Journal of Algebra 324 (2010) 860–874

Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Algebra

www.elsevier.com/locate/jalgebra

Foncteurs polynomiaux stricts et modules instables sur l'algèbre de Steenrod

Nguyen Dang Ho Hai [1]

LAGA, UMR 7539 du CNRS, Université Paris 13, 99, Av. J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 2 février 2010
Communiqué par Michel Broué

Mots-clés :
Algèbre de Steenrod
Module instable
Foncteur polynomial

RÉSUMÉ

Soient $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ respectivement les catégories des modules instables sur l'algèbre de Steenrod modulo p (sans Bockstein), des représentations génériques des groupes linéaires généraux (H.-W. Henn, J. Lannes and L. Schwartz (1993) [1], N.J. Kuhn (1994) [2]) et des foncteurs polynomiaux stricts à la Friedlander and Suslin (1997) [3]. Un foncteur $f:\mathcal{U}\to\mathcal{F}$ est construit dans H.-W. Henn, J. Lannes and L. Schwartz (1993) [1] utilisant le foncteur de Lannes en degré 0. On construit dans cet article un foncteur $\bar{m}:\mathcal{P}\to\mathcal{U}$, exact et commutant au produit tensoriel et à la torsion de Frobenius, qui constitue un relèvement du foncteur oubli $\mathcal{O}:\mathcal{P}\to\mathcal{F}$: $\bar{m}\circ f=\mathcal{O}$.

1. Introduction

Soient p un nombre premier et $\mathscr{A}$ l'algèbre des puissances de Steenrod modulo p réduites (si $p=2$, c'est l'algèbre de Steenrod ; pour $p>2$ on ne considère pas le Bockstein). La catégorie $\mathcal{U}$ des $\mathscr{A}$-modules instables est un objet fondamental en topologie algébrique [4]. L'interaction de la catégorie des modules instables avec différents domaines mathématiques est illustrée par le diagramme de foncteurs suivant :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{P} \arrow[d, "\mathcal{O}"] \\ \mathcal{U} \arrow[r, "f"] & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

Adresse e-mail : nguyen@math.univ-paris13.fr.

[1] L'auteur est partiellement soutenu par le projet ANR blanc BLANN08-2_338236, HGRT.

0021-8693/$ – see front matter
doi:10.1016/j.jalgebra.2010.04.016

Dans ce diagramme de foncteurs, la catégorie $\mathcal{F}$, baptisée par N. Kuhn dans [2] la catégorie des *représentations génériques* des groupes linéaires généraux, est la catégorie des foncteurs depuis la catégorie des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels de dimension finie vers celle des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels, $\mathbb{F}_p$ étant le corps premier de caractéristique p.

Le foncteur $f : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$ est défini en associant à un module instable M le foncteur $f(M)(V) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, S^*(V^*))'$, V étant un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie. Ici $S^*(V^*)$ est l'algèbre symétrique sur l'espace dual V^* de V et $(-)'$ désigne le dual continu d'un espace vectoriel profini. Le foncteur f induit une équivalence de catégories entre le quotient de la catégorie $\mathcal{U}$ par la sous-catégorie épaisse $\mathcal{N}il$ des modules instables nilpotents et la sous-catégorie pleine $\mathcal{F}_\omega$ des foncteurs analytiques de $\mathcal{F}$ [1,2].

La catégorie $\mathcal{P}$ des foncteurs polynomiaux stricts a été introduite par Friedlander et Suslin dans [3] pour démontrer des résultats de finitude pour la cohomologie des schémas affines en groupes finis. Intuitivement $\mathcal{P}$ correspond aux foncteurs de $\mathcal{F}$ qui s'étendent en des foncteurs sur la catégorie des espaces vectoriels sur une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$. On obtient ainsi un foncteur "*oubli*" $\mathcal{O}$ de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{F}$.

L. Schwartz a posé le problème suivant : construire une *catégorie des modules instables* "*stricts*" $\mathcal{US}$ au-dessus de la catégorie des modules instables $\mathcal{U}$, de telle sorte que l'on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{US} \arrow[r, "?"] \arrow[d, "?"'] & \mathcal{P} \arrow[d, "\mathcal{O}"] \\ \mathcal{U} \arrow[r, "f"] & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

Dans cet article on montre qu'une réponse à ce problème est la construction d'un foncteur $\bar{m} : \mathcal{P} \to \mathcal{U}$ avec de bonnes propriétés. Voici le résultat principal de l'article.

Théorème 1.1. *Il existe un foncteur exact $\bar{m} : \mathcal{P} \to \mathcal{F}$ qui rend commutatif le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{P} \arrow[dl, "\bar{m}"'] \arrow[d, "\mathcal{O}"] \\ \mathcal{U} \arrow[r, "f"] & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

De plus le foncteur $\bar{m}$ commute à la torsion de Frobenius et au produit tensoriel des catégories $\mathcal{P}$ et $\mathcal{U}$.

La commutation de ce foncteur avec la torsion de Frobenius explique de façon claire ses liens avec le foncteur Φ de la catégorie $\mathcal{U}$. Ce lien était connu des experts depuis longtemps, mais sans formulation très claire. On donnera dans la section 5 une application sur les "facteurs de composition" de l'algèbre symétrique $S^*(V^*)$ en tant que module instable. Enfin l'existence du foncteur $\bar{m}$ est une indication intéressante suggérant l'existence d'une dualité de Koszul dans la catégorie $\mathcal{U}$, dans la mesure où une telle dualité existe dans la catégorie $\mathcal{P}$ (voir [5]).

La construction de $\bar{m}$ consiste à construire pour tout entier positif d un foncteur $\bar{m}_d$ depuis la catégorie $\mathcal{P}_d$ des foncteurs polynomiaux stricts homogènes de degré d vers la catégorie $\mathcal{U}$. Comme $\mathcal{P}_d$ est équivalente à la catégorie des modules de dimension finie sur l'algèbre de Schur $S(d,n)$, $n \geqslant d$ [3], la construction de $\bar{m}_d$, que l'on décrira, reflète de manière implicite la relation qui existe entre l'algèbre de Steenrod et l'algèbre de Schur. Formellement, si l'on considère $\mathrm{End}_{\mathfrak{S}_d}(F(1)^{\otimes d})$ comme un modèle pour l'algèbre de Schur $S(d,n)$ lorsque $n \to \infty$, alors l'action de $\mathscr{A}$ sur le module instable libre $F(1)$ définit un homomorphisme d'algèbres $\mathscr{A} \to \mathrm{End}_{\mathfrak{S}_d}(F(1)^{\otimes d})$. On peut ainsi aller d'une catégorie à l'autre utilisant le foncteur de restriction et le foncteur de transfert induits par ce morphisme d'algèbres.

Le plan de l'article est comme suit. Dans la section 2 on rappelle la définition de la catégorie des foncteurs polynomiaux stricts. On construit ensuite le foncteur $\bar{m} : \mathcal{P} \to \mathcal{U}$ dans la section 3 puis décrit certaines propriétés de $\bar{m}$ dans la section 4. Dans la section 5, on donne une application du théorème sur les "facteurs de composition" du module instable $S^*(V^*)$, utilisant les propriétés du foncteur $\bar{m}$ et la "théorie des représentations" de la catégorie $\mathcal{P}$. Une appendice à la fin de l'article donnera une version stable pour la théorie des caractères formels des foncteurs polynomiaux stricts.

L'auteur tient à remercier Lionel Schwartz de lui avoir proposé le problème et de lui avoir fait partager son intuition sur diverses questions concernant les catégories $\mathcal{P}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$. Il est particulièrement reconnaisant au rapporteur pour son rapport détaillé sur la première version de cet article. La présente forme de l'article est due à ses remarques judicieuses, ses corrections linguistiques et ses améliorations mathématiques.

2. Rappels sur les foncteurs polynomiaux stricts

Pour la définition des catégories de foncteurs polynomiaux stricts homogènes, nous suivrons la définition donnée dans [6, p. 21].

