur tout compact. On dira qu'une série de Taylor de cette classe est universelle si ses sommes partielles permettent d'approcher uniformément, sur tout compact K disjoint de D et ne divisant pas le plan (c'est à dire à complémentaire connexe), toute fonction continue sur K et holomorphe à l'intérieur. Alors, *quasi toute série de Taylor convergente dans D est universelle* [18].

L'intéret pour nous de cette notion d'universalité est que les séries de Taylor (convergentes dans D) universelles, considerées à la frontière de D, c'est-à-dire pour $\zeta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, t réel, sont des séries trigonométriques universelles au sens de Menchoff, et dans les autres sens que nous avons signalés. Elles correspondent au choix $\Lambda = \mathbb{N}$, mais à un espace différent.

Les séries de Taylor universelles ont fait l'objet récemment de plusieurs travaux ([18,19,13–16,3–5,9]). Signalons seulement quelque résultats simples.

(1) *Si une série de Taylor convergente dans D est universelle, ses coefficients ne peuvent pas tendre vers* 0. Cela suffit a démarquer, en termes d'universalité, les séries de Taylor convergentes dans D et les séries de Taylor convergentes dans $\overline{D}$. Mais on peut beaucoup préciser ce résultat, en indiquant les ordres de grandeur interdits et permis pour les coefficients [16]. On peut aussi l'étendre aux séries trigonométriques : *si une série trigonométrique est universelle au sens* (a) *ci-dessus, ses coefficients ne peuvent pas tendre vers zéro* [19].

(2) Soit $f \in H(D)$ et $a \in D$. On considére la propriété d'universalité suivante $U(f,a)$: les sommes partielles de la série de Taylor de f au point a permettent d'approcher uniformément, sur tout compact K disjoint de D et ne divisant pas le plan, toute fonction continue sur K et holomorphe à l'intérieur. Alors, *f étant donnée, $U(f,a)$ a lieu pour tout $a \in D$, ou n'a lieu pour aucun a* [14,5].

(3) Au lieu de D, considérons un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ non vide et simplement connexe. Les fonctions holomorphes dans Ω constituent un espace $H(\Omega)$. Pour $f \in H(\Omega)$ et $a \in \Omega$, definissons la propriété d'universalité $U(f,a)$ comme ci-dessus : les sommes partielles de la série de Taylor de f au point a permettent d'approcher uniformément, sur tout compact K disjoint de Ω et ne divisant pas le plan, toute fonction continue sur K et holomorphe à l'intérieur. Alors, *pour quasi toute $f \in H(\Omega)$, $U(f,a)$ a lieu pour tout $a \in \Omega$* [19,14].

Revenons aux séries trigonométriques. Les séries trigonométriques dont les coefficients tendent vers 0 forment un espace isomorphe à $c_0(\mathbb{Z})$, et représentent des pseudofonctions [7,11]. Si une sous–suite de sommes partielles d'une telle série converge uniformément sur un intervalle I, la pseudofonction correspondante est égale sur I à une fonction continue, et la série ne peut pas être universelle au sens de Menchoff [9]. Les espaces de coefficients $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ et $c_0(\mathbb{Z})$ ont donc, en termes d'universalité des séries trigonométriques, des propriétés trés différentes. Cependant, *quasi toute série trigonométrique à coefficients tendant vers* 0 *est universelle au sens de Menchoff* ([6,9]). C'est la meilleure façon de voir les théorèmes M3 et M4 cités en introduction.

2. Le résultat principal et ses variantes

THÉORÈME 1. – *Pour quasi toute suite* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$*, la série*

$$S\colon \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$$

est universelle au sens de Menchoff : toute fonction mesurable 2π*-périodique est limite presque-partout d'une suite convenable de sommes partielles.*

La preuve repose sur le lemme suivant [10] :

LEMME 1. – *On donne une fonction* $k(t)$ *continue sur* $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ *(que l'on munit de la mesure* $dt/2\pi$*), et trois nombres* $\alpha > 0$*,* $\beta > 0$ *et* $\gamma > 0$*. Il existe alors un nombre* $A = A(k,\alpha,\beta)$ *(ne dépendant pas de* γ*), une partie* $E = E(k,\alpha,\beta,\gamma)$ *de* $\mathbb{T}$ *de mesure* $\geqslant 1-\beta$*, et un polynôme trigonométrique*

$$p(t) = p(t;k,\alpha,\beta,\gamma) = \sum \widehat{p}_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$$

tels que :
(1) $|p(t) - k(t)| < \alpha$ *sur* E.
(2) $\sum |\widehat{p}_n|^2 < A$.
(3) $\sup_n |\widehat{p}_n| < \gamma$.

