Theoretical Computer Science 65 (1989) 153-169
North-Holland

SYSTEMES DE NUMERATION ET FONCTIONS FRACTALES RELATIFS AUX SUBSTITUTIONS

Jean-Marie DUMONT

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Luminy, 70 Route Léon-Lachamp, 13288 Marseille Cedex 9, France

Alain THOMAS

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de St Charles, Université de Provence, 4 Place V. Hugo, 13331 Marseille Cedex 3, France

Received February 1988

Abstract. Let A be a finite alphabet, σ a substitution over A, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a fixed point for σ, and for each $a\in A$, $f(a)$ a real number. We establish, under some assumptions, an asymptotic formula concerning the sum $S^f(N)=\sum_{i<N} f(u_i)$, $N\in\mathbb{N}$. This result generalizes some previous results from Coquet or Brillhart, Erdös, and Morton. Moreover, relations with self-affine functions (in a sense which generalizes a definition from Kamae) are proved. The calculi leave over systems of representation of integers and real numbers.

Contents

Introduction

Soit, pour n entier, $s(n)$ la somme des chiffres de n écrit en base 2. Coquet [6] a montré qu'il existe une fonction F réelle continue, jamais dérivable, définie pour $x\geqslant 1$ et vérifiant

$$F(4x)=F(x) \quad \text{et} \quad \sum_{n<N}(-1)^{s(3n)}=N^{\beta}F(N)+O(1)$$

où $\beta=\log_4 3$.

La même année, en 1983, Brillhart, Erdös et Morton [3] publièrent une propriété analogue pour la suite de Rudin-Shapiro. Soit $r(n)$ le nombre de blocs 11 dans l'écriture binaire de n. Alors il existe une fonction réelle G continue, presque jamais dérivable, telle que

$$G(4x)=G(x) \quad \text{et} \quad \sum_{n<N}(-1)^{r(n)}=N^{1/2}G(N).$$

Les méthodes mises en œuvre pouvaient paraitre spécifiques aux cas traités. Des généralisations de l'estimation en $O(N^{\beta})$ et $\Omega(N^{\beta})$ en diverses directions furent données (cf. [1, 7, 9, 8]).

Cependant, toujours en 1983, Dekking [7] remarquait une parenté entre les deux sommes que nous venons d'expliciter. Dans chacune une substitution (de longueur constante) y intervient et l'exposant de N est quotient des logarithmes des modules des deux valeurs propres ayant les plus grands modules dans la matrice de cette substitution. (Voir également, à ce sujet, [16, p. 14].)

Nous nous plaçons ici dans le cadre un peu plus général des substitutions de longueur non nécessairement constante. Par contre, nous faisons sur la matrice M de la substitution σ les hypothèses suivantes: M est primitive, sa deuxième valeur propre (en module), θ_2, domine strictement le module des autres (sauf la première θ) et θ_2 est un réel >1.

Soit alors $(u_i)_{i\geq 1}$ un point fixe pour σ; f une application de l'alphabet de σ dans $\mathbb{R}$ telle que ses valeurs constituent un vecteur orthogonal à l'espace propre de M relatif à θ; $\alpha+1$ l'ordre de θ_2 dans le polynôme minimal de M, et enfin $\beta=\log_{\theta}\theta_2$.

Dans ces conditions, nous montrons l'existence d'une fonction réelle continue, définie dans $[1,+\infty[$ et vérifiant

$$F(\theta x)=F(x) \quad \text{et} \quad S^{(f)}(N)=\sum_{1\leq i\leq N} f(u_i)=(\log_{\theta} N)^{\alpha}N^{\beta}F(N)+O(\psi(N))$$

où ψ dépend du spectre de M, mais est toujours tel que $\psi(N)$ soit en $o((\operatorname{Log} N)^{\alpha}N^{\beta})$.

Ainsi, pour la première somme considérée, définissant σ par

$$\begin{aligned}&\sigma(1)=12, \qquad &&\sigma(2)=13, \qquad &&\sigma(3)=26,\\ &\sigma(4)=45, &&\sigma(5)=46, &&\sigma(6)=53;\end{aligned}$$

f par

$$f(1)=f(2)=f(3)=1, \qquad f(4)=f(5)=f(6)=-1$$

et désignant par $(u_n)_{n\geq 1}$ le point fixe de σ tel que $u_1=1$, on a $f(u_n)=(-1)^{s(3(n-1))}$ (pour la construction de σ, cf. [5]). La matrice de cette substitution a pour spectre $\{2, \pm\sqrt{3}, \pm 1, 0\}$ et donc *ne vérifie pas* les hypothèses de notre théorème. Cependant, il suffit de considérer la substitution σ^2 (le point fixe étant évidemment le même) pour être bien dans les conditions du théorème (ici $\theta=4$, $\theta_2=3$, $\alpha=0$).

Pour la deuxième somme considérée on définit σ par

$$\sigma(1)=13, \qquad \sigma(2)=43, \qquad \sigma(3)=12, \qquad \sigma(4)=42,$$

f par

$$f(1)=f(3)=1 \quad \text{et} \quad f(2)=f(4)=-1;$$

on obtient, $(u_n)_{n\geq 1}$ étant le point fixe de première lettre 1, que $f(u_n)=(-1)^{r(n-1)}$ (cf. [4]). Là encore on prendra σ^2 plutôt que σ pour pouvoir utiliser notre théorème (alors $\theta=4$, $\theta_2=2$, $\alpha=0$).

L'étude pour les substitutions de longueur quelconque nécessite la construction d'un système de numération (des entiers) adéquat. C'est l'objet de la Section 1. Le lecteur pourra remarquer la présence d'une suite (a_i) de lettres qui bien qu'étant "invisible" dans l'écriture des entiers y joue cependant le rôle d'un fil conducteur essentiel à la construction même de cette écriture.

Ensuite, à la Section 2 nous établissons le théorème énoncé plus haut. Une des principales idées est d'introduire la fonction $(x\geq 0)$

$$\Phi(x)=\lim_{h\to+\infty} S^{(f)}([\theta^h x])h^{-\alpha}\theta_2^{-h}$$

qui permet une "traduction" dans l'infiniment petit des propriétés asymptotiques de $S^{(f)}(N)$. (Notons que cette idée apparait déjà dans [3].) Ainsi montre-t-on que Φ est Hölder continue d'exposant β (Lemme 2.5). La fonction F du théorème est simplement $F(x)=x^{-\beta}\Phi(x)$.

A la Section 3 on définit, d'une façon voisine de celle de la Section 1, des systèmes de représentation des réels en base θ. Notons qu'ils ont aussi des liens avec ceux développés dans [2], du moins dans le cas des "β nombres simples" au sens de Parry [15] mais cela n'est pas l'objet de ce travail.

Cette représentation permet, à la Section 4, de donner une expression plus "explicite" de la fonction Φ (Lemme 4.2(i)), grâce à laquelle on peut en montrer l'"auto-affinité" en un sens qui généralise la définition de Kamae [11]. La non dérivabilité en tout point de F (si $F\not\equiv 0$) s'en déduit.

Il est un cas important que nous n'étudions pas: c'est celui où $|\theta_2|=1$. Plusieurs raisons donnent à penser qu'il y a là un changement "qualitatif": plutôt que d'étudier $S^f(N)$, c'est la moyenne $(1/N)\sum_{n=1}^N S^f(n)$ dont il serait intéressant de trouver une expression asymptotique.

