Topology Vol. 19, pp. 179–197
© Pergamon Press Ltd., 1980. Printed in Great Britain
0040-9383/80/0601-0179/$02.00/0

STABILITE ET CONJUGAISON DIFFERENTIABLE POUR CERTAINS FEUILLETAGES

E. GHYS et V. SERGIESCU

(*Received* 8 *January* 1979)

INTRODUCTION

UNE CLASSE remarquable de feuilletages est celle obtenue à l'aide d'actions localement libres de groupes de Lie. Les actions des groupes abéliens et, à un degré moindre, celles des groupes nilpotents, sont bien connues. Il est donc intéressant d'étudier les cas du premier exemple de group résoluble non nilpotent, à savoir le groupe affine de la droite réelle. Si l'on cherche à construire des examples de telles actions, on est amené tout naturellement à considérer les fibrés en tores sur le cercle. Un feuilletage défini par une action de groupe ne contenant pas de cycles évanouissants, nous avons été amenés à étudier les feuilletages sans composantes de Reeb sur ces fibrés.

Les théorèmes de conjugaison entre feuilletages sont habituellement topologiques. En utilisant les résultats de Herman sur les difféomorphismes du cercle, nous avons pu mettre en évidence un phénomène plus fort. Sur les fibrés dits hyperboliques (cf. partie I.A), nous construisons deux feuilletages modèles que l'on pourrait qualifier de "linéaires", et tout feuilletage de classe C^∞ sans feuilles compactes est alors C^∞ conjugué à l'un des modèles (cf. partie I.B).

Ce résultat peut s'énoncer en termes de stabilité. La définition habituelle d'un feuilletage stable $\mathcal{F}$ est la suivante: tout feuillegage de classe C^∞ qui est C^∞ proche de $\mathcal{F}$ est C^0 conjugué à $\mathcal{F}$. Nous avons ici la propriété évidemment plus fine: (partie I.C): tout feuilletage de classe C^∞ qui est C^1 proche de $\mathcal{F}$ est C^∞ conjugué à $\mathcal{F}$. Une telle stabilité forte a déjà été remarquée par Rosenberg et Langevin pour certaines fibrations à fibres compactes. A la différence de ces fibrations, les feuilletages dont il s'agit ici sont sans feuilles compactes.

Après avoir établi ces résultats dans la première partie de ce travail, nous en donnons quelques applications dans la seconde. La première de ces applications (partie II.A) est une classification des feuilletages transversalement orientables sans composantes de Reeb sur les 3-variétés fermées à groupe fondamental résoluble. La seconde (partie II.B) répond en partie à notre problème initial puiqu'elle classifie les actions localement libres du groupe affine sur ces mêmes variétés. Enfin, le paragraphe II.C donne un certain nombre de propriétés des feuilletages analytiques, toujours sur ces mêmes variétés. Par ailleurs, nous avons donné en appendice quelques propriétés techniques des fibrés en tores sur le cercle qui nous sont utiles dans les parties précédentes ainsi que le calcul de la croissance du groupe fondamental du recollement de deux composantes cylindriques.

Pendant le temps où nous rédigions une première version de ce travail, Plante a présenté une classification topologique des feuilletages sans composantes de Reeb sur les 3-variétés fermées à groupe fondamental résoluble. Dans cette direction son étude va plus loin que la nôtre et en particulier, elle ne contient pas d'hypothèses d'orientabilité et parfois les hypothèses de différentiabilité sont plus faibles. Nous avons cru bon de donner ici nos démonstrations car elles nous étaient souvent nécessaires pour la suite de nos applications. En outre, elles illustrent nos méthodes, comme c'est le cas de la Proposition II.A.2. démontrée indépendamment mais toutefois après Plante.

D. Sullivan nous a indiqué que le théorème de stabilité I.C est une conséquence du théorème de conjugaison I.B. Nous l'en remercions, ainsi que H. Rosenberg et L. Conlon pour les remarques qu'ils ont bien voulu nous faire.

Ce travail s'est fait grâce à l'ambiance stimulante de l'équipe de feuilletages de Lille. Nous remercions tout particulièrement G. Hector pour la façon dont il nous a guidés et pour ses nombreaux conseils et encouragements qui nous ont permis de mener à bien ce travail.

§I. FEUILLETAGES SANS FEUILLES COMPACTES SUR LES FIBRES HYPERBOLIQUES

Pour tout $A \in GL_2(Z)$, on désigne par $T_A{}^3$ le fibré en tores sur le cercle obtenu en quotientant $T^2 \times \mathbf{R}$ par la relation d'équivalence identifiant (m, t) à $(Am, t+1)$. On peut encore dire que $T_A{}^3$ est obtenu en identifiant $T^2 \times \{0\}$ et $T^2 \times \{1\}$ dans $T^2 \times [0, 1]$ à l'aide de A. Un tel fibré est dit hyperbolique si A est hyperbolique, c'est-à-dire si $|tr\, A| > 2$. Nous noterons p_A la fibration de $T_A{}^3$ sur le cercle induite par l'application $(m, t) \in T^2 \times \mathbf{R} \to t \in \mathbf{R}$.

(A) Etude des modèles

L'automorphisme A étant hyperbolique, il a deux directions propres réelles distinctes, de pentes irrationnelles. Le feuilletage du plan par droites parallèles à l'une des directions propres passe au quotient sur le tore en un feuilletage linéaire par droites. Le feuilletage produit sur $T^2 \times \mathbf{R}$ est évidemment invariant par l'application $(m, t) \to (Am, t+1)$ et définit donc un feuilletage du fibré $T_A{}^3$. Sur chaque fibré hyperbolique, nous obtenons ainsi deux feuilletages (un pour chaque direction propre). Nous dirons que ces feuilletages sont "les feuilletages modèles sur $T_A{}^3$" (ou plus brièvement "les modèles").

Les feuilles des modèles sont des cylindres et des plans si la valeur propre correspondante est positive; des cylindres, des plans et des bandes de Möbius si cette valeur propre est négative. Ces feuilles sont bien sûr toutes denses. Nous nous limiterons aux variétés orientables et aux feuilletages transversalement orientables, c'est-à-dire que nous imposerons les conditions: det $A = 1$ et $tr\, A > 2$. Les feuilletages par plans ainsi que ceux par cylindres sont entèrement classifiés (cf. [1, 9]). Les feuilletages modèles donnent une première famille de feuilletages par cylindres et plans (mélange effectif); il est donc intéressant de les étudier de plus près.

PROPOSITION 1. *Les feuilletages modèles possèdent une infinité dénombrable de cylindres.*

Démonstration. Introduisons tout d'abord la notion d'ordre d'un cylindre. Soit n *un entier naturel*; *on dira qu'un cylindre est d'ordre* n si sa trace sur une fibre de p_A est constituée de n droites. Réciproquement, soit Δ une droite de la trace d'un modèle sur une fibre T^2 *de* p_A.

La feuille du modèle contenant Δ *est un cylindre d'ordre* n si et seulement si n est le plus petit entier tel que A^n préserve Δ. D'autre part, on voit facilement que si A^n préserve Δ, alors A^n possède un unique point fixe sur Δ. On en déduit qu'il existe sur une fibre T^2 exactement n points périodiques d'ordre n de A par cylindre d'ordre n. Or, l'ensemble des points périodiques d'un difféomorphisme linéaire hyperbolique du tore est exactement l'ensemble des points à coordonnées rationnelles (cf. [1]). Il existe donc bien une infinité dénombrable de cylindres. ■

Remarquons, d'autre part, que l'on peut démontrer (par des calculs assez rébarbatifs) que, pour tout n, il existe au moins un cylindre d'ordre n.

PROPOSITION 2. *Tous les cylindres des modèles ont de l'holonomie et toutes les feuilles sont à croissance exponentielle.*

Démonstration. Si un des cylindres était sans holonomie, on pourrait utiliser les mêmes arguments que dans la classification des feuilletages par cylindres (cf. lemme fondamental de [9]), ce qui montrerait que toutes les feuilles seraient des cylindres sans holonomie. Or, on sait que les modèles contiennent des plans; ce qui montre que tous les cylindres ont de l'holonomie. La conclusion relative à la croissance des feuilles est alors une conséquence immédiate du corollaire 6.4 de [17]. ■

Remarquons que cette démonstration est valable pour tout feuilletage par cylindres et plans et c'est pourquoi nous l'avons préférée a un argument direct.

Dans l'étude des feuilletages par plans ou de ceux par cylindres, la clef de la démonstration réside dans le fait qu'ils sont sans holonomie. Pour les feuilletages modèles, le point fondamental est qu'ils sont *transversalement affines.* Rappelons qu'un feuilletage est dit transversalement affine si l'on peut choisir un atlas de cartes distinguées tel que les changements de cartes soient affines dans la direction transverse. Ces feuilletages peuvent être définis de manière équivalente par un couple de formes (ω, ω_1) vérifiant:

(1) $d\omega = \omega \wedge \omega_1$.