On aura besoin d'une précision.

LEMME 2. – *Dans le Lemme* 1*, on peut fixer arbitrairement un entier* $\nu > 0$ *et imposer* $\widehat{p}_n = 0$ *pour* $n < \nu$*. La conclusion est valable avec* $A = A(k,\alpha,\beta,\nu)$*,* $E = E(k,\alpha,\beta,\gamma,\nu)$*, et* $p(t) = p(t;k,\alpha,\beta,\gamma,\nu)$*.*

Preuve du Lemme 2. – Fixons $\nu > 0$ entier, et des nombres strictement positifs α', β', γ', α'', β''. Il existe un polynôme

$$q(t) = \sum_{n=1}^{\deg q} \widehat{q}_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$$

tel que $|q(t) - 1| < \alpha''$ pour $t \in E'' = [0, 2\pi(1-\beta'')]$. Fixons-le et posons, avec les notations du Lemme 1 :

$$\begin{aligned} p_0(t) &= p\bigl(t;k,\alpha',\beta',\gamma'\bigr),\\ A_0 &= A\bigl(k,\alpha',\beta'\bigr),\\ E_0 &= E\bigl(k,\alpha',\beta',\gamma'\bigr). \end{aligned}$$

Choisissons $N > \sup(2\deg p_0, \nu + \deg p_0)$, et posons :

$$p(t) = p_0(t)q(Nt) = \sum_{n=\nu}^{\deg p} \widehat{p}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}.$$

Observons que $\widehat{p}(m+nN) = \widehat{p}_0(m)\widehat{q}(n)$ lorsque $|m| < \deg p_0$, et qu'il y a au plus une manière d'écrire un entier sous la forme $m + nN$ avec $|m| < \deg p_0$. Donc

$$\sup_n \bigl|\widehat{p}(n)\bigr| = \sup_m \bigl|\widehat{p}_0(m)\bigr| \sup_n \bigl|\widehat{q}(n)\bigr| \leqslant \gamma' \sup_n \bigl|\widehat{q}(n)\bigr|$$

et

$$\sum \left|\widehat{p}(n)\right|^2 = \sum \left|\widehat{p}_0(m)\right|^2 \sum \left|\widehat{q}(n)\right|^2 \leqslant A_0 \sum \left|\widehat{q}(n)\right|^2.$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}\left|p(t)-k(t)\right| &\leqslant \left|p_0(t)-k(t)\right|\left|q(Nt)\right| + \left|k(t)\right|\left|q(Nt)-1\right|\\ &\leqslant \alpha'\left(1+\alpha''\right) + \alpha'' \sup_t \left|k(t)\right|\end{aligned}$$

lorsque $t \in E_0 \cap E''_N$, avec $E''_N = \{t \in \mathbb{T}\colon\ Nt \in E''\}$. Comme E''_N a même mesure que E'', à savoir $1-\beta''$,

$$\operatorname{mes} E_0 \cap E''_N > 1 - \beta' - \beta''.$$

Etant donné la fonction $k(t)$ et les nombres α, β, γ, définissons d'abord $\alpha', \alpha'', \beta', \beta''$ de façon que

$$\alpha'\left(1+\alpha''\right) + \alpha'' \sup_t \left|k(t)\right| \leqslant \alpha,$$

$$\beta' + \beta'' \leqslant \beta,$$

puis $q(t)$ comme ci-dessus, puis γ' tel que

$$\gamma' \sup_n \left|\widehat{q}(n)\right| \leqslant \gamma.$$

En posant :

$$\begin{aligned}A &= A(k,\alpha,\beta,\nu) = A_0 \sum \left|\widehat{q}(n)\right|^2,\\ E &= E(k,\alpha,\beta,\gamma,\nu) = E_0 \cap E''_N,\\ p(t) &= p(t;k,\alpha,\beta,\gamma,\nu),\end{aligned}$$

les conditions (1), (2) et (3) du Lemme 1 sont bien vérifiées, et de plus $\widehat{p}(n) = 0$ pour $n < \nu$. C'est la conclusion du Lemme 2. □