Pour terminer cette introduction, nous voudrions exprimer nos remerciements au Professeur Gérard Rauzy, dont les idées nous furent souvent précieuses dans l'élaboration de ce travail.

1. Système de numération associé à un point fixe d'une substitution

Soit d un entier, $d\geq 1$, et A l'"alphabet" $A=\{1,2,\ldots,d\}$. On note A^* l'ensemble des "mots" sur A: $A^*=\bigcup_{k\geq 0} A^k$. Le mot vide sera noté ω, et si $m\in A^*$, $|m|$ désigne la longueur du mot m.

Soit σ une "substitution", c.a.d. une application de A dans $A^*/\{\omega\}$. On notera aussi par σ le prolongement par concaténation de cette application à A^* ou à $A^{\mathbb{N}}$, et si $n\in\mathbb{N}$, $\sigma^n=\sigma\circ\sigma\circ\cdots\circ\sigma$, n fois ($\sigma^0=$ l'identité). On supposera dans toute la suite, pour fixer les notations, que le mot $\sigma(1)$ commence par 1, et que $|\sigma(1)|\geq 2$.

Il existe alors un unique point fixe u pour σ dont la première lettre est 1 (démonstration identique à celle donnée dans [4] pour les automates).

Définition. Soient a un élément de A, n un entier et, pour chaque i entier, $0 \leq i \leq n$, (m_i, a_i) un élément de $A^* \times A$. On dit que la suite finie $(m_i, a_i)_{i=0,\dots,n}$ est *admissible* si et seulement si, pour tout i, $1 \leq i \leq n$, $m_{i-1}a_{i-1}$ est préfixe de $\sigma(a_i)$. On dit que cette suite est *a-admissible* si elle est admissible et que, de plus, $m_n a_n$ est préfixe de $\sigma(a)$.

Remarques. (1) Les mots m_i figurant dans une suite a-admissible sont tous préfixes stricts des mots de la forme $\sigma(b)$, $b \in A$. Donc ils appartiennent à un *ensemble fini*.

(2) Deux suites finies de même cardinal, toutes deux a-admissibles et ayant la même suite de mots ont nécessairement la même suite de lettres.

1.1. Lemme. *Soit n un entier. Si $(m_i, a_i)_{i=0,1,\dots,n}$ est une suite admissible, alors*

$$(1) \qquad \sum_{j=0}^{n} |\sigma^j(m_j)| < |\sigma^n(m_n a_n)|.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur l'entier n. La propriété est évidente pour $n=0$. Supposons la vraie pour $n-1$. Alors,

$$\sum_{j=0}^{n} |\sigma^j(m_j)| = \sum_{j=0}^{n-1} |\sigma^j(m_j)| + |\sigma^n(m_n)|.$$

La suite $(m_i, a_i)_{i=0,1,\dots,n-1}$ est admissible, donc

$$\sum_{j=0}^{n-1} |\sigma^j(m_j)| < |\sigma^{n-1}(m_{n-1}a_{n-1})| \leq |\sigma^{n-1}(\sigma(a_n))|$$

(en utilisant la Définition), d'où (1). $\square$

1.2. Lemme. *Soit $a \in A$ tel que $\sigma(a)$ commence par a. Soient des entiers N, n, n' et deux suites a-admissibles $(m_i, a_i)_{i=0,1,\dots,n}$ et $(m'_i, a'_i)_{i=0,1,\dots,n'}$ telles que*

(i) $\quad m_n \neq \omega, \; m'_{n'} \neq \omega$ *et*

$$\text{(ii)} \qquad N = \sum_{j=0}^{n} |\sigma^j(m_j)| = \sum_{j=0}^{n'} |\sigma^j(m'_j)|.$$

Alors $n = n'$.

Démonstration. D'après (ii) et le Lemme 1.1, on a

$$|\sigma^{n'}(m'_{n'})| \leq N < |\sigma^n(m_n a_n)|.$$

Supposons alors que $n' > n$. On aurait donc

$$N \geq |\sigma^{n'}(m'_{n'})| \geq |\sigma^n(\sigma(m'_{n'}))| \geq |\sigma^n(\sigma(a))|$$

en utilisant le fait que $m'_{n'} \neq \omega$, donc contient a puisque $\sigma(a)$ commence à la fois par $m'_{n'}$ et a. Or $\sigma(a)$ commence aussi par $m_n a_n$. Par suite $N \geq |\sigma^n(m_n a_n)| > N$. On ne peut donc avoir $n' > n$ ni $n > n'$ par le même raisonnement: l'assertion est donc démontrée. □

1.3. Lemme. *Soit n un entier. Supposons qu'il existe a, $a \in A$, deux suites a-admissibles $(m_i, a_i)_{i=0,1,\ldots,n}$ et $(m'_i, a'_i)_{i=0,1,\ldots,n}$ et un entier N tels que*

$$N = \sum_{j=0}^{n} |\sigma^j(m_j)| = \sum_{j=0}^{n} |\sigma^j(m'_j)|.$$

Alors pour tout i, $0 \leq i \leq n$ on a $(m_i, a_i) = (m'_i, a'_i)$.

Démonstration. Récurrence sur n: (1) Si $n = 0$, $|m_0| = |m'_0|$ et $\sigma(a)$ commence par $m_0 a_0$ et par $m'_0 a'_0$, d'où $(m_0, a_0) = (m'_0, a'_0)$.

(2) Supposons le lemme vrai pour $n-1$. Supposons de plus que $m_n \neq m'_n$. Puisque $\sigma(a)$ commence à la fois par $m_n a_n$ et par $m'_n a'_n$, on a $|m_n| \neq |m'_n|$. Or, si, par exemple, $|m_n| > |m'_n|$, on a $m = m'_n a'_n m$, $m \in A^*$. D'où

$$N \geq |\sigma^n(m_n)| \geq |\sigma^n(m'_n a'_n)| > N \quad \text{(d'après le Lemme 1.1)}.$$

D'où $m_n = m'_n$, et donc $a_n = a'_n$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence aux suites $(m_i, a_i)_{i=0,1,\ldots,n-1}$ et $(m'_i, a'_i)_{i=0,1,\ldots,n-1}$ qui sont toutes deux a_n-admissibles, et le lemme est démontré. □

1.4. Lemme. *Soit k un entier ≥ 1, a un élément de A, et m $(m \in A^*)$ un préfixe strict du mot $\sigma^k(a)$. Alors il existe $(m', a') \in A^* \times A$ et $m'' \in A^*$ tels que $m'a'$ soit préfixe de $\sigma(a)$, m'' soit préfixe strict de $\sigma^{k-1}(a')$ et $m = \sigma^{k-1}(m')m''$.*

Démonstration. Posons $\sigma(a) = a_1 a_2 \ldots a_l$ avec $l \in \mathbb{N}^*$, $a_i \in A$.

(1) Si $|m| < |\sigma^{k-1}(a_1)|$, m est préfixe strict de $\sigma^{k-1}(a_1)$ et donc $m' = \omega$, $a' = a_1$, $m'' = m$ conviennent.

(2) Si $|m| \geq |\sigma^{k-1}(a_1)|$, il existe un entier j, $1 \leq j \leq l-1$ avec

$$\sum_{h=1}^{j} |\sigma^{k-1}(a_h)| \leq |m| < \sum_{h=1}^{j+1} |\sigma^{k-1}(a_h)|.$$

On pose alors $m' = a_1 a_2 \ldots a_j$, $a' = a_{j+1}$, et on vérifie aisément que $\sigma^{k-1}(m')$ est préfixe de m. Il existe donc m'', $m'' \in A^*$ avec $m = \sigma^{k-1}(m')m''$ et m'' est un préfixe strict de $\sigma^{k-1}(a')$. Donc le triplet (m', a', m'') convient. □

On rappelle que $\sigma(1)$ commence par 1 et que $(u_n)_{n=1,2,\ldots} \in A^{\mathbb{N}}$ est l'unique point fixe de σ tel que $u_1 = 1$. Nous pouvons alors énoncer le théorème principal de cette section.