(2) $d\omega_1 = 0$.

(3) Le feuilletage a pour équation $\omega = 0$ (cf. [2]).

PROPOSITION 3. *Tout feuilletage modèle $(M, \mathcal{F})$ est transversalement affine.*

Démonstration. Soit λ la valeur propre correspondant à $\mathcal{F}$ et y la seconde coordonnée propre. La forme $\omega = \lambda^t\, dy$ sur $T^2 \times \mathbf{R}$ passe au quotient sur le fibré $T_A{}^3$ et définit le feuilletage modèle. D'autre part, la forme $\omega_1 = -\log \lambda\, dt$ passe aussi au quotient sur $T_A{}^3$ et on a $d\omega = \omega \wedge \omega_1$ et $d\omega_1 = 0$. Ce qui montre que les modèles sont transversalement affines. ■

On sait déjà que l'holonomie de tout cylindre est non triviale. En fait, grâce à la structure transversalement affine, on a ici un résultat plus précis (voir aussi [2]).

PROPOSITION 4. *Soit C un cylindre et ω_{1C} la restriction de ω_1 à C. Le groupe d'holonomie de C est un groupe d'homothéties, chacune d'entre elles ayant pour pente l'exponentielle d'une période de ω_{1C}.*

Démonstration. Soit m un point périodique d'ordre k de A. L'image dans $T_A{}^3$ du chemin $m \times [0, k]$ de $T^2 \times \mathbf{R}$ est un générateur γ du groupe fondamental d'un cylindre d'ordre k et tout cylindre possède un générateur de ce type. Pour calculer l'holonomie de ce cylindre, utilisons γ comme générateur du groupe fondamental du cylindre et, comme sous-variété transverse, prenons une sous-variété se relevant dans $T^2 \times \mathbf{R}$ dans la seconde direction propre de A. L'holonomie ainsi obtenue est le germe de l'application $x \to (1/\lambda)^k x$. (Remarquons que $1/\lambda$ est la seconde valeur propre.) Cette holonomie est donc bien linéaire, le logarithme de sa pente est: $-k \log \lambda = \int_\gamma \omega_1$. Ce qui démontre la proposition et montre que tous les cylindres ont de l'holonomie. ■

Pour la suite, il nous sera utile de considérer le nombre de rotation d'un feuilletage de T^2 comme un élément de la droite projective des directions de $H_1(T^2; \mathbf{R})$. Soit alors $\mathcal{F}$ un feuilletage de $T^2 = \mathbf{R}^2/Z^2$ et $\hat{\mathcal{F}}$ son relevé dans $\mathbf{R}^2$ et soit (x_n) une suite de points de $\mathbf{R}^2$ dans une même feuille de $\hat{\mathscr{F}}$ tendant vers l'infini. La droite passant par l'origine et par x_n tend vers une certaine droite indépendante du choix de la suite x_n. Cette droite limite définit un élément de la droite projective réelle $\mathbb{P}_1(\mathbf{R})$ que nous représenterons par un couple (α, β) défini a une constante multiplicative près. Si α est non nul nous l'identifierons au réel β/α qui n'est rien d'autre que le nombre de rotation classique. Nous utiliserons les propriétés suivantes de ce nombre (cf. [24] Chap. III–4):

(1) Le feuilletage $\mathscr{F}$ n'a pas de feuilles compactes si et seulement si β/α est irrationnel.

(2) Soit f un homéomorphisme du tore et f_* l'automorphisme de $H_1(T^2; \mathbf{R})$ induit. Si le nombre de rotation de $\mathscr{F}$ est (α, β), alors le nombre de rotation de l'image $(f^{-1})^*(\mathscr{F})$ de $\mathscr{F}$ par f est $f_*(\alpha, \beta)$. On a identifié ici $\mathbb{R}^2$ à $H_1(T^2; \mathbb{R})$ en choisissant comme base canonique de $H_1(T^2; \mathbf{R})$ les classes d'homologie des lacets images des chemins $t \to (t, 0)$ et $t \to (0, t)$.

(3) Si l'on munit l'espace des feuilletages de la topologie C^1 (c'est-à-dire la topologie C^0 sur l'espace des champs de droites), alors le nombre de rotation dépend de façon continue du feuilletage.

(4) Si $\mathscr{F}$ est un feuilletage de $T^2 \times \mathbf{R}$ transverse aux fibres $T^2 \times \{t\}$, le nombre de rotation de la trace de $\mathscr{F}$ sur $T^2 \times \{t\}$ est indépendant de t. Ce nombre sera appellé nombre de rotation du feuilletage $\mathscr{F}$.

PROPOSITION 5. *Les deux feuilletages modèles de T_A^3 sont topologiquement conjugués si et seulement si il existe une matrice $B \in Gl_2(\mathbf{Z})$ telle que $ABA = B$ (c'est-à-dire que A et A^{-1} sont conjuguées dans $Gl_2(\mathbf{Z})$). Dans ce cas les deux modèles sont analytiquement conjugués.*

Démonstration. Soit f une conjugaison entre les deux modèles. L'homéomorphisme f se relève dans $T^2 \times \mathbf{R}$ en F (cf. Appendice 1, Prop. 1). Soit

$$B = F_*: \pi_1(T^2 \times \mathbf{R}) \to \pi_1(T^2 \times \mathbf{R})$$

l'homomorphisme induit. D'après l'Appendice 1 (Prop. 2), deux cas sont possibles *a priori*:

(1) $BA = AB$. Dans ce cas, B et A ont mêmes directions propres. Or, f envoyant le premier modèle sur le second, B doit envoyer le nombre de rotation du premier sur celui du second. Ces nombres étant donnés par les directions propres de A, la matrice B doit permuter les directions propres de A, ce qui est impossible si A et B commutent.

(2) $ABA = B$, ce qui est précisément la conclusion de la proposition.

Réciproquement, si $ABA = B$, on vérifie facilement que l'application affine $(m, t) \to (Bm, -t)$ de $T^2 \times \mathbf{R}$ dans $T^2 \times \mathbf{R}$ passe au quotient sur le fibré T_A^3 et envoie l'un des modèles sur l'autre (car B permute les directions propres de A). ∎

Remarque. On peut se demander quels sont les fibrés T_A^3 pour lesquels les deux modèles sont conjugués, c'est-à-dire quelles sont les matrices $A \in SL_2(\mathbf{Z})$ qui sont conjuguées à leur inverse dans $GL_2(\mathbf{Z})$. La réponse est la suivante: ce sont les matrices A qui sont conjuguées à une matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ telle que $a = d$ ou $b = c$ ou $b = -c$ ou $a + b = d$ ou $d + c = a$. Il existe effectivement des fibrés pour lesquels les deux modèles ne sont pas conjugués.

Pour démontrer ces assertions, on écrit que A et A^{-1} sont conjuguées en utilisant la structure de produit libre $Z/2Z * Z/3Z$ de $PSL_2(Z)$.

Remarquons que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ souvent utilisée dans la littérature (exemple de Smale) vérifie deux des conditions données plus haut. Dans l'exemple de Smale, les deux modèles sont donc conjugués.

(B) Classification des feuilletages sans feuilles compactes

On se propose de démontrer que tout feuilletage transversalement orientable, de classe C^r ($r \geq 2$), sans feuilles compactes, sur un fibré hyperbolique orientable est C^{r-2} conjugué à l'un des feuilletages modèles.

Ceci est notre résultat essentiel. Il donne un exemple de classification de feuilletages à conjugaison différentiable près ce qui est bien sûr assez surprenant. Le théorème de stabilité de la partie (C) sera une conséquence assez rapide de ce théorème.

La méthode employée va consister à faire la construction précédente "à l'envers". Pour cela, il va falloir couper le fibré T_A^3 le long d'un tore T_0^2 transverse au feuilletage; modifier par isotopie le feuilletage obtenu sur $T_0^2 \times I$ de façon a obtenir un feuilletage produit; conjuguer le feuilletage induit sur $T_0^2 \times \{0\}$ à un feuilletage linéaire de T_0^2 et enfin modifier par isotopie l'automorphisme de recollement pour que celui-ci devienne linéaire tout en préservant le résultat des étapes antérieures.

Dans la suite, on utilisera souvent la notion classique de composante de Reeb et son analogue deux dimensionnel, la composante de Reeb plane. Rappelons qu'un théorème fondamental de Novikov affirme l'existe d'une telle composante en dimension trois si le groupe fondamental d'une feuille ne s'injecte pas dans le groupe fondamental de la variété (cf. [15]).

Etant donné une transversale fermée a un feuilletage, il est toujours possible de modifier celui-ci en introduisant une composante de Reeb dont l'âme est la transversale donnée. C'est le tourbillonnement de Reeb (cf. [8]). Lorsque la transversale est située dans le bord d'une variété, on appelle demi-tourbillonnement la modification analogue.