Preuve du Théorème 1. – Soit X l'espace des séries

$$S\colon \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}, \quad (c_n) \in c_0(\mathbb{N}),$$

et soit Y l'ensemble, dense dans X, des polynômes en $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ à coefficients dans $\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q}$. Soit $j \to y_j$ une application de $\mathbb{N}$ sur Y. Partons de trois suites strictement positives $(\alpha_j) \in c_0(\mathbb{N})$, $(\beta_j) \in \ell^1(\mathbb{N})$ et $(\gamma_j) \in c_0(\mathbb{N})$, et soit $\delta_j = \beta_j + \beta_{j+1} + \cdots$. Fixons arbitrairement $\nu_0 \in \mathbb{N}^+$. Le Lemme 2 permet de définir par récurrence une suite croissante d'entiers ν_j et deux suites p_j et k_j d'éléments de Y tels que $k_0 = y_0$,

$$\begin{aligned}&p_j(t) = p(t;k_j,\alpha_j,\beta_j,\gamma_j,\nu_j),\\ &\nu_{j+1} > \deg p_j,\\ &k_{j+1} = y_{j+1} - (p_0 + p_1 + \cdots + p_j) \quad (j \in \mathbb{N}).\end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} E_j &= E(k_j, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \nu_j), \\ F_j &= E_j \cap E_{j+1} \cap \cdots, \\ F_\infty &= \lim_{j\to\infty} F_j \end{aligned}$$

donc

$$\operatorname{mes} F_j > 1 - \delta_j, \quad \operatorname{mes} F_\infty = 1.$$

Remarquons que les p_j ont des spectres portés dans des intervalles disjoints $[\nu_j, \deg p_j]$, et des normes dans X (majorées par γ_j) qui tendent vers 0. On peut donc définir un élément de X :

$$S_0 = \sum_{j=0}^{\infty} p_j,$$

et nous allons montrer que S_0 est universelle au sens de Menchoff. En effet, soit $y \in Y$. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, il existe $j(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $y + \varepsilon = y_{j(\varepsilon)}$. On observe que $j(\varepsilon)$ tend vers l'infini quand ε tend vers zero et que

$$y + \varepsilon - (p_0 + p_1 + \cdots + p_{j(\varepsilon)}) = k_{j(\varepsilon)} - p_{j(\varepsilon)},$$

donc $y(t)$ est limite uniforme sur tout F_i des sommes partielles d'ordre $\deg p_j$ de S_0. Donc toute fonction continue sur $\mathbb{T}$ est limite ponctuelle sur $\mathbb{T}$ et uniforme sur chaque F_i d'une suite de sommes partielles de S_0, et il s'ensuit que toute fonction mesurable sur $\mathbb{T}$ est limite presque partout de la même suite de sommes partielles.

Soit $\zeta \in Y$, et considérons la série $S_0 + \zeta$. Ses sommes partielles vont approcher $y + \zeta$, c'est-à-dire n'importe quel élément de Y, comme celles de S_0 approchent y. Cela montre que les séries universelles au sens de Menchoff forment un ensemble dense dans X.

Soit enfin

$$G(\nu, y, \alpha, i) = \{S \in X \colon \exists n > \nu \colon |S_n - y| < \alpha \text{ sur } F_i\},$$

$(\nu \in \mathbb{N},\ y \in Y,\ \alpha \in \mathbb{Q}^+,\ i \in \mathbb{N})$. C'est un ouvert, dense puisqu'il contient toutes les séries $S_0 + \zeta$ $(\zeta \in Y)$, donc (Baire)

$$J = \bigcap_{\nu, y, \alpha, i} G(\nu, y, \alpha, i)$$

est un G_δ dense dans X. Or $S \in J$ signifie que toute fonction continue sur $\mathbb{T}$ est limite ponctuelle sur F_∞ et uniforme sur chaque F_i d'une suite de sommes partielles de S. Donc, quasi-sûrement dans X, S est universelle au sens de Menchoff, et la preuve est achevée.