Pour cela, notons $\mathcal{V}$ la catégorie des espaces vectoriels sur $\mathbb{F}_p$ et $\mathcal{V}^f$ la sous-catégorie pleine des espaces de dimension finie. Soient d un entier positif et V un espace vectoriel de dimension finie. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$ sur d lettres agit sur $V^{\otimes d}$ par permutation des facteurs. La d-ième puissance divisée $\Gamma^d(V)$ est définie comme étant le sous-espace des invariants de $V^{\otimes d}$ sous cette action :

$$\Gamma^d(V) = \left(V^{\otimes d}\right)^{\mathfrak{S}_d}.$$

Le produit tensoriel $\Gamma^d(V) \otimes \Gamma^d(W)$ s'identifie aux invariants de $V^{\otimes d} \otimes W^{\otimes d}$ sous l'action du produit des groupes symétriques $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$. Le produit tensoriel $(V \otimes W)^{\otimes d}$ est muni d'une action de $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$ donnée par la formule :

$$(\sigma, \tau)(v_1 \otimes w_1) \otimes \cdots \otimes (v_d \otimes w_d) = (v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes w_{\tau^{-1}(1)}) \otimes \cdots \otimes (v_{\sigma^{-1}(d)} \otimes w_{\tau^{-1}(d)})$$

de telle sorte que l'isomorphisme $\mathbb{F}_p$-linéaire

$$V^{\otimes d} \otimes W^{\otimes d} \to (V \otimes W)^{\otimes d}$$

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) \otimes (w_1 \otimes \cdots \otimes w_d) \mapsto (v_1 \otimes w_1) \otimes \cdots \otimes (v_d \otimes w_d)$$

soit un un isomorphisme $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$-équivariant. La d-ième puissance divisée $\Gamma^d(V \otimes W)$ s'identifie aux invariants de $(V \otimes W)^{\otimes d}$ sous l'action du sous-groupe diagonal $\Delta\mathfrak{S}_d \subset \mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d$. On note i_d l'injection, naturelle en V, W,

$$i_d : \Gamma^d(V) \otimes \Gamma^d(W) \to \Gamma^d(V \otimes W)$$

obtenue comme la composée :

$$\left(V^{\otimes d} \otimes W^{\otimes d}\right)^{\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d} \cong \left((V \otimes W)^{\otimes d}\right)^{\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d} \hookrightarrow \left((V \otimes W)^{\otimes d}\right)^{\Delta\mathfrak{S}_d}.$$

Cette transformation naturelle et la loi de composition dans $\mathcal{V}$ définissent une application

$$\Gamma^d\left(\mathrm{Hom}(V, W)\right) \otimes \Gamma^d\left(\mathrm{Hom}(U, V)\right) \to \Gamma^d\left(\mathrm{Hom}(U, W)\right).$$

Celle-ci définit la composition dans une catégorie $\Gamma^d\mathcal{V}^f$ ayant pour objets les $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels de dimension finie et pour morphismes $\mathrm{Hom}_{\Gamma^d\mathcal{V}^f}(V,W) := \Gamma^d(\mathrm{Hom}(V,W))$.

Définition 2.1. Un foncteur polynomial strict homogène de degré d est un foncteur $\mathbb{F}_p$-*linéaire* de la catégorie $\Gamma^d\mathcal{V}^f$ vers la catégorie $\mathcal{V}^f$. On désigne par $\mathcal{P}_d$ la catégorie des foncteurs polynomiaux stricts homogènes de degré d et par $\mathcal{P} := \bigoplus_{d\geqslant 0}\mathcal{P}_d$ la catégorie des foncteurs polynomiaux stricts.

Example 2.2. Le d-ième produit tensoriel $I^{\otimes d} : V \mapsto V^{\otimes d}$, la d-ième puissance divisée $\Gamma^d : V \mapsto (V^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_d}$ et la d-ième puissance symétrique $S^d : V \mapsto (V^{\otimes d})_{\mathfrak{S}_d}$, sont polynomiaux stricts homogènes de degré d.

Soit $F \in \mathcal{P}_d$. Ce foncteur associe alors à tout $V \in \mathcal{V}^f$ un espace vectoriel de dimension finie $F(V)$ et à tout couple $(V,W) \in \mathcal{V}^f \times \mathcal{V}^f$ un morphisme $\mathbb{F}_p$-linéaire, dit morphisme structurel de F,

$$F_{V,W} : \Gamma^d\big(\mathrm{Hom}(V,W)\big) \to \mathrm{Hom}\big(F(V),F(W)\big)$$

satisfaisant des propriétés usuelles de la définition de foncteur. En particulier, le morphisme structurel $F_{V,V}$ induit par adjonction une application

$$\Gamma^d\big(\mathrm{End}(V)\big) \otimes F(V) \to F(V)$$

faisant de $F(V)$ un module à gauche sur l'algèbre $\Gamma^d(\mathrm{End}(V))$, dite *algèbre de Schur* $S(d,n)$ si $V = \mathbb{F}_p^n$. De fait la catégorie $\mathcal{P}_d$ est équivalente à la catégorie des modules de dimension finie sur l'algèbre de Schur $S(d,n)$ si $n \geqslant d$ [3].

En composant les morphismes structurels $F_{V,W}$ avec l'application

$$\mathrm{Hom}(V,W) \to \Gamma^d\big(\mathrm{Hom}(V,W)\big), \qquad x \mapsto x^{\otimes d},$$

on obtient une application $\mathrm{Hom}(V,W) \to \mathrm{Hom}(F(V),F(W))$ (qui n'est pas forcément $\mathbb{F}_p$-linéaire). On obtient ainsi un foncteur $V \mapsto F(V)$ de la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie vers celle des espaces vectoriels, i.e. un objet de la catégorie $\mathcal{F}$ des foncteurs de $\mathcal{V}^f$ vers $\mathcal{V}$. Ce procédé fournit donc un foncteur "oubli" $\mathcal{O}_d : \mathcal{P}_d \to \mathcal{F}$. On appellera $\mathcal{O}_d(F)$ le foncteur sous-jacent au foncteur polynomial strict $F \in \mathcal{P}_d$.

Rappelons ensuite le produit tensoriel et la torsion de Frobenius dans la catégorie $\mathcal{P}$.

Le produit tensoriel $\mathcal{P}_d \times \mathcal{P}_{d'} \to \mathcal{P}_{d+d'}$ est défini de manière compatible au produit tensoriel dans la catégorie $\mathcal{F}$. Étant donnés $F \in \mathcal{P}_d$ et $F' \in \mathcal{P}_{d'}$, le produit tensoriel $F \otimes F'$ associe à $V \in \mathcal{V}^f$ l'espace vectoriel $F(V) \otimes F'(V)$. Les morphismes structurels $(F \otimes F')_{V,W}$ sont induits par le coproduit des puissances divisées $\Gamma^{d+d'} \to \Gamma^d \otimes \Gamma^{d'}$:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^{d+d'}(\mathrm{Hom}(V,W)) \arrow[r, "(F\otimes F')_{V,W}"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(F(V)\otimes F'(V), F(W)\otimes F'(W)) \\
\Gamma^d(\mathrm{Hom}(V,W)) \otimes \Gamma^{d'}(\mathrm{Hom}(V,W)) \arrow[r, "F_{V,W}\otimes F'_{V,W}"] & \mathrm{Hom}(F(V),F(W)) \otimes \mathrm{Hom}(F'(V),F'(W)) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

La torsion de Frobenius d'un foncteur $F \in \mathcal{P}_d$, notée $F^{(1)}$, est un foncteur polynomial strict de degré pd. Ce foncteur associe à un espace vectoriel $V \in \mathcal{V}^f$ l'espace vectoriel[2] $F(V)$. Les morphismes

[2] Si on travaille sur le corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique p, alors le Frobenius $F^{(1)}$ de F associe à V l'espace vectoriel $\mathbb{F}_q \otimes_\phi F(V)$ avec $\phi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$, $x \mapsto x^p$, l'application de Frobenius du corps fini $\mathbb{F}_q$.

structurels $F^{(1)}_{V,W}$ sont induits par l'application de Verschiebung $\Gamma^{pd} \to \Gamma^{d(1)}$ qui est duale de l'application de Frobenius des puissances symétriques $S^{d(1)} \to S^{pd}$:

$$\Gamma^{pd}\big(\mathrm{Hom}(V,W)\big) \to \Gamma^{d(1)}\big(\mathrm{Hom}(V,W)\big) \xrightarrow{F_{V,W}} \mathrm{Hom}\big(F^{(1)}(V), F^{(1)}(W)\big).$$

3. Construction du foncteur $\bar{m} : \mathcal{P} \to \mathcal{U}$

Dans cette section on va construire le foncteur $\bar{m}$ depuis la catégorie $\mathcal{P}$ vers la catégorie $\mathcal{U}$ annoncé dans le théorème 1.1.

On désigne par $\mathscr{A}$ la $\mathbb{F}_p$-algèbre associative graduée engendrée par les $\mathscr{P}^k$, $k \geqslant 0$, de **degré** $k(p-1)$. Ces générateurs vérifient $\mathscr{P}^0 = 1$ et les relations d'Adem

$$\mathscr{P}^i \mathscr{P}^j = \sum_{t=0}^{[\frac{i}{p}]} \binom{(p-1)(j-t)-1}{i-pt} \mathscr{P}^{i+j-t} \mathscr{P}^k$$

dès que $i < pj$, [ ] désignant la partie entière.