Si l'holonomie du bord d'une composante de Reeb est cyclique et sans points fixes on peut effacer la composante par un détourbillonnement (cf. [14]) pour le cas analytique où ceci est toujours possible).

On dira qu'un feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ de $T^2 \times I$ transverse au bord, sans composantes de Reeb, contient une demi-composante de Reeb si le feuilletage double $2\hat{\mathcal{F}}$ sur $T^3 = 2(T^2 \times I)$ contient une composante de Reeb. Nous utiliserons la théorème de Moussu et Roussarie (cf. Théorème III-3 de [14]) suivant lequel un feuilletage de $T^2 \times I$, de classe C^r ($r \geq 2$), sans demi-composantes de Reeb et sans feuilles compactes intérieures est C^r isotope (modulo $T^2 \times \{0\}$) à un feuilletage produit $f_0 \times I$ où f_0 est le feuilletage induit sur $T^2 \times \{0\}$.

Soit $(M, \mathcal{F})$ un feuilletage de classe C^r ($2 \leq r \leq \omega$) transversalement orientable, sans feuilles compactes, sur un fibré hyperbolique orientable. Le théorème de Novikov permet d'affirmer que le groupe fondamental de toute feuille est résoluble; en outre, toutes les feuilles sont orientables et non-compactes, ce sont donc des cylindres ou des plans.

D'autre part, puisqu'il n'existe pas de feuilles compactes toute fibre de la fibration est C^r-isotope à un tore T_0^2 transverse au feuilletage $\mathcal{F}$ (cf. Théorème I-1 de [23]). En coupant le long de ce tore on obtient un feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ de $T_0^2 \times I$, transverse au bord, sans feuilles compactes intérieures. Inversement, le feuilletage initial $\mathcal{F}$ s'obtient en recollant les deux bords de $T_0^2 \times I$ à l'aide d'un difféomorphisme ψ, de classe C^r, préservant les feuilletages induits.

LEMME 1. *Le feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ de $T_0^2 \times I$ est isotope modulo $T_0^2 \times \{0\}$ à un feuilletage produit $f_0 \times I$, modifié par un nombre fini de demi-tourbillonnements autour de transversales fermées situées dans le bord de $T_0^2 \times I$.*

Démonstration. Soit $C(\hat{\mathcal{F}})$ l'ensemble des feuilles de $\hat{\mathcal{F}}$ qui sont homéomorphes à $S^1 \times I$ et dont les deux composantes du bord sont simultanément dans $T_0^2 \times \{0\}$ ou dans $T_0^2 \times \{1\}$. Chaque F de $C(\hat{\mathcal{F}})$ sépare $T_0^2 \times I$ en deux composantes connexes dont une seule a un bord connexe. Notons $c(F)$ cette composante. On introduit sur $C(\hat{\mathcal{F}})$ une relation d'ordre par $F \leqslant F'$ is et seulement si $c(F) \subset c(F')$. L'ensemble $C(\hat{\mathcal{F}})$ devient ainsi un ensemble ordonné inductif car la réunion des feuilles fermées de $\hat{\mathcal{F}}$ est un fermé (cf. [20]).

Montrons, tout d'abord, que $C(\hat{\mathcal{F}})$ ne possède qu'un nombre fini d'éléments maximaux. Pour cela, considérons le feuilletage double $2\hat{\mathcal{F}}$ sur $T^3 = 2(T_0^2 \times I)$. Chaque feuille F de $C(\hat{\mathcal{F}})$ définit par passage au double une feuille torique $2F$ telle que le groupe fondamental de $2F$ ne s'injecte pas dans celui de $2c(F)$. (Le double de $c(F)$ est un tore plein.) Le théorème de Novikov permet alors d'affirmer que pour toute feuille F de $C(\hat{\mathcal{F}})$, le double de $c(F)$ contient une composante de Reeb. Cette composante de Reeb n'est pas contenue dans $c(F)$ car le feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ ne contient pas de composantes de Reeb, elle coupe donc le tore $T_0^2 \times \{0\}$ sur une composante de Reeb plane. Un feuilletage du tore ne contient qu'un nombre fini de composantes de Reeb planes. D'autre part, si F et F' sont des feuilles de $C(\hat{\mathcal{F}})$, deux cas sont possibles; soit F et F' sont ordonnées; soit $c(F)$ et $c(F')$ sont disjoints. Il est alors clair que $C(\hat{\mathcal{F}})$ ne possède qu'un nombre fini d'éléments maximaux. Notons $F_1, \ldots, F_n$ ces éléments.

Dans le double $2\hat{\mathcal{F}}$, les feuilles toriques $2F_i$ ont une holonomie cyclique car ce sont des doubles. De plus, cette holonomie est sans points fixes sur la face extérieure à $2c(F_i)$ car les F_i sont maximaux. On peut donc effectuer un nombre fini de détourbillonnements de Reeb sur le feuilletage $2\hat{\mathcal{F}}$ de façon à supprimer les feuilles $2F_i$ et donc toutes les feuilles $2F$ où F est un élément de $C(\hat{\mathcal{F}})$.

La trace de ces détourbillonnements sur $T_0^2 \times \{0\}$ (ou sur $T_0^2 \times \{1\}$) est un "détourbillonnement de dimension deux" du feuilletage induit par $\hat{\mathcal{F}}$ sur $T_0^2 \times \{0\}$ (ou sur $T_0^2 \times \{1\}$). Remarquons que si un détourbillonnement sur le tore fait apparaître une nouvelle feuille compacte, alors le nouveau feuilletage du tore est une suspension c'est-à-dire qu'il ne contient pas de composantes de Reeb plane. Il s'ensuit qu'après les détourbillonnements sur $2(T_0^2 \times I)$, deux cas sont possibles; soit aucune nouvelle feuille compacte n'apparaît; soit la trace du nouveau feuilletage sur $T_0^2 \times \{0\}$ (ou $T_0^2 \times \{1\}$) est sans composantes de Reeb planes. Dans les deux cas, le nouveau feuilletage sur $2(T_0^2 \times I)$ est sans composantes de Reeb, et il est le double d'un feuilletage de $T_0^2 \times I$ sans demi-composantes de Reeb. D'après le résultat de Moussu et Roussarie déjà cité, ce feuilletage de $T_0^2 \times I$ est C^r isotope à un feuilletage produit $f_0 \times I$. ∎

LEMME 2. *Le feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ est en fait C^r isotope* (mod $T_0^2 \times \{0\}$) *à un feuilletage produit $f_0 \times I$, où f_0 est le feuilletage induit sur $T_o^2 \times \{0\}$. Le feuilletage f_0 est un feuilletage par droites.*

Démonstration. Choisissons un tore T_1^2 transverse à $\hat{\mathcal{F}}$ dans le domaine où les tourbillonnements n'ont pas affecté le produit $f_0 \times I$. Montrons que si l'on coupe le fibré le long de T_1^2, le feuilletage $\hat{\mathcal{F}}'$ obtenu sur $T_1^2 \times I$ ne contient pas de demi-composantes de Reeb. Pour cela, distinguons deux cas. Si f_0 ne contient pas de composantes de Reeb planes, il est clair que $\hat{\mathcal{F}}$ ne contient pas de demi-composantes de Reeb. Si f_0 contient une composante de Reeb plane, toutes les transversales fermées à f_0 ont même classe d'homotopie; notons $[\gamma]$ cette classe. Après tourbillonnements sur le tore, toutes les feuilles compactes obtenues sur le tore auront toujours $[\gamma]$ comme classe d'homotopie. Un difféomorphisme de recollement ψ' doit envoyer $\hat{\mathcal{F}}_{|T_1^2\times\{0\}}$ sur $\hat{\mathcal{F}}'_{|T_1^2\times\{1\}}$. L'homomorphisme ψ'_* induit sur le groupe fondamental doit donc envoyer $[\gamma]$ sur $\pm[\gamma]$. Or ceci est impossible car ψ'_* étant hyperbolique, il n'a pas la valeur propre ± 1. Le feuilletage $\hat{\mathcal{F}}'$ ne contient donc pas de demi-composantes de Reeb, et il est donc C^r isotope à un produit. Il est alors clair qu'il en est de même pour le feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ c'est-à-dire que:

$$(M, \mathcal{F}) \overset{C^r}{\simeq} f_0 \times I/(x, 0) \sim (\Psi(x), 1)$$

où Ψ est un C^r difféomorphisme préservant f_0.