1.5. Théorème. *Soit N un entier $\geqslant 1$. Il existe alors un unique entier $n = n(N)$ et une seule suite $(m_i, a_i)_{i=0,1,\ldots,n}$ tels que*

(i) *cette suite soit 1-admissible et $m_n \neq \omega$,*

(ii) $u_1 u_2 \ldots u_N = \sigma^n(m_n)\sigma^{n-1}(m_{n-1}) \ldots \sigma^0(m_0)$.

Démonstration. (1) L'unicité de n et de la suite (m_i, a_i) résultent directement des Lemmes 1.2 et 1.3 puisque (ii) $\Rightarrow$ $N = \sum_{j=0}^{n} |\sigma^j(m_j)|$.

(2) L'entier N étant maintenant donné, il existe n entier avec

$$|\sigma^n(1)| \leqslant N < |\sigma^{n+1}(1)|.$$

Le mot $m = u_1 u_2 \ldots u_N$ est donc un préfixe strict de $\sigma^{n+1}(1)$ et on peut appliquer le Lemme 1.4 avec $k = n+1$, $a = 1$. On obtient ainsi un triplet (m_n, a_n, m'') vérifiant les conditions de ce lemme; de plus $m_n \neq \omega$ car $|m| = N \geqslant |\sigma^n(1)|$. Appliquant alors n fois le Lemme 1.4 à partir de m'', on obtient l'existence qu'il fallait démontrer. □

Remarques. (1) Si $(m_i, a_i)_{i=0,1,\ldots,n}$ vérifie la relation (i) et que $N = \sum_{j=0}^{n} |\sigma^j(m_j)|$, alors (ii) est vraie. Cela résulte directement de l'"existence" dans le Théorème 1.5 et des Lemmes 1.2 et 1.3. Une telle écriture de N sera dite "admissible".

(2) On pourra voir dans [14] une façon voisine d'écrire et d'établir l'"existence".

Exemples. (1) (*Substitutions de longueur constante*) Dans ce cas il existe l, $l \in \mathbb{N}^*$, tel que pour tout a, $a \in A$, on ait $|\sigma(a)| = l$. Il est alors clair que

$$\forall j, j \in \mathbb{N} \text{ et } \forall a, a \in A: \quad |\sigma^j(a)| = l^j.$$

La relation (ii) du Théorème 1.1 fournit alors la représentation ordinaire d'un entier en base l. On a en effet

$$N = \sum_{j=0}^{n} |\sigma^j(m_j)| = \sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j l^j \quad \text{où } 0 \leqslant \varepsilon_j = |m_j| < l \text{ et } \varepsilon_n \neq 0$$

puisque $m_n \neq \omega$.

(2) ("*Fibonacci*") Soit $d = 2$ et $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 1$. On a $|\sigma^n(1)| = F_{n+1}$ où F_n désigne le $n$ième terme de la suite de Fibonacci. Les mots m_j intervenant dans l'écriture de N sont 1 ou ω et pour tout j, $(m_j, m_{j+1}) \neq (1, 1)$. On obtient, en posant toujours $\varepsilon_j = |m_j|$ la représentation de N en "numération de Fibonacci" [12].

(3) (*Rauzy*) Soit $d = 3$; $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 13$, $\sigma(3) = 1$. Ici encore $m_j \in \{1, \omega\}$. Le Théorème 1.1 permet de retrouver les résultats de Lemme 2.3 de [17]. On a l'écriture $u_1 u_2 \ldots u_N = \sigma^{n_s}(1) \ldots \sigma^{n_0}(1)$, où $(n_i)_{i=0,1,\ldots,s}$ est une suite strictement croissante d'entiers ne contenant jamais trois entiers consécutifs.

(4) Soit $d = 3$; $\sigma(1) = 123$, $\sigma(2) = 31$, $\sigma(3) = 22$. On a, par exemple, pour $N = 13$, $n = 2$, $(m_2, a_2) = (12, 3)$, $(m_1, a_1) = (\omega, 2)$, $(m_0, a_0) = (3, 1)$.

Nous terminons cette section par une propriété exprimant la forme générale d'un segment fini quelconque du point fixe u.

1.6. Lemme. *Soient N et H deux entiers ≥ 1. Soient $(m_i, a_i)_{i=0,\ldots,n}$ et $(m'_i, a'_i)_{i=0,\ldots,n'}$ deux suites 1-admissibles telles que*

$$m_n \neq \omega, \qquad m'_{n'} \neq \omega, \qquad m = u_1 \ldots u_N = \sigma^n(m_n) \ldots \sigma^0(m_0) \quad \textit{et}$$

$$m' = u_1 \ldots u_{N+H} = \sigma^{n'}(m'_{n'}) \ldots \sigma^0(m'_0).$$

Alors, si $m'' = u_{N+1} \ldots u_{N+H}$, il existe un entier $k \leq n'$ et des mots $(m''_i)_{i=0,\ldots,k}$ de longueur $<\sup\{|\sigma(a)|, a \in A\}$ tels que

$$m'' = a_0 m''_0 \sigma^1(m''_1) \ldots \sigma^k(m''_k) \sigma^{k-1}(m'_{k-1}) \ldots \sigma^0(m'_0).$$

Démonstration. En utilisant le Lemme 1.1, il est clair que $n \leq n'$. Posons $m_i = \omega$ et $a_i = 1$ pour $n < i \leq n'$. On a

$$m = \sigma^{n'}(m_{n'}) \ldots \sigma^n(m_n) \ldots \sigma^0(m_0).$$

Désignons par k le plus grand entier ($\leq n'$) tel que $m_k \neq m'_k$.

Posons, par commodité, $a_{n'+1} = 1$. Alors, m_k et m'_k étant tous deux préfixes de $\sigma(a_{k+1})$ on a $|m_k| \neq |m'_k|$. On vérifie facilement, en utilisant le Lemme 1.1 et le fait que $m'_k a'_k$ est préfixe de $\sigma(a_{k+1})$, que $|m_k| > m'_k|$ est impossible. Donc $|m_k| < |m'_k|$. Par suite, $m_k a_k$ étant préfixe de $\sigma(a_{k+1})$, il existe un mot m''_k tel que $m'_k = m_k a_k m''_k$. Maintenant, pour tout j, $1 \leq j \leq k$, il existe un mot m''_{j-1} tel que $\sigma(a_j) = m_{j-1} a_{j-1} m''_{j-1}$. Par suite,

$$m' = \sigma^{n'}(m_{n'}) \ldots \sigma^k(m_k) \ldots \sigma^0(m_0) a_0 m''_0 \sigma^1(m''_1) \ldots \sigma^k(m''_k) \sigma^{k-1}(m'_{k-1}) \ldots \sigma^0(m'_0),$$

d'où le résultat. □

2. Expression asymptotique de $S^{(f)}(N)$

Notations et hypothèses. Soit, pour $m \in A^*$, $i \in A$, $L_i(m)$ le nombre d'apparitions de la lettre i dans m.