Un $\mathscr{A}$-module M est dit *instable* si pour tout élément homogène x de M, on a $\mathscr{P}^k(x) = 0$ dès que $k > |x|$. On note $\mathcal{U}$ la catégorie des $\mathscr{A}$-modules instables.

Remarque 3.1. Soit $\mathcal{A}_p$ l'algèbre de Steenrod modulo p [4]. Si $p = 2$, on a un isomorphisme d'algèbres $\mathscr{A} \cong \mathcal{A}_2$, obtenu à partir de l'identification de $\mathscr{P}^k$ avec le carré de Steenrod Sq^k de **degré** k. La catégorie $\mathcal{U}$ définie ci-dessus est ainsi la catégorie des $\mathcal{A}_2$-modules instables. Pour $p > 2$, $\mathscr{A}$ est isomorphe, à un changement de graduation près, à la sous-algèbre de $\mathcal{A}_p$ engendrée par les *puissances de Steenrod réduites* P^k de **degré** $2k(p-1)$. La catégorie $\mathcal{U}$ dans ce cas est équivalente à celle, notée $\mathcal{U}'$ dans [4], des $\mathcal{A}_p$-modules instables qui sont triviaux en degrés impairs.

Dans ce qui suit, par abus de terminologie, on appelle $\mathscr{A}$ l'algèbre de Steenrod et $\mathscr{P}^k$ la k-ième puissance de Steenrod réduite.

Soit $F(1)$ le module instable libre caractérisé par l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(1), M) \cong M^1$ pour tout module instable M. En tant qu'espace vectoriel gradué, $F(1)$ a pour base les éléments u^{p^i}, $i \in \mathbb{N}^*$, $|u| = 1$. L'action de la puissance réduite $\mathscr{P}^k$ sur $F(1)$ est donnée par

$$\mathscr{P}^k\big(u^{p^i}\big) = \begin{cases} u^{p^i} & \text{si } k = 0, \\ u^{p^{i+1}} & \text{si } k = p^i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit λ un multi-indice, i.e. une suite d'entiers positifs, indexée par $\mathbb{N}^*$, qui stationne en 0. On appelle le degré (resp. le poids) de λ, noté $|\lambda|$, (resp. $\|\lambda\|$), l'entier positif $\sum_{i\in\mathbb{N}^*} \lambda_i$ (resp. $\sum_{i\in\mathbb{N}^*} \lambda_i p^{i-1}$).

Soient d et e deux entiers positifs. Considérons le foncteur polynomial strict $\bar{\Gamma}^{d;e}$ de degré d défini comme suit. À un espace vectoriel $V \in \mathcal{V}^f$, le foncteur $\bar{\Gamma}^{d;e}$ associe l'espace vectoriel

$$\bar{\Gamma}^{d;e}(V) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_d}\big(\big[F(1)^{\otimes d}\big]^e, V^{\otimes d}\big),$$

$[F(1)^{\otimes d}]^e$ étant le sous-espace des éléments de degré e de $F(1)^{\otimes d}$. Pour tout couple $(V,W) \in \mathcal{V}^f \times \mathcal{V}^f$, le morphism structurel $\bar{\Gamma}^{d;e}_{V,W}$ est induit par l'isomorphisme naturel $\Gamma^d(\mathrm{Hom}(V,W)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_d}(V^{\otimes d}, W^{\otimes d})$.

Pour tout multi-indice $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, posons

$$u^\lambda := \underbrace{u \otimes \cdots \otimes u}_{\lambda_1 \text{ fois}} \otimes \underbrace{u^p \otimes \cdots \otimes u^p}_{\lambda_2 \text{ fois}} \otimes \cdots \otimes \underbrace{u^{p^{n-1}} \otimes \cdots \otimes u^{p^{n-1}}}_{\lambda_n \text{ fois}}.$$

Il est clair que u^λ est un élément de degré $\|\lambda\|$ du module instable $F(1)^{\otimes|\lambda|}$. Le fixateur de u^λ par l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_\lambda$ est le sous-groupe de Young $\mathfrak{S}_\lambda := \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_n}$. Le foncteur $V \mapsto (V^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_\lambda}$ sera noté Γ^λ, il n'est autre que le produit tensoriel $\Gamma^{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \Gamma^{\lambda_n}$.

Proposition 3.2. *(Voir [3].) Les foncteurs Γ^λ avec $|\lambda| = d$ forment un système de générateurs projectifs de la catégorie $\mathcal{P}_d$.*

On note $\Pi(d;e)$ l'ensemble des multi-indices de degré d et de poids e. On observe que les orbites des éléments u^λ, $\lambda \in \Pi(d;e)$, sous l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$ forment une base de l'espace vectoriel $[F(1)^{\otimes d}]^e$. On en déduit un isomorphisme naturel en V :

$$\bar{\Gamma}^{d;e}(V) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{\lambda \in \Pi(d;e)} \Gamma^\lambda(V),$$

obtenu par évaluation sur les éléments u^λ :

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_d}\big(\big[F(1)^{\otimes d}\big]^e, V^{\otimes d}\big) \longrightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Pi(d;e)} \Gamma^\lambda(V), \qquad \alpha \mapsto \sum_{\lambda \in \Pi(d;e)} \alpha\big(u^\lambda\big).$$

Le foncteur $\bar{m}_d : \mathcal{P}_d \to \mathcal{U}$ est maintenant défini comme suit. Si $F \in \mathcal{P}_d$, on définit $\bar{m}_d(F)^e$ (la partie de degré e du module $\bar{m}_d(F)$) comme étant l'espace vectoriel des transformations naturelles de $\bar{\Gamma}^{d;e}$ dans F :

$$\bar{m}_d(F)^e := \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_d}\big(\bar{\Gamma}^{d;e}, F\big) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Pi(d;e)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_d}\big(\Gamma^\lambda, F\big).$$

Si $\theta \in \mathscr{A}$ est un élément homogène de degré $|\theta|$, l'action de $\mathscr{A}$ sur $F(1)^{\otimes d}$ définit une transformation naturelle $\cdot\theta : \bar{\Gamma}^{d;e+|\theta|} \to \bar{\Gamma}^{d;e}$ donnée par :

$$\cdot\theta(V) : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_d}\big(\big[F(1)^{\otimes d}\big]^{e+|\theta|}, V^{\otimes d}\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_d}\big(\big[F(1)^{\otimes d}\big]^e, V^{\otimes d}\big), \qquad \alpha \mapsto \alpha \circ \theta.$$

Celle-ci induit une application $\bar{m}_d(F)^e \to \bar{m}_d(F)^{e+|\theta|}$ qui décrit l'action de l'algèbre de Steenrod sur $\bar{m}_d(F)$.

Rappelons que le module instable libre $F(d)$ est caractérisé par l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(d), M) \cong M^d$ pour tout module instable M. Il est bien connu que $F(d)$ est isomorphe à $\Gamma^d(F(1))$ [4].

Proposition 3.3. *Le foncteur $\bar{m}_d$ est exact et $\bar{m}_d(\Gamma^d) \cong F(d)$.*

Démonstration. L'exactitude du foncteur $\bar{m}_d$ provient de ce que les foncteurs Γ^λ avec $|\lambda| = d$ sont projectifs dans $\mathcal{P}_d$. Pour montrer que $\bar{m}_d(\Gamma^d) \cong F(d)$, on vérifie d'abord que $\bar{m}_1(I) \cong F(1)$, I étant le foncteur identité. On a

$$\bar{m}_1(I)^e = \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_1}\big(\mathrm{Hom}\big(F(1)^e, -\big), I\big) \cong \begin{cases} \mathrm{End}_{\mathcal{P}_1}(I) \cong \mathbb{F}_p & \text{si } e = p^i, i \geqslant 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il suit que $\bar{m}_1(I) \cong F(1)$ en tant qu'espace vectoriel gradué. De plus il est clair que cet isomorphisme est compatible avec l'action de l'algèbre de Steenrod.