Supposons que f_0 possède une feuille compacte. Le difféomorphisme Ψ préservant f_0, la classe d'homotopie de cette feuille compacte est un point fixe de Ψ_*. Ceci est impossible car Ψ_* est hyperbolique. Le feuilletage f_0 est donc par droites; ce qui termine la démonstration du Lemme 2. ■

LEMME 3. *Il existe un feuilletage h_0 linéaire par droites du tore T^2 et un C^{r-2} difféomorphisme χ du tore préservant h_0 tels que le feuilletage $(M, \mathcal{F})$ soit C^{r-2} conjugué à $h_0 \times I/(x, 0) \sim (\chi(x), 1)$.*

Démonstration. Soit f_0 le feuilletage de T^2 introduit dans le lemme précédent. On montre d'abord que son nombre de rotation (α, β) est tel que β/α est quadratique sur $\mathbf{Q}$. Ceci nous permettra d'utiliser le résultat fondamental d'Herman sur les difféomorphismes du cercle et de conclure.

Si Ψ est le difféomorphisme du Lemme 2, Ψ_* préserve l'élément (α, β) de la droite projective. On a donc:

$$\Psi_*(\alpha, \beta) = \lambda(\alpha, \beta).$$

Le vecteur (α, β) est donc vecteur propre de Ψ_*.

Un calcul simple montre alors que les pentes des directions propres d'un automorphisme linéaire hyperbolique de $Gl_2(\mathbf{Z})$ sont quadratiques sur $\mathbf{Q}$. (Il suffit de calculer explicitement ces directions). On en déduit que β/α est quadratique sur $\mathbf{Q}$.

Aussi β/α admet un développemement en fraction continue qui est périodique est ses coefficients sont bornés.

On peut alors appliquer le principal résultat d'Herman sur les difféomorphismes du cercle (cf. [11]): le feuilletage f_0 est C^{r-2} conjugué à un feuilletage linéaire du tore, ce qui démontre le lemme. ■

Il s'agit maintenant de modifier le difféomorphisme χ par isotopie pour obtenir un difféomorphisme linéaire, de façon à retrouver les modèles. Cette isotopie doit cependant préserver le résultat du lemme précédent, c'est-à-dire qu'à chaque étape, elle doit préserver le feuilletage h_0.

Pour cela, soit F un relevé dans $\mathbf{R}^2$ du difféomorphisme χ. Ecrivons F sous la forme:

$$(x, y) \to (f(x, y), f'(x, y)).$$

Soit $\delta = (\beta/\alpha)$ la pente du feuilletage h_0. Le difféomorphisme χ préservant h_0, la quantité $f'(x, y) - \delta f(x, y)$ ne dépend que de $y - \delta x$. On dira que χ est transversalement affine si $f'(x, y) - \delta f(x, y)$ est une fonction affine de $y - \delta x$.

LEMME 4. *Soit χ un difféomorphisme du tore, de classe C^r* ($r \geq 0$). Si *χ préserve le feuilletage h_0 linéaire par droites de pente irrationnelle δ, alors χ est transversalement affine.*

Démonstration. Soit Φ la fonction telle que:

$$f'(x, y) - \delta f(x, y) = \Phi(y - \delta x).$$

Les fonctions f et f' s'écrivent de façon unique comme somme d'une fonction linéaire et d'une fonction périodique, soit:

$$f = l + p \quad \text{et} \quad f' = l' + p'.$$

On en déduit:

$$(l' - \delta l)(x, \delta x) + (p' - \delta p)(x, \delta x) = \Phi(0).$$

La fonction $(p' - \delta p)$ est périodique, donc bornée. La fonction associant $(l' - \delta l)(x, \delta x)$ à x est donc linéaire bornée, elle est donc nulle. Par suite, la fonction $(p' - \delta p)$ est constante sur une droite de pente irrationnelle, elle est donc constante. On a alors:

$$\begin{aligned}\Phi(y) = f'(0, y) - \delta f(0, y) &= (l' - \delta l)(0, y) + (p' - p)(0, y)\\ &= ay + b.\end{aligned}$$

C'est-à-dire que:

$$f'(x, y) - \delta f(x, y) = a(y - \delta x) + b.$$

Le difféomorphisme χ est donc bien transversalement affine. ∎

LEMME 5. *Soit χ un C^r difféomorphisme du tore* ($r \geq 0$) préservant le feuilletage h_0 *linéaire par droites de pente irrationnelle δ. Alors χ est C^r-isotope à un difféomorphisme linéaire par une isotopie χ_t telle que, pour tout t, le difféomorphisme χ_t préserve le feuilletage h_0.*

Démonstration. D'après le lemme précédent, χ est de la forme:

$$(x, y) \to (F(x, y), a(y - \delta x) + b + \delta f(x, y)).$$

Posons:

$$f_t = tl + (1 - t)f$$

et

$$\chi_t(x, y) = (f_t(x, y), a(y - \delta x) + (1 - t)b + \delta f_t(x, y)).$$

Montrons que χ_t est l'isotopie cherchée.

(1) On a bien $\chi_0 = \chi$; de plus, χ_1 est linéaire et χ_t préserve le feuilletage h_0.

(2) L'application χ_t passe au quotient sur le tore. En effet:

$$\begin{aligned} f_t(x+n, y+p) &= tl(x+n, y+p) + (1-t)f(x+n, y+p) \\ &= f_t(x, y) + l(n, p) \quad \text{et} \quad l(n,p) \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(y+p-\delta(x+n)) + (1-t)b + \delta f_t(x+n, y+p) = {} & [a(y-\delta x) + (1-t)b + f_t(x, y)] \\ & + [ap - a\delta n + \delta l(n, p)] \end{aligned}$$

et la quantité $ap - a\delta n + \delta l(n, p)$ est entière car on sait que l'application:

$$(x, y) \to a(y - \delta x) + \delta f(x, y) - b$$

passe au quotient de tore dans le cercle.

(3) L'application χ_t est un C^r difféomorphisme. Pour montrer que χ_t est injective, il faut montrer que:

$$(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \quad \text{et} \quad y_1 - y_2 = \delta(x_1 - x_2)$$

implique que:

$$(1-t)(f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)) + tl(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \neq 0.$$

Pour $t = 0$, l'expression $f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)$ est non nulle car χ est bijectif. Pour $t = 1$, l'expression $l(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ est non nulle car δ est irrationnel et l est à coefficients entiers. Si l'on montre que ces deux quantités sont de même signe, on aura montré que χ_t est injectif. Pour cela, il suffit de montrer que les deux fonctions:

$$t \xrightarrow{q} f(x+t, y+t\delta)$$

et

$$t \longrightarrow l(x+t, y+t\delta) = l(x, y) + tl(1, \delta)$$

ont même sens de variation. La fonction q est injective, donc monotone. Supposons la, par exemple, croissante, et montrons que $l(1, \delta)$ est strictement positif.

Soit (m, n) deux entiers tels que m/n soit proche de δ (on choisit n positif). Alors

$nl(1, \delta) = l(n, n\delta)$ est proche de $l(n, m)$
$l(n, m) = f(x+n, y+m) - f(x, y)$ est proche de
$f(x+n, y+n\delta) - f(x, y) = q(n) - q(0) > 0.$

Ce qui montre que $l(1, \delta)$ est strictement positif. L'injectivité de χ_t est donc établie

La surjectivité de χ_t découle du fait que χ_t est injectif et que l'homomorphisme $(\chi_t)_* = \chi_*$ induit sur le groupe fondamental est bijectif.

Il reste à voir que χ_t est un difféomorphisme local. Son Jacobien est:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_t) + \delta \frac{\partial}{\partial y}(f_t) = t\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \delta \frac{\partial f}{\partial y}\right) + (1-t)l(1, \delta).$$

On sait que $((\partial f/\partial x)+\delta(\partial f/\partial y))$ est non nul, de même que $l(1,\delta)$ et ces deux nombres sont de même signe car ce sont les dérivées des fonctions considérées précédemment. Le Jacobien de χ_t est donc non nul; ce qui termine la démonstration du lemme. ∎

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème.

THÉORÈME 1. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement orientable, de classe C^r $(2 \leq r \leq \omega)$, sans feuilles compactes, sur un fibré hyperbolique orientable. Alors $\mathcal{F}$ est C^{r-2} conjugué à l'un des feuilletages modèles.*

Démonstration. Soit χ_t l'isotopie du lemme précédent et

$$X: T^2\times I \to T^2\times I$$

$$(m,t)\to(\chi_t\chi_0^{-1}(m),t)$$

Le difféomorphisme X préserve le feuilletage $h_0\times I$ et envoie le point $(m,0)$ sur lui-même et le point $(\chi(m),1)$ sur le point $(\chi_1(m),1)$. Le feuilletage $(M,\mathcal{F})$ est donc C^{r-2} conjugué à:

$$h_0\times I/(m,0)\sim(\chi_1(m),1)$$

où h_0 est un feuilletage linéaire par droites de T^2 et χ_1 un difféomorphisme linéaire, ce qui est precisément l'un des feuilletages modèles. ∎

Donnons tout de suite un corollaire immédiat du théorème:

COROLLAIRE 1. *Tout feuilletage transversalement orientable, sur un fibré hyperbolique orientable, sans feuilles compactes, de classe C^4 est transversalement affine.* ∎

(C) Propriétés de stabilité

Nous dirons que deux feuilletages de dimension deux sont C^1 proches s'ils sont C^0 proches au sens de la topologie des champs de plans.