Soit M la matrice de la substitution σ, c.a.d. la matrice carrée d'ordre d telle que $M_{i,j} = L_i(\sigma(j))$. Dans toute la suite nous supposerons que M est *primitive*.

Soit θ le rayon spectral de M: on sait que θ est valeur propre de M, qu'elle domine strictement le module des autres valeurs propres de M et que l'espace propre associé est engendré par un vecteur à coordonnées >0 (cf. [10]).

On notera $\Lambda = (\lambda_i)_{i=1,2,\ldots,d}$ l'unique vecteur propre pour θ normalisé par la condition $\sum_{i=1}^d \lambda_i = 1$.

Le spectre de M étant noté $\{\theta_i | 2 \leq i \leq d'\} \cup \{\theta\}$ en sorte que les θ_i soient distincts et ordonnés par module décroissant, nous supposerons dans cette section que $\theta_2 \in \mathbb{R}$, $\theta_2 > 1$ et $2 < i \leq d' \Rightarrow \theta_2 > |\theta_i|$.

Soit α, $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que l'ordre de θ_2 dans le *polynôme minimal P* de M soit $\boldsymbol{\alpha + 1}$. On définit la fonction φ sur $\mathbb{N}$ par

- si $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$, $\varphi(n)=n^{\gamma}|\theta_3|^n$ où $\gamma+1$ est l'ordre maximum des valeurs propres de module $|\theta_3|$ dans P;
- si $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, $\varphi(n)=n^{\alpha-1}\theta_2^n$.

Et la fonction ψ sur $\mathbb{N}$ par

- si $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$, $\theta_3=0$: $\psi(n)=0$; $0<|\theta_3|<1$: $\psi(n)=1$; $|\theta_3|=1$: $\psi(n)=n^{\gamma+1}$; $|\theta_3|>1$: $\psi(n)=n^{\gamma}|\theta_3|^n$;
- si $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$, $\psi(n)=\varphi(n)$.

Il est aisé de vérifier que, dans tous les cas $\sum_{j=0}^{n}\varphi(j)$ est en $\mathrm{O}(\psi(n))$.

2.1. Lemme. *Pour tout* $(i,j)\in A^2$, *il existe des réels* $\varepsilon(j)>0$ *et* $\lambda'(i,j)$ *tels que, pour* n *entier on ait*

(1) $$L_i(\sigma^n(j))=\varepsilon(j)\lambda_i\theta^n+\lambda'(i,j)n^{\alpha}\theta_2^n+\mathrm{O}(\varphi(n)),$$

(2) $$|\sigma^n(j)|=\varepsilon(j)\theta^n+\sum_{i\in A}\lambda'(i,j)n^{\alpha}\theta_2^n+\mathrm{O}(\varphi(n)).$$

Démonstration. $L(m)$ désignant, pour $m\in A^*$, le vecteur $(L_i(m))_{i\in A}$ on a

(3) $$L(\sigma(m))=ML(m).$$

Par suite, i et j étant fixés, la suite $L_i(\sigma^n(j))$ $(n\in\mathbb{N})$ vérifie une relation de récurrence linéaire dont les coefficients sont ceux du polynôme minimal de M.

Il existe donc des réels $\lambda(i,j)$ et $\lambda(i,j)^{(h)}$ $(h\in\{0,1,\ldots,\alpha\})$ tels que

$$L_i(\sigma^n(j))=\lambda(i,j)\theta^n+\sum_{h=0}^{\alpha}\lambda(i,j)^{(h)}n^h\theta_2^n+\mathrm{O}(\varphi(n)).$$

D'où, en posant $\lambda'(i,j)=\lambda_{i,j}^{(\alpha)}$,

(4) $$L_i(\sigma^n(j))=\lambda(i,j)\theta^n+\lambda'(i,j)n^{\alpha}\theta_2^n+\mathrm{O}(\varphi(n)).$$

Les relations (3) et (4) impliquent alors que pour tout j fixé le vecteur $(\lambda(i,j))_{i\in A}$ est vecteur propre, positif car $L_i(\sigma^n(j))\geqslant 0$, de M relativement à θ. Donc il existe $\varepsilon(j)\geqslant 0$ avec $\lambda(i,j)=\varepsilon(j)\lambda_i$.

Si, pour tout j, $\varepsilon_j=0$, alors la suite $(L_i\sigma^n(j))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifierait une relation de récurrence relative à un polynôme diviseur *strict* de P, qui ne serait donc plus minimal. De plus on vérifie facilement que $(\varepsilon(j))_{j\in A}$ est vecteur propre de ${}^tM$ pour θ, donc ${}^tM$ étant primitive, $\varepsilon_j\neq 0$ pour tout j. D'où (1).

La relation (2) est immédiate en sommant (1) pour $i\in A$. □

Remarque. Pour tout j dans A on a $\varepsilon(j)=\lim_{n\to+\infty}|\sigma^n(j)|\theta^{-n}$ (évident d'après (2)).

Maintenant soit f une application de A dans $\mathbb{R}$. Si $m\in A^*$ on pose

$$S^{(f)}(m)=\begin{cases}0 & \text{si } m=\omega,\\ \sum_{j=1}^{k}f(a_j) & \text{si } m=a_1\ldots a_k,\ a_j\in A.\end{cases}$$

Si N est un entier $\geqslant 1$, on pose $S^{(f)}(N)=S^{(f)}(u_1\ldots u_N)$ et $S^{(f)}(0)=0$. On écrira souvent $S(N)$ au lieu de $S^{(f)}(N)$, f étant dorénavant fixé.

2.2. Lemme. (i) *Pour tout j, $j \in A$, il existe un réel $\lambda'(j)$ tel que*

$$S^{(f)}(\sigma^n(j)) = (\Lambda \cdot f)|\sigma^n(j)| + \lambda'(j) n^\alpha \theta_2^n + \mathrm{O}(\varphi(n))$$

($\cdot$ *désigne le produit scalaire ordinaire dans* $\mathbb{R}^d$).

(ii) *Soit, pour $m \in A^*$,*

$$\lambda'(m) = \begin{cases} 0 & si\ m = \omega, \\ \sum_{j=1}^{k} \lambda'(a_j) & si\ m = a_1 \ldots a_k,\ a_j \in A. \end{cases}$$

Soit N entier $\geqslant 1$ d'écriture admissible $N = \sum_{j=0}^{n(N)} |\sigma^j(m_j)|$. Alors (posant $n = n(N)$),

$$S^{(f)}(N) = (\Lambda \cdot f)N + n^\alpha \sum_{j=0}^{n} \lambda'(m_j)\theta_2^j + \mathrm{O}(\psi(n)).$$

Démonstration. $S^{(f)}(\sigma^n(j)) = \sum_{i \in A} f(i) L_i(\sigma^n(j))$. On utilise alors le Lemme 2.1 et posant $\lambda'(j) = \sum_{i \in A} \lambda'(i,j)[f(i) - \Lambda \cdot f]$, on obtient immédiatement (i). Manifestement (i) est encore vrai quand on remplace la lettre j par un mot; de plus, les mots m_j intervenant dans l'écriture de N appartenant à un ensemble fini (cf. Section 1) la constante intervenant dans le O du (i) peut être choisie indépendamment de m_j. Si $\alpha = 0$, on en déduit alors (ii) en sommant sur j, $0 \leqslant j \leqslant n$. Pour le cas $\alpha \neq 0$, posons

$$\Delta(n) = n^\alpha \sum_{j=0}^{n} \lambda'(m_j)\theta_2^j - \sum_{j=0}^{n} \lambda'(m_j) j^\alpha (\theta_2)^j$$

et $C' = \max\{|\lambda'(m)| \mid m$ préfixe de $\sigma(a)$, $a \in A\}$. On a

$$|\Delta(n)| \leqslant C' \sum_{j=0}^{n-1} (n^\alpha - j^\alpha)\theta_2^j \leqslant C'\alpha n^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)\theta_2^j.$$