Pour $d \geqslant 2$, on dispose d'une suite exacte de foncteurs polynomiaux stricts :

$$0 \to \Gamma^d \to I^{\otimes d} \xrightarrow{\prod_{i=1}^{d-1}(1-\sigma_i)} I^{\otimes d},$$

σ_i étant la transposition $(i, i+1)$ qui permute les i-ième et $(i+1)$-ième facteurs de $I^{\otimes d}$. Cette suite exacte donne par application de $\bar{m}_d$ une suite exacte de modules instables :

$$0 \to \bar{m}_d(\Gamma^d) \to F(1)^{\otimes d} \xrightarrow{\prod_{i=1}^{d-1}(1-\sigma_i)} F(1)^{\otimes d}.$$

Ici on se sert du fait que le foncteur $\bar{m}$ commute avec le produit tensoriel (voir section 4.2 ci-dessous). On en déduit que $\bar{m}_d(\Gamma^d) \cong F(d)$. La proposition est démontrée. $\square$

Remarque 3.4. Modifions un peu la définition de la catégorie $\mathcal{P}_d$: un foncteur polynomial strict homogène de degré d est un foncteur $\mathbb{F}_p$-linéaire de la catégorie $\Gamma^d\mathcal{V}^f$ vers la catégorie $\mathcal{V}$, i.e. un foncteur polynomial strict pourrait prendre des valeurs de dimension infinie. On peut alors décrire le foncteur $\bar{m}_d : \mathcal{P}_d \to \mathcal{U}$ comme étant adjoint à droite du foncteur $\bar{f}_d : \mathcal{U} \to \mathcal{P}_d$ définit comme suit. À un module instable M on associe le foncteur $\bar{f}_d(M) : \Gamma^d\mathcal{V}^f \to \mathcal{V}$ dont la valeur sur un espace vectoriel fini V est l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_d}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, F(1)^{\otimes d}), V^{\otimes d})$. Le foncteur $\bar{f}_d$ est évidemment exact à droite et transforme somme directe en somme directe. Il admet donc un adjoint à droite [7, Cor. 2.2], qui n'est autre que $\bar{m}_d$. En effet, le foncteur $\bar{\Gamma}^{d;e}$ défini ci-dessus s'identifie à l'image par $\bar{f}_d$ du module instable libre $F(e)$.

Remarque 3.5. Comparons le foncteur $\bar{m} : \mathcal{P} \to \mathcal{U}$ avec le foncteur $m : \mathcal{F} \to \mathcal{U}$ qui est l'adjoint à droite du foncteur $f : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$. Rappelons que f est défini en associant à un module instable M le foncteur $f(M)(V) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, S^*(V^*))'$. Ici $S^*(V^*)$ est l'algèbre symétrique sur l'espace dual V^* de V et $(-)'$ désigne le dual continu d'un espace vectoriel profini. L'image de $F(e)$ par f est le foncteur Γ^e. Le foncteur m est alors défini par $m(F)^e = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\Gamma^e, F)$. Comme Γ^e n'est pas projectif dans $\mathcal{F}$, le foncteur m n'est pas exact. Par exemple, pour $p = 2$, la suite exacte courte (dans $\mathcal{P}_2$) $0 \to \Lambda^2 \to \Gamma^2 \to \Gamma^{1^{(1)}} \to 0$ donne par application de $\bar{m}$ la suite exacte courte de modules instables $0 \to \Lambda^2(F(1)) \to F(2) \to \Phi F(1) \to 0$. Par contre, la suite exacte courte (dans $\mathcal{F}$) $0 \to \Lambda^2 \to \Gamma^2 \to \Gamma^1 \to 0$ donne par application de m la suite $0 \to \Lambda^2(F(1)) \to F(2) \to F(1) \to 0$ qui n'est pas exacte en $F(1)$.

4. Propriétés du foncteur $\bar{m}$

Avant de décrire des propriétés du foncteur $\bar{m} : \mathcal{P} \to \mathcal{U}$, on décrit de manière explicite l'action d'une puissance de Steenrod réduite sur un élément du module instable $\bar{m}_d(F)$, F étant un foncteur polynomial strict de degré d.

Soit λ et κ deux multi-indices. La *suspension* de $(\kappa_1, \kappa_2, \ldots)$, notée $s(\kappa)$, est le multi-indice $(0, \kappa_1, \kappa_2, \ldots)$. Si $\lambda_i \geqslant \kappa_i$ pour tout i, on désignera par $\lambda \div \kappa$ le multi-indice $s(\kappa) + \lambda - \kappa$, i.e.

$$s(\kappa) + \lambda - \kappa = (\lambda_1 - \kappa_1, \kappa_1 + \lambda_2 - \kappa_2, \kappa_2 + \lambda_3 - \kappa_3, \ldots).$$

Ce multi-indice est de degré $|\lambda|$ et de poids $\|\lambda\| + \|\kappa\|(p-1)$.

On note $[\lambda \div \kappa, \lambda]$ le morphisme composé suivant :

$$\Gamma^{s(\kappa)+\lambda-\kappa} \xrightarrow{\delta_{s(\kappa),\lambda-\kappa}} \Gamma^{s(\kappa)} \otimes \Gamma^{\lambda-\kappa} \xrightarrow{\cong} \Gamma^{\kappa} \otimes \Gamma^{\lambda-\kappa} \xrightarrow{\mu_{\kappa,\lambda-\kappa}} \Gamma^{\lambda}.$$

Ici $\delta_{\lambda,\kappa} : \Gamma^{\lambda+\kappa} \to \Gamma^{\lambda} \otimes \Gamma^{\kappa}$ est le produit tensoriel des coproduits $\Gamma^{\lambda_i+\kappa_i} \to \Gamma^{\lambda_i} \otimes \Gamma^{\kappa_i}$ et $\mu_{\lambda,\kappa} : \Gamma^{\lambda} \otimes \Gamma^{\kappa} \to \Gamma^{\lambda+\kappa}$ le produit tensoriel des produits $\Gamma^{\lambda_i} \otimes \Gamma^{\kappa_i} \to \Gamma^{\lambda_i+\kappa_i}$. Rappelons que le produit $\Gamma^m \otimes \Gamma^n \to \Gamma^{m+n}$ correspond au transfert des $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$-invariants aux $\mathfrak{S}_{m+n}$-invariants et le coproduit $\Gamma^{m+n} \to \Gamma^m \otimes \Gamma^n$ correspond à la restriction des $\mathfrak{S}_{m+n}$-invariants aux $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$-invariants.

Par convention, le morphisme $[\lambda \div \kappa, \lambda]$ est nul si $\lambda_i < \kappa_i$ pour certain i.

Lemme 4.1. *Soient $x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_d}(\Gamma^{\lambda}, F)$ et k un entier naturel. L'action de la puissance de Steenrod réduite $\mathscr{P}^k$ sur x est donnée par :*

$$\mathscr{P}^k(x) = \sum_{\|\kappa\|=k} x \circ [\lambda \div \kappa, \lambda].$$

Démonstration. Soient $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ un multi-indice de degré d et de poids e et μ de degré d et de poids $e + k(p-1)$. On utilise la formule de Cartan pour expliciter $\mathscr{P}^k(u^{\lambda})$. On a

$$\mathscr{P}^k\big(u^{\lambda}\big) = \sum_{\|\kappa\|=k} \bigotimes_{i=1}^{n} \mathscr{P}^{p^{i-1}\kappa_i}\big(\underbrace{u^{p^{i-1}} \otimes \cdots \otimes u^{p^{i-1}}}_{\lambda_i \text{ fois}}\big) = \sum_{\|\kappa\|=k} \sum_{\sigma} \sigma u^{s(\kappa)+\lambda-\kappa},$$

où la deuxième somme est prise sur $\mathfrak{S}_d/\mathfrak{S}_{\lambda_1-\kappa_1,\kappa_1,\lambda_2-\kappa_2,\kappa_2,\ldots,\lambda_n-\kappa_n,\kappa_n}$. On en déduit que si le multi-indice μ n'est pas de la forme $\lambda \div \kappa$ avec $\|\kappa\| = k$ le morphisme composé

$$\Gamma^{\mu}(V) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_d}\big(\big[F(1)^{\otimes d}\big]^{e+k(p-1)}, V^{\otimes d}\big) \xrightarrow{\cdot \mathscr{P}^k(V)} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_d}\big(\big[F(1)^{\otimes d}\big]^{e}, V^{\otimes d}\big) \twoheadrightarrow \Gamma^{\lambda}(V)$$

est trivial. De plus si $\mu = \lambda \div \kappa$ avec $\|\kappa\| = k$ ce morphisme composé devient le morphisme $\Gamma^{s(\kappa)+\lambda-\kappa} \to \Gamma^{\lambda}$ donné par

$$x \mapsto \sum_{\sigma} \sigma x$$

où la somme est prise sur $\mathfrak{S}_d/\mathfrak{S}_{\lambda_1-\kappa_1,\kappa_1,\lambda_2-\kappa_2,\kappa_2,\ldots,\lambda_n-\kappa_n,\kappa_n}$. Ce morphisme n'est autre que le morphisme $[\lambda \div \kappa, \lambda]$ défini au début de cette section. Le lemme est démontré. □

4.1. Le foncteur $\bar{m}$ et la torsion de Frobenius

Un multi-indice λ est dit *divisible par p* si p divise λ_i pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Le multi-indice $p\lambda = (p\lambda_1, p\lambda_2, \ldots)$ est évidemment divisible par p et dans ce cas, on définit le Verschiebung $\mathcal{V}^{\lambda} : \Gamma^{p\lambda} \to \Gamma^{\lambda^{(1)}}$ comme étant le produit tensoriel des Verschiebung $\Gamma^{p\lambda_i} \to \Gamma^{\lambda_i{}^{(1)}}$.