Comme Sullivan nous l'a fait remarquer, le lemme suivant est un corollaire immédiat du Théorème II.17 de [25] suivant lequel la croissance exponentielle est une propriété C^1 stable. Nous en donnerons cependant une démonstration élémentaire.

LEMME 1. *Un feuilletage suffisamment C^1 proche d'un modèle n'a pas de feuilles compactes.*

Démonstration. Les modèles étant transverses à la fibration, les feuilletages C^1 proches des modèles le sont aussi. Considérons alors le relevé $\hat{\mathcal{F}}$ dans $T^2\times\mathbf{R}$ d'un feuilletage $\mathcal{F}$ suffisamment C^1 proche d'un modèle. Ce feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ est évidemment invariant par l'application $(m,t)\to(Am,t+1)$; le nombre de rotation (α,β) de $\hat{\mathcal{F}}$ est donc vecteur propre de A et β/α est donc irrationnel. Il s'ensuit que la trace de $\mathcal{F}$ sur toute fibre de $T_A{}^3$ est sans feuilles compactes; ce qui achève la démonstration. ∎

LEMME 2. *Soit $T_A{}^3$ un fibré hyperbolique sur lequel les deux modèles $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ ne sont pas conjugués. Alors, il existe un voisinage de chacun des modèles (dans la topologie C^1) ne contenant aucun feuilletage de classe C^1 qui soit topologiquement conjugué à l'autre modèle.*

Démonstration. Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe une suite d'homéomorphismes g_n de T_A^3 tels que $g_n^*\mathcal{F}_1$ soit de classe C^1 et tende vers le modèle $\mathcal{F}_2$. Les homéomorphismes g_n se relèvent dans $T^2\times\mathbf{R}$ en G_n. Soit:

$$B_n=(G_n)_*:\quad \pi_1(T^2\times\mathbf{R})\to\pi_1(T^2+\mathbf{R})$$

l'homomorphisme induit. D'après l'appendice, deux cas sont possibles: Soit $AB_n=B_nA$, soit $AB_nA=B_n$. Comme les modèles ne sont pas conjugués, B_n commute avec A d'après (I.A.—Prop. 5). Alors A et B_n ont mêmes directions propres et le nombre de rotation du relevé de $g_n^*\mathcal{F}_1$ dans $T^2\times\mathbf{R}$ est donc le même que celui du relevé de $\mathcal{F}_1$. Or, ceci est impossible car $g_n^*\mathcal{F}_1$ tend vers $\mathcal{F}_2$ alors que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ ont des nombres de rotation différents. ■

THÉORÈME 1. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement orientable de classe C^r ($3\leq r\leq\omega$), sans feuilles compactes, sur un fibré hyperbolique orientable. Alors, tout feuilletage de classe C^r, suffisamment C^1 proche de $\mathcal{F}$ est C^{r-2} conjugué à $\mathcal{F}$.*

Démonstration. D'après la partie B, le feuilletage $\mathcal{F}$ est C^1 conjugué à un modèle. Comme la C^1 conjugaison est continue dans la C^1 topologie, on peut supposer que $\mathcal{F}$ est un modèle. Le feuilletage $\mathcal{F}$ étant transversalement orientable, tout feuilletage $\mathcal{G}$ suffisamment C^1 proche l'est aussi. D'après le Lemme 1, le feuilletage $\mathcal{G}$ ne possède pas de feuilles compactes et $\mathcal{G}$ est donc C^{r-2} conjugué à l'un des modèles. Si les deux modèles sont conjugués, le théorème est démontré car alors $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ sont C^{r-2} conjugués. Si les deux modèles ne sont pas conjugués, le Lemme 2 montre que $\mathcal{G}$ n'est pas conjugué au modèle différent de $\mathcal{F}$ et donc que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont C^{r-2} conjugués. ■

Remarque. On ne peut pas remplacer la relation de conjugaison par celle d'isotopie dans le Théorème 1. En effet, soit U_n une suite de vecteurs de $\mathbf{R}^2$ à coordonnées entières, et soit f_n la suite de difféomorphismes de $T^2\times I$ définie par:

$$f_n(m,t)=(m+tU_n,t).$$

On vérifie facilement que f_n passe au quotient dans T_A^3 et que si l'on choisit pour U_n une suite de vecteurs dont les pentes tendent vers la pente de la direction propre utilisée pour construire le modèle $\mathcal{F}$, alors $f_n^*\mathcal{F}$ tend vers $\mathcal{F}$ bien que $f_n^*\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$ ne soient pas isotopes.

Remarquons, d'autre part, que si l'on choisit pour U_n une suite dont la seconde coordonnée propre tend vers l'infini, cette même suite de difféomorphismes f_n envoie le feuilletage modèle considéré sur un feuilletage qui tend vers la fibration, ce qui montre que la fibration n'est pas stable. Ceci pouvait être prévu à l'aide du théorème de Rosenberg et Langevin affirmant qu'une fibration est stable si et seulement si l'homologie de la fibre est triviale (cf. [13, 21]).

§II. QUELQUES APPLICATIONS

(A) Feuilletages sans composantes de Reeb sur les 3-variétés fermées à groupe fondamental résoluble

Dans cette partie, on se propose de montrer comment le Théorème 1 permet de terminer la classification des feuilletages de classe C^2, transversalement orientables, sans composantes de Reeb, sur les 3-variétés fermées à groupe fondamental résoluble, commencée par Goodman [7].

Soit $(M, \mathcal{F})$ un tel feuilletage. Si $\mathcal{F}$ possède une feuille sphérique M est homéomorphe à $S^1 \times S^2$ et le feuilletage est conjugué au feuilletage produit (cf. [20]). S'il n'y a pas de feuilles sphériques, deux cas sont à distinguer:

1er cas: Il existe une feuille compacte qui est un tore puisque son groupe fondamental est résoluble.

Si ce tore ne sépare pas M, en coupant le long du tore, on obtient une variété M_1 à bord incompressible non connexe. La variété M_1 est alors $T^2 \times I$ (cf. Théorème 4–2 de [5]). Les feuilletages de $T^2 \times I$ tangents au bord, sans composantes de Reeb sont classifiés dans [14].

Si ce tore sépare M, les deux composantes M' et M'' sont des fibrés non triviaux en intervalles sur une bouteille de Keein. Goodman a montré que tout feuilletage sur M' et M'' s'obtient en recollant une composante cylindrique avec un feuilletage quelconque de $T^2 \times I$ tangent au bord (cf. Lemme 2-3 de [7]). Remarquons que les variétés obtenues ainsi ont un premier nombre de Betti égal à 0 ou 1.

2ème cas: Il n'existe pas de feuille compacte. D'après un théorème de Goodman, (Théorème 3.2 de [7]) deux cas sont possibles: soit M est un fibré en tores sur le cercle, soit M est Q sphère d'homologie et admet alors un revêtement fini qui est un fibré en tores sur le cercle. Nous étudierons successivement ces deux cas.

Soit donc $(T_A^3, \mathcal{F})$ un feuilletage transversalement orientable sans feuilles compactes sur un fibré orientable.

PROPOSITION 1. *On a* $\operatorname{tr} A \geq 2$. *De plus* (*i*) *si* $\operatorname{tr} A > 2$, $\mathcal{F}$ *est conjugué à un modèle* (*ii*) *si* $\operatorname{tr} A = 2$, $\mathcal{F}$ *est un feuilletage par plans ou par cylindres sans holonomie.*

Ces derniers sont classifiés dans [9, 21].

Démonstration. Si $\operatorname{tr} A < -2$, $\mathcal{F}$ étant conjugué a un modèle qui dans ce cas n'est pas transversalement orientable, on aboutit a une contradiction.

Si $|\operatorname{tr} A| \leq 2$, le groupe fondamental de M est à croissance polynomiale. Par l'argument habituel toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ sont à croissance polynomiale. D'après un théorème bien connu, $\mathcal{F}$ est sans holonomie et toutes les feuilles sont simultanément difféomorphes à des plans où des cylindres.

Or, seul T^3 est feuilletable par plans (cf. [21]) et les variétés feuilletables par cylindres sont les fibrés définis par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (cf. [9]), toutes de trace 2. D'après l'appendice 1 la trace étant la même pour les matrices définissant des fibrés homéomorphes, on en déduit que si $|\operatorname{tr} A| \leq 2$ et $\operatorname{tr} A \neq 2$ alors il existe une feuille compacte. Ceci démontre la proposition. ∎

Remarquons que l'hypothèse d'orientation transverse est importante dans la proposition, car les modèles sur les fibrés de trace inférieure à -2 sont sans feuilles compactes mais ces feuilletages ne sont pas transversalement orientables.

Pour terminer la classification, il reste à examiner le cas des sphères d'homologie rationnelles à groupe fondamental résoluble.