Dans le cours de cette preuve nous n'avons pas utilisé la propriété (2) du Lemme 1. Elle va nous servir maintenir pour établir un théorème voisin, dans lequel $c_0(\mathbb{Z})$ est remplacé par un espace plus petit, par exemple $\ell^p(\mathbb{Z})$ avec $p > 2$ (naturellement, on ne peut pas remplacer $c_0(\mathbb{Z})$ par $\ell^2(\mathbb{Z})$).

Etant donné une fonction $x \to \phi(x)$ strictement croissante appliquant $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$, on désigne par ℓ_ϕ l'ensemble des suites à valeurs complexes (c_n) $(n \in \mathbb{N})$ telles que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi\big(|c_n|\big) < \infty.$$

Lorsque ϕ est convexe et que $\phi(2x) = \mathrm{O}(\phi(x))$ $(x \to 0)$, ℓ_ϕ coïcide avec l'espace de Banach dont la boule unité est :

$$\left\{(c_n)(n \in \mathbb{N})\colon \sum_{n=0}^{\infty} \phi\bigl(|c_n|\bigr) \leqslant 1\right\},$$

(Orlicz ; voir p. ex. ([20], Chap. 4)).

THÉORÈME 2. – (1) *Si ϕ est une application strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\phi(x) = \mathrm{o}(x^2)$ $(x \to 0)$, il existe une série S: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$, universelle au sens de Menchoff, telle que $\sum \phi(|c_n|) < \infty$.*

(2) *Si de plus ϕ est convexe et $\phi(2x) = \mathrm{O}(\phi(x))$ $(x \to 0)$, quasi toute série S telle que $(c_n) \in \ell_\phi$ est universelle au sens de Menchoff.*

Preuve de (1). Il suffit de modifier légèrement la preuve du Théoréme 1. Au lieu de partir des suites (α_j), (β_j) et (γ_j), partons de (α_j) et (β_j) seulement. Posons $\phi(x) = x^2\varepsilon(x)$ et observons que, pour tout polynôme trigonométrique p,

$$\sum \phi\bigl(|\hat{p}_n|\bigr) \leqslant \sum |\hat{p}_n|^2 \tilde{\varepsilon}\bigl(\sup|\hat{p}_n|\bigr),$$

avec $\tilde{\varepsilon}(x) = \sup\{\varepsilon(t)\colon\ 0 < t \leqslant x\}$.

On construit maintenant par récurrence, outre les suites (ν_j), (p_j), (k_j), soumises aux mêmes conditions que dans la preuve du Théoréme 1, la suite (γ_j) de façon que :

$$\tilde{\varepsilon}(\gamma_j) A(k_j, \alpha_j, \beta_j, \nu_j) < 2^{-j} \quad (j \in \mathbb{N}).$$

La série S_0 se construit de la même façon que dans la preuve du Théoréme 1, et c'est la série S cherchée, puisque

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \phi\bigl(|c_n|\bigr) \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}.$$

Preuve de (2). Il suffit de reprendre, sans la modifier, la fin de la preuve du Théorème 1.

On peut encore apporter une précision aux Théorémes 1 et 2, relative au spectre des séries S. On appellera maille de type (a, b), a et b étant deux entiers > 0, toute partie de $\mathbb{N}$ de la forme :

$$\bigl\{m + \lambda n, m \in \{-a, -a+1, \ldots, a-1, a\},\ n \in \{1, 2, \ldots, b\}\bigr\}$$

avec λ entier $> 2a$.

THÉORÈME 3. – *Les énoncés des Théorèmes* 1 *et* 2 *restent valables en se restreignant aux séries S de la forme S: $\sum_{n \in \Lambda} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ lorsque, pour chaque couple d'entiers positifs a et b, Λ contient une maille de type (a, b).*

La preuve du Théorème 3 consiste à montrer que, dans la preuve du Lemma 2, on peut choisir p de façon que son spectre soit dans une maille de type (a, b), contenue dans Λ, ce qui est immédiat : on choisit $a \geqslant \max\{\nu, \deg p_0\}$ et $b = \deg q$, puis $N = \lambda \geqslant 2a$.