Lemme 4.2.

1. *Soient $F \in \mathcal{P}_d$ et μ un multi-indice de degré pd. Si μ n'est pas divisible par p, alors le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{pd}}(\Gamma^{\mu}, F^{(1)})$ est nul.*
2. *Soient $F \in \mathcal{P}_d$ et λ un multi-indice de degré d. Le Verschiebung $\mathcal{V}^{\lambda} : \Gamma^{p\lambda} \to \Gamma^{\lambda^{(1)}}$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels $\nu_F^{\lambda} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_d}(\Gamma^{\lambda}, F) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{pd}}(\Gamma^{p\lambda}, F^{(1)})$.*

Démonstration. Voir [3]. □

Rappelons la définition du foncteur $\Phi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ [4]. Étant donné un module instable M, ΦM en tant qu'espace vectoriel gradué est défini par

$$(\Phi M)^n = \begin{cases} M^{n/p} & \text{si } p|n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'action de la puissance réduite $\mathscr{P}^k$ sur ΦM est donnée par

$$\mathscr{P}^k(\Phi m) = \begin{cases} \Phi \mathscr{P}^{k/p}(m) & \text{si } p|k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ce qui suit, on appellera ΦM *la torsion de Frobenius* du module instable M.

On définit ensuite l'application

$$\nu_F^d : \Phi \bar{m}_d(F) \to \bar{m}_{pd}\big(F^{(1)}\big)$$

comme la somme directe de toutes les applications ν_F^λ avec $|\lambda| = d$. De manière explicite si $x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_d}(\Gamma^\lambda, F)$ alors $\nu_F^d(\Phi x)$ est le morphisme composé $x^{(1)} \circ \mathcal{V}^\lambda : \Gamma^{p\lambda} \to \Gamma^{\lambda^{(1)}} \to F^{(1)}$.

Proposition 4.3. *L'application $\nu_F^d : \Phi \bar{m}_d(F) \to \bar{m}_{pd}(F^{(1)})$ est un isomorphisme de modules instables.*

Démonstration. Observons d'abord que si λ est un multi-indice dont le poids n'est pas divisible par p, alors λ lui-même n'est pas divisible par p. D'après la définition de $\bar{m}_{pd}$ et le lemme 4.2(1), $\bar{m}_{pd}(F^{(1)})$ est donc trivial en degré non divisible par p. De plus, toujours par 4.2(1), on a

$$\bar{m}_{pd}\big(F^{(1)}\big)^{pe} = \bigoplus_{\lambda \in \Pi(d;e)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{pd}}\big(\Gamma^{p\lambda}, F^{(1)}\big).$$

Le lemme 4.2(2) alors implique ν_F^d est un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués.

Il reste à vérifier que l'application ν_F^d est $\mathscr{A}$-linéaire. Soit λ un multi-indice de degré d et soit y un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{pd}}(\Gamma^{p\lambda}, F^{(1)})$. Le multi-indice $p\lambda \div \mu$ est divisible par p si et seulement si μ l'est. On en déduit, en utilisant le lemme 4.2(1), que $\mathscr{P}^{pk+i}(y) = 0$ si $0 < i < p$ et que $\mathscr{P}^{pk}(y) = \sum_{\|\kappa\|=k} y \circ [p\lambda \div p\kappa, p\lambda]$.

Soit $x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_d}(\Gamma^\lambda, F)$. Montrons que $\nu_F^d(\mathscr{P}^{pk}\Phi x) = \mathscr{P}^{pk}\nu_F^d(\Phi x)$. On a

$$\begin{aligned} \nu_F^d\big(\mathscr{P}^{pk}\Phi x\big) &= \nu_F^d\big(\Phi \mathscr{P}^k(x)\big) = \nu_F^d\Bigg(\sum_{\|\kappa\|=k} \Phi\big(x \circ [\lambda \div \kappa, \lambda]\big)\Bigg) \\ &= \sum_{\|\kappa\|=k} x^{(1)} \circ [\lambda \div \kappa, \lambda]^{(1)} \circ \mathcal{V}^{\lambda \div \kappa} \end{aligned}$$

et

$$\mathscr{P}^{pk}\nu_F^d(\Phi x) = \mathscr{P}^{pk}\big(x^{(1)} \circ \mathcal{V}^\lambda\big) = \sum_{\|\kappa\|=k} x^{(1)} \circ \mathcal{V}^\lambda \circ [p\lambda \div p\kappa, p\lambda].$$

Il suffit donc de vérifier que, pour tout multi-indice κ de poids k, on a $[\lambda \div \kappa, \lambda]^{(1)} \circ \mathcal{V}^{\lambda \div \kappa} = \mathcal{V}^{\lambda} \circ [p\lambda \div p\kappa, p\lambda]$, ce qui provient de la commutativité du diagramme suivant, qui se déduit de la commutation du Verschiebung aux produits et coproduits :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^{s(p\kappa)+p\lambda-p\kappa} \arrow[r, "\delta_{s(p\kappa),p\lambda-p\kappa}"] \arrow[d, "\mathcal{V}^{s(\kappa)+\lambda-\kappa}"] \arrow[rrr, bend left, "{[p\lambda\div p\kappa,p\lambda]}"] & \Gamma^{s(p\kappa)} \otimes \Gamma^{p\lambda-p\kappa} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathcal{V}^{s(\kappa)}\otimes\mathcal{V}^{\lambda-\kappa}"] & \Gamma^{p\kappa} \otimes \Gamma^{p\lambda-p\kappa} \arrow[r, "\mu_{p\kappa,p\lambda-p\kappa}"] \arrow[d, "\mathcal{V}^{\kappa}\otimes\mathcal{V}^{\lambda-\kappa}"] & \Gamma^{p\lambda} \arrow[d, "\mathcal{V}^{\lambda}"] \\
\Gamma^{s(\kappa)+\lambda-\kappa\,(1)} \arrow[r, "\delta^{(1)}_{s(\kappa),\lambda-\kappa}"] \arrow[rrr, bend right, "{[\lambda\div\kappa,\lambda]^{(1)}}"'] & \Gamma^{s(\kappa)\,(1)} \otimes \Gamma^{\lambda-\kappa\,(1)} \arrow[r, "\cong"] & \Gamma^{\kappa\,(1)} \otimes \Gamma^{\lambda-\kappa\,(1)} \arrow[r, "\mu^{(1)}_{\kappa,\lambda-\kappa}"] & \Gamma^{\lambda\,(1)}
\end{tikzcd}$$

La proposition est démontrée. $\square$

4.2. Le foncteur $\bar{m}$ et le produit tensoriel

Soient μ un multi-indice de degré d et μ' un multi-indice de degré d'. Les coproduits $\delta_{\mu_i,\mu_{i'}} : \Gamma^{\mu_i+\mu_{i'}} \to \Gamma^{\mu_i} \otimes \Gamma^{\mu'_i}$ définissent de manière évidente le coproduit $\delta_{\mu,\mu'} : \Gamma^{\mu+\mu'} \to \Gamma^{\mu} \otimes \Gamma^{\mu'}$.

Lemme 4.4. *Soient μ un multi-indice de degré $d+d'$, $F \in \mathcal{P}_d$ et $F' \in \mathcal{P}_{d'}$. Alors les coproduits $\delta_{\lambda,\lambda'}$ induisent un isomorphisme d'espaces vectoriels*

$$\bigoplus_{\lambda+\lambda'=\mu} \delta^{F,F'}_{\lambda,\lambda'} : \bigoplus_{\lambda+\lambda'=\mu} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_d}\big(\Gamma^{\lambda}, F\big) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d'}}\big(\Gamma^{\lambda'}, F'\big) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d+d'}}\big(\Gamma^{\mu}, F \otimes F'\big).$$

Démonstration. Voir [8] pour la démonstration qui est basée sur le fait que les foncteurs Γ^d, $d \geqslant 0$, sont exponentiels, i.e. ils sont munis d'isomorphismes naturels :

$$\Gamma^0(V) = \mathbb{F}_p, \qquad \Gamma^d(V \oplus W) \cong \bigoplus_{i=0}^{d} \Gamma^i(V) \otimes \Gamma^{d-i}(W)$$

pour $V, W \in \mathcal{V}^f$. $\square$

En sommant tous les $\delta^{F,F'}_{\lambda,\lambda'}$ du lemme on obtient une application

$$\delta^{F,F'}_{d,d'} : \bar{m}_d(F) \otimes \bar{m}_{d'}\big(F'\big) \to \bar{m}_{d+d'}\big(F \otimes F'\big).$$

Proposition 4.5. *L'application $\delta^{F,F'}_{d,d'} : \bar{m}_d(F) \otimes \bar{m}_{d'}(F') \to \bar{m}_{d+d'}(F \otimes F')$ est un isomorphisme de modules instables.*

Démonstration. Le lemme 4.4 implique $\delta^{F,F'}_{d,d'}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués. Il reste à vérifier que $\delta^{F,F'}_{d,d'}$ est $\mathscr{A}$-linéaire.