PROPOSITION 2. *Tout feuilletage transversalement orientable d'une* Q*-sphère d'homologie résoluble orientable possède une feuille compacte.*

Démonstration. On considère un revêtement galoisien fini qui est un fibré en tores sur le cercle, soit T_A^3 avec $A \in SL_2(Z)$. Soit $\mathcal{F}$ le relevé de feuilletage dans T_A^3. On montre que $\mathcal{F}$ possède feuille compacte.

Supposons le contraire et remarquons qu'un feuilletage transversalement orientable sans feuilles compactes sur une sphère d'homologie résoluble orientable est un feuilletage par cylindres et plans et son groupe fondametal est à croissance exponentielle (cf. [9, 21]). La même chose est alors vraie pour $(T_A{}^3, \mathscr{F})$, c'est-à-dire que A est hyperbolique, de trace strictement supérieure à 2, et $\mathscr{F}$ est C^{r-2} conjugué à l'un des modeles.

On peut donc supposer que le groupe Γ des automorphismes du revêtement est un groupe de C^{r-2} difféomorphismes qui préservent le modèle. Pour la suite de la démonstration on considère que $r \geqslant 3$. Dans le cas où $r = 2$, la proposition peut être démontrée par une méthode similaire en faisant apparaître un cycle dans l'homologie singulière de $T_A{}^3$ dual à la forme utilisée plus bas et invariant par l'action de Γ.

Soit $\omega = \lambda^t \, dy$ et $\omega_1 = -\log \lambda \, dt$ les formes qui définissent la structure affine du modèle. Montrons que la classe de cohomologie de ω_1 (qui est non nulle) est invariante par Γ. Ce sera la contradiction cherchée car la classe de ω_1 définira un élément non nul dans la cohomologie du quotient $T_A{}^3/\Gamma$.

Soit ψ un élément de Γ; ψ préserve $\mathscr{F}$, donc, il existe une fonction $\mathscr{F}$ partout non nulle telle que:

$$\psi^*\omega = F\omega$$

Donc:

$$\psi^*(d\omega) = d(F\omega)$$

Or $d\omega = \omega \Lambda \omega_1$ et $d\omega_1 = 0$, donc

$$\psi^*\omega \Lambda \psi^*\omega_1 = F \, d\omega + dF \Lambda \omega$$

$$F\omega \Lambda \psi^*\omega_1 = F\omega\Lambda\omega_1 + dF\Lambda\omega$$

$$\omega\Lambda(\psi^*\omega_1 - d(\log|F|) - \omega_1) = 0.$$

La forme ω étant non singulière, il existe une fonction G telle que

$$\psi^*\omega_1 = \omega_1 - d(\log|F|) + G\omega.$$

Montrons que $G = 0$. Pour ceci, écrivons

$$G\omega = H(x, y, t) \, dy.$$

Or $G\omega$ est fermée, donc en fait,

$$G\omega = H(y) \, dy.$$

La fonction H étant constante pour y constant, H est constant sur les feuilles du modèle, or ces feuilles sont denses. La fonction H est donc constante. Ceci entraîne que H est nul car la forme dy de $T^2 \times \mathbf{R}$ ne passe pas au quotient sur $T_A{}^3$. D'où finalement $[\psi^*\omega_1] = [\omega_1]$. ■

Remarques. (1) Soit $M = \mathscr{K} \cup_f \mathscr{K}$ le recollement de deux composantes cylindriques le long de leur bord qui est un tore. La variété obtenue a un premier nombre de Betti égal à 0 ou 1. Pour un choix convenable de f, son groupe fondamental est à croissance exponentielle (cf. Appendice 2). La proposition précédente montre que tout feuilletage transversalement orientable sur M possède une feuille compacte. Lorsque la croissance est polynomiale, ceci est prouvé dans [17]. Remarquons aussi que toute $\mathbf{Q}$-sphère d'homologie résoluble suffisamment grande est de ce type.

(2) Soit M^3 une Q-sphère d'homologie résoluble non suffisamment grande. Si le groupe fondamental de M^3 est à croissance non exponentielle, il existe toujours une composante de Reeb[7]. C'est le cas de certains fibrés de Seifert. La proposition précédente entraîne la même chose si le groupe fondamental de M est à croissance exponentielle. Toutefois, on ne sait pas si cette situation existe effectivement.

(b) Actions localement libres du groupe affine

Les actions du groupe $\mathbf{R}^n$ sont bien connues (cf. [21]) celles des groupes nilpotents ont été étudiées dans [4, 10]. L'étape suivante consiste à étudier les actions de groupes résolubles dont le prototype est le groupe affine $\mathscr{A}$ de la droite réele. Nous donnons, ci-dessous, une classification des actions localement libres de $\mathscr{A}$ sur les 3-variétés à groupe fondamental résoluble.

PROPOSITION 1. *Les feuilletages modèles orientables peuvent être définis par une action localement libre de $\mathscr{A}$. Il en est donc de même de tout feuilletage transversalement orientable sur les fibrés hyperboliques orientables.*

Démonstration. Nous présentons cette action de deux manières différentes. Pour la première, il suffit de construire deux champs de vecteurs X et Y, linéairement indépendants en tout point, tangents aux feuilles du modèle, et qui vérifient la relation de commutation $[X, Y] = -X$ des génerateurs canoniques de l'algèbre de Lie de $\mathscr{A}$. Posons:

$$X(x, y, t) = (\lambda^t, 0, 0)$$

et

$$Y(x, y, t) = \left(0, 0, \frac{1}{\log \lambda}\right).$$

Ces deux champs de vecteurs de $\mathbf{R}^3$ où les deux premières coordonnées sont relatives à la base propre et où λ est la valeur propre considérée, passent au quotient sur le fibré. On peut voir sans peine que X et Y vérifient la relation de commutation souhaitée.

Une autre façon de présenter cette action est la suivante. Considérons le groupe de Lie résoluble G dont les éléments sont les triplets (t, x, y) et où la loi de groupe est:

$$(t, x, y)(t'x', y') = (t + t', A^t(x', y') + (x, y)).$$

Soit G_Z le sous-groupe de G constitué des éléments dont les trois coordonnées sont entières. L'appendice montre que le fibré en tores $T_A{}^3$ est difféomorphe à l'espace homogène G/G_Z. Remarquons alors que le groupe affine $\mathscr{A}$ se plonge dans G de la façon suivante. Soit U le vecteur propre de A correspondant à la valeur propre λ. A l'application affine

$$x \to ax + b,$$

associons l'élement $((\log a/\log \lambda), bU)$ de G. On vérifie facilement que ceci définit un morphisme injectif de $\mathscr{A}$ dans G. Le groupe $\mathscr{A}$ opère sur G par translation à gauche, donc il opère sur G/G_Z. Il est facile de voir que cette action est localement libre et définit le feuilletage modèle.

PROPOSITION 2. *Soit M^3 une 3-variété compacte à groupe fondamental résoluble admettant une action localement libre, de classe C^r/A ($r \geq 2$), de α. Alors M^3 est un fibré hyperbolique et le feuilletage obtenu $\mathcal{F}$ est C^{r-2} conjugué à un feuilletage modèle.*

Démonstration. On sait que les seuls sous-groupes discrets de $\mathcal{A}$ sont cycliques. Ainsi, les feuilles de $\mathcal{F}$ sont des cylindres ou des plans. En particulier, la variété M^3 doit être sans bord. D'autre part, on vérifie[3] que la croissance de ces feuilles est exponentielle. Ainsi, il y a toujours mélange [9, 21] de cylindres et de plans. La proposition est alors une conséquence de la classification des feuilletages sans feuilles compactes donnée (Théorème 1.A.1).

Remarque. Le théorème de stabilité montre le caractère très différent des actions du groupe affine par rapport à celles de $\mathbf{R}^2$ qui ne sont jamais stables.

(c) **Feuilletages analytiques**

Le premier résultat remarquable sur les feuilletages analytiques est dû à Haefliger[8] qui a montré qu'il n'existe pas de tels feuilletages sur une variété à groupe fondamental fini. Plus récemment, Plante, Thurston et Goodman ([7, 19]) ont montré qu'il en est de même si la croissance du groupe fondamental est non exponentielle et le premier groupe d'homologie réelle est nul. Dans le même ordre d'idées, on établit ici le résultat suivant:

PROPOSITION 1. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement analytique, transversalement orientable, d'une 3-variété fermée M à groupe fondamental résoluble. Alors m fibre sur le cercle.*

Démonstration. On montre tout d'abord qu'il existe sur M un feuilletage transversalement analytique sans composantes de Reeb. Puisque $\mathcal{F}$ est transversalement analytique, il en est de même de l'holonomie. Supposons que $\mathcal{F}$ possède une composante de Reeb. On peut alors modifier le feuilletage par un détourbillonnement qui fait disparaître le bord de la composante de Reeb. Deux cas peuvent se présenter; soit on a une infinité de feuilles compactes, auquel ces toutes les feuilles sont compactes et le feuilletage est une fibration; soit le nombre fini de feuilles (compactes) qui ne rencontrent pas de transversales fermées diminue strictement (Remarquons que les nouvelles feuilles compactes introduites éventuellement ne possèdent pas cette dernière propriété). On continue le processus tant qu'il reste des composantes de Reeb et que le nombre de feuilles compactes reste fini. Donc, après un nombre fini d'étapes, égal au plus au nombre de feuilles compactes ne rencontrant pas de transversales fermées, il n'y a plus de composantes de Reeb.