La condition sur Λ revient à dire que Λ contient des mailles de type (a, a) pour des valeurs de a arbitrairement grandes. Cette condition est compatible avec la condition $\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{\lambda} < \infty$, qui entraine que le système $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\}$ $(\lambda \in \Lambda)$ n'est total sur aucun intervalle ([8], p. 34).

Terminons avec une remarque sur les notions d'universalité au sens de Menchoff et au sens des séries de Taylor. Nous avons vu dans la récapulation qu'une série de Taylor (convergente dans

$D=\{\zeta\colon |\zeta|<1\}$) universelle, considérée a la frontière de D ($\zeta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$), est universelle au sens de Menchoff. On peut se demander si une série de Taylor convergente dans D et qui, considérée à la frontière de D, est universelle au sens de Menchoff, est nécessairement universelle. Il n'en est rien, et les Théorémes 1 et 3 le montrent de deux façons : le Théoréme 3 parce que la condition $\sum_{\lambda\in\Lambda}\frac{1}{\lambda}<\infty$ interdit de choisir pour K un arc de la frontière de D et d'approcher par des sommes partielles toute fonction continue sur K, et le Théoréme 1 parce que l'universalité au sens des séries de Taylor entraine, comme on l'a vu, que les coefficients ne tendent pas vers 0. Cette question particulière a été à l'origine du présent article.

RÉFÉRENCES

[1] N.K. BARI, *Trigonometric Series* (in Russian), Fizmatgiz, Moscow, 1961.
[2] C. CHUI and M.N. PARNES, Approximation by overconvergence of power series, *J. Math. Anal. Appl.* 36 (1971) 693–696.
[3] G. COSTAKIS, Some remarks on universal functions and Taylor series, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 128 (2000) 157–175.
[4] G. COSTAKIS and A. MELAS, On the range of universal functions, *Bull. Lond. Math. Soc.*, À paraître.
[5] W. GEHLEN, W. LUH and J. MÜLLER, On the extreme of O-universal functions, soumis.
[6] K.-G. GROSSE-ERDMANN, Holomorphe Monster und universelle Funktionen, *Mitt. Math. Sem. Giessen*, Heft 176, ISSN 0373-8221, 1987.
[7] J.-P. KAHANE, *Séries de Fourier Absolument Convergentes*, Ergeb. Math., Vol. 50, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
[8] J.-P. KAHANE, *Lectures on Mean Periodic Functions*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1959.
[9] J.-P. KAHANE, Baire's category theorem and trigonometric series, *J. Anal. Math.*, à paraître.
[10] J.-P. KAHANE and Y. KATZNELSON, Sur le comportement radial des fonctions analytiques, *C. R. Acad. Sci. Paris* 272 (1971) 718.
[11] J.-P. KAHANE and R. SALEM, *Ensembles Parfaits et Séries Trigonométriques*, Hermann, Paris, 1963 (nouvelle édition 1985).
[12] W. LUH, Approximation analytischer Funktionen durch überkonvergente Potenzreihen und deren Matrix-Transformierten, *Mitt. Math. Sem. Giessen* 88 (1970).
[13] A. MELAS, On the growth of universal functions, *J. Anal. Math.*, à paraître.
[14] A. MELAS and V. NESTORIDIS, Universality of Taylor series as a generic property of holomorphic functions, soumis.
[15] A. MELAS and V. NESTORIDIS, On various types of universal Taylor series, *Complex Variables*, à paraître.
[16] A. MELAS, V. NESTORIDIS and I. PAPADOPERAKIS, Growth of coefficients of universal Taylor series and comparison of two classes of functions, *J. Anal. Math.* 73 (1997) 187–202.
[17] D.E. MENŠOV (MENCHOFF), Sur les séries trigonométriques universelles, *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)* 49 (1945) 79–82.
[18] V. NESTORIDIS, Universal Taylor series, *Ann. Inst. Fourier*, *Grenoble* 46 (1996) 1293–1306.
[19] V. NESTORIDIS, An extension of the notion of universal Taylor series, in: *Computational Methods and Function Theory '97 (CMFT'97)*, Nicosia, Cyprus, 1997, pp. 421–430.
[20] A. ZYGMUND, *Trigonometric Series*, second edition reprinted, vol. I, II, Cambridge University Press, 1979.