Rappelons que si M et N sont deux modules instables, l'action de l'algèbre de Steenrod sur $M \otimes N$ est donnée par la formule de Cartan :

$$\mathscr{P}^k(m \otimes n) = \sum_{i+j=k} \mathscr{P}^i(m) \otimes \mathscr{P}^j(n)$$

pour $m \in M$, $n \in N$ et $k \in \mathbb{N}$.

Soient $x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_d}(\Gamma^{\lambda}, F)$ et $x' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{d'}}(\Gamma^{\lambda'}, F')$. Alors $\delta_{d,d'}^{F,F'}(x \otimes x')$ est le morphisme composé

$$\Gamma^{\lambda+\lambda'} \xrightarrow{\delta_{\lambda,\lambda'}} \Gamma^{\lambda} \otimes \Gamma^{\lambda'} \xrightarrow{x \otimes x'} F \otimes F'.$$

Pour montrer que

$$\mathscr{P}^k\big(\delta_{d,d'}^{F,F'}\big(x \otimes x'\big)\big) = \sum_{g+g'=k} \delta_{d,d'}^{F,F'}\big(\mathscr{P}^g x \otimes \mathscr{P}^{g'} x'\big), \quad k \in \mathbb{N},$$

il suffit de vérifier que, pour tout multi-indice κ de poids k, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma^{s(\kappa)+\lambda+\lambda'-\kappa} \arrow[r] \arrow[d, "\delta_{s(\kappa),\lambda+\lambda'-\kappa}"] \arrow[ddd, bend right=60, "{[\lambda+\lambda' \div \kappa, \lambda+\lambda']}"'] & \bigoplus_{\gamma+\gamma'=\kappa} \Gamma^{s(\gamma)+\lambda-\gamma} \otimes \Gamma^{s(\gamma')+\lambda'-\gamma'} \arrow[d] \arrow[ddd, bend left=60, "{\bigoplus_{\gamma+\gamma'=\kappa} [\lambda \div \gamma, \lambda] \otimes [\lambda' \div \gamma', \gamma'].}"] \\
\Gamma^{s(\kappa)} \otimes \Gamma^{\lambda+\lambda'-\kappa} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \bigoplus_{\gamma+\gamma'=\kappa} (\Gamma^{s(\gamma)} \otimes \Gamma^{\lambda-\gamma}) \otimes (\Gamma^{s(\gamma')} \otimes \Gamma^{\lambda'-\gamma'}) \arrow[d, "\cong"'] \\
\Gamma^{\kappa} \otimes \Gamma^{\lambda+\lambda'-\kappa} \arrow[r] \arrow[d, "\mu_{\kappa,\lambda+\lambda'-\kappa}"] & \bigoplus_{\gamma+\gamma'=\kappa} (\Gamma^{\gamma} \otimes \Gamma^{\lambda-\gamma}) \otimes (\Gamma^{\gamma'} \otimes \Gamma^{\lambda'-\gamma'}) \arrow[d, "\bigoplus_{\gamma+\gamma'=\kappa} \mu_{\gamma,\lambda-\gamma} \otimes \mu_{\gamma',\lambda'-\gamma'}"] \\
\Gamma^{\lambda+\lambda'} \arrow[r, "\delta_{\lambda,\lambda'}"] & \Gamma^{\lambda} \otimes \Gamma^{\lambda'}
\end{tikzcd}$$

La commutativité du carré du haut provient de l'associativité du coproduit des puissances divisées tandis que le carré du bas est commutatif car Γ^* est un foncteur en algèbres de Hopf.[3] La proposition est démontrée. $\square$

Corollaire 4.6. *Le foncteur $\bar{m}_d$ est un relèvement du foncteur oubli $\mathcal{O}_d : \mathcal{P}_d \to \mathcal{F}$, i.e. $f \circ \bar{m}_d = \mathcal{O}_d$.*

Démonstration. On dispose d'un isomorphisme de modules instables $\bar{m}_d(\Gamma^d) \cong F(d)$. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ un multi-indice de degré d. On pose $F(\lambda) := F(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes F(\lambda_n)$. La commutativité entre le foncteur $\bar{m}$ et produits tensoriels alors implique $\bar{m}_d(\Gamma^{\lambda}) \cong F(\lambda)$. D'autre part, le foncteur f est exact, commute aux produits tensoriels et envoie $F(d)$ à Γ^d [4]. On en déduit que $f(F(\lambda)) \cong \Gamma^{\lambda}$, qui est le foncteur polynomial sous-jacent au foncteur polynomial strict Γ^{λ}. Le foncteur composé $f \circ \bar{m}_d$ et le foncteur oubli $\mathcal{O}_d : \mathcal{P}_d \to \mathcal{F}$ prennent donc les mêmes valeurs sur les générateurs projectifs Γ^{λ} de la catégorie $\mathcal{P}_d$. L'exactitude des foncteurs $f \circ \bar{m}_d$ et $\mathcal{O}_d$ implique le résultat souhaité. $\square$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $F \in \mathcal{P}_d$. Le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{dn}}(\bar{\Gamma}^{dn;e}, F^{\otimes n})$ est un $\mathbb{F}_p[\mathfrak{S}_n]$-module à gauche de manière évidente. Pour tout $c \in \mathbb{F}_p[\mathfrak{S}_n]$, on pose $c \cdot F^{\otimes n} := \mathrm{im}(F^{\otimes n} \xrightarrow{c} F^{\otimes n})$. On note aussi $c \cdot \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{dn}}(\bar{\Gamma}^{dn;e}, F^{\otimes n})$ le sous-espace de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{dn}}(\bar{\Gamma}^{dn;e}, F^{\otimes n})$ des morphismes composés $\Gamma^{dn;e} \to F^{\otimes n} \xrightarrow{c} F^{\otimes n}$.

[3] Nous avions considéré la commutativité du carré du bas comme conséquence directe de la formule de Mackey des doubles classes car le coproduit (resp. le produit) des puissances divisées est *la restriction* (resp. *l'induction* ou *le transfert*) des invariants de groupes symétriques. L'auteur remercie Antoine Touzé de lui avoir signalé que la commutativité est gratuite grâce à la structure d'algèbre de Hopf de $\Gamma^*(V)$.

Proposition 4.7. *Pour tout $c \in \mathbb{F}_p[\mathfrak{S}_n]$ et tout $F \in \mathcal{P}_d$, l'inclusion naturelle*

$$c \cdot \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{dn}}\big(\bar{\Gamma}^{dn;e}, F^{\otimes n}\big) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_{dn}}\big(\bar{\Gamma}^{dn;e}, c \cdot F^{\otimes n}\big)$$

induit un isomorphisme de modules instables $c \cdot \bar{m}_{dn}(F^{\otimes n}) \cong \bar{m}_{dn}(c \cdot F^{\otimes n})$.

Démonstration. La surjectivité est facile à voir à l'aide de la projectivité de $\Gamma^{dn;e}$: pour tout morphisme $\Gamma^{dn;e} \xrightarrow{x} c \cdot F^{\otimes n}$, il existe $\Gamma^{dn;e} \xrightarrow{x'} F^{\otimes n}$ tel que x soit le morphisme composé $\Gamma^{dn;e} \xrightarrow{x'} F^{\otimes n} \xrightarrow{c} c \cdot F^{\otimes n}$. La proposition suit. □

5. Application : Facteurs de composition de $S^*(V^*)$

Rappelons d'abord la construction des objets simples des catégories $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}_d$. Les foncteurs simples de la catégorie $\mathcal{F}$ sont indexés par les partitions p-régulières, i.e. par les multi-indices λ avec $0 \leqslant \lambda_i - \lambda_{i+1} \leqslant p-1$ pour tout i. Étant donnée une partition p-régulière λ, le foncteur simple associé sera noté par S_λ. Explicitement, S_λ est le foncteur $\epsilon_\lambda \cdot I^{\otimes|\lambda|} = \mathrm{im}(I^{\otimes|\lambda|} \xrightarrow{\epsilon_\lambda} I^{\otimes|\lambda|})$ où $\epsilon_\lambda = \bar{R}_\lambda \bar{C}_\lambda \bar{R}_\lambda$ est produit des symétriseurs de Young [9] $\bar{C}_\lambda$ et $\bar{R}_\lambda$ définis comme suit :

- $\bar{R}_\lambda = \sum_{\sigma \in R_\lambda} \sigma$, où R_λ est le sous-groupe des éléments du groupe symétrique $\mathfrak{S}_{|\lambda|}$ qui laissent fixes les lignes du diagramme de Young associé à λ,
- $\bar{C}_\lambda = \sum_{\sigma \in C_\lambda} \mathrm{sign}(\sigma)\sigma$, où C_λ est le sous-groupe des éléments du groupe symétrique $\mathfrak{S}_{|\lambda|}$ qui laissent fixes les colonnes du diagramme de Young associé à λ.