On peut alors appliquer le Théorème 3.2 de [7], suivant lequel une variété admettant un tel feuilletage est soit un fibré en tores sur le cercle, soit une $\mathbf{Q}$-sphère d'homologie résoluble. En fait, Goodman exige aussi dans les hypothèses l'absence de composantes cylindriques, mais une légère modification de la démonstration permet d'éviter cette hypothèse.

Il reste à éliminer le cas d'une sphère d'homologie. On a vu (Proposition 2 partie II.A) qu'il existe alors une feuille compacte. Cette feuille est alors un tore qui sépare la variété. La variété M s'obtient en recollant deux composantes cylindriques sur les deux bords d'un produit $T^2 \times I$ (voir II.A). L'holonomie du bord de chaque composante cylindrique M_1 et M_2 est cyclique; et le diffeomorphisme de recollement identifie un lacet γ_1 supportant de l'holonomie de M_1 a un lacet γ_2 supportant de l'holonomie de M_2. Puisque ces lacets représentant des éléments non-nuls dans l'homologie rationnelle de M_1 et de M_2, il s'ensuit que M n'est pas une $\mathbf{Q}$ sphère d'homologie. Les $\mathbf{Q}$ sphères d'homologie résolubles ne sont donc pas feuilletable de manière transversalement analytique. ■

PROPOSITION 2. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage analytique sur T_A^3, sans composante de Reeb, avec $|tr\,A| \neq 2$. Si $\mathcal{F}$ a une feuille compacte toutes les feuilles sont compactes et le feuilletage est une fibration.*

Démonstration. Si $\mathcal{F}$ a une feuille compacte, cette feuille est un tore incompressible donc elle ne disconnecte pas. Coupant le long de ce tore, on obtient un feuilletage analytique de $T^2 \times I$. Le fibré s'obtient en recollant $T^2 \times 0$ et $T^2 \times 1$ à l'aide de A' (où A' est conjuguée à A ou A^{-1}). Le condition de recollement d'holonomie va nous montrer que cette holonomie est triviale si A "tord" trop le tore T^2.

Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des couples de germes de difféomorphismes analytiques de $\mathbf{R}$ en 0 qui apparaissent comme générateurs de l'holonomie d'un certain feuilletage analytique de $T^2 \times I$ pour le feuille $T^2 \times 0$. Le couple $(f_1, f_2) \in \mathscr{C}$ détermine le voisinage feuilleté de $T^2 \times 0$ donc tout le feuilletage de $T^2 \times I$ car le feuilletage est analytique. Au couple $(f_1, f_2) \in \mathscr{C}$, faisons correspondre l'holonomie de la feuille $T^2 \times 1$ ainsi déterminée. On obtient ainsi une application

$$\Phi : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}.$$

Nous utiliserons deux propriétés de Φ. Tout d'abord, Φ est involutive, i.e. $\Phi^2 = id$. D'autre part, il est clair que le groupe $SL_2(\mathbf{Z})$ opère sur $\mathscr{C}$ par:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} (f_1, f_2) = (f_1^a f_2^c, f_1^b f_2^d).$$

Nous noterons cette opération par $A(f_1, f_2)$. On a alors: $A\Phi(f_1, f_2) = \Phi(A(f_1, f_2))$. En effet, soit $\mathcal{F}$ un feuilletage analytique de $T^2 \times I$ ayant (f_1, f_2) et $\Phi(F_1, F_2)$ comme holonomie en $T^2 \times 0$ et $T^2 \times 1$. Le difféomorphisme analytique de $T^2 \times I$ qui envoie (m, t) sur (Am, t) envoie $\mathcal{F}$ sur un feuilletage de $T^2 \times I$ ayant comme holonomie $A(f_1, f_2)$ et $A\Phi(f_1, f_2)$ en $T^2 \times 0$ et $T^2 \times 1$. Donc $\Phi(A(f_1, f_2)) = A\Phi(f_1, f_2)$.

Nous pouvons alors démontrer la proposition. Puisque le feuilletage obtenu après avoir coupe le long d'une feuille compacte doit se recoller analytiquement à l'aide de A, on doit avoir:

$$(f_1, f_2) = A\Phi(f_1, f_2)$$

d'où

$$\begin{aligned} (f_1, f_2) &= A\Phi(A\Phi(f_1, f_2)) \\ &= A^2\Phi^2(f_1, f_2) \\ &= A^2(f_1, f_2). \end{aligned}$$

Donc, si A^2 n'a pas la valeur propre 1 (ce qui est équivalent à $|tr\,A| \neq 2$), alors $(f_1, f_2) = (id, id)$; ce qui montre que le feuilletage $\mathcal{F}$ de $T^2 \times I$ est un produit. Toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ sont donc compactes. ■

Combinant cette proposition avec la proposition 1 de la partie II.A, on obtient le

THÉORÈME 1. *Soit T_A^3 un fibré en tores sur le cercle. Si $|tr\,A| < 2$, le seul feuilletage analytique de T_A^3 sans composante de Reeb est la fibration. Si $|tr\,A| > 2$, les seuls feuilletages analytiques de T_A^3 sans composantes de Reeb sont la fibration et les modèles (à conjugaison C^ω près).*

Remarques. (1) Nous ne savons pas s'il existe des feuilletages analytiques de T_A^3 avec des composantes de Reeb. (2) Le théorème précédent ne règle pas le cas où $|tr\, A| = 2$.

BIBLIOGRAPHIE

1. T. Banchof et M. I. Rosen: Periodic points of Anosov diffeomorphisms, *Proc. of Symp. in Pure Math.* **14** (1970), 17–21.
2. S. Bobo: *Thèse de 3ème cycle* (1978) Strasbourg.
3. J. P. Boulenguez: Actions du groupe affine (à paraître).
4. G. Châtelet: Sur les feuilletages induits par l'action de groupes de Lie nilpotents. *Ann. Inst. Fourier* **27**(2) (1977), 161–190.
5. B. Evans et L. Moser: Solvable fundamental groups of compact 3-manifolds, *Transactions of the A.M.S.* **168** (1972), 189–210.
6. E. Fédira Feuilletages du plan: *Feuilletages de Lie, Thèse* (1973). Université Louis Pasteur, Strasbourg.
7. S. Goodman: On the structure of foliateted 3-manifolds separated by a compact leaf, *Inventiones Math.* **39** (1977), 213–221.
8. A. Haefliger: Variétés feuilletées, *Ann. Ec. Norm. Sup. de Pise*, Série III, Vol. 16, (1962) 367–397.
9. G. Hector: Feuilletages en cylindres, IIIe ELAM, Rio de Janeiro, *Lecture Notes* No. 594 (1976), 252–271.
10. G. Hector: On manifolds admitting locally free nilpotent Lie group actions of condimension one (à paraître).
11. M. Herman: Thèse (1976) Orsay.
12. I. Kupka et N. V. Que: Formes différentielles fermées non singulières, *Lectures Notes* No. 484 (1974), 239–256.
13. R. Langevin et H. Rosenberg: On stability of compact leaves and fibrations, *Topology* (1977).
14. R. Moussu et R. Roussarie: Relations de conjugaison et de cobordismes entre certains feuilletages, *Publ. I.H.E.S.* No. 43 (1974), 143–168.
15. S. P. Novikov: Topology of foliations. *Trudy Mark. Math. obsch.* **14** (1965).
16. F. Pelletier: Thèse de 3ème cycle, Dijon (1973).
17. J. Plante: Foliations with measure preserving holonomy, *Ann. of Math.* **102** (1975), 327–361.
18. J. Plante: Foliations without Reeb components on closed 3-manifolds with solvable fondamental group (preprint).
19. J. Plante et W. Thurston: Polynomial growth in holonomy groups of foliations. *Commentarii Math. Helvetici* **39** (1976), 567–584.
20. G. Reeb: Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées. Actualités scientifiques et industrielles, Hermann (1952).
21. H. Rosenberg: Foliations by planes. *Topology* **7** (1968), 131–138.
22. H. Rosenberg, R. Roussarie et D. Weil: A classification of 3-manifolds of rank two. *Ann. Math.* 91–3 (1970), 449–469.
23. R. Roussarie: Plongements dans les variétés et classification des feuilletages sans holonomie. *Publ. I.H.E.S.* No. 43 (1974), 101–142.
24. S. Sternberg, Celestial mechanics, Benjamin (1969).
25. D. Sullivan: Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds, *Inventiones Math.* **36** (1976), 225–255.