Par suite $|\Delta(n)|$ est en $\mathrm{O}(n^{\alpha-1}\theta_2^n)$ puisque la série $\sum_{k=1}^{\infty} k\theta_2^{-k}$ est convergente ($\theta_2 > 1$). On en déduit encore (ii) en sommant sur j. D'où le résultat cherché. □

Remarque. Si $\Lambda \cdot f = 0$, on a pour tout $j \in A$, $\lambda'(\sigma(j)) = \theta_2 \lambda'(j)$. En effet,

$$\begin{aligned} S^{(f)}(|\sigma^{n+1}(j)|) &= \lambda'(\sigma(j)) n^\alpha \theta_2^n + \mathrm{O}(\varphi(n)) \\ &= \lambda'(j)(n+1)^\alpha \theta_2^{n+1} + \mathrm{O}(\varphi(n+1)) \end{aligned}$$

en utilisant (i), ou son extension au mot $\sigma(j)$, pour n et $n+1$; d'où le résultat par passage à la limite $n \to +\infty$.

La somme $S^{(f)}(N)$ est donc une fonction linéaire de N, "perturbée" par des termes correctifs. Le but est maintenant d'étudier cette perturbation. Pour simplifier, nous supposerons dans la suite que le terme linéaire est nul, c.a.d. que $\Lambda \cdot f = 0$. (On peut toujours se ramener à ce cas en posant $f'(i) = f(i) - \Lambda \cdot f$.) On pose $\beta = (\mathrm{Log}\ \theta_2)/(\mathrm{Log}\ \theta)$.

2.3. Lemme. *Il existe un réel C, $C > 0$ tel que pour tous entiers N et H, $H \geqslant 2$ on ait*

$$|S(N+H) - S(N)| \leqslant C(\mathrm{Log}\ H)^\alpha H^\beta.$$

Démonstration. On sait, d'après le Lemme 2.1, que pour toute lettre a de A,

$$\lim_{n\to+\infty} |\sigma^n(a)|\theta^{-n} = \varepsilon(a) > 0.$$

Par suite, il existe ε, $\varepsilon>0$, tel que

$$\forall m,\ m\in A^*,\ m\neq\omega,\ \forall k,\ k\in\mathbb{N},\quad |\sigma^k(m)|\geqslant \varepsilon\theta^k.$$

Considérons alors l'écriture du mot $u_{N+1}\ldots u_{N+H}$ donnée dans le Lemme 1.6 si $N\neq 0$, ou le Théorème 1.1 sinon. Désignons par h l'entier $n(H)$ si $N=0$; et le plus grand entier $\leqslant k$ tel que soit m''_h, soit m'_h diffère du mot vide sinon. On a, dans tous les cas, $H\geqslant\varepsilon\theta^h$; d'où l'existence de C', $C'>0$ avec

$$H\geqslant 2 \ \Rightarrow\ h\leqslant C'\operatorname{Log} H.$$

Or, si $N\neq 0$,

$$S(N+H)-S(N)=\sum_{j=N+1}^{N+H} f(u_j)=f(a_0)+\sum_{j=0}^{h} S(\sigma^j(m''_j))+\sum_{j=0}^{h} S(\sigma^j(m'_j)).$$

On utilise alors le Lemme 2.2(i) en remplaçant la lettre j par le mot m''_j ou m'_j et la puissance n dans l'exposant de σ par la puissance j. Soit $K=\max\{|\lambda'(m)|\,|\,m\in A^*$ et $|m|<l\}$ avec $l=\max\{|\sigma(a)|\,|\,a\in A\}$. On obtient, utilisant $\Lambda\cdot f=0$ et le fait que les longueurs des m''_j et des m'_j sont $<l$ (cf. Lemme 1.6), que

$$|S(N+H)-S(N)|\leqslant\frac{2K}{1-\theta_2^{-1}}\,h^\alpha\theta_2^h+\mathrm{O}(\psi(h)),$$

la constante intervenant dans le O étant indépendante de N et H. Dans le cas $N=0$, le Lemme 2.2(ii) (avec H au lieu de N et h au lieu de n) donne

$$|S(H)|\leqslant\frac{Kh^\alpha}{1-\theta_2^{-1}}\,\theta_2^h+\mathrm{O}(\psi(h)).$$

Par suite, il existe C'', $C''>0$, tel que pour tout N et H

$$|S(N+H)-S(N)|\leqslant C''h^\alpha\theta_2^h.$$

D'où le résultat puisque $\theta_2^h=\theta^{\beta h}\leqslant\varepsilon^{-\beta}H^\beta$. $\square$

2.4. Lemme. *Soit N entier d'écriture admissible $N=\sum_{j=0}^{n}|\sigma^j(m_j)|$ et h entier. Alors*

$$S([\theta^h N])=\left(\frac{n+h}{n}\right)^\alpha\theta_2^h S(N)+\mathrm{o}((n+h)^\alpha\theta_2^{n+h}),$$

la convergence du terme en o *étant uniforme en h quand $n\to+\infty$.*

Démonstration. Soit l'entier $N^{(h)}=\sum_{j=0}^{n}|\sigma^{j+h}(m_j)|$. En utilisant le Lemme 2.1 on obtient

$$\theta^h N-N^{(h)}=\theta^h\mathrm{O}(n^\alpha\theta_2^n)+\mathrm{O}((n+h)^\alpha\theta_2^{n+h}).$$

Donc $[\theta^h N]-N^{(h)}$ est en $\theta^h o(\theta^n)$ car $(n+h)^\alpha \theta_2^h = O(n^\alpha \theta^h)$ et $\theta_2 < \theta$. En utilisant le Lemme 2.3 on obtient

$$S([\theta^h N]) = S(N^{(h)}) + o((\theta_2^h \theta_2^n)(n+h)^\alpha).$$

Par ailleurs, le Lemme 2.2 (où $\Lambda \cdot f = 0$) donne

$$S(N^{(h)}) = (n+h)^\alpha \sum_{j=0}^{n} \lambda'(m_j)\theta_2^{j+h} + O(\psi(n+h))$$

d'où le résultat en utilisant à nouveau le Lemme 2.2 et la définition de ψ. □

Remarque. Si σ est une substitution à longueur constante l, alors $\theta \in l$, $[\theta^h N] = N^{(h)}$ et

$$S([\theta^h N]) = \left(\frac{n+h}{n}\right)^\alpha \theta_2^h [S(N) + O(\psi(n))] + O(\psi(n+h)).$$

2.5. Lemme. *Pour tout* $x \geqslant 0$, $\Phi(x) = \lim_{h\to+\infty} S([\theta^h x])h^{-\alpha}\theta_2^{-h}$ *existe et* $\Phi(\theta x) = \theta_2 \Phi(x)$. *De plus il existe* $K > 0$ *avec pour tout* $x, y \geqslant 0$, $|\Phi(x) - \Phi(y)| \leqslant K|x-y|^\beta$ (*"Hölder continuité d'exposant* β").