Rappelons que, étant donnée une *partition* λ, i.e. un multi-indice décroissant, la *partition conjuguée* de λ, notée $\tilde{\lambda}$, est définie comme étant le multi-indice dont le i-ième terme est donné par $\tilde{\lambda}_i = \mathrm{card}\{j \mid \lambda_j \geqslant i\}$. On a $R_\lambda \cong \prod_i \mathfrak{S}_{\lambda_i}$ et $C_\lambda \cong \prod_{i=1} \mathfrak{S}_{\tilde{\lambda}_i}$.

Soit λ une partition de d. Supposons $\lambda = \sum_{i \geqslant 0} p^i \lambda[i]$ est la *décomposition p-adique* de λ, $\lambda[i]$ étant p-régulière. Cette décomposition est obtenue comme suit. Soit $\lambda_j - \lambda_{j+1} = \sum_{i \geqslant 0} p^i \lambda_{j,i}$ la décomposition p-adique de l'entier positif $\lambda_j - \lambda_{j+1}$. Alors la partition $\lambda[i]$ est donnée par $\lambda[i]_k = \sum_{j \geqslant k} \lambda_{j,i}$. On vérifie que chaque $\lambda[i]$ est bien une partition p-régulière et que $\lambda = \sum_{i \geqslant 0} p^i \lambda[i]$.

On pose

$$S_\lambda := \bigotimes_{i \geqslant 0} S_{\lambda[i]}^{(i)}.$$

Ici $F^{(i)}$ désigne la torsion de Frobenius itérée i fois du foncteur polynomial strict F.

Proposition 5.1. *(Cf. [10, Thm. 7.11].) Un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme de foncteurs simples de la catégorie $\mathcal{P}_d$ est donné par $\{S_\lambda \mid \lambda$ est une partition de $d\}$.*

On notera aussi

$$S_\lambda\big(F(1)\big) := \bigotimes_{i \geqslant 0} \Phi^i\big(\epsilon_{\lambda[i]} \cdot F(1)^{\otimes|\lambda[i]|}\big),$$

$\Phi^i M$ désignant la torsion de Frobenius itérée i fois du module instable M.

Proposition 5.2. *Pour toute partition λ de d, on a $\bar{m}_d(S_\lambda) \cong S_\lambda(F(1))$.*

Démonstration. Cela est conséquence immédiate des propriétés de $\bar{m}$ données dans la section 4. □

Définition 5.3. Soit M un module instable. On dit que M admet une *bonne filtration* si M a une filtration dont les sous-quotients sont de la forme $S_\lambda(F(1))$.

Example 5.4. Le module instable $F(1)^{\otimes d}$ admet une bonne filtration. Cela s'obtient en appliquant le foncteur $\bar{m}_d$ à une série de compositions du foncteur polynomial strict $I^{\otimes d}$. De manière analogue, le module instable libre $F(d)$ admet aussi une bonne filtration.

Dans ce qui suit, on cherche à montrer que, étant donné un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel V_n de dimension n, l'algèbre symétrique $S^*(V_n^*)$ admet une bonne filtration.

Rappelons que $S^*(V_n^*) \cong \mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]$ avec $|x_i| = 1$. L'action de $\mathscr{A}$ sur $\mathbb{F}_p[x_1, \ldots, x_n]$ est donnée par $\mathscr{P}^1(x_i) = x_i^p$, $1 \leqslant i \leqslant n$, et la formule de Cartan.

On note $\bar{S}^*(V_n^*) = S^*(V_n^*)/(x_1^p, \ldots, x_n^p)$. On a $\bar{S}^*(V_n^*) = \bigoplus_{d \geqslant 0} \bar{S}^d(V_n^*)$. Le foncteur $\bar{S}^d$, appelé la d-ième *puissance tronquée*, est un foncteur polynomial strict *simple* de degré d. On sait que si $d = (p-1)a + b$ avec $a \geqslant 0$ et $0 \leqslant b \leqslant p-2$, alors $\bar{S}^d \cong S_{(p-1,\ldots,p-1,b)}$, a termes $p-1$ [11]. Dans le cas $p = 2$, le foncteur $\bar{S}^d$ s'identifie à la puissance extérieure Λ^d.

On désigne par $P_d S^*(V_n^*)$ le d-ième terme de la filtration primitive de l'algèbre de Hopf $S^*(V_n^*)$. La proposition suivante est bien connue [12].

Proposition 5.5. *Le quotient $P_d S^*(V_n^*)/P_{d-1} S^*(V_n^*)$ est isomorphe à la somme directe :*

$$\bigoplus_{\mu} \bar{S}^{\mu_1}\big(F(1)\big) \otimes \cdots \otimes \bar{S}^{\mu_n}\big(F(1)\big)$$

où $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ parcourt l'ensemble des n-uplets d'entiers positifs ou nuls de somme d.

Proposition 5.6. *Si S_λ est facteur de composition du foncteur polynomial strict $\bar{S}^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \bar{S}^{\mu_n}$, alors $\lambda_1 \leqslant n(p-1)$.*

Démonstration. On renvoie à l'appendice pour la définition de caractère formel d'un foncteur polynomial strict. Soit $\mu_i = (p-1)a_i + b_i$ avec $a_i \geqslant 0$ et $0 \leqslant b_i \leqslant p-2$. La proposition provient de ce que le terme supérieur du caractère formel de $\bar{S}^{\mu_i} \otimes \cdots \otimes \bar{S}^{\mu_n}$ est $\prod_{i=1}^n X_1^{p-1} \cdots X_{a_i}^{p-1} X_{a_i+1}^{b_i}$ alors que le terme supérieur du caractère formel de S_λ est $\prod_{i \geqslant 1} X^{\lambda_i}$ (voir la proposition 6.5 ci-dessous). $\square$

Le résultat suivant est conséquence immédiate des deux propositions précédentes et du fait que tout foncteur polynomial strict admet une série de compositions de longueur finie.

Corollaire 5.7. *Le module instable $S^*(V_n^*)$ admet une bonne filtration dont les sous-quotients sont de la forme $S_\lambda(F(1))$ avec $\lambda_1 \leqslant n(p-1)$.*

Démonstration. Soit $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ un multi-indice de degré d. On applique le foncteur exact $\bar{m}_d$ à une série de compositions du foncteur polynomial strict $\bar{S}^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \bar{S}^{\mu_n}$. On obtient ainsi une filtration finie du module instable $\bar{S}^{\mu_1}(F(1)) \otimes \cdots \otimes \bar{S}^{\mu_n}(F(1))$ dont les sous-quotients sont de la forme $S_\lambda(F(1))$ avec $\lambda_1 \leqslant n(p-1)$. Le corollaire suit. $\square$

6. Appendice : Caractère formel

On note $\mathbb{Z}[\![X_1, X_2, \ldots]\!]$ l'anneau des séries formelles en les variables $X_1, X_2, \ldots$. On pose $X^\lambda := \prod_i X_i^{\lambda_i}$ pour chaque multi-indice λ. Les monômes X^λ forment une $\mathbb{Z}$-base de $\mathbb{Z}[\![X_1, X_2, \ldots]\!]$.

Définition 6.1. Le *caractère formel* d'un foncteur $T \in \mathcal{P}_d$ est défini par :

$$\chi_F(X_1, X_2, \dots) := \sum_{\lambda \text{ est un multi-indice de degré } d} \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{P}_d}\big(\Gamma^\lambda, T\big) \cdot X^\lambda.$$

C'est un élément de degré d de $\mathbb{Z}[\![X_1, X_2, \dots]\!]$.