Université des Sciences et Techniques de Lille
Villeneuve d'Ascq, France

APPENDICE 1

Quelques remarques sur les fibres en tores sur le cercle

On considère les fibrés T_A^3 définis comme quotient de $T^2 \times \mathbf{R}$ par la relation d'équivalence identifiant (x, y, t) à $(A(x, y), t+1)$ où $A \in GL_2(\mathbf{Z})$. Le groupe fondamental de T_A^3 est le groupe des transformations de $\mathbf{R}^3$ engendré par:

$$(x, y, t) \longrightarrow (x+1, y, t)$$
$$(x, y, t) \longrightarrow (x, y+1, t)$$
$$(x, y, t) \longrightarrow (A(x, y), t+1).$$

Ce groupe peut être défini comme l'ensemble des triplets $(m, n, p) \in \mathbf{Z}^3$ avec la loi:

$$(m, n, p)(m', n', p') = (m + m', A^m(n', p') + (n, p)).$$

La suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi_1(T^2) \longrightarrow \pi_1(T_A^3) \longrightarrow \pi_1(S^1) \longrightarrow 0$$

est ici

$$(n, p) \longrightarrow (0, n, p)$$
$$(m, n, p) \longrightarrow m.$$

On notera H l'image de $\pi_1(T^2)$ dans $\pi_1(T_A{}^3)$.

PROPOSITION 1.
(1) $\dim_{\mathbf{Q}} H_1(T_A{}^3, \mathbf{Q}) = 3 \quad T_A{}^3 = T^3$ (i.e. si $A = id$)
$= 2 \Leftrightarrow A$ conjugué à $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou à $\begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$= 1$ dans les autres cas.
(2) Si $H_1(T_A{}^3, \mathbf{Q})$ est de dimension 1, tout automorphisme de $\pi_1(T_A{}^3)$ préserve le sous-groupe H image de $\pi_1(T^2)$. Ceci implique que tout homéomorphisme de $T_A{}^3$ se relève dans $T^2 \times \mathbf{R}$.

Démonstration: En étudiant le groupe dérivé de $\pi_1(T_A{}^3)$, on trouve que:
(1) Si A n'a pas la valeur propre 1, $D\pi_1$ est d'indice fini dans H. Le groupe $\pi_1/D\pi_1$ est alors une extension de Z par un groupe fini.
(2) Si A a la valeur propre 1, A s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans une certaine base. Si α est non nul $D\pi_1$ est de rang 1, et si α est nul, $D\pi_1$ est de rang 0. Ceci donne la première partie de la proposition.

Pour la seconde partie, considérons un automorphisme de $\pi_1(T_A{}^3)$ avec A hyperbolique. Cet automorphisme doit préserver le premier groupe dérivé. Or, ce groupe dérivé est d'indice fini dans H. On voit alors facilement que l'automorphisme doit préserver H.

PROPOSITION 2. *Les seuls automorphismes de $\pi_1(T_A{}^3)$ (avec $|tr\,A| > 2$) sont les suivants*:

$$\begin{aligned} (m, n, p) \longrightarrow & (m, (I + A + \cdots + A^{m-1})(b) + B(n, p)) \quad \text{pour } m \geq 0 \\ & (m, (I + A^{-1} + \cdots + A^{-m+1})(b) + B(n, p) \quad \text{pour } m \leq 0 \end{aligned}$$

où $b \in Z$ et $B \in GL_2(Z)$ est tel que $AB = BA$.

$$\begin{aligned} (m, n, p) \longrightarrow & (-m, (I + A^{-1} + \cdots + A^{-m+1})(b) + B(n, p) \quad \text{pour } m \geq 0 \\ & (-m, (I + A + \cdots + A^{m-1})(b) + B(n, p)) \quad \text{pour } m \leq 0 \end{aligned}$$

où $b \in Z^2$ et $B \in GL_2(Z)$ est tel que $ABA = B$.

Démonstration. On sait que l'automorphisme préserve l'image de $\pi_1(T^2)$. Il existe donc $B \in GL_2(Z)$ telle que $(0, n, p)$ s'envoie sur $(0, B(n, p))$. Notons (a, b) l'image de $(1, 0, 0)$ (on a $a \in Z$ et $b \in Z^2$). L'image de (m, n, p) est alors:

$$(ma, (I + A^a + \cdots A^{(m-1)a})(b) + B(n, p)).$$

Puisque l'on s'intéresse aux automorphismes, on a $a = \pm 1$. En écrivant que l'application ainsi décrite doit être un morphisme de groupe, on obtient que si $a = 1$, les matrices A et B commutent, et que si $a = -1$, les matrices A et B vérifient $ABA = B$. Ce qui démontre la proposition.

Remarque. On peut vérifier que tous ces automorphismes proviennent d'un difféomorphisme de $T_A{}^3$. En appliquant un résultat de Kupka et Que[12], affirmant que deux difféormorphismes de $T_A{}^3$ induisant le même automorphisme au niveau du groupe fondamental sont isotopes, on en déduit une description explicite du groupe des difféomorphismes de $T_A{}^3$ à isotopie près.

En cherchant par la même méthode les isomorphismes entre $\pi_1(T_A{}^3)$ et $\pi_1(T_{A'}{}^3)$, on obtiendrait la:.

PROPOSITION 3. *Les fibrés $T_A{}^3$ et $T_{A'}{}^3$ (avec $|tr\,A| > 2$ et $|tr\,A'| > 2$) sont homéomorphes si et deulement si*: (1) *soit A et A' sont conjugués dans $GL_2(Z)$*; (2) *soit A^{-1} et A' sont conjugués dans $GL_2(Z)$*.

APPENDICE 2

La croissance du groupe fondamental d'un recollement de composantes cylindriques

Soit $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$ deux exemplaires de la composante cylindrique, a, b (respectivement x, y) des générateurs canoniques de $\pi_1(\mathcal{K}_1)$ (respectivement $\pi_1(\mathcal{K}_2)$) vérifiant $bab^{-1} = a^{-1}$ et $yxy^{-1} = x^{-1}$.

Soit f: $\partial\mathcal{K}_1 \to \partial\mathcal{K}_2$ un difféomorphisme linéaire et $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ la matrice de $f_*: \pi_1(\partial\mathcal{K}) \to \pi_1(\partial\mathcal{K}_2)$ relative aux bases $\{a, b^2\}$ et $\{x, y^2\}$.

On a une suite exacte provenant du revêtement des orientations de la bouteille de Klein:

$$1 \to Z \oplus Z \to \pi_1(\mathcal{K}_i) \to Z_2 \to 1 \quad i = 1, 2$$

où les générateurs canoniques de $Z \oplus Z$ s'identifient à $\{a, b^2\}$ pour $i = 1$ et $\{x, y^2\}$ pour $i = 2$.

On en déduit une suite exacte

$$1 \to \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \to \pi_1(\mathcal{K}_1 \underset{f}{\cup} \mathcal{K}_2) \to \mathbf{Z}_2 * \mathbf{Z}_2 \to 1$$

où $\pi_1(\mathcal{K}_1 \underset{f}{\cup} \mathcal{K}_2)$ est engendré par a, b, x, y et les relations $bab^{-1} = a^{-1}$, $yxy^{-1} = x^{-1}$, $a = x^p y^{2q}$, $b^2 = x^r y^{2s}$, les générateurs canoniques de $Z \oplus Z$ s'identifiant à a et b^2.

Si on regarde le sous-groupe infini cyclique distingué d'indice 2 de $Z_2 * Z_2$ engendré par l'image de l'élément by $\epsilon\pi_1(\mathcal{K}_1 \underset{f}{\cup} \mathcal{K}_2)$ on obtient la suite exacte

$$1 \to \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \to G \to \mathbf{Z} \to 1$$

où G est un sous-groupe d'indice 2 de $\pi_1(\mathcal{K}_1 \underset{f}{\cup} \mathcal{K}_2)$ donc ayant la méme croissance que lui.

Un calcul direct montre que l'action de Z sur $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ est donnée par la matrice $\pm \begin{pmatrix} ps+qr & 2rs \\ 2pq & ps+qr \end{pmatrix}$.

Considérons G comme le groupe fondamental d'un fibré en tores sur S^1 dont le difféomorphisme caractéristique est donné par la matrice ci-dessus. La proposition suivante est alors une conséquence d'un résultat de [16]:

Proposition 1. La croissance de $\pi_1(\mathcal{K}_1 \underset{f}{\cup} \mathcal{K}_2)$ est polynomiale si $|ps+qr| \leq 1$ et exponentielle si $|ps+qr| > 1$.

(Remarquons que la condition $|ps+qr| \leq 1$ est équivalente à $pqrs \leq 0$).