Démonstration. On montre d'abord que la suite de terme général $v_h = S([\theta^h x])h^{-\alpha}\theta_2^{-h}$ est de Cauchy pour tout $x > 0$. En effet, si $k \in \mathbb{N}$,

$$S([\theta^{h+k} x]) = S([\theta^h [\theta^k x]]) + O(h^\alpha \theta_2^h)$$

(en appliquant le Lemme 2.3). On applique alors le Lemme 2.4 avec $N = [\theta^k x]$; on remarque de plus que $[\theta^k x] \geqslant |\sigma^n(m_n)|$ avec $m_n \neq \omega$, donc θ^n est en $O(\theta^k)$ ce qui implique $n = k + O(1)$ et donc que

$$(n+h)^\alpha \theta_2^{n+h} = O((k+h)^\alpha \theta_2^{k+h}).$$

On obtient que $|v_{h+k} - v_k| \to 0$ uniformément en h quand $k \to +\infty$. D'où l'existence de Φ.

La relation $\Phi(\theta x) = \theta_2 \Phi(x)$ est alors immédiate.

Enfin, si x et y sont deux réels positifs, $x \neq y$, on a, d'après le Lemme 2.3,

$$|S([\theta^h x]) - S([\theta^h y])| \leqslant C\theta_2^h |x-y|^\beta (h \operatorname{Log} \theta + \operatorname{Log}|x-y|)^\alpha.$$

Utilisant la définition de Φ on obtient par passage à la limite

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leqslant K|x-y|^\beta \quad \text{avec } K = C(\operatorname{Log} \theta)^\alpha. \qquad \square$$

2.6. Théorème. *On rappelle qu'en plus des hypothèses énoncées au début de la Section* 2, *on suppose que* $\Lambda \cdot f = 0$. *Alors il existe une fonction* F *définie et continue dans* $\mathbb{R}_+^*$ *à valeur dans* $\mathbb{R}$ *telle que*

(i) $\forall x, x > 0$, $F(\theta x) = F(x)$,

(ii) $S^{(f)}(N) = (\log_\theta N)^\alpha N^\beta F(N) + o((\operatorname{Log} N)^\alpha N^\beta)$.

Démonstration. Posons, pour $x>0$, $F(x)=x^{-\beta}\Phi(x)$. La continuité de F et la relation (i) résultent directement du Lemme 2.5. Remarquons aussi que F est bornée sur $[1,+\infty[$. Maintenant, d'après le Lemme 2.4 et la définition de Φ, on a

$$\Phi(N)=n^{-\alpha}S(N)+\mathrm{o}(\theta_2^n).$$

Donc $S(N)=n^{\alpha}N^{\beta}F(N)+\mathrm{o}(n^{\alpha}\theta_2^n)$.

Or $|\sigma^n(m_n)|\leqslant N<|\sigma^{n+1}(1)|$, $m_n\neq\omega$ et il existe donc deux nombres c et $d>0$ avec $c\theta^n\leqslant N<d\theta^n$; d'où $n=\log_\theta(N)+\mathrm{O}(1)$. Par suite, $n^{\alpha}=(\log_\theta N)^{\alpha}+\mathrm{O}(n^{\alpha-1})$ (si $\alpha\neq 0$). D'où (ii), puisque la suite $F(N)$ est bornée et que $\theta_2^n=\theta^{\beta n}$ est en $\mathrm{O}(N^{\beta})$. □

Remarques. (1) Un calcul plus serré (au Lemme 2.4) montre qu'en fait le terme d'erreur du Théorème 2.6 est en

$$\mathrm{O}(n^{\alpha(\beta+1)}\theta_2^{\beta n})+\mathrm{O}(\psi(n)).$$

(2) Quand σ est une substitution de longueur constante, ce terme est en $\mathrm{O}(\psi(n))$. Par exemple, pour la suite de Rudin-Shapiro, on a $\theta_3=0$ et on retrouve exactement l'expression donnée en Introduction.

(3) Si $A\cdot f\neq 0$ on a la même conclusion, le terme de gauche de (ii) étant remplacé par $S^{(f)}(N)-(A\cdot f)N$.

3. Représentations des réels en base θ

Dans cette section, nous supposons seulement, en plus des hypothèses de la Section 1, que *M est primitive et que $\theta>1$*. On pose encore, pour $a\in A$, $\varepsilon(a)=\lim_{n\to\infty}|\sigma^n(a)|\theta^{-n}$ l'existence et la stricte positivité de cette limite étant toujours vraie. De plus, si $m\in A^*$ on note

$$\varepsilon(m)=\begin{cases}0 & \text{si } m=\omega,\\ \sum_{j=1}^{k}\varepsilon(a_j) & \text{si } m=a_1\ldots a_k,\ a_j\in A.\end{cases}$$

De cela découle immédiatement la relation

$$\forall a,\ a\in A:\quad \varepsilon(\sigma(a))=\theta\varepsilon(a).$$

Définition. Nous disons qu'une *suite infinie* $(m_i,a_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est *a-admissible* (avec $a\in A$) si pour tout entier $i\geqslant 1$, $m_i\in A^*$, $a_i\in A$ et que de plus

(i) m_1a_1 est préfixe de $\sigma(a)$, $i\geqslant 2\Rightarrow m_ia_i$ est préfixe de $\sigma(a_{i-1})$,

(ii) il n'existe aucun entier I tel que $i\geqslant I\Rightarrow\sigma(a_{i-1})=m_ia_i$.

3.1. Lemme. *Soit $(m_i,a_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite a_0-admissible, et pour k entier $\geqslant 1$, $r_k=\sum_{j=k}^{\infty}\varepsilon(m_j)\theta^{k-j}$. Alors, $r_k<\theta\varepsilon(a_{k-1})$.*

Démonstration. La convergence de la série (positive) définissant r_k est immédiate du fait que $\varepsilon(m_k)$ est uniformément borné et que $\theta>1$. De plus, pour tout $j\geqslant k$,

$m_{j+1}a_{j+1}$ étant préfixe de $\sigma(a_j)$, on a $\varepsilon(\sigma(a_j)) = \theta\varepsilon(a_j) \geq \varepsilon(m_{j+1}a_{j+1})$. D'où

$$r_k = \varepsilon(m_k a_k) - \sum_{j=k}^{\infty} (\theta\varepsilon(a_j) - \varepsilon(m_{j+1}a_{j+1}))\theta^{-j+k-1}$$

donc $r_k \leq \varepsilon(\sigma(a_{k-1})) = \theta\varepsilon(a_{k-1})$. Si $r_k = \theta\varepsilon(a_{k-1})$, alors $r_k = \varepsilon(m_k a_k)$ et pour tout $j \geq k$, $\varepsilon(\sigma(a_j)) = \varepsilon(m_{j+1}a_{j+1})$, d'où $\sigma(a_j) = m_{j+1}a_{j+1}$ (puisque pour tout $a \in A$, $\varepsilon(a) > 0$). Mais cela est en contradiction avec (ii) de la définition de l'admissibilité. □

3.2. Théorème. *Soit $a \in A$ et x un réel, $0 \leq x < \varepsilon(a)$. Alors il existe une et une seule suite a-admissible $(m_i, a_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ telle que $x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon(m_i)\theta^{-i}$.*

Démonstration. L'unicité est conséquence aisée du Lemme 3.1.