Remarque 6.2. D'après [3, Corollary 2.12], $\operatorname{Hom}_{\mathcal{P}_d}(\Gamma^{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \Gamma^{\lambda_n}, T)$ est isomorphe au sous-espace des éléments x de $T(\mathbb{F}_p^n)$ tels que $T(\operatorname{diag}(t_1, \dots, t_n))x = t_1^{\lambda_1} \cdots t_n^{\lambda_n} \cdot x$ pour tout $(t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{F}^*)^n$ et toute extension $\mathbb{F}$ de $\mathbb{F}_p$. La définition ci-dessus est ainsi une version *stable* (au sens que $n = \infty$) de la définition de caractère formel d'un module sur l'algèbre de Schur $S(d, n)$ (voir [13, Chapter 3]).

Proposition 6.3. *Soient $F, G, H \in \mathcal{P}$. On a*

1. $\chi_{F \otimes G} = \chi_F \cdot \chi_G$;
2. $\chi_{F^{(1)}}(X_1, X_2, \dots) = \chi_F(X_1^p, X_2^p, \dots)$;
3. $\chi_H = \chi_F + \chi_G$ *si la suite* $0 \to F \to H \to G \to 0$ *est exacte.*

Démonstration. Les deux premiers énoncés sont des conséquences des lemmes 4.4 et 4.2. Le dernier se déduit de l'exactitude des foncteurs $\operatorname{Hom}_{\mathcal{P}_d}(\Gamma^\lambda, -)$. $\square$

Si λ est une partition, on note $\mathbf{m}_\lambda(X_1, X_2, \dots)$ la fonction symétrique monomiale associée à λ. C'est la somme formelle de tous les monômes obtenus à partir de X^λ par symétrie. Il est clair que

$$\chi_F = \sum_{\lambda \text{ est une partition de } d} \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{P}_d}\big(\Gamma^\lambda, F\big) \cdot \mathbf{m}_\lambda.$$

Example 6.4. On vérifie que $\chi_{\Lambda^d} = \mathbf{e}_d$ et $\chi_{S^d} = \mathbf{h}_d$. Ici $\mathbf{e}_d = \mathbf{m}_{(1^d)}$ est la d-ième *fonction symétrique élémentaire* et $\mathbf{h}_d = \sum_\lambda \mathbf{m}_\lambda$, λ parcourant les partition de d, est la d-ième *fonction symétrique complète.*

Introduisons un ordre partiel sur les multi-indices [9]. Soient λ et μ deux multi-indices. On note $\mu \trianglelefteq \lambda$ si $\sum_{i=1}^k \mu_i \leqslant \sum_{i=1}^k \lambda_i$ pour tout k. Si $\mu \trianglelefteq \lambda$ et $\mu \neq \lambda$, on note $\mu \triangleleft \lambda$.

Le problème de déterminer les caractères formels pour les foncteurs simples est difficile et reste ouvert en général. On sait cependant déterminer le terme supérieur du caractère formel d'un foncteur simple, cela est parfois suffisant pour détecter l'apparition d'un foncteur simple comme facteur de composition dans un autre foncteur.

Proposition 6.5. *(Cf. [13, Thm. 3.5a], [14, Thm 3.4.2].) Pour toute partition λ de d, le caractère formel de S_λ est de la forme* :

$$\chi_{S_\lambda} = X^\lambda + \sum_{\mu \triangleleft \lambda} a_{\lambda,\mu} \cdot X^\mu, \quad a_{\lambda,\mu} \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. On montre facilement à l'aide de la proposition 6.3 qu'il suffit de démontrer la proposition dans le cas où λ est une partition régulière de d. On vérifie que

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{P}_d}\big(\Gamma^\mu, \bar{R}_\lambda \bar{C}_\lambda \bar{R}_\lambda \cdot I^{\otimes d}\big) = \begin{cases} \mathbb{F}_p & \text{si } \mu = \lambda, \\ 0 & \text{si } \mu \ntrianglelefteq \lambda. \end{cases}$$

Cela est bien connu dans le contexte des $S(d, n)$-modules sous la forme : le module simple associé à λ admet λ comme poids supérieur ("highest weight" dans la terminologie anglo-saxonne). $\square$

Corollaire 6.6. *Pour toutes partitions λ et μ, la multiplicité du foncteur simple $S_{\lambda+\mu}$ dans $S^\lambda \otimes S^\mu$ est 1. De plus, si S_α est facteur de composition de $S^\lambda \otimes S^\mu$, alors $\alpha \trianglelefteq \lambda + \mu$.*

Démonstration. Le terme supérieur (à coefficient 1) du caractère formel de $S^\lambda \otimes S^\mu$ est $X^{\lambda+\mu}$ alors que le terme supérieur (à coefficient 1) du caractère formel de S_α est X^α. Le résultat suit. $\square$

On note Λ l'anneau des fonctions symétriques, c'est un sous-anneau de l'anneau des séries formelles $\mathbb{Z}[\![X_1, X_2, \ldots]\!]$. On a $\Lambda = \bigoplus_{d \geqslant 0} \Lambda(d)$, où $\Lambda(d)$ est le sous-module des fonctions symétriques de degré d. On sait que les fonctions symétriques monomiales $\mathbf{m}_\lambda$, λ parcourant les partitions de d, forment une $\mathbb{Z}$-base de $\Lambda(d)$.

Corollaire 6.7. *Le caractère formel induit un isomorphisme entre l'anneau de Grothendieck de la catégorie $\mathcal{P}$ et l'anneau des fonctions symétriques.*

Démonstration. D'après 6.5, le caractère formel de S_λ est de la forme

$$\chi_{S_\lambda} = \mathbf{m}_\lambda + \sum_{\mu \lhd \lambda} a_{\lambda,\mu} \cdot \mathbf{m}_\mu.$$

On en déduit que les caractères formels χ_{S_λ}, λ parcourant les partition de d, forment une $\mathbb{Z}$-base de $\Lambda(d)$. Le résultat suit. $\square$

Références

[1] H.-W. Henn, J. Lannes, L. Schwartz, The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects, Amer. J. Math. 115 (5) (1993) 1053–1106, doi:10.2307/2375065.

[2] N.J. Kuhn, Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. I, Amer. J. Math. 116 (2) (1994) 327–360, doi:10.2307/2374932.

[3] E.M. Friedlander, A. Suslin, Cohomology of finite group schemes over a field, Invent. Math. 127 (2) (1997) 209–270, doi:10.1007/s002220050119.

[4] L. Schwartz, Unstable Modules Over the Steenrod Algebra and Sullivan's Fixed Point Set Conjecture, Chicago Lectures in Math., University of Chicago Press, Chicago, IL, 1994.

[5] M. Chałupnik, Koszul duality and extensions of exponential functors, Adv. Math. 218 (3) (2008) 969–982, doi:10.1016/j.aim.2008.02.008.

[6] V. Franjou, E.M. Friedlander, T. Pirashvili, L. Schwartz, Rational Representations, the Steenrod Algebra and Functor Homology, Panoramas et Synthèses (Panoramas and Syntheses), vol. 16, Société Mathématique de France, Paris, 2003.

[7] J. Lannes, S. Zarati, Sur les $\mathcal{U}$-injectifs, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 19 (2) (1986) 303–333.

[8] V. Franjou, E.M. Friedlander, A. Scorichenko, A. Suslin, General linear and functor cohomology over finite fields, Ann. of Math. (2) 150 (2) (1999) 663–728, doi:10.2307/121092.

[9] G. James, A. Kerber, The Representation Theory of the Symmetric Group, Encyclopedia Math. Appl., vol. 16, Addison–Wesley Publishing Co., Reading, MA, 1981, with a foreword by P.M. Cohn, with an introduction by Gilbert de B. Robinson.

[10] N.J. Kuhn, A stratification of generic representation theory and generalized Schur algebras, K-Theory 26 (1) (2002) 15–49, doi:10.1023/A:1016357323204.

[11] D. Carlisle, N.J. Kuhn, Subalgebras of the Steenrod algebra and the action of matrices on truncated polynomial algebras, J. Algebra 121 (2) (1989) 370–387, doi:10.1016/0021-8693(89)90073-2.

[12] L. Piriou, L. Schwartz, A property of the degree filtration of polynomial functors, Georgian Math. J. 9 (4) (2002) 787–806, dedicated to Professor Hvedri Inassaridze on the occasion of his 70th birthday.

[13] J.A. Green, Polynomial Representations of GL_n, augmented ed., Lecture Notes in Math., vol. 830, Springer, Berlin, 2007, with an appendix on Schensted correspondence and Littelmann paths by K. Erdmann, Green and M. Schocker.

[14] S. Martin, Schur Algebras and Representation Theory, Cambridge Tracts in Math., vol. 112, Cambridge University Press, Cambridge, 2008, reprint of the 1993 original.