Pour l'existence, on définit par récurrence sur l'entier $k \geq 1$ la suite (m_k, a_k) d'éléments de $A^* \times A$ telle que $m_k a_k$ soit préfixe de $\sigma(a_{k-1})$ (avec $a_0 = a$) et

$$(1) \qquad 0 \leq \theta^k \left(x - \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(m_i)\theta^{-i} \right) < \varepsilon(a_k).$$

Pour $k = 1$ la relation $0 \leq \theta x < \theta\varepsilon(a) = \varepsilon(\sigma(a))$ implique qu'il existe $(m_1, a_1) \in A^* \times A$ avec $\varepsilon(m_1) \leq \theta x < \varepsilon(m_1 a_1)$ et $m_1 a_1$ prefixe de $\sigma(a)$. $(m_i, a_i)_{i=1\ldots k}$ étant maintenant supposé défini et l_k désignant le terme central de (1) on a $0 \leq \theta l_k < \varepsilon(\sigma(a_k))$ et donc il existe $(m_{k+1}, a_{k+1}) \in A^* \times A$ tel que $m_{k+1}a_{k+1}$ soit préfixe de $\sigma(a_k)$ et $\varepsilon(m_{k+1}) \leq \theta l_k < \varepsilon(m_{k+1}a_{k+1})$. Il est alors trivial de montrer que (1) est vraie pour $k+1$ et que (m_k, a_k) verifie la conclusion du théorème. □

Exemples. (1) Si σ est une substitution de longueur constante l, on obtient la représentation "décimale" en base l (ici: $\forall a$, $a \in A$: $\varepsilon(a) = 1$).

(2) (*Substitution de Fibonacci*) Ici $\theta = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$, $\varepsilon(1) = \theta^2/\sqrt{5}$ et on obtient pour $x/\varepsilon(1)$ le système de numération "ayant pour base le nombre d'or" (cf. [12]).

4. Proprietés d'auto-affinité de la fonction Φ

Nous nous plaçons maintenant à nouveau dans les hypothèses énoncées dans la Section 2. Les notations y sont les mêmes. Pour commencer, établissons un lien "asymptotique" entre les systèmes de numérations étudiés aux Sections 1 et 3.

4.1. Lemme. *Soit $a \in A$, $x \in [0, \varepsilon(a)[$ d'écriture a-admissible, $x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon(m_i)\theta^{-i}$ (cf. Théorème 3.2). Alors, pour n entier ≥ 1,*

$$[\theta^n x] = \sum_{i=0}^{n-1} |\sigma^i(m_{n-i})| + O(n^{\alpha}\theta_2^n).$$

Démonstration. Immédiate en utilisant le fait que les "chiffres" $\varepsilon(m_i)$ sont en nombre fini, donc uniformément bornés, et le Lemme 2.1. □

Notation. Pour chaque a, $a \in A$, on définit la fonction Φ_a dans l'intervalle $[0, \varepsilon(a)]$ par si $0 \leq x < \varepsilon(a)$, x d'écriture a-admissible, $x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon(m_i)\theta^{-i}$, $\lambda'(m)$ ayant été defini au Lemme 2.2,

$$\Phi_a(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda'(m_i)\theta_2^{-i} \quad \text{et} \quad \Phi_a(\varepsilon(a)) = \lambda'(a).$$

Définition. Soit n un entier ≥ 1 et $a \in A$. On dira que I, $I \subset \mathbb{R}_+$ est un *intervalle admissible d'ordre* n et *de lettre* a s'il existe une suite finie 1-admissible $(m_{n-i+1}, a_{n-i+1})_{i=1,\dots,n}$ telle que $a_n = a$ et que si $x_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(m_i)\theta^{-i}$ et $y_n = x_n + \varepsilon(a_n)\theta^{-n}$, alors $I = [x_n, y_n]$.

Remarques. (1) Si I est un intervalle admissible, alors $I \subset [0, \varepsilon(1)]$. En effet, pour tout k, $1 \leq k \leq n$, $m_k a_k$ étant préfixe de $\sigma(a_{k-1})$ (avec $a_0 = 1$) on a

$$\varepsilon(m_k a_k) \leq \varepsilon(\sigma(a_{k-1})) = \theta\varepsilon(a_{k-1}),$$

d'où

$$y_n \leq \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon(m_i)\theta^{-i} + \varepsilon(a_{n-1})\theta^{-(n-1)} \leq \cdots \leq \varepsilon(1).$$

(2) Un intervalle admissible d'ordre n et de lettre a contient exactement $L_i(\sigma(a))$ intervalles admissibles d'ordre $n+1$, de lettre i. Par suite, il y a $L_i(\sigma^n(1))$ intervalles admissibles d'ordre n, de lettre i

(3) Quand σ est une substitution de longueur constante l, les intervalles admissibles sont les intervalles l-adiques.

4.2. Lemme. (i) $\forall x$, $x \in [0, \varepsilon(1)]$: $\Phi(x) = \Phi_1(x)$ (Φ *a été défini au Lemme* 2.5).

(ii) *Soient n entier* ≥ 1, $a \in A$, *et I un intervalle admissible d'ordre n, de lettre a. Alors*

$$\forall x,\ x \in I: \quad \Phi_1(x) = \Phi_1(x_n) + \theta_2^{-n}\Phi_a[(x - x_n)\theta^n].$$

(iii) *Pour toute lettre a la fonction* Φ_a *est continue sur* $[0, \varepsilon(a)]$.

Démonstration. (i): Supposons d'abord que $0 \leq x < \varepsilon(1)$ et que x soit d'écriture 1-admissible $x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon(m_i)\theta^{-i}$. Pour chaque entier $n \geq 1$ la suite finie $(m_{n-i}, a_{n-i})_{i=0,\dots,n-1}$ est 1-admissible (au sens de la Section 1) et donc $\sum_{i=0}^{n-1} |\sigma^i(m_{n-i})|$ constitue l'écriture admissible d'un certain entier $N(n)$. Par suite, d'après le Lemme 2.2(ii),

$$S(N(n)) = (n-1)^{\alpha} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda'(m_{n-i})\theta_2^{i} + O(\psi(n-1)).$$

Maintenant, utilisant les Lemmes 4.1 et 2.3, on obtient

$$S([\theta^n x]) = S(N(n)) + O(n^{\alpha}\theta_2^{n}),$$

puisque $\beta < 1$. D'où, vu la définition de Φ, on obtient le résultat par passage à la limite.

Si $x = \varepsilon(1)$, le Lemme 2.1(ii) donne $\theta^n x = |\sigma^n(1)| + O(n^\alpha \theta_2^n)$ et un calcul identique au précédent montre que $\Phi(\varepsilon(1)) = \lambda'(1) = \Phi_1(\varepsilon(1))$.

(ii): Soit $x \in I$, $x_n \leq x < y_n$. Soit $x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon(m'_i)\theta^{-i}$ l'écriture 1-admissible de x; le Lemme 3.1 implique alors que

$$\forall k,\ 1 \leq k \leq n: \quad (m'_k, a'_k) = (m_k, a_k).$$

De plus $(x - x_n)\theta^n \in [0, \varepsilon(a_n)[$ et la suite infinie $(m'_{n+i}, a'_{n+i})_{i \geq 1}$ est a-admissible. D'où le résultat par un calcul immédiat.

Si maintenant $x = y_n$, alors $(x - x_n)\theta^n = \varepsilon(a)$ et le membre droite de l'égalité à montrer est

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda'(m_i)\theta_2^{-i} + \lambda'(a)\theta_2^{-n}.$$

Alors, si $x < \varepsilon(1)$ et k est le plus grand entier $(\leq n-1)$ tel que $m_{k+1}a_{k+1}$ soit préfixe strict de $\sigma(a_k)$, x s'écrit sous forme admissible

$$x = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(m_i)\theta^{-i} + \varepsilon(m_{k+1}a_{k+1})\theta^{-k-1}, \quad \text{avec } a_{k+1} = a.$$

Le fait que $\lambda'(\sigma(a)) = \theta_2\lambda'(a)$ (remarque suivant le Lemme 2.2) permet alors de conclure.

Enfin, si $x = \varepsilon(1)$ on utilise directement $\lambda'(\sigma(1)) = \theta_2\lambda'(1)$.

(iii): Si $a = 1$ le résultat est immédiat d'après (i) et le Lemme 2.5. Ensuite, a étant quelconque, l'irréductibilité de la matrice M implique l'existence de $n \in \mathbb{N}$ avec $L_a(\sigma^n(1)) \neq 0$, et donc d'un intervalle admissible d'ordre n et de lettre a. La relation du (ii) et la continuité de Φ_1 permettent de conclure aisément. □

Nous pouvons maintenant énoncer une propriété de "fractalité" ou plus précisément d'"auto-affinité" de la fonction Φ sous la forme suivante.

4.3. Théorème. *Il existe d fonctions continues* $(\Phi_a)_{a \in A}$, *chaque* Φ_a *étant définie sur* $[0, \varepsilon(a)]$, *telles que*

(i) *pour tout entier* $n \geq 1$ *et tout intervalle I admissible d'ordre n de lettre a et de borne inférieure* x_n,

$$\forall x,\ x \in I: \quad \Phi(x) = \Phi(x_n) + \theta_2^{-n}\Phi_a((x - x_n)\theta^n);$$

(ii) *pour tout entier* $m \geq 1$, *tout intervalle J admissible d'ordre m et toute lettre a, il existe un entier* $n \geq m$ *et un intervalle I admissible d'ordre n, de lettre a tels que* $I \subset J$ *et que la relation du* (i) *soit vraie.*

L'assertion (ii) est conséquence directe de l'irréductibilité de M: si J est de lettre b, il existe un entier h tel que $L_a(\sigma^h(b)) \neq 0$, donc, d'après la remarque (2) précédent le Lemme 4.2 un intervalle $I \subset J$ admissible d'ordre $n = m + h$, et de lettre a.

En particulier, quand σ est une substitution de longueur constante l et que $\Phi \not\equiv 0$, on obtient que Φ est une fonction auto-affine de base l et d'ordre β au sens de T. Kamae [11].

Une conséquence en est que, du moins dans ces cas, Φ n'est dérivable nulle part, car $0<\beta<1$ (cf. [11, 13]). Cela permet de retrouver, d'une manière peut-être plus naturelle, la propriété de non-dérivabilité de la fonction F du premier exemple de l'Introduction; et de préciser, quant au deuxième exemple, qu'en fait G n'est jamais dérivable.

Nous pouvons d'ailleurs obtenir facilement le résultat dans le cas général.

4.4. Corollaire. *Si $\Phi \not\equiv 0$, alors Φ n'est dérivable en aucun point de* $[0, \varepsilon(1)]$.

Démonstration. L'hypothèse implique, d'après le Théorème 4.3, qu'aucune des fonctions Φ_a, $a \in A$ n'est constante. Soit

$$K = \inf_{a \in A}(\sup\{|\Phi_a(x) - \Phi_a(y)| \mid x, y \in [0, \varepsilon(a)]\}); \quad K>0.$$

Soit $x \in [0, \varepsilon(1)]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe un intervalle admissible d'ordre n, $[x_n, x_n + \varepsilon(a_n)\varepsilon^{-n}]$, contenant x. Donc il existe t_n et u_n dans $[0, \varepsilon(a_n)]$ avec

$$x = x_n + t_n\theta^{-n} \quad \text{et} \quad |\Phi_{a_n}(u_n) - \Phi_{a_n}(t_n)| \geqslant \tfrac{1}{2}K.$$

L'assertion (i) du Théorème 4.3 donne

$$|\Phi(x_n + u_n\theta^{-n}) - \Phi(x_n + t_n\theta^{-n})| \geqslant \theta_2^{-n}\tfrac{1}{2}K.$$

Posant $h_n = (u_n - t_n)\theta^{-n}$ on a $|h_n| \leqslant C\theta^{-n}$ pour $C>0$ et donc

$$|\Phi(x+h_n) - \Phi(x)| \geqslant \frac{K}{2C^\beta}|h_n|^\beta \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

D'où le résultat puisque $\beta < 1$. $\square$

Note (Avril 1989). Dans le cas $\theta_2 = 1$, $\alpha = 0$, $A \cdot f = 0$ (notations de la Section 2) le premier auteur de cet article a determiné γ, réel ne dependant que de σ et f, tel que

$$\sum_{n<N} S^{(f)}(n) = \gamma N \log_\theta(N) + O(N)$$

(Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, 1987-1988, Exposé No. 39). En fait, le terme on $O(N)$ est de la forme $NG(N)$, $G(x)$ definie continue pour $x>0$, $G(\theta x) = G(x)$ (travail en course de redaction).

Bibliographie

[1] J.P. Allouche et M. Mendes-France, Suite de Rudin-Shapiro et modèle d'Ising, *Bull. Soc. Math. Fr.* **113** (1983) 273-283.

[2] A. Bertrand-Mathis, Développement en base θ; répartition mod 1 de la suite $(x\theta^n)$; langages codés et θ-shift, *Bull. Soc. Math. Fr.* **114** (1986) 271-323.

[3] J. Brillhart, P. Erdös et P. Morton, On sums of Rudin–Shapiro coefficients II, *Pacific J. Math.* **107** (1983) 39–69.

[4] G. Christol, T. Kamae, M. Mendes-France et G. Rauzy, Suites algébriques, automates et substitutions, *Bull. Soc. Math. Fr.* **108** (1980) 401–418.

[5] A. Cobham, Uniform tag sequences, *Math. Systems Theory* **6** (1972) 164–192.

[6] J. Coquet, A summation formula related to the binary digits, *Invent. Math.* **73** (1983) 107–115.

[7] F.M. Dekking, On the distribution of digits in arithmetic sequences, Séminaire Théorie des Nombres, Bordeaux 1982/83.

[8] J.M. Dumont, Discrepance des progressions arithmétiques dans la suite de Morse, *C.R. Acad. Sci.* **297** (1983) 145–146.

[9] J.M. Dumont, Discrepance des progressions arithmétiques dans la suite de Morse, Thèse de 3ème cycle, Univ. Aix-Marseille I, 1984.

[10] F.R. Gantmacher, *Théorie des Matrices* (Dunod, Paris, 1966) Chapitre 13.

[11] T. Kamae, A characterization of self-affine functions, *Japan J. Appl. Math.* **3** (1986) 271–280.

[12] D. Knuth, *The Art of Computer Programming, Vol. 1* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1969).

[13] N. Kono, On self-affine functions, *Japan J. Appl. Math.* **3** (1986) 259–269.

[14] C. Mauduit, Sur l'ensemble normal des substitutions de longueur quelconque, *J. Number Theory* **29** (1988) 235–250.

[15] W. Parry, On the β expansion of real numbers, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **11** (1960) 401–416.

[16] M. Queffelec, Une nouvelle propriété des suites de Rudin–Shapiro, Pré-publications Mathématiques No. 62, Université Paris-Nord.

[17] G. Rauzy, Nombres algébriques et substitutions, *Bull. Soc. Math. Fr.* **110** (1982) 147